Санкт-Петербургский государственный университет

ЧЕРНОБАЙ Михаил Петрович

Выпускная квалификационная работа

О решениях уравнений Навье-Стокса с конечными масштабно-инвариантными нормами.

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика"
Образовательная программа СМ.5007. "Фундаментальные математика и механика"
Профиль Теория функций

Научный руководитель: Доцент кафедры математической физики математико-механического факультета СПбГУ, Кандидат ф.м. наук,
Михайлов А. С.

Рецензент: Ассистент кафедры Высшей Математики института фундаментального инженерного образования СПбГЭТУ "ЛЭТИ", кандидат ф.м. наук, доцент,
Нежинская И. В.

Санкт-Петербург
2019

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Chernobai Mikhail

Graduation Thesis

On type I blow up for the Navier-Stokes equations near the boundary.

Specialist Degree program
Speciality 01.05.01 ”Fundamental Mathematics and Mechanics”
Educational program CM.5007. ”Fundamental Mathematics and Mechanics”
Department: Function Theory

Advisor: Candidate of Physics and Mathematics A.S.Mikhailov

Reviewer: Candidate of Physics and Mathematics I.V.Nezhinskaya

Saint-Petersburg
2019

Содержание

1 Введение

Пусть Ω-ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^3$ с границей класса $\mathcal{C}^2$, обозначим $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Система Навье-Стокса имеет следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &=& f \\ \operatorname{div} u &=& 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad u(x,t)\Big|_{\{x\in\partial\Omega\}} = 0 \end{array}\right. \quad \text{в} \quad Q_T. \tag{1.1}$$

Функция $u : Q_T \to \mathbb{R}^3$ обозначает скорость потока, а $p : Q_T \to \mathbb{R}$ - давление. Одна из "проблем тысячелетия" выдвинутая институтом Клэя- это доказательство глобального существования гладких решений системы 1.1. Далее введем следующие обозначения:

$$J_2(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega)\},$$
$$\overset{\circ}{J}_2(\Omega) = Closure_{L_2(\Omega)}\{u \in C_0^\infty(\Omega):\ \operatorname{div} u = 0\},$$
$$J_2^1(\Omega) = \{u \in W_2^1(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0 \text{ п.в. } \Omega\},$$
$$\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) = \{u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0 \text{ п.в. } \Omega\}.$$

До сих пор известны теоремы существования гладких решений только при дополнительных условиях. Например, следующая теорема гарантирует существование гладких решений, но только до определенного момента времени.

Теорема 1.1. *Для любого начального данного $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для правой части $f \in L_\infty(0,\infty;\ L_2(\Omega))$, существует интервал времени $T = T(\Omega, f, u_0)$ на котором существует и единственно решение* (1.1) *такое, что*

$$u \in L_\infty(0,T;\ \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T;\ W_2^2(\Omega)), \quad \partial_t u \in L_2(0,T;\ \overset{\circ}{J}_2(\Omega)). \tag{1.2}$$

Вторая теорема утверждает, что существует гладкое решение, но только при малых начальных данных.(см. [19])

Теорема 1.2. *Существует постоянная $C(\Omega) > 0$, такая что для любых $u_0 \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, таких что*

$$\arctan \|\nabla u_0\|_{2,\Omega}^2 + C(\Omega)\Big(\|u_0\|_{2,\Omega}^2 + \|f\|_{2,Q_T}^2\Big) < \frac{\pi}{2}, \tag{1.3}$$

существует пара функций

$$
\begin{gathered}
u \in L_\infty(0,T;\ \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T;\ W_2^2(\Omega)), \quad \partial_t u \in L_2(0,T;\ J_2(\Omega)), \\
p \in L_2(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \quad \int\limits_\Omega p(x,t)\ dx = 0 \ \ \text{п.в. } t \in (0,T)
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

являющихся сильными решениями уравнений Навье-Стокса (1.1).

Далее мы определим слабые решения системы (1.1) , они также известны как решения Лере-Хопфа. Они не являются гладкими, но зато известно их существование на всем промежутке времени.

