

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Бабицин Дмитрий Игоревич

Магистерская диссертация

**Математическое моделирование процессов
взаимодействия несжимаемой жидкости на
деформируемом основании**

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа Математическое моделирование

в задачах естествознания

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Перегудин С.И.

Санкт-Петербург

2019

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ	4
ЦЕЛЬ РАБОТЫ	5
ГЛАВА 1. ПРОЦЕССЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ	6
1.1. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ	6
1.2. СТРАТИФИКАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ОКЕАНЕ	12
1.3. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОКЕАНЕ	14
1.3.1. Общие понятия	15
1.3.2. Типы морских волн	16
1.3.3. Математическое обоснование движения жидкостей	17
1.4. МЕХАНИЗМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКОВ С ПОВЕРХНОСТЬЮ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ	21
1.5. ОБЩИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ	23
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	26
2.1 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	26
2.1.1. Постановка задачи	26
2.1.2. Построение модели	27
ГЛАВА 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ	31
3.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ОТ ВОЛНОВОГО ЧИСЛА	33
3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ОТ СКОРОСТИ ПОТОКА	38
3.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ c ОТ ПАРАМЕТРА СЫПУЧЕСТИ κ	40
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	42
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	43
ПРИЛОЖЕНИЯ	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.

Введение

Планета Земля является уникальной. Её облик, благодаря интенсивно протекающим геологическим процессам постоянно меняется: в следствии тектонических движений происходит орогенез, с невероятной скоростью происходит выветривание горных пород, из-за наличия атмосферы и гидросферы осуществляется активный массоперенос выветренного вещества. В следствии наличия на нашей планете уникальных условий стало возможно возникновение жизни, что в свою очередь привело к появлению человека, как вида, и человечества в целом.

Около 71% поверхности планеты занимает мировой океан. На континентах и островах вода представлена в виде рек, озёр, подземных вод, ледников. В атмосфере вода находится в виде капель малого размера, в облаках, тумане, а также в виде пара. Вода обладает большой теплоёмкостью (удельная теплоёмкость при нормальных условиях равна 4183 Дж/(кг · град) [1]. Благодаря этому климат на нашей планете мягкий, а суточные колебания температур, обычно, не превышают 50 °С.

Гидросфера постоянно взаимодействует с другими оболочками Земли, глобально и локально изменяя климат и рельеф местности. Из-за постоянного волнового воздействия происходит эрозия берегового фронта суши, с последующей дифференциацией, перераспределением и переносом вещества. Реки непрерывно меняют свои русла. Ежегодно речной сток перемещает с суши в моря миллиарды тон пород. Морские и речные волны и течения оказывают силовое воздействие на прибрежные и морские гидротехнические сооружения, а в случае катаклизмов и на иные инженерные сооружения. Волны также влияют на судоходство и на условия базирования водного транспорта [2].

Мировой океан представляет собой сложную динамическую систему. Океан вращается вместе с Землёй и обладает стратификацией по глубине. Это приводит к технической сложности проведения экспериментальных исследований и натурных наблюдений.

Вопросы распространения волн и их взаимодействия с берегами, гидротехническими сооружениями исследуются как теоретическими методами, так и экспериментальными средствами. Экспериментальные исследования ведутся в лабораторных и натуральных условиях. Продолжительность и дороговизна экспериментального моделирования, условность переноса лабораторных результатов на натурные условия, а иногда и непреодолимые сложности в постановке опытов позволяет особо выделить математические методы в гидродинамике. С их помощью можно раскрыть закономерности изучаемого явления, произвести встроенный анализ для прогнозирования, определить теоретическим путем параметры процесса распространения волн и их взаимодействия с преградами [3].

Природа волн очень многообразна. По форме можно различить периодические волны, уединенные и стоячие волны, боры, гидравлические прыжки и волны понижения уровня, внутренние волны в стратифицированной среде, приливные, корабельные волны и многие другие. Существуют волны малой и большой амплитуды, отмечают заострение и обрушивание вершин ветровых волн, перемешивание скользящих слоёв разной плотности, деформация волн, вызванная неровностью дна, наличие берегов или плавающих тел, частично или полностью погруженных в жидкость. Для инженерной практики важно знать параметры, отвечающие за механизмы возникновения и роста волн, законы их распространения, взаимодействия и действия на твёрдые тела, уметь использовать естественные и создавать искусственные сооружения, ограждающие акватории от морского волнения. И всё это – отнюдь не полный список задач, составляющих предмет теории волн.

Актуальность работы

Исходя из вышесказанного можно сделать выводы об актуальности изучения динамики морей и океанов и возникающих в них процессов взаимодействия посредством теоретических исследований.

Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели взаимодействия несжимаемой жидкости и деформируемого основания для исследования возникающих при этом взаимодействиях процессов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Определить возможные механизмы взаимодействия несжимаемой жидкости различного характера с неконсолидированным основанием;
- Произвести построение математической модели взаимодействия волн с деформируемым основанием и исследовать аналитически полученные модели с проведением вычислительного эксперимента;
- Произвести исследование процессов, возникающих в результате воздействия несжимаемой жидкости на деформируемое основание.

Глава 1. Процессы взаимодействия

1.1. Геологические процессы

В геологическом плане перенос обломочного неконсолидированного материала в водоёмах, в частности в морях и океанах, имеет огромное значение. Именно благодаря этому процессу происходит образование морских отложений.

При этом характер переноса обломочного материала в морях, так же, как и в озёрах, существенно отличается от переноса его в реках. В речных потоках перемещение частиц определяется фактором поступательного движения воды, а в прибрежных условиях водоёмов – колебательных движений жидкости [4].

Движение поверхностных частиц воды передается и в нижележащие слои, но размеры орбит перемещения частиц при этом быстро уменьшается, и на глубине, равной длине волны, их диаметр составляет всего 0,002 диаметра орбит на поверхности моря [5].

Крупная океаническая волна, имеющая высоту 8 метров в высоту и 150 метров в длину, на глубине в 150 метров вызовет движение частиц с амплитудой всего в 16 миллиметров. В открытых частях океана ветровые волны и зыбь достигают наибольших размеров.

При перемещении волн в области малых глубин (меньше половины длины волны) начинается их преобразование, которое выражается в изменении профиля волны. Волна становится несимметричной: передний склон гребня становится более крутым, а задний более пологим. При изменении профиля волны происходит изменения формы орбит, описываемых частицами воды. По мере увеличения глубины они становятся всё более сплюснутыми и у дна превращаются в прямолинейные поступательно-возвратные движения.

При наклонном дне сила тяжести сокращает путь частицы вверх по склону дна и увеличивает путь вниз по нему. То есть, если кривая изменения

скорости движения частиц воды у дна симметрична, то частица в результате каждого полного колебания будет перемещаться вниз по склону.

На малых глубинах кривая изменения скоростей несимметрична. В таких ситуациях появляется составляющая течения, которая направлена к берегу. Эта составляющая в состоянии не только компенсировать, но и преуменьшить влияние веса частицы, что, в свою очередь, вызывает движение частиц в сторону берега.

Зенкович указывает, что гальки на дне моря обычно находятся в движении на глубине до 12-15 м, а песчаные частицы – до 23-27 м [6].

В результате действия волн значительная часть осадков постоянно взмучивается. При таких условиях становится невозможным процесс образования правильной тонкой горизонтальной слоистости.

Ученые считают, что взмучивание осадков в глобальных планетарных масштабах происходит в морях и озерах на глубинах до 30-50 метров. Это ведет к улучшению сортировки донных отложений, благодаря удалению из них мелких частиц.

Морское дно в области небольших глубин находится в постоянном преобразовании. Здесь непрерывно происходит процесс выветривания, перераспределения, дифференциации и переноса вещества. Чем больше глубина – тем менее интенсивно протекают эти процессы.

Но, помимо всего прочего, в процессе перемещения морских отложений играет роль и уклон морского дна. При значительном уклоне дна основная масса наносов перемещается к основанию подводного склона. При незначительном уклоне наносы, в основном, перемещаются к берегу, образуя пологие пляжи с береговыми валами. Лишь во время штормов характер перемещения донных отложений может поменяться.

В случае весьма отмелых берегов, сложенных рыхлыми наносами, волны теряют значительную часть своей энергии вдали от береговой линии, что ведет к образованию песчаных валов – баров, окаймляющих, часто,

отмелые берега и отделяющие лагуны от моря. Ширина лагуны может уменьшаться за счет перемещения бара в сторону берега.

В прибрежной части отмелого дна обычно наблюдается два или три вала. Иногда их число возрастает до шести. В южной части Балтийского моря валы распространены до глубины 9 метров и занимают зону более 700 метров шириной. Передний склон вала круче заднего, но в некоторых случаях это выражено не резко. Высота валов близка к 1 метру, расстояние между ними увеличивается при удалении от береговой линии. [5]

Положение прибрежных валов с течением времени претерпевает изменения (Рис. 1). Смещение каждого вала к берегу, осложняющееся обычно временным обратным движением, вызывает образование косой слоистости. Общий её тип, казалось бы, должен напоминать соответствующие формы косой слоистости, образующиеся в реках при движении песчаных гряд; однако значительно меньшая подвижность прибрежных валов, наличие периодов возвратного движения, общая ограниченность территории их образования и амплитуды возможного смещения отличают косую слоистость прибрежных и речных отложений.

Изменение рельефа морского дна выражается и в виде появления разнообразных знаков ряби, встречающихся в современных морях и океанах на глубинах, значительно превышающих значения 200 метров. На малых глубинах знаки ряби могут быть сложены не только песками, но и гравием и галькой.

Знаки ряби могут образовывать различные формы. Симметричные знаки ряби вызваны колебательными движениями воды, они не сопровождаются значительным перемещением частиц осадочного материала. Несимметричные валики, наоборот, возникают в процессе поступательного перемещения песчаных зерен. Валики ассиметричной ряби, обычно, направлены крутым склоном к берегу. Различные системы знаков могут накладываться друг на друга, что приводит к возникновению сложных типов перекрещивающихся знаков ряби.

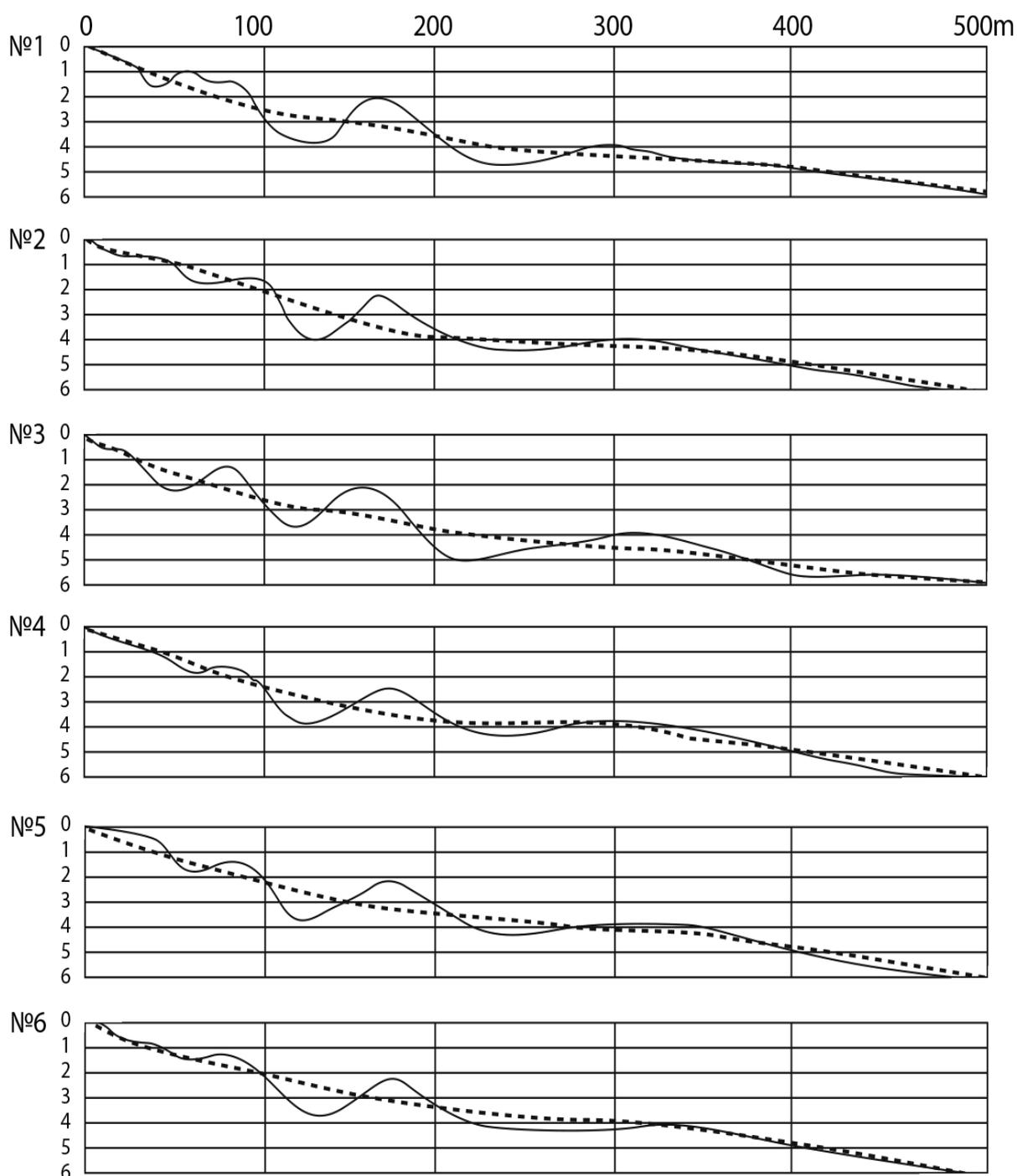


Рис. 1. Изменение рельефа дна моря в одном из участков Черноморского побережья с 17 по 19 августа 1949 г. [5]

На пологих берегах образуется система из грядобразных форм рельефа, элементы которой располагаются как ниже, так и выше уровня моря. Можно наблюдать крупные береговые бары, которые способны простираться на сотни километров. Крупные бары перемещаются с достаточно низкой скоростью, в связи с этим такие формы рельефа морского дна можно считать «долго живущими». Однако кроме таких длительно существующих форм

встречаются самые разнообразные по размерам и быстро изменяющиеся надводные и подводные песчаные гряды. Изменения их формы вызваны перемещением песчаного материала в сторону береговой линии.

Абразия морского дна и перемещение наносов при постоянных внешних условиях приводит к образованию профиля внешнего равновесия на морском дне. Конфигурация такого равновесия зависит от соотношения между движением волн и спецификой геологического строения береговой зоны (Рис. 2).

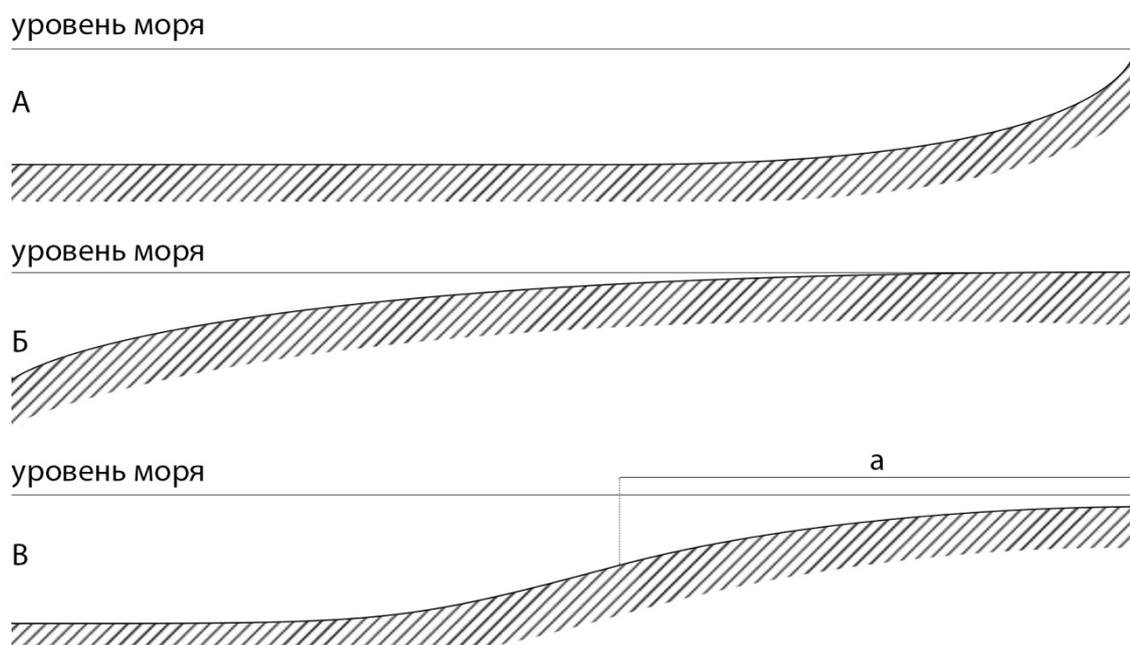


Рис. 2. Различные типы предельных профилей: А - Профиль участка дна, сложенного обломочными частицами, перемещаемыми по дну; Б - абразионный профиль в коренной породе; В - профиль участка дна, сложенного легко взмучиваемыми частицами. (а - зона взмучивания). [5]

В водной среде непрерывно происходит осаждение обломочных частиц, некоторые вещества выпадают в осадок.

Если мы исключим волновое влияние и влияние течения, т.е. будем считать, что вода в водоёме является стоячей – то осаждение обломочных частиц в таких условиях подчиняется правилу Стокса, которое можно выразить следующей формулой:

$$v = \frac{2r^2(d_1 - d)g}{9\mu}$$

Где: v – скорость осаждения частицы;

d_1 – её удельный вес;

d – удельный вес среды, в которой происходит осаждение;

r – радиус осаждающейся частицы;

g – ускорение свободного падения;

μ – вязкость среды осаждения.

Важную роль в скорости осаждения частиц играет размер. По формуле Стокса следует, что скорость осаждения пропорциональна квадрату радиуса осаждающихся частиц. Но это справедливо только для мелкодисперсных частиц. Крупнодисперсный обломочный материал (крупнозернистые пески, галька) осаждается со скоростью, пропорциональной корню квадратному из радиуса частиц. Если графически выразить зависимость скорости осаждения частиц от размера, то график будет представлен ломаной линией (Рис. 3).

Для определения скорости осаждения частиц крупного размера в литературе предложена формула следующего вида:

$$v = \sqrt{\frac{4(d_1 - d)gr}{3d}}$$

Обозначения в этой формуле те же, что и в формуле Стокса.

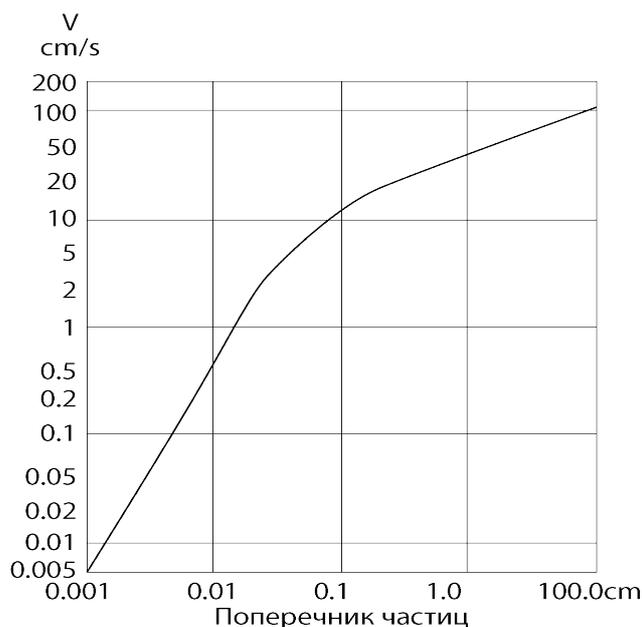


Рис. 3. Кривая зависимости скорости осаждения сферических частиц от их размера [5]

1.2. Стратификация жидкости в океане

Обычно океан обладает устойчивой плотностной стратификацией. Чем больше вертикальный градиент плотности, тем труднее произвести процесс перемешивания жидкости, так как для этого потребуется большое количество энергии. [4]

Однако, под воздействием тех или иных факторов, происходит нарушение устойчивости плотностной стратификации, и менее плотные массы жидкости оказываются под более плотными. Возникает, своего рода, плотностная аномалия, которая не сможет просуществовать продолжительный промежуток времени, так как произойдет опускание более плотной воды и подъем менее плотной в соответствии с законом Архимеда. Характер циркуляции такого рода, и связанный с ней перенос различных субстанций также зависят от вертикального градиента плотности. В связи с этим в океанологической практике почти всегда оценивается плотностная устойчивость океанов и морей в том или ином пункте.