Определение 1.1. *Предположим что* $u_0 \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$. *Функция u является решением Лере-Хопфа системы Навье-Стокса в* Q_T, *если:*

- $u \in L_\infty(0,T;\ J_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\ \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega))$
- $u \in C_w([0,T];\ L_2(\Omega))$ *т.е. для любого* $t \in [0,T]$, $u(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$

  $$\forall w \in L_2(\Omega) \ \text{функция } t \to \int\limits_\Omega u(x,t)w(x)\ dx \ \text{непрерывна на } [0,T]$$

- *u удовлетворяет интегральному тождеству*

  $$
  \begin{gathered}
  \int\limits_{Q_t} \Big(-u\cdot\partial_t\eta + \nabla\eta : \nabla u - u\otimes u : \nabla\eta \Big)\ dxdt = \int\limits_0^T \langle f(t), \eta(t)\rangle dt, \\
  \forall \eta \in C_0^\infty(Q_T;\mathbb{R}^n): \quad \operatorname{div}\eta = 0 \ \text{в } Q_T
  \end{gathered} \tag{1.5}
  $$

- *для почти всех* $t \in (0,T)$, *функция u удовлетворяет глобальному энергетическому неравенству в Q*

  $$
  \begin{gathered}
  \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\ dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla u(x,\tau)|^2\ dxd\tau \le \\
  \le \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0(x)|^2\ dx + \int\limits_0^t \langle f(\tau), u(\tau)\rangle d\tau
  \end{gathered} \tag{1.6}
  $$

- *Начальное условие понимается в следующем смысле:*

$$\|u(t) - u_0\|_{2,\Omega} \to 0 \quad при \quad t \to +0 \tag{1.7}$$

Доказательство существования решений Лере-Хопфа представлено в статье [26]:

Теорема 1.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3)$- ограниченная, с границей класса $\mathcal{C}^2$. Тогда для любых $u_0 \in L_2(\Omega)$ $\operatorname{div} u_0 = 0$, $f \in L_2(Q_T)$ существует хотя бы одно решение Лере-Хопфа системы* (1.1)*.*

Заметим что в определении решений Лере-Хопфа никак не фигурирует давление, поэтому дадим определение *подходящих слабых решений.*

Определение 1.2. *Предположим что $u_0 \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$. Пара функций (u, p) является подходящим слабым решением системы Навье-Стокса в Q_T , если u является решением Лере-Хопфа, а давление $p \in L_{\frac{3}{2}}(Q_T)$ и пара (u, p) удовлетворяют интегральному тождеству*

$$\int\limits_{Q_t} \Big(- u \cdot \partial_t \eta + \nabla \eta : \nabla u - u \otimes u : \nabla \eta - p \operatorname{div} \eta \Big) \, dxdt = \int\limits_0^T \langle f(t), \eta(t) \rangle dt,$$
$$\forall \eta \in C_0^\infty(Q_T; \mathbb{R}^n). \tag{1.8}$$

Для подходящих слабых решений также верна теорема существования.

Теорема 1.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3)$- ограниченная, с границей класса $\mathcal{C}^2$, и $T > 0$-любое. Тогда для любых $u_0 \in L_2(\Omega)$ $\operatorname{div} u_0 = 0$, $f \in L_2(Q_T)$ существует подходящее слабое решение (u, p) системы* (1.1)*. Более того $p \in L_{\frac{5}{3}}(Q_T)$.*

Итого для слабых решение в отличие от сильных решений известно существование на всем промежутке времени, но нет единственности или гладкости. Есть несколько результатов связывающих сильные и слабые решения, первый из них-это известный критерий регулярности Ладыженской-Проди-Серрина(см. [20]) :

Теорема 1.5. *Пусть $T > 0$-любое, а $u_0 \in J_2^1(\Omega)$, $f = 0$. Функция u является решением Лере-Хопфа системы* (1.1), *причем дополнительно известно, что $u \in L_s(0,T;\ L_l(\Omega))$, $\frac{3}{l} + \frac{2}{s} \le 1$, $l, s \in [2, +\infty]$. Тогда $u \in W_2^1(0,T;\ L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\ W_2^2(\Omega))$ и существует $p \in L_2(0,T;\ W_2^1(\Omega))$, $\int\limits_\Omega p(x,t)\ dx = 0$ при п.в. $t \in (0,T)$, такие что (u,p)-сильное решение в Q_T.*

Случай $s = 3,\ l = \infty$ был доказан значительно позже в статье [22]. Следующая теорема показывает единственность сильных решений:

Теорема 1.6. *Если для начального данного $u_0 \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и правой части $f \in L_2(Q_T)$ существует два решения Лере-Хопфа u, v; такие что $u \in L_s(0,T;\ L_l(\Omega))$, $\frac{3}{l} + \frac{2}{s} = 1$, $l, s \in [2, +\infty)$, то $u = v$*

Система Навье-Стокса инвариантна относительно следующего масштабного преобразования. Обозначим $Q(R) = B(R) \times [-R^2, 0]$, тогда если (u,p) пара решений в цилиндре $Q(R)$ то функции $u_R = Ru(Rx, R^2t)$, $p_R = R^2p(Rx, R^2t)$ будут удовлетворять уравнению Навье-Стокса в цилиндре $Q(1)$. Вместе с этой заменой возникает множество функционалов, инвариантных относительно этого масштабирования. Далее мы введем обозначения для некоторых из них:

$$\begin{aligned} A(u,r) &= \operatorname*{esssup}_{t\in(-r^2,0)} \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{\mathcal{B}(r)} |u(x,t)|^2\ dx \Big)^{1/2}, \\ C(u,r) &= \Big(\frac{1}{r^2} \int\limits_{Q(r)} |u(x,t)|^3\ dxdt \Big)^{1/3}, \\ E(u,r) &= \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{Q(r)} |\nabla u(x,t)|^2\ dxdt \Big)^{1/2}, \\ D(p,r) &= \Big(\frac{1}{r^2} \int\limits_{Q(r)} |p(x,t) - [p]_{\mathcal{B}(r)}(t)|^{3/2}\ dxdt \Big)^{2/3}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Где $[p]_{\mathcal{B}(r)}(t) := \frac{1}{|\mathcal{B}(r)|} \int\limits_{\mathcal{B}(r)} p(x,t)\ dx$. Пусть $F(u,r)$ любой из этих функционалов, тогда верно слеующее: $F(u,r) = F(u_r, 1)$. С помощью этих функционалов можно классифицировать сингулярности у решения. Первоначально точка называлась сингулярностью типа один если $u(x,t) \to \infty$

при $(x,t) \to (x_0,t_0)$ и в окрестности этой точки решение удовлетворяло оценке $u(x,t) \leq \frac{C}{\sqrt{t_0 - t + |x - x_0|}}$ (далее для будем считать что $(x_0,t_0) = (0,0)$). Остальные сингулярные точки являются сингулярностями второго типа. Для сингулярностей типа один верна следующая теорема (см. [23]).

Теорема 1.7. *Пусть (u,p)-подходящее слабое решение в Q_T и предположим справедлива любая из следующих оценок*

$$u(x,t) \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\ ; \qquad u(x,t) \leq \frac{C}{|x|}$$

Тогда

$$\max\{\sup_{r<1} A(u,r),\ \sup_{r<1} E(u,r),\ \sup_{r<1} C(u,r),\ \sup_{r<1} D(p,r)\} < +\infty \tag{1.10}$$

Благодаря этой теореме определение сингулярности типа один было заменено более общим определением (данная интерпритация сингулярностей типа один была введена Г.А.Серегином и В.Швераком)

Определение 1.3. *Точка $(0,0)$ называется сингулярностью типа один если и является неограниченной в любой окрестности этой точки и выполняется 1.10.*

Также верна следующая теорема (см. [21]):

Теорема 1.8. *Пусть (u,p) подходящее слабое решение в Q_T такое, что*

$$\min\{\sup_{r<1} A(u,r),\ \sup_{r<1} E(u,r),\ \sup_{r<1} C(u,r)\} < +\infty$$

Тогда выполняется (1.10).

Итого, достаточно равномерной ограниченности всего одного функционала для того чтобы все остальные были тоже равномерно ограничены.

Также с масштабно-инвариантными функционалами связаны критерии регулярности слабых решений. Известно множество критериев ε-регулярности, но во всех критериях для гладкости решения необходима малость одного из масштабно-инвариантных функционалов.