Критерий устойчивости определяется по соотношению плотностей перемещаемого по вертикали объема жидкости (ρ_v) и окружающей среды (ρ). Предполагая, что плотность перемещаемого объема жидкости меняется адиабатически:

$$\rho_v(z + \Delta z) = \rho_v(z) + \left(\frac{d\rho_v}{dz}\right) \Delta z$$

а плотность окружающей среды может меняться иначе:

$$\rho(z + \Delta z) = \rho(z) + \left(\frac{d\rho}{dz}\right) \Delta z$$

Если на исходном уровне z плотности выделенного объема и окружающей среды одинаковы ($\rho_v = \rho$), то за счет разности изменения по вертикали этих плотностей возникает архимедова сила, вызывающая ускорение:

$$G = \frac{g}{\rho} \left[\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho_v}{dz}\right) \right] \Delta z$$

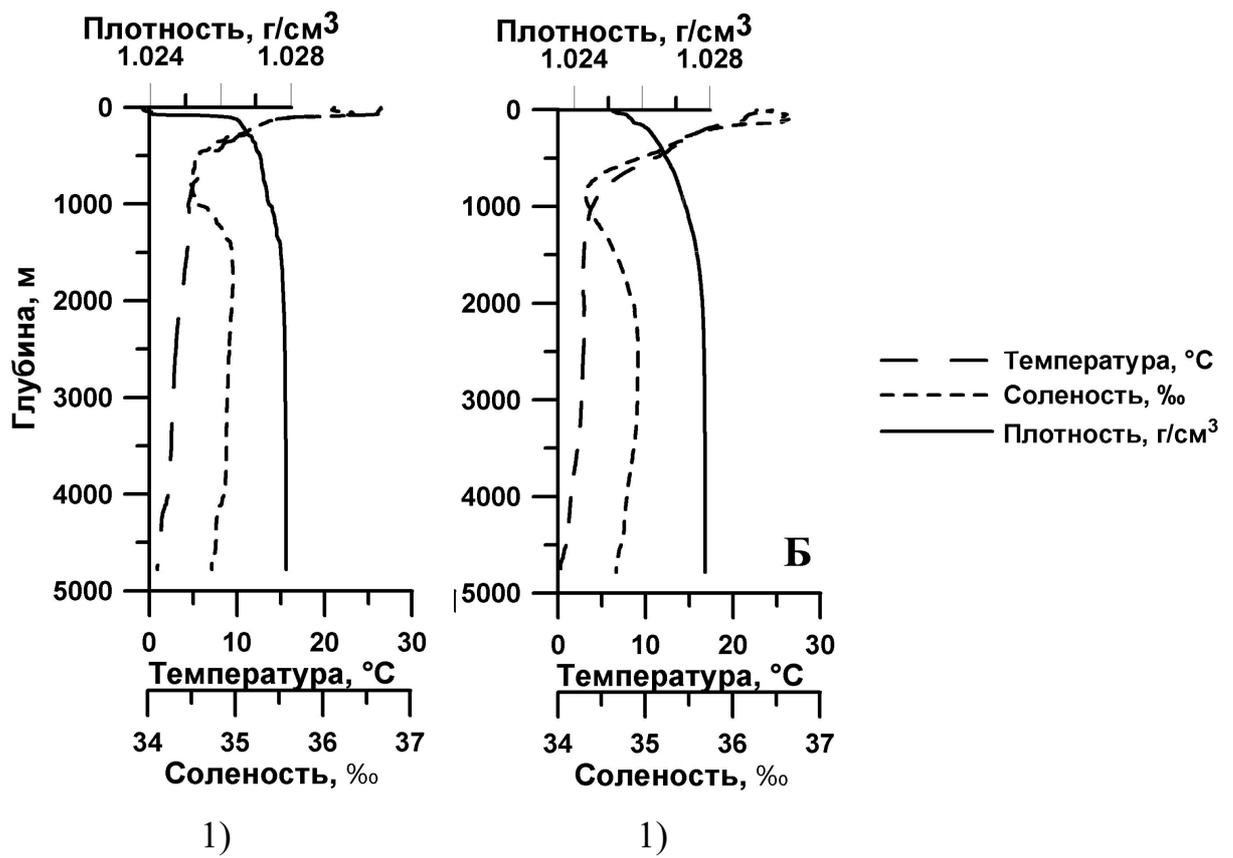


Рис. 4. Распределение температуры, солёности и плотности для разлома Романи (1) и канала Вима (2). [7]

1.3. Движение жидкости в океане

Для того, чтобы понять, какие процессы возникают при взаимодействии жидкости и деформируемого основания – необходимо понимать, какие процессы, протекающие в самой жидкости, могут эти взаимодействия вызвать.

Жидкость в природных водоемах находится в постоянном движении. Это движение вызвано тем, что Земля вращается вокруг своей оси, порождая силу Кориолиса, заставляя двигаться воздушные массы, которые, в свою очередь, возбуждают волновые движения на поверхности воды. Вокруг Земли вращается Луна, которая, находясь в приливном гравитационном захвате, притягивает как воду, которая находится в свободном движении, что способствует образованию циклических приливных движений: приливов и отливов, так и относительно неподвижную земную кору, из-за чего возникают землетрясения очень низкой амплитуды, но способные привести жидкости в движение [4].

Ветры и неоднородности воздушной оболочки земли – атмосферы наиболее интенсивно возбуждают квазиинерционные волны и отчетливо выделяются в пульсационном спектре океана по интенсивности. Баротропные приливные течения, создаваемые приливообразующими силами, отклоняются по вертикали неровностями дна и создают внутренние волны со собственными им частотами. Внутренние приливы также значительно выделяются по интенсивности среди соседних по частоте колебаний.

Волны из этих и других источников активно взаимодействуют между собой, а также с течениями, неровностями дна и образуют широкий сплошной спадающий по частоте спектр волн, сравнительно неизменный в пространстве и во времени.

Орбитальная скорость наиболее высоких волн, в первую очередь приливных, может приближаться к фазовой. Такие волны претерпевают искажение формы вплоть до обрушения или распада на более короткие волны. В других случаях форма может стабилизироваться вследствие дисперсии волн,

что приводит к появлению уединенных образований, похожих на солитоны [3].

1.3.1. Общие понятия

Волны в водной среде обладают следующими параметрами:

высота волны (h) – это величина, равная расстоянию по вертикали между гребнем и подошвой или удвоенной амплитуде волны;

период волны (τ) – это величина, равная промежутку времени, за которое частицы воды описывают свои орбиты, или времени между прохождением через одну и ту же точку пространства двух идущих друг за другом гребней или подошв волны;

длина волны (λ) – эта величина равна расстоянию между гребнями или подошвами двух смежных волн, измеренному в направлении, перпендикулярном протяжению гребня;

скорость распространения волны (c), равная скорости продвижения гребня одной и той же волны;

средняя крутизна волны (a) – величина, равная отношению высоты волны к её полудлине;

максимальная крутизна волны (α) – величина, измеряемая максимальным углом между поверхностью волны и горизонтальной плоскостью;

фронт волны – линия гребня волны;

волновой луч – линия, перпендикулярная фронту волны.

Скорость распространения, период и длина волны связаны между собой соотношением: $\lambda = c\tau$

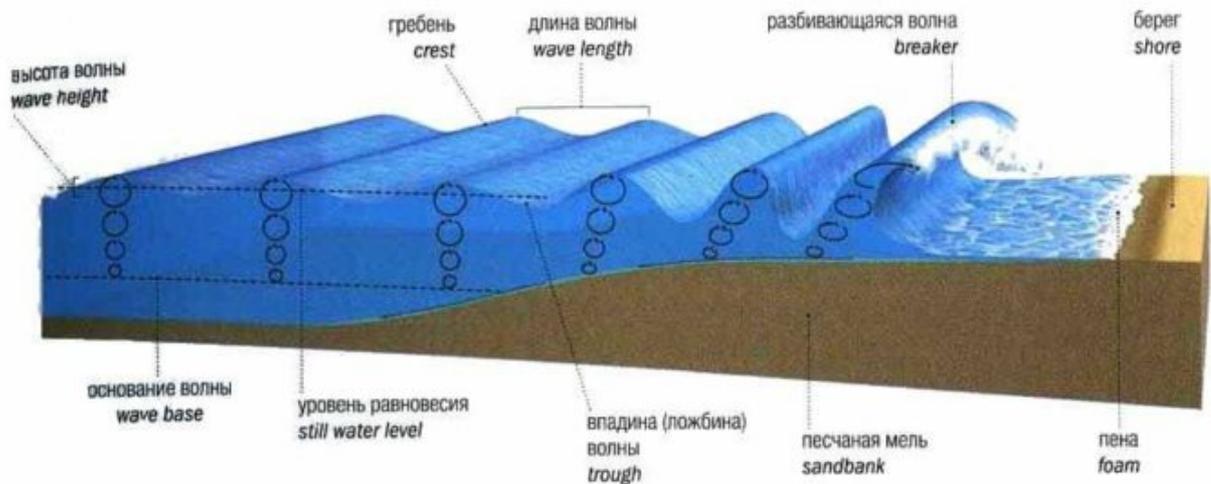


Рис. 5. Строение ветровой волны. [8]

Высота волны не зависит от других составляющих её элементов, однако отношение высоты волны к её длине, а следовательно и крутизна волны, не может превосходить определенных пределов [9].

1.3.2. Типы морских волн

Волны, образующиеся в водоёмах, в частности в морях и океанах, бывают различны по многим признакам. Характер и тип волны зависит от того, какими силами вызвано её образование.

По происхождению различают волны: фрикционные, или волны трения, создаваемые градиентами скорости; приливные; сейсмические, создаваемые землетрясениями; барические, создаваемые изменениями давления атмосферы и т.д.

К фрикционным волнам относятся ветровые волны, обуславливаемые различными скоростями воздуха (ветра) и поверхностного течения, создаваемого тем же ветром. Так же к фрикционным волнам относятся внутренние волны, возникающие из-за различия скоростей на границе раздела водных масс. Первые волны по своему расположению являются поверхностными, вторые – глубинными. Глубинные волны (на поверхности раздела) могут быть созданы поверхностными волнами и наоборот.

После того, как волна возникла и действие силы её создавшей прекратится, энергия волны не рассеивается в этот же момент – напротив, эта энергия гасится в течении, иногда, очень длительных промежутков времени. Волны, продолжающие своё существование за счет переданной им энергии (инерциальные волны), называются свободными, а волны, поддерживаемые притоком новой энергии – вынужденными.

Форма некоторые другие характеристики волн определяются соотношением между длиной волны и глубиной моря в данном регионе. Если длина волны незначительна по сравнению с глубиной моря, то такие волны называются короткими. Если же длина волны значительно превосходит глубину моря, то такие волны называют длинными.

Короткие волны являются в то же время и короткопериодными. Величина их периода измеряется секундами. К таким волнам относятся ветровые волны. Длинные волны, создающиеся из коротких, например при набегании ветровых волн на мелководье, так же являются короткопериодными. С другой стороны, приливные волны, создающиеся сразу, как длинные, являются волнами длиннопериодными. Их период измеряется в частях суток и более [9].

1.3.3. Математическое обоснование движения жидкостей

Рассмотрим основные уравнения движения жидкости, представленные Эйлером и Лагранжем.

Пусть $v = v(x, t)$ означает вектор скорости жидкости в точке x в момент времени t . Пусть $\rho(x, t)$ означает плотность жидкости, $g(x, t)$ – внешнее гравитационное поле и $p(x, t)$ – давление жидкости [10].

Закон сохранения массы эквивалентен следующему уравнению в частных производных:

$$\operatorname{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ (уравнение неразрывности)}$$

Если обозначить «субстанциональную» производную по времени для наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью, через

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum \frac{v \partial}{\partial x}$$

то можно переписать верхнее уравнение в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ (закон сохранения массы)}$$

Если рассматриваемая жидкость является несжимаемой, то её плотность в частице при движении останется неизменной. Выразим это утверждение в форме Эйлера:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

Исходя из этого утверждения получаем уравнение неразрывности, которое мы можем записать в следующей форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Для однородной жидкости $\rho = \rho_0 = \text{const}$. В таком случае уравнение (1.2) удовлетворяется тождественно. Если жидкость неоднородна, то уравнение (1.2) следует рассматривать совместно с уравнением (1.1).