Теорема 1.9. *Пусть $M > 0$ тогда $\exists\ \varepsilon(M)$ такое, что для любого подходящего слабого решения (u,p) в Q_T:*

$$\sup_{r<1}(A(u,r) + C(u,r) + E(u,r) + D(p,r)) < M,$$
$$\liminf_{r\to 0} F(u,r) < \varepsilon(M),$$

где F-любой из масштабно-инвариантных функционалов из (1.9)*. Тогда $\exists \mu > 0$ такое, что $u \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}_{loc}(Q_T)$*

Все перечисленный результаты были доказаны внутри области, в данной работе будет разобран случай системы Навье-Стокса у границы. Введем следующие обозначения: $\mathcal{C} := \{\ x \in \mathbb{R}^3 :\ \ x_1^2 + x_2^2 < 1,\ |x_3| < 1\ \}$, и $Q := \mathcal{C} \times (-1,0)$. Напоминаем что система Навье-Стокса в Q будет иметь следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &=& 0 \\ \operatorname{div} u &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{в} \quad Q. \tag{1.11}$$

В случае полуцилинда к системе (1.11) мы добавляем условие Дирихле на основании:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &=& 0 \\ \operatorname{div} u &=& 0 \\ u|_{x_3=0} = 0 && \end{array}\right. \quad \text{в} \quad Q^+. \tag{1.12}$$

За $\mathcal{C}^+$ мы обозначаем $\mathcal{C} \cap \{x_3 > 0\}$, и $Q^+ := \mathcal{C}^+ \times (-1,0)$. Для задачи (1.12) мы также дадим определение подходящих слабых решений, первоначально оно было введено в статье [2]. Для случая вбилзи границы будет использоваться определение аналогичное данному в [18].

Определение 1.4. *Пара функций (u,p) является подходящим слабым решением системы Навье-Стокса в Q^+ , если:*

- *$u \in L_{2,\infty}(Q^+) \cap W^{1,0}_2(\mathcal{Q}^+)$, $p \in L_{\frac{3}{2}}(Q^+)$*
- *$u|_{x_3=0} = 0$ в смысле следов*
- *u и p удвлетворяют системе Навье-Стокса в Q^+ в смысле распределний*

- *для почти всех $t \in (-1,0)$, пара u, p удовлетворяет локальному энергетическому неравенству в Q^+*

$$\int\limits_{\mathcal{C}^+} \zeta(x,t)|u(x,t)|^2 \, dx \; + \; 2\int\limits_{-1}^{t}\int\limits_{\mathcal{C}^+} \zeta|\nabla u|^2 \, dxdt \; \leq$$

$$\leq \; \int\limits_{-1}^{t}\int\limits_{\mathcal{C}^+} |u|^2 \; (\partial_t\zeta + \Delta\zeta) \; dxdt \; + \; \int\limits_{-1}^{t}\int\limits_{\mathcal{C}^+} u\cdot\nabla\zeta \; \big(|u|^2+2p\big) \; dxdt \; , \tag{1.13}$$

где $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R})$ положительна и равна 0 в окрестности параболической границы $\partial' Q = (\partial\mathcal{C}^+ \times [-1,0]) \cup (\bar{\mathcal{C}} \times \{t=-1\})$.

Также вводятся следующие обозначения для масштабно-инвариантных функционалов, аналогично случаю внутри области:

$$\begin{aligned} A(u,r) &= \operatorname*{esssup}_{t\in(-r^2,0)} \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{\mathcal{C}^+(r)} |u(x,t)|^2 \, dx \Big)^{1/2}, \\ C(u,r) &= \Big(\frac{1}{r^2} \int\limits_{Q^+(r)} |u(x,t)|^3 \, dxdt \Big)^{1/3}, \\ E(u,r) &= \Big(\frac{1}{r} \int\limits_{Q^+(r)} |\nabla u(x,t)|^2 \, dxdt \Big)^{1/2}, \\ D(p,r) &= \Big(\frac{1}{r^2} \int\limits_{Q^+(r)} |p(x,t) - [p]_{\mathcal{C}^+(r)}(t)|^{3/2} \, dxdt \Big)^{2/3}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Где $[p]_{\mathcal{C}^+(r)}(t) \; := \; \frac{1}{|\mathcal{C}^+(r)|} \int\limits_{\mathcal{C}^+(r)} p(x,t) \; dx.$

Многие из теорем для внутреннего случая остаются верными и для граничного. Известно существование подходящих слабых решений. И также верен критерий Ладыженской-Проди-Серрина (Теорема 1.5), случай $L_{3,\infty}$ разобран в статье Г.А.Серегина (см. [11]). В работах А.С.Михайлова ([15], [16]) Теорема 1.8 также обощена на граничный случай (т.е. известно что если один из масштабно-инвариантных функционалов ограничен, то и остальные ограничены), и также доказаны критерии ε регулярности для задачи 1.12.