В случае идеальной нетеплопроводной жидкости система уравнений гидродинамики примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \\ f(\rho, p, t) &= 0. \end{aligned}$$

где ρ плотность жидкости, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ скорость жидкости, $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ массовая сила, p давление.

Последнее уравнение данной системы называют уравнением состояния. Указанная система уравнений с частными производными является замкнутой относительно неизвестных функций – трех компонент скорости, плотности, давления и температуры. Этой системе уравнений удовлетворяют все течения

идеальной жидкости, как установившиеся, так и не установившиеся, а также обтекание жидкостью различных тел при разнообразных условиях.

Решения дифференциальных уравнений гидродинамики будут содержать произвольные постоянные, которые могут быть определены из специальных условий, зависящих от конкретной постановки задачи. Эти условия традиционно подразделяются на начальные и граничные.

Начальные условия задают состояние жидкости во всем объеме, ею занимаемом, в некоторый фиксированный момент времени $t = t_0$. Это означает, что при $t = t_0$ должно быть задано поле скоростей и ордината свободной поверхности.

Граничные (краевые) условия определяются физическими явлениями, происходящими на границе жидкости. Они должны выполняться на границах жидкости в любой момент времени.

Если жидкость имеет твердую границу, то граничное условие есть условие непротекания жидкости через эту поверхность, т.е. нормальная к поверхности компонента скорости жидкости v_n равна нормальной составляющей скорости твердой поверхности N : $v_n = N$. Для неподвижной поверхности $v_n = 0$. Граничное условие для скорости на свободной поверхности и поверхности раздела заключается в том, что нормальная компонента скорости жидкости равна нормальной компоненте скорости поверхности. Это граничное условие называется кинематическим. На свободной поверхности должно выполняться еще и динамическое условие, которое состоит в том, что давление на свободной поверхности является известной функцией. Динамическое условие на поверхности раздела жидкостей заключается в непрерывности давления при переходе через поверхность раздела.

Если рассматривается движение жидкости в неограниченной области, то на бесконечности должны быть поставлены условия, необходимые для получения единственного решения (ограниченность, заданное давление или скорость и т.д.). Кроме указанных условий для учета различных внешних

воздействий на жидкость (удаленные тела, дополнительные потоки в жидкости) могут вводиться условия в виде особых точек: источников, диполей и т.д.

1.4. Механизмы взаимодействия потоков с поверхностью сыпучей среды

Основной характеристикой взаимодействия потоков жидкости (газа) с поверхностью сыпучей среды является скорость относительного движения. Так как деформируемая среда практически всегда остается неподвижной – этой величиной оказывается скорость абсолютного движения потоков v .

Вместе с другими параметрами – глубиной H , и периодом τ (для волнового потока), а также характеристиками частиц и жидкости $\rho, \rho_T, g, d, \lambda$ величина скорости v определяет кинематическую структуру придонного слоя, интервал области существования деформаций и поток твёрдых частиц. Определенными соотношениями перечисленных выше величин (или некоторыми из них) определяются и второстепенные детали деформации, например, вид профиля или его симметрия. [11]

Для возможности сопоставления форм, описания их закономерностей и других целей необходимо учитывать величины характеристических скоростей $v_{кр}^i$, при которых сменяются механизмы процессов взаимодействия.

Первой характеристической величиной является скорость начала взаимодействия потока с поверхностью сыпучей среды – начальная сдвигающая скорость $v'_{кр}$. Вторая – критическая скорость отрыва частиц от поверхности дна $v''_{кр}$. Третья – критическая скорость стирания деформаций $v'''_{кр}$.

У волнового потока существуют интервалы скоростей взаимодействия с деформируемой поверхностью. Эти интервалы зависят от состояния поверхности и предыстории процесса взаимодействия. Когда волновой поток взаимодействует с ещё недеформируемой поверхностью – величина его $v'_{кр}$ совпадает с $v'_{кр}$ для поступательного потока. При взаимодействии с уже деформируемой поверхностью величина $v'_{кр}$ снижается почти в 2 раза [11]. Поэтому в волновом потоке взаимодействие носит гистерезисный характер. Появление гистерезисной величины критической скорости $v'_{кр.г}$ связано с весьма сильным взаимным возмущением потока и поверхности дна. В

результате этого скорости над деформируемой поверхностью возрастают в несколько раз [12].

Также происходит снижение и $v''_{кр}$. Гистерезисная величина $v''_{кр.г}$ практически совпадает с $v'_{кр.г}$. Значения $v'''_{кр}$ в волновом потоке также на порядок ниже, чем в поступательном.

Гистерезис первой критической скорости приводит к появлению в волновом потоке приводит к появлению целого интервала скоростей «слабого взаимодействия». В целом этот интервал характеризуется тем, что совершенно ровная поверхность сыпучей среды остаётся недеформированной, сколь долго бы на неё не взаимодействовал волновой поток. Деформации появляются лишь в случае, если на поверхности среды уже имелись локальные неоднородности больше некоторой критической высоты $h_{кр}$ [12].

В поступательном потоке интервал скоростей $v > v'_{кр}$ является единственным, в котором протекает активное взаимодействие с поверхностью сыпучей среды. В волновом потоке этот интервал может быть назван интервалом сильного взаимодействия. В целом его характеризует независимость процесса взаимодействия от состояния поверхности. Если в интервале слабого взаимодействия образование периодических структур приурочено только к отдельным участкам поверхности, имеющим локальные неоднородности, то в интервале сильного взаимодействия деформации создаются на всей поверхности одновременно.

Кроме рассмотренных выше величин критических скоростей $v^i_{кр}$ в реальных потоках имеется ещё одна величина критической скорости $v_{кр.т}$ при переходе через которую изменяется характер движения самого потока: упорядоченный режим движения сменяется турбулентным режимом [12].

1.5. Общие кинематические соотношения

Скорость движения волн v_i может быть определена только через величину потока частиц Q (твердый расход).

Чтобы установить взаимосвязь скорости волны от потока частиц необходимо построить выражения, характеризующие эту зависимость. v_i и Q определяются группой сил, действующей на поверхности раздела рассматриваемых сред F_i, F_g, F_v . Для описания искомых зависимостей используются величины ρ_T, ρ, g, d, v, u и H . Кроме того, вводится ещё одна характеристика с размерностью длины $\Delta = \frac{1}{k}$. При помощи этой величины определяется высота распределения частиц по сечению потока жидкости (или газа) [11].

Для описания потока твердых частиц введем две величины: $Q_{(z)}$ с размерностями $[\text{г}/\text{см}^3 \cdot \text{сек}]$, или $[\text{см}^3/\text{см}^2 \cdot \text{сек}]$, или же $[1/\text{см}^2 \cdot \text{сек}]$, Q_f с размерностями $[\text{г}/\text{см} \cdot \text{сек}]$, или $[\text{см}^3/\text{см} \cdot \text{сек}]$, или же $[1/\text{см} \cdot \text{сек}]$. Первая из них – $Q_{(z)}$ определяется переносом частиц на высоте z от поверхности дна, через квадратное единичное сечение в единицу времени. В зависимости от выбора рассмотренных выше размерностей она будет измеряться соответственно весовыми или объемными единицами или же просто количеством частиц. Вторая величина – Q_f является интегральной характеристикой. Она также может измеряться через весовые или объемные единицы, или же числом частиц, но отнесенных уже ко всему вертикальному сечению потока единичной ширины. Независимо от выбора единиц измерения Q_f и $Q_{(z)}$, по определению между ними имеется следующая связь [11]:

$$Q_f = \int_0^H Q(z) dz = \int_0^{\infty} Q(z) dz .$$

В крайнем интеграле верхний предел берем за бесконечность если имеем поток неограниченной глубины. Вводится еще одна функция – функция плотности распределения частиц по вертикали $S(z)$, которая также может

быть определена несколькими единицами измерений – $[г/см^3]$, или безразмерной $[см^3/см^3]$, или же $[1/см^3]$. Если все эти характеристики брать в соответствующих единицах, то, согласно определению, получаем

$$Q(z) = S(z)v(z), \quad Q_f = \int_0^H S(z)v(z)dz,$$

Где $v(z)$ – горизонтальные составляющие скорости движения частиц на высоте z .

Рассмотренные соотношения справедливы как для ровной, так и для грядовой фаз поверхности дна. Если рассматривать поток твердых частиц над грядовой поверхностью $\tilde{Q}(z)$ или \tilde{Q}_f и выбрать эти величины в объемных единицах, то их можно связать со скоростью перемещения песчаных волн v_i .

Пусть за время dt плоская, однородная вдоль фронта волна переместиться на величину $d\lambda$ (Рис. 6). Тогда запишем

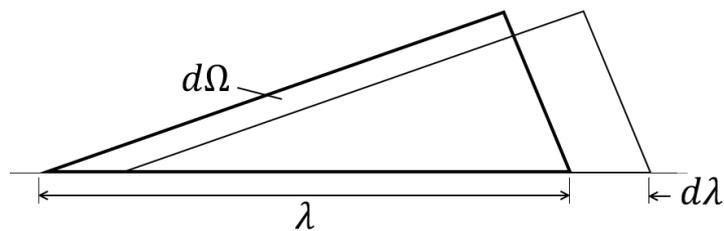


Рис. 6. Схема движения песчаных волн. [11]

$$v_i = \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\lambda_i}{\tau_i}. \quad (1.3)$$

Это выражение записано для случая равномерного движения волн, когда можно ввести период τ_i , как время, за которое волна перемещается на расстояние λ_i , по аналогии с волнами на поверхности жидкости. Само же перемещение волн происходит за счет переборки частиц с “наветренного” склона её поверхности на “подветренный” склон (Рис. 7).

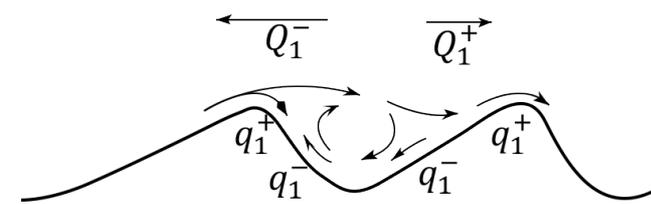


Рис. 7. Вычисление потока частиц [11]

Так как для плоской волны объем единицы фронта определяется площадью вертикального сечения

$$\Omega = a_i h_i \lambda_i \cdot 1 [\text{см}] = a_i h_i \lambda_i, \quad (1.4)$$

так что $d\Omega = a_i h_i d\lambda_i$, где $a_i \approx 0,6$ – коэффициент формы волны [11].

Подстановка (1.4) в (1.3) даёт

$$v_i = \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{d\Omega}{dt a_i h_i} = \frac{\Omega}{a_i h_i \tau_i}.$$

Но, по определению для единичного сечения

$$\tilde{Q}_f^* = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Omega}{\tau_i},$$

Поэтому в итоге получаем

$$v_i = \frac{\tilde{Q}_f^*}{a_i h_i} = \kappa_i \frac{\tilde{Q}_f}{a_i h_i} = \kappa_i \frac{\int_0^H \tilde{Q}(z) dz}{a_i h_i},$$

Где величина $\tilde{Q}_f^* = \kappa_i \tilde{Q}_f$ определяет ту часть потока частиц, которая находится в непосредственном обмене с поверхностью дна и осуществляет упорядоченной перенос частиц с одного склона волн на другой.

Глава 2. Математическое моделирование

2.1 Построение математической модели

2.1.1. Постановка задачи

Имеем трехслойную среду: первые два слоя – это идеальная, однородная несжимаемая жидкость, третий слой – это грунт. Жидкость стратифицирована по плотности, а именно – нижний слой жидкости обладает плотностью ρ_1 , а верхний слой плотностью ρ_2 , причем $\rho_1 > \rho_2$. Имеем три поверхности раздела: воздух – верхний слой жидкости (ρ_2), верхний слой жидкости – нижний слой (ρ_1), и нижний слой жидкости (ρ_1) – деформируемо основание (дно).

На границах раздела воздух – вода и вода – вода образуются волны. Движущийся нижний слой жидкости взаимодействует с дном, и, тем самым, приводят в движение частицы его слагающие.

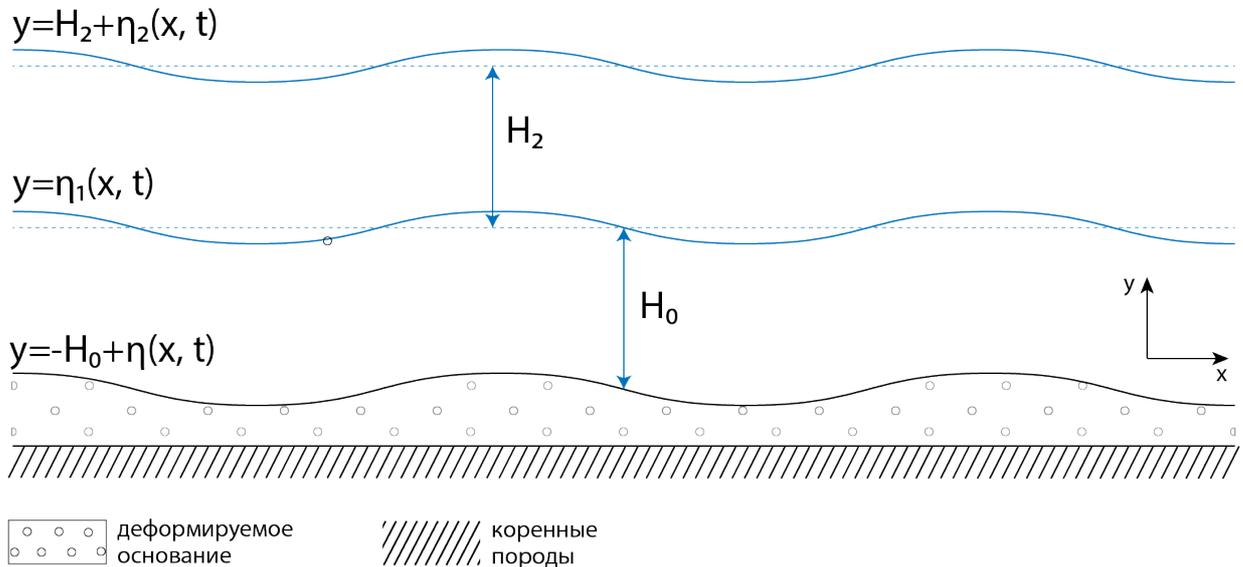


Рис. 8. Схема рассматриваемой задачи.

Ось x расположим вдоль горизонтальной невозмущенной поверхности, ось y направим вертикально вверх. Мощность верхнего слоя в начальном, невозмущенном состоянии – H_2 , нижний слой в невозмущенном состоянии имеет мощность H_0 . Свободная поверхность раздела «верхний слой – воздух»

в текущий момент времени t будет иметь вид $y = H_2 + \eta_2(x, t)$, поверхность раздела – $y = \eta_1(x, t)$, поверхность дна – $y = -H(x, t) = -H_0 + \eta(x, t)$.

2.1.2. Построение модели

Мы предполагаем, что движение в каждом слое является потенциальным:

$$(u_j(x, y, t), v_j(x, y, t)) = \nabla \varphi_j(x, y, t), \quad j = 1, 2.$$

На границах «воздух – жидкость (ρ_2)» и «жидкость (ρ_2) – жидкость (ρ_1)» выполняются кинематическое и динамическое условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, & p &= p_2^0(x, y, t), & y &= H_2 + \eta_2(x, t), \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, & p_1(x, y, t) &= p_2(x, y, t), & y &= \eta_1(x, t), \end{aligned}$$

$p_1(x, y, t), p_2(x, y, t)$ – давление в каждом из слоёв жидкости, $p_2^0(x, y, t)$ – атмосферное давление. Помимо всего этого, в каждом из слоёв жидкости имеет место интеграл Лагранжа-Коши

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_j|^2 + \frac{p_j}{\rho_j} + gy = f_j(t),$$

g – ускорение свободного падения, $f_j(t)$ – произвольная функция времени.

Так как материал, слагающий дно, является сыпучим, т.е. мы имеем деформируемое основание – тогда для донного слоя выполняется кинематическое условие

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}.$$

Так же имеем условие, связывающее расход вещества, образующего подвижный донный слой, с рельефом его поверхности [13].

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad y = -H_0 + \eta(x, t),$$

$Q = Q(u_b)$, u_b – горизонтальная компонента скорости жидкости вблизи дна.

В случае горизонталь ориентированного потока с постоянной скоростью U , поверхности раздела $\eta(x, t) = 0$, $\eta_1(x, t) = 0$, $\eta_2(x, t) = 0$ удовлетворяют условиям задачи, при этом расход Q не зависит от горизонтальной координаты.

Выстроим предположение, что $\varphi_j(x, y, t) = Ux + \varphi'_j(x, y, t)$, где φ'_j - возмущение, наложенное на горизонтальный поток. Тогда условия на границе для волн малой амплитуды примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_2}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y}, & p &= p_2^0, & y &= H_2 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi'_j}{\partial y}, & p_1 &= p_2, & y &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y}, & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0, & y &= -H_0 \end{aligned}$$

Предположим зависимость $Q = Q(u_b)$, $u_b = U + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} |_{(x, -H_0, t)}$. В случае малых возмущений $Q = Q(U) + \kappa \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} |_{(x, -H_0, t)}$, $\kappa = Q'(U)$.

В результате всех выполненных преобразований заключаем, что потенциалы скорости во всех слоях должны удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta \varphi'_j = 0$ и краевым условиям

$$\begin{aligned} g \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} &= f'_2(t) - \frac{\partial'^2 \varphi'_2}{\partial t^2}, & y &= H_2, \\ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} &= 0, & y &= 0, \\ g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} &= \rho_2 \frac{\partial'^2 \varphi'_2}{\partial t^2} - \rho_1 \frac{\partial'^2 \varphi'_1}{\partial t^2} - (\rho_2 f'_2 - \rho_1 f'_1), \\ \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial t \partial y} + \kappa \frac{\partial'}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x^2} &= 0, & y &= -H_0, & \frac{\partial'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Отыскивая решение, отвечающее волнам, обладающим периодическим характером, положим

$$\varphi_j = \varphi_j(\xi, \zeta), \quad \xi = k(x_1 - ct), \quad \zeta = ky, \quad x_1 = x - Ut,$$

Где k – волновое число, c – фазовая скорость относительно потока.

Гармонические функции $\varphi_1(\xi, \zeta)$ и $\varphi_2(\xi, \zeta)$ будем искать в виде

$$\varphi_1(\xi, \zeta) = (Ae^{-\zeta} + Be^{\zeta}) \sin \xi,$$

$$\varphi_2(\xi, \zeta) = (Ce^{-\zeta} + De^{\zeta}) \sin \xi.$$

Интегральные условия [14] $\int_0^\lambda \eta_j(x, t) dx = 0$ в предположении $p_2^0 = 0$ требуют

$$f_2(t) = \frac{1}{2}U^2 + gH_2, \quad f_1(t) = \frac{1}{\rho_1} \left(\rho_2 g H_2 + \frac{1}{2} \rho_1 U^2 \right).$$

Учет граничных условий определяет соотношение между A, B, C, D :

$$\sum_{l=1}^4 a_{nl} x_l = 0, \quad n = \overline{1,4}, \quad x_l = (A, B, C, D)^T$$

$$a_{11} = 0,$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{13} = -(g + kc^2)e^{-kH_2},$$

$$a_{14} = (g - kc^2)e^{kH_2},$$

$$a_{21} = -1,$$

$$a_{22} = 1,$$

$$a_{23} = 1,$$

$$a_{24} = -1,$$

$$a_{31} = -g(\rho_1 - \rho_2) - \rho_1 kc^2,$$

$$a_{32} = g(\rho_1 - \rho_2) - \rho_1 kc^2,$$

$$a_{33} = \rho_2 kc^2,$$

$$a_{34} = \rho_2 kc^2,$$

$$a_{41} = ((U + c) + \kappa ck)e^{kH_0},$$

$$a_{42} = (-(U + c) + \kappa ck)e^{kH_0},$$

$$a_{43} = 0,$$

$$a_{44} = 0.$$

Ненулевое решение данной системы алгебраических однородных уравнений существует для значений c , определяемых из уравнения

$$\begin{aligned}
& \rho_2 k c^2 (k c^2 \operatorname{sh} k H_2 - g \operatorname{ch} k H_2) ((U + c) \operatorname{sh} k H_0 + \kappa c k \operatorname{ch} k H_0) + \\
& + (g \operatorname{sh} k H_2 - k c^2 \operatorname{ch} k H_2) (g(\rho_1 - \rho_2)(U + c) \operatorname{sh} k H_0 - \rho_1 k c^2 \cdot \\
& \cdot (U + c) \operatorname{ch} k H_0 + g(\rho_1 - \rho_2) \kappa c k \operatorname{ch} k H_0 - \kappa \rho_1 k^2 c^3 \operatorname{sh} k H_0) = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

В ситуации, когда оба слоя жидкости: и верхний, и нижний – обладают большой глубиной (можем считать их бесконечно глубокими), значение c определяем как

$$c = -\frac{U}{1 + \kappa k}, \tag{2.2}$$

$$c^2 = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\rho_1 + \rho_2)}, \tag{2.3}$$

$$c^2 = \frac{g}{k}. \tag{2.4}$$

Анализ полученных выражений показывает, что в первом случае фазовая скорость волны зависит от волнового числа и изменения расхода, выраженного характеристикой сыпучести, направление фазовой скорости донной волны противоположно направлению скорости потока. Во втором случае фазовая скорость зависит от степени неоднородности жидкости, а именно от показателей плотности стратифицированной жидкости, и от волнового числа, причем направление фазовой скорости донной волны может совпадать с направлением скорости потока, а может быть противоположным. В третьем случае фазовая скорость не зависит от степени неоднородности жидкости и сыпучести донного слоя.