Цель данной работы-это изучение локальных свойств слабых решений системы (1.12), которые удовлетворяют следующей оценке:

$$|u(x,t)| \ \le \ \frac{C}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \tag{1.15}$$

для почти всех $(x,t) \in Q$ и положительной константы C.

Работа частично мотивирована изучением осесимметричных решений системы Навье-Стокса. Напоминаем, что u и p-осесиметричные решения системы (1.11) или (1.12), если в цилиндрической системе координат:

$$u(x,t) = u_r(r,z,t)\mathbf{e}_r + u_\varphi(r,z,t)\mathbf{e}_\varphi + u_z(r,z,t)\mathbf{e}_z, \qquad p(x,t) = p(r,z,t),$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$-цилиндрический базис в $\mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $z = x_3$. Решение называется осесимметричным без угловой компоненты, если $u_\varphi = 0$

Для осесимметричных решений условие (1.15) является одним из масштабно-инвариантных условий, которые характеризуют сингулярности типа один, это также описано в следующих работах: [25], [24].

Регулярность решения осесимметричной задачи без угловой компоненты в области была доказана еще в 1968 О.А.Ладыженской (см. [7]), и позже аналогичный результат был получен другими методами (см. [9] и [6]). Однако этот вопрос до сих пор остается открытым вблизи границы. И теоретически у осесимметричного решения без угловой компоненты возможна сингулярность в точках пересечения оси симметрии с границей области.(См. [5]).

Общий осесимметричный случай еще менее исследован. В работах [6] и [25] была доказана регулярность осесимметричных слабых решений (1.11) в области, но только при условии (1.15). Аналогичный результат вблизи границы остается до сих пор открытым.

В этой работе условие (1.15) будет заменено более общим:

$$\sup_{r<1} A_w(u,r) \ \le \ C_0, \tag{1.16}$$

Где

$$A_w(u,r) \ := \ \frac{1}{\sqrt{r}} \sup_{t\in(-r^2,0)} \|u(\cdot,t)\|_{L_{2,w}(\mathcal{C}^+(r))}.$$

Введем также следующие обозначения для полуцилиндра

$$\mathcal{C}^+(r) := \{\ x \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x_1^2+x_2^2} < r,\ 0 < x_3 < r\ \}$$

А для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ за $L_{2,w}(\Omega)$ обозначим пространство слабых L_2 функций со следующей квазинормой:

$$\|f\|_{L_{2,w}(\Omega)} \ := \ \sup_{\alpha>0} \ \alpha \ |\{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\}|^{1/2}$$

Заметим, что любая измеримая функция u удвлетворяющая (1.15) также удовлетворяет (1.16) . Цель данной работы доказать что условие (1.16) является достаточным для того чтобы все остальные масштабно-инвариантные функционалы были ограничены.

Также интересно как это условие соотносится с другими, уже известными условиями сингулярности типа один. Условие (1.16) можно интерпритировать как:

$$\sup_{t\in(-1,0)} \|u(\cdot,t)\|_X \ < \ +\infty \tag{1.17}$$

Где X пространство Морри со следующей нормой:

$$\|w\|_X \ = \ \sup_{r<1} \frac{1}{\sqrt{r}} \|w\|_{L_{2,w}(\mathcal{C}^+(r))} \tag{1.18}$$

Рассмотрим следующую цепочку вложений пространств:

$$L_3(\mathcal{C}) \ \subset \ L_{3,w}(\mathcal{C}) \ \subset \ BMO^{-1}(\mathcal{C}) \ \subset \ \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}(\mathcal{C}). \tag{1.19}$$

Тогда известно что для любого подходящего слабого решения u и p системы (1.11) из условия (1.17) следует (1.10), где X-одно из пространств в цепочке (1.19). Более того в случае $X = L_3$ условие (1.17) гарантирует непрерывность по Гёльдеру решения u и внутри области и вплоть до границы(См. [3] и [11]). В случае $X = L_{3,w}$ гладкость u еще не доказна, но установлено неравенство (1.10). Это следует из основного результата работы (Теорема 2.1) и интерполяции. Если же $X = BMO^{-1}$ результат (2.2) был доказан в работе [8] и [12]. И совсем недавно был также рассмотрен случай $X = \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$, где установили (1.10) (см. [17]). Но все эти результаты сделаны только внутри области.