Отношение амплитуды колебаний внутренней волны к амплитуде колебаний поверхностной волны имеет вид

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \operatorname{ch} k H_2 - \frac{g}{k c^2} \operatorname{sh} k H_2$$

Глава 3. Вычислительный эксперимент

Проведём численный анализ представленного в предыдущей главе дисперсионного соотношения.

Исходя из уравнения (2.1) фазовая скорость находится в зависимости от следующих параметров исследуемой системы: ρ_1, ρ_2 – плотность в нижнем и верхнем слое жидкости соответственно, H_0, H_2 – мощность нижнего и верхнего слоев стратифицированной жидкости в невозмущенном состоянии, U – горизонтальная составляющая скорости потока, κ – параметр сыпучести материала, слагающего деформируемое основание, k – волновое число, g – ускорение свободного падения.

Ускорение свободного падения (g) мы примем за константу и будем считать его равным $9,80665 \text{ м/с}^2$ [15] [16].

Варьируя параметры $\rho_1, \rho_2, H_0, H_2, U, \kappa, k$ и следя за изменением значения фазовой составляющей скорости c мы можем выявить процессы, которые возникают при взаимодействии слоёв стратифицированной жидкости на деформируемом основании.

Вычислительный эксперимент будем проводить при помощи пакета для аналитических вычислений на компьютере – Maple [16] [17] [18].

Для начала воспроизведем эксперимент с "эталонными" параметрами. За "эталон" примем значения, которые действительно имеют место быть в реальных природных динамических условиях или являются усредненными значениями этих параметров.

За значения плотностей примем среднюю плотность океанской воды $\rho_1 = 1,024121 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ (плотность нижнего слоя) и среднюю плотность пресной талой воды $\rho_2 = 0,95 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ (плотность верхнего слоя). Такие значения плотностей показывают ярко выраженную стратификацию жидкости, которая встречается и в реальных природных условиях. Примером могут служить арктические воды или воды, заполняющие фьорды, когда верхний слой жидкости представлен пресными, менее плотными талыми водами [19].

Величину волнового числа зададим по формуле $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Для нахождения волнового числа возьмем за базовое значение – длину волны, равную 2 метрам [7].

Жидкость обладает плотностной стратификацией. В нашей схеме стратификация жидкости представлена двумя слоями с разной плотностью. Положим, что мощность слоёв жидкости в невозмущенном состоянии равны, т.е. $H_0 = H_2$ и суммарно мощность всей толщи воды составляет 100 метров.

Так как дно сложено рыхлым осадком, т.е. основание является деформируемым, то для нас наибольшее значение имеет параметр сыпучести i . Этот параметр характеризует способность осадочного материала преобразовывать потенциальную энергию потока жидкости в кинетическую энергию движения частиц донного вещества. "Эталонное" значение параметра i положим равным 0,1.

Скорость движения потока жидкости U определим равным 1 м/с.

3.1. Исследование зависимости фазовой скорости от волнового числа

Посмотрим, как будет меняться фазовая скорость (c) при изменении волнового числа (k). Как уже говорилось выше – волновое число зависит от длины волны и эта зависимость выражается следующей формулой: $= \frac{2\pi}{\lambda}$. Будем менять значения λ в промежутке от $[0,1; 100]$, волновое число (k), при таких значениях λ изменяется в пределах $[0,063; 62,8]$.

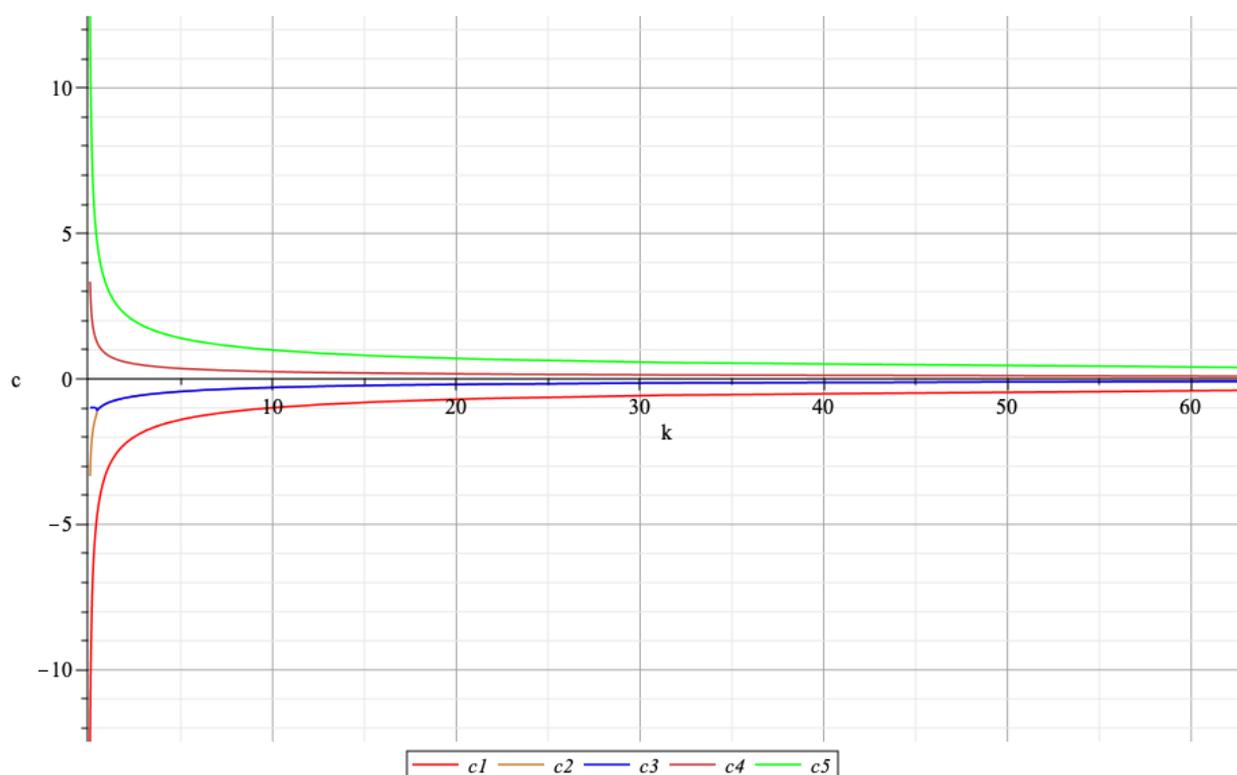
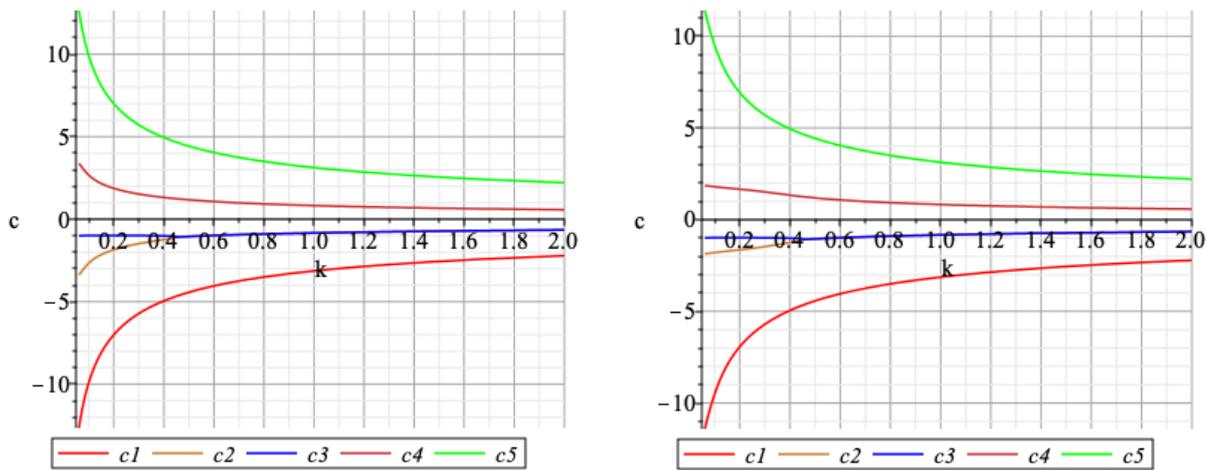


Рис. 9. График зависимости фазовой скорости от волнового числа ($H_0=H_2=50m$)

Анализ полученных кривых показывает, что направление фазовой скорости донной волны может совпадать с направлением горизонтальной составляющей скорости потока (U), и может быть ему противоположным (Ошибка! Источник ссылки не найден.).

Рассмотрим более детально значения фазовых скоростей при волновом числе от $[0,06; 2]$:



1) 2)
 Рис. 10. Зависимость фазовой скорости от волнового числа:

1) $H_0=H_2=50m$; 2) $H_0=H_2=10m$

Графики показывают, что при увеличении значения волнового числа – значения фазовых скоростей уменьшаются по гиперболическому закону. Также можно заметить наличие зависимости фазовой скорости от мощности слоёв стратифицированной жидкости – чем меньше мощность, тем меньшие значения принимает фазовая скорость.

Следует отметить наличие точки, в которой решение 2 (c_2) соединяется с решением 3 (c_3) (0,46; -1,08) (Рис. 10.1, Рис10.2). Это вызвано появлением комплексных значений при решении дисперсионного соотношения. Мы получаем 2 комплексно-сопряжённых корня, один из которых расположен в верхних полуплоскостях комплексной плоскости.

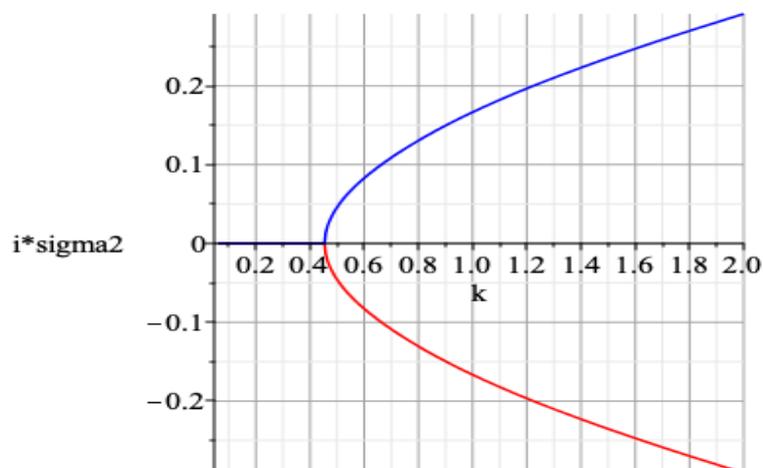
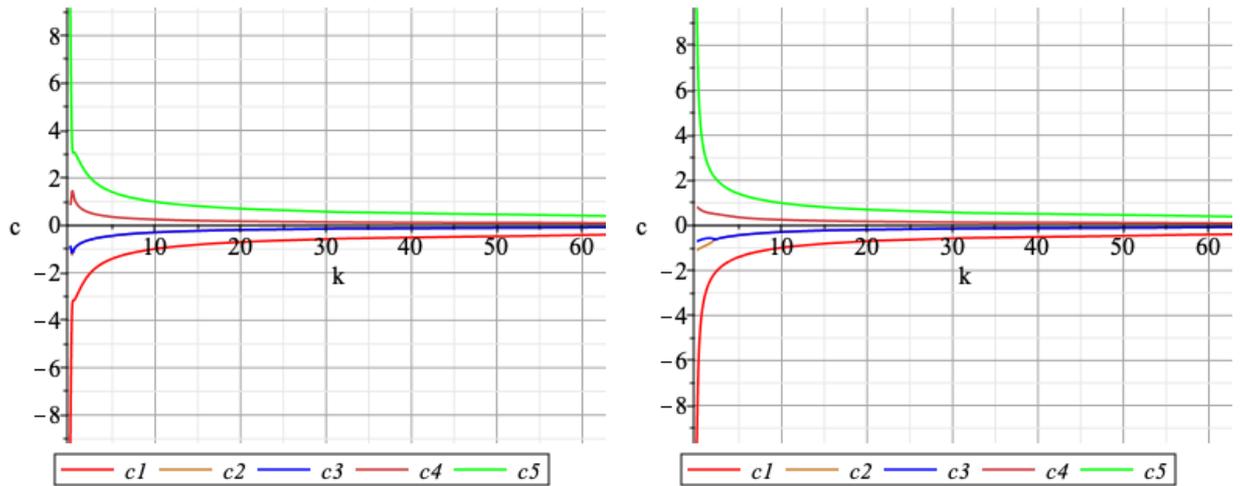


Рис. 11. Появление комплексных корней при решении дисперсионного соотношения (2.1).

Теперь изменим соотношение мощностей слоёв стратифицированной жидкости:



1)

2)

Рис. 12. Графики зависимости фазовой скорости от волнового числа:

1) - $H_0=10m, H_2=1m$; 2) - $H_0=1m, H_2=10m$

На рисунке видно, что в случае, когда мощность нижнего слоя меньше мощности верхнего, характер кривых решений не меняется (Рис. 12.2), но в случае, когда мощность нижнего слоя больше мощности верхнего – наблюдаются отклонения (Рис. 12.1). Рассмотрим эти решения более подробно.

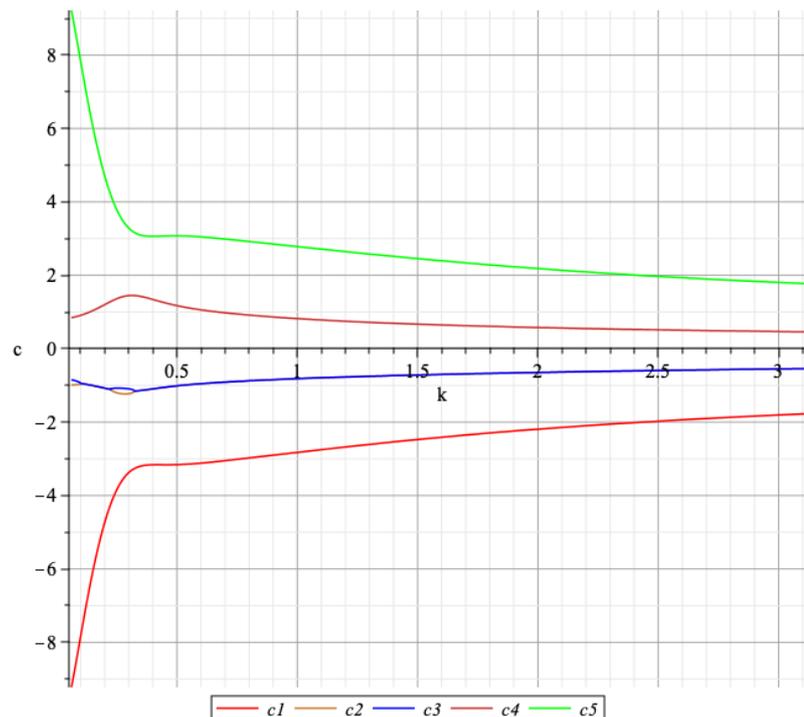


Рис. 13. График зависимости фазовой скорости от волнового числа, $H_0=10m, H_2=1m$

Поведение графика решения c_1 претерпевает изменения: график на отрезке $(0,062; 0,45)$ резко возрастает, после чего меняет свой характер и становится более пологой, при больших значениях волнового числа фазовая скорость стремится к 0. Имеется точка перегиба $(0,45; -3,16)$. Поведение этого графика похоже на поведение графика c_5 , только вместо возрастания график c_5 убывает и, помимо точки перегиба $(0,45; 3,07)$, имеется ещё локальный минимум в точке $(0,4; 3,06)$ и локальный максимум $(0,49; 3,076)$.

Стоит помнить, что графики решений, расположенные в нижней полуплоскости, характеризуют значения фазовой скорости противоположные направлению горизонтальной составляющей скорости потока. Это говорит о том, что если график решения возрастает, то значение фазовой скорости уменьшаются.

Интересно поведение графиков решений c_2 и c_3 . На промежутке $(0,061; 0,1)$ c_2 возрастает, а c_3 убывает, потом их значения совпадают и на промежутке $(0,1; 0,223)$ наблюдается общая тенденция убывания. Затем у c_3 на промежутке $(0,223; 0,323)$ достигает локального максимума в точке $(0,25; -1,075)$, а c_2 на этом же промежутке достигает локального минимума в точке $(0,288; -1,234)$. Далее значения вновь совпадают и наблюдается общая плавная тенденция возрастания.

Значения c_4 на отрезке $(0,062; 0,31)$ возрастает, достигая в точке $(0,31; 1,45)$ своего максимума, и затем, на всём остальном промежутке убывает.

Проанализируем так же выражения (2.2), (2.3) и (2.4) из предыдущей главы. Эти выражения описывают ситуации, когда оба слоя жидкости: и верхний, и нижний – обладают большой глубиной (можем считать их бесконечно глубокими).

Характер поведения графиков решений похож на характер решений, рассматриваемых выше. Кривые решений по-прежнему обладают гиперболической зависимостью, и при увеличении волнового числа значение фазовой скорости уменьшается.

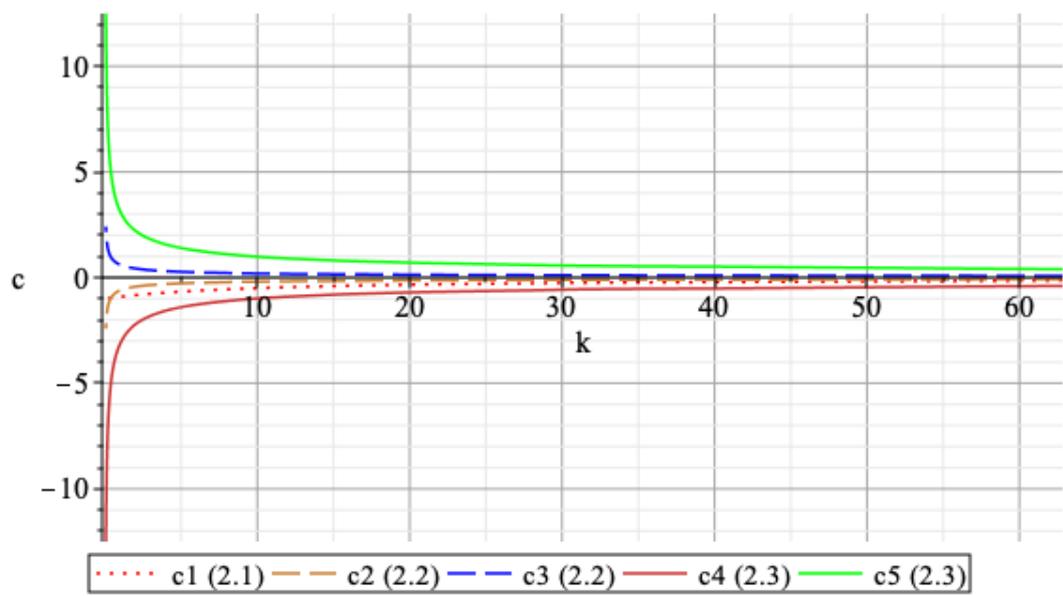


Рис. 14. Графики зависимости фазовой скорости от волнового числа (при больших глубинах)

3.2. Исследование зависимости фазовой скорости от скорости потока

Посмотрим, как будет меняться фазовая скорость (c) при изменении горизонтальной составляющей скорости потока (U). Значения U будем варьировать в пределах $[0,0; 2,0]$.

Построим график зависимости c от U с "эталонными" значениями для других параметров:

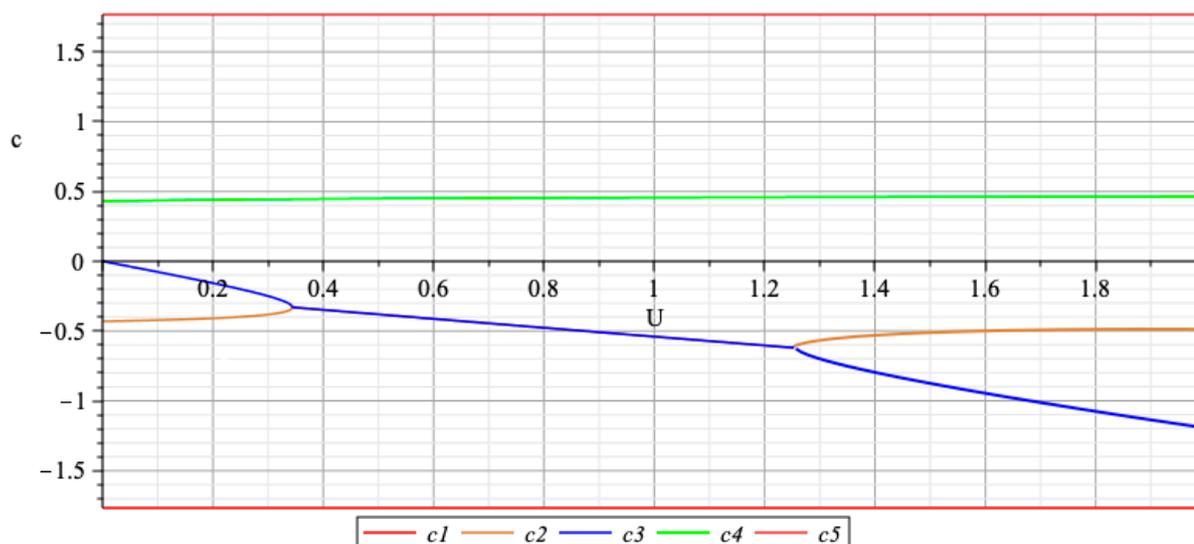


Рис. 15. Графики зависимости фазовой скорости от скорости горизонтальной составляющей потока.