В данной работе рассмотрен случай у границы и для простарнства Морри с нормой (1.18), данное пространство шире чем $L_{3,w}(\mathcal{C})$ но еще не исследовано как оно соотносится с пространством Бесова $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}(\mathcal{C})$.

В работе будут использованы следующие обозначения:

- $\mathbb{R}^3_+ := \{ \ x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 > 0 \ \}$

- $\mathcal{C}(r) := \{ \ x \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r, \ |x_3| < r \ \}, \ \mathcal{C} := \mathcal{C}(1)$
- $\mathcal{C}^+(r) := \mathcal{C}^+(r) \cap \mathbb{R}^3_+, \quad \mathcal{C}^+ := \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^3_+$
- $L_s(\Omega)$, $W^k_s(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^k_s(\Omega)$ -пространства Лебега и Соболева
- for $s \in [1, +\infty]$ $L_{s,w}(\Omega)$ -слабое пространство Лебега со следующей квазинормой:

$$\|f\|_{L_{s,w}(\Omega)} \ := \ \sup_{\alpha > 0} \ \alpha \ |\{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\}|^{1/s}$$

  В случае $s = +\infty$ слабое пространство Лебега совпадает с обычным: $L_{\infty,w}(\Omega) := L_\infty(\Omega)$

- Пусть $s \in [1, \infty)$ и $r \in (0, +\infty)$ за $L^{s,r}(\Omega)$ обозначается пространство Лоренца со следующей квазинормой:

$$\|f\|_{L^{s,r}(\Omega)} \ := \ \left(\int\limits_0^{+\infty} \Big(\lambda^{\frac{1}{s}} f^*(\lambda) \Big)^r \ d\lambda \right)^{1/r} \tag{1.20}$$

  где $f^*(\lambda) := \inf\{ \ \alpha \geq 0 : \ d_f(\alpha) < \lambda \ \}$ это убывающая перестановка функции f и $d_f(\alpha) := \text{meas}\{x \in \Omega : \ |f(x)| \geq \alpha \ \}$.

- $Q(r) := \mathcal{C}(r) \times (-r^2, 0)$, $Q := Q(1)$
- За $[p]_\mathcal{C}$ и $(p)_Q$ обозначается интеграл от функции $p(x,t)$ деленный на меру множества:

$$[p]_\mathcal{C}(t) \ := \ \frac{1}{|\mathcal{C}|} \int\limits_\mathcal{C} p(x,t) \ dx, \qquad (p)_Q \ := \ \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q p(x,t) \ dxdt$$

- $Q^+(r) := \mathcal{C}^+(r) \times (-r^2, 0)$, $Q^+ := Q^+(1)$
- $L_{p,w;\infty}(Q^+(R)) = L_\infty(-R^2, 0; L_{p,w}(C^+(R)))$

2 Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим систему Навлье-Стокса в Q^+ (1.12):

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &=& 0 \\ \operatorname{div} u &=& 0 \\ u|_{x_3=0} = 0 & & \end{array}\right. \qquad \text{в} \quad Q^+. \tag{2.1}$$

Далее сформулирован главный результат работы:

Теорема 2.1. *Пусть* u *и* p *подходящее слабое решение* (1.12). *И пусть существует константа* $C_0 > 0$ *для которой условие* (1.16) *выполнено:*

$$\sup_{r<1} A_w(u,r) \ \leq \ C_0,$$

Где

$$A_w(u,r) \ := \ \frac{1}{\sqrt{r}} \sup_{t\in(-r^2,0)} \|u(\cdot,t)\|_{L_{2,w}(\mathcal{C}^+(r))}.$$

Тогда верно следующее:

$$\sup_{r<1}\Big(A(u,r)+C(u,r)+E(u,r)+D(p,r)\Big) \ < \ +\infty. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1 позволяет значительно ослабить условие сингулярности типа один, утверждая, что если у решения равномерно ограничен функционал $A_w(u,r)$ по r, то все остальные масштабно-инвариантные функционалы ограничены. Этот результата был доказан во внутреннем случае (см. [25, Лемма 3.6]). В данной работе рассматривается случай у границы.