Решения c_1 и c_5 обладают линейным характером (Рис. 1) и соответствуют фазовым скоростям 1,77 и -1,77 соответственно (направление фазовой скорости обратно направлению горизонтальной составляющей скорости потока). График решения c_4 монотонно возрастающий. График c_2 в глобальном масштабе является возрастающим, на промежутке $(0,35; 1,25)$ обладает теми же значениями, что и c_3 . График c_3 в глобальном масштабе убывает.

Проводя эксперимент с разными значениями мощности слоёв жидкости и плотности существенных изменений не произошло.

Попробуем изменить значения волнового числа (k) (Рис. 16):

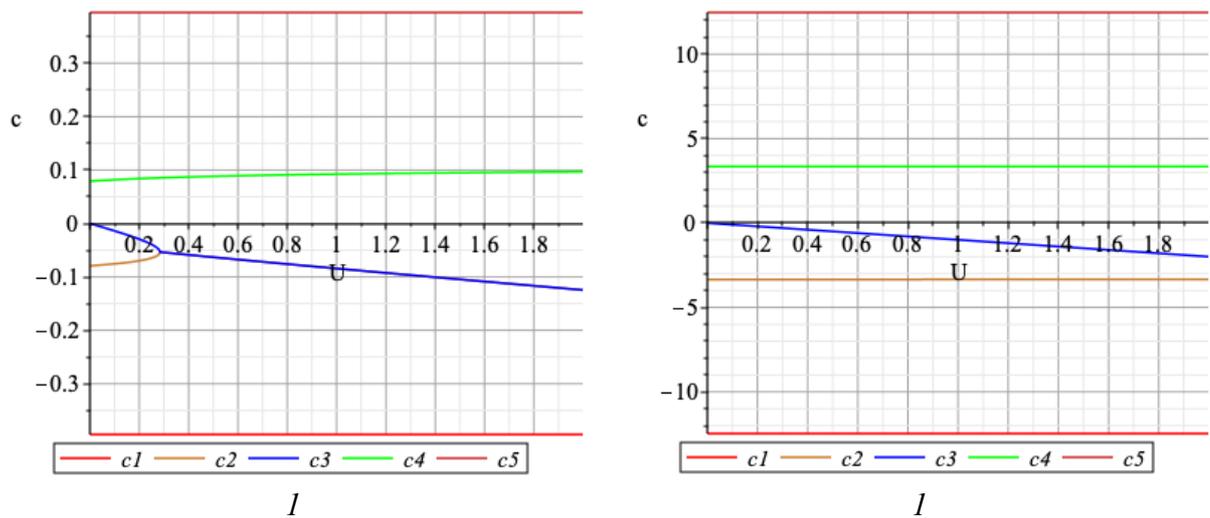


Рис. 16. Графики зависимости фазовой скорости от горизонтальной составляющей скорости потока: 1) $k=63$; 2) $k=0,06$

На графиках отчетливо видно, что при уменьшении волнового числа значения фазовой скорости возрастают, при этом характер графиков не меняется.

Рассмотрим ситуацию, когда оба слоя жидкости обладают большими мощностями:

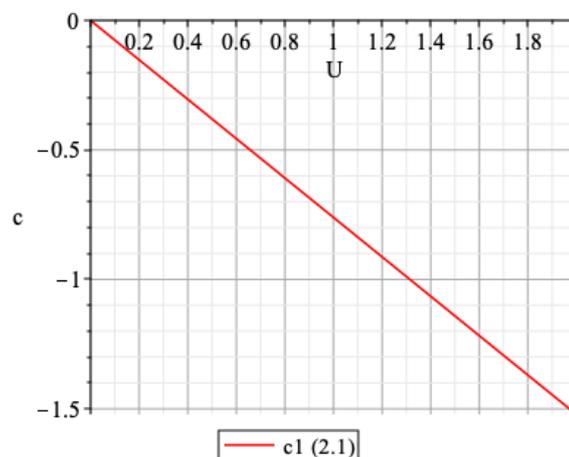


Рис. 17. График зависимости фазовой скорости от горизонтальной составляющей скорости потока (при больших H).

При больших значениях H решение представляет собой линейную функцию. Направление фазовой скорости противоположно горизонтальной составляющей скорости потока.

3.3. Исследование зависимости фазовой скорости c от параметра сыпучести κ

Будем менять параметр сыпучести пород, слагающих деформируемое основание в промежутке от $[0; 1]$, тогда получим:

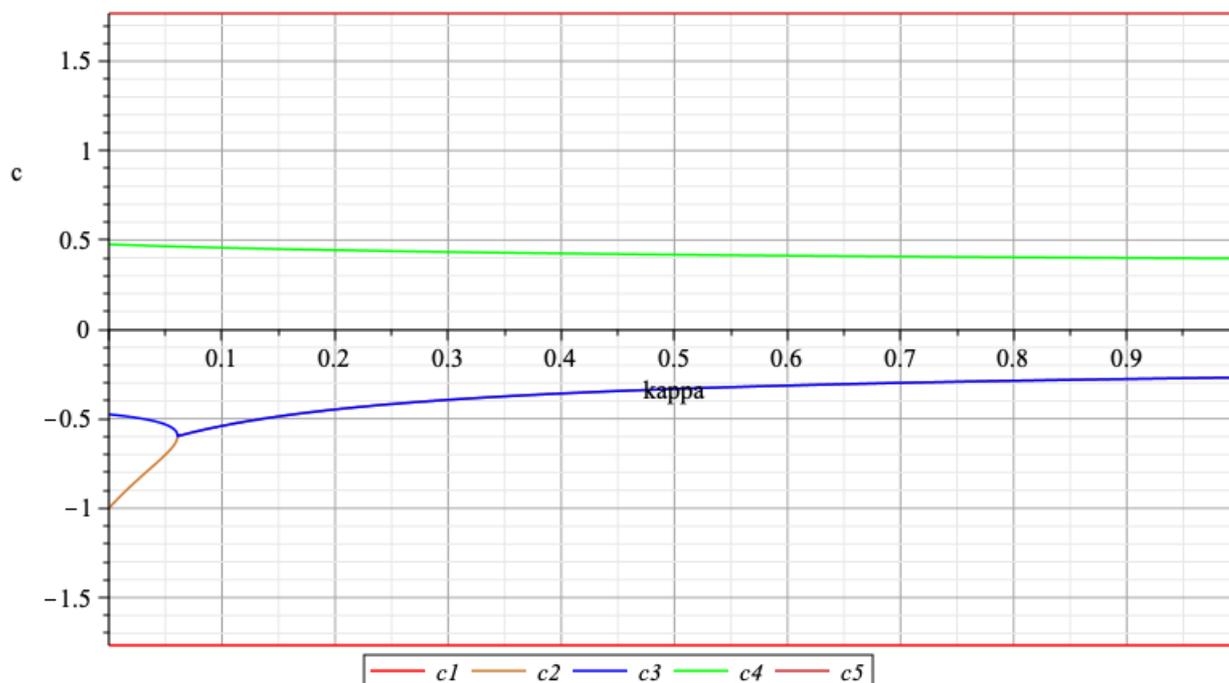


Рис. 18. График зависимости фазовой скорости от параметра сыпучести

Решения c_1 и c_5 обладают линейным характером и соответствуют фазовым скоростям $-1,767$ и $1,767$ соответственно. График решения c_4 монотонно убывающий. График c_2 в глобальном масштабе является возрастающим, в точке $(0,06; -0,6)$ принимает те же значения, что и c_3 , и на всём дальнейшем промежутке преобладает возрастание (график функции стремится к 0).

При уменьшении значения волнового числа путем увеличения длины волны было замечено, что для некоторых решений менялся характер функций, описывающий графики их решений. Для того что бы отследить при каких значениях волнового числа происходит эта смена, изменим волновое число, увеличив длину волны до 6 метров:

Заключение

В ходе выполнения работы был произведен поиск и изучение литературных источников необходимых для определения механизмов взаимодействия жидкостей и деформируемого основания.

Были рассмотрены и изучены процессы, возникающие как внутри самой жидкости, так и на границах раздела сред, с точки зрения геологии, физики и математики.

Основным этапом выполнения работы стало построение математической модели, описывающей взаимодействие идеальной двуслойной несжимаемой стратифицированной жидкости на деформируемом основании.

На основании построенной математической модели было получено дисперсионное соотношение для волн малой амплитуды, определены основные гидродинамические характеристики.

Дальнейшим шагом стало проведение численного анализа полученного дисперсионного соотношения.

При помощи пакета для аналитических вычислений Maple были проведены исследования, позволяющие выявить характер процессов взаимодействия идеальной двуслойной несжимаемой жидкости и деформируемого основания.

Список литературы

- [1] Н. Варгафтик, *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей*, Москва: Наука, 1972.
- [2] С. Холодова, *Математическое моделирование и анализ течений и волн во вращающихся электропроводных жидких средах*, Санкт-Петербург, 2018.
- [3] С. Перегудин, *Волновые движения в жидких и сыпучих средах*, Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2004.
- [4] Ю. Доронин, *Физика океана*, Санкт-Петербург, 2010.
- [5] Л. Рухин, *Основы литологии*, Ленинград: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1953.
- [6] В. Зенкович, *Динамика и морфология морских берегов*, Москва: Морской транспорт, 1946.
- [7] К. Григоренко, «Исследование кинематических характеристик внутренних волн в центральной Атлантике по данным STD профилирования,» *Экологический вестник научных центров ЧЭС*, т. 1, pp. 41-50, 2015.
- [8] «Научно-популярный журнал: "Как и почему",» 26 12 2014. [В Интернете]. Available: <https://kipmi.ru>. [Дата обращения: 20 05 2019].
- [9] Н. Зубов, *Динамическая океанология*, Москва/Ленинград: Гидрометеорологическое издательство, 1947.
- [10] Г. Биркгоф, *Гидродинамика (Методы. Факты. Подобие)*, Москва: Издательство иностранной литературы, 1963.

- [11] Б. Шуляк, *Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости*, Москва: Наука, 1971.
- [12] Б. Шуляк, *Некоторые вопросы взаимодействия волнового потока с деформируемым дном*, Москва: Труды института океанологии АН СССР, 1961.
- [13] Ю. Алешков, *Волны на поверхности сыпучих сред, вызванные потоком жидкости*, Санкт-Петербург: Вестник Санкт-Петербургского университета, 2001.
- [14] Ю. Алешков, *Течения и волны в океане*, Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет, 1996.
- [15] А. Прохоров, *Физическая энциклопедия*, Москва: Советская энциклопедия, 1994.
- [16] Т. К. С.Е. Савотченко, *Методы решения математических задач в Maple*, Белгород: Белаудит, 2001.
- [17] А. Мфтрсов, *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики.*, Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2001.
- [18] Maplesoft, «Официальный сайт Maple,» Maplesoft, 2019. [В Интернете]. Available: <https://www.maplesoft.com>. [Дата обращения: 17 05 2019].
- [19] A. New, «Internal solitary waves on the Saya de Malha bank of the Mascarene Plateau: SAR observations and interpretation,» *Oceanographic Research Papers*, т. 1, pp. 50-61, 2013.