Также из Теоремы 2.1 следует критерий ε-регулярности. Похожие условия для регулярности можно найти в [13, Утверждение 5.1]:

Теорема 2.2. *Существует* $\varepsilon > 0$, *такое что если подходящее слабое решение* u, p *системы* (1.12), *удовлетворяет условию* (1.16), *где* $C_0 < \varepsilon$ *то* u *непрерывно по Гельдеру вплоть до границы.*

План доказательства Теоремы 2.1:

- Некоторые неравенства для функций из пространств Лореца (см. Раздел 3).
- Оценка функционала $C(u, r)$ (см. Раздел 4 Теорема 4.1).
- Оценка функционала $D(p, r)$ (см. Раздел 4 Теорема 4.2). Данная оценка является новой и центральной для доказательства Теоремы 2.1.

3 Неравенства для функций из пространств Лоренца

Следующая теорема-это стандартная интерполяционная теорема для пространств Лоренца, см. [1, Теорема 5.3.1]:

Лемма 3.1. *Пусть даны* $1 \le p_1 < p < p_2 \le \infty$ *и* $\theta \in (0,1)$, *удовлетворяющие следующему условию:*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}.$$

Тогда для любого $0 < r \le \infty$ *существует константа* $c = c(p_1, p_2, p, r) > 0$ *такая, что в любой области* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *если функция* $u \in L_{p_1,w}(\Omega) \cap L_{p_2,w}(\Omega)$, *то* $u \in L^{p,r}(\Omega)$ *и верно следующее неравенство:*

$$\|u\|_{L^{p,r}(\Omega)} \ \le\ c\ \|u\|^{\theta}_{L_{p_1,w}(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L_{p_2,w}(\Omega)} \tag{3.1}$$

Далее с помощью Леммы 4.2 и теоремы вложения Соболева можно получить следующее следствие:

Лемма 3.2. *Пусть* $1 \le q \le p \le 6$ *и* $\theta \in [0,1]$ *такие, что выполнено условие:*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{(1-\theta)}{6}.$$

Тогда любая $f \in L_{q,w}(\mathcal{C}^+(r)) \cap W^1_2(\mathcal{C}^+(r))$ *будет принадлежать* $L_p(\mathcal{C}^+(r))$ *и существует константа* $c = c(p,q) > 0$ *не зависящая от* r *такая, что если дополнительно известно что* $f|_{x_3=0} = 0$ *то:*

$$\|f\|_{L_p(\mathcal{C}^+(r))} \ \le\ c\ \|f\|^{\theta}_{L_{q,w}(\mathcal{C}^+(r))} \|\nabla f\|^{1-\theta}_{L_2(\mathcal{C}^+(r))}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Применим Лемму 4.2 для функции f и показателей $p_1 = q,\ p_2 = 6,\ r = p$:

$$\|f\|_{L^{p,p}(\mathcal{C}^+(r))} \ \le\ c\ \|f\|^{\theta}_{L_{q,w}(\mathcal{C}^+(r))} \|f\|^{1-\theta}_{L_{6,w}(\mathcal{C}^+(r))} \le c\ \|f\|^{\theta}_{L_{q,w}(\mathcal{C}^+(r))} \|f\|^{1-\theta}_{L_6(\mathcal{C}^+(r))} \tag{3.3}$$

Далее по теореме вложения Соболева $\|f\|_{L_6(\mathcal{C}^+(r))} \le C\|f\|_{W^1_2(\mathcal{C}^+(r))}$. Из дополнительного условия $f|_{x_3=0} = 0$ норма $\|f\|_{W^1_2(\mathcal{C}^+(r))}$ эквивалентна $\|\nabla f\|_{L_2(\mathcal{C}^+(r))}$, что и требовалось доказать. □

Следующее неравенство является обощением неравенства Гельдера на случай пространств Лоренца (и называется неравенством О'Нейла [4, Упражнение 1.4.19]):

Лемма 3.3. *Пусть* q_1, q_2, $q \in (1, +\infty]$ *и* s_1, s_2, $s \in (0, +\infty]$ *выбраны так, что выполнено следующее:*

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q} \quad \textit{и} \quad \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s}$$

Тогда

$$\|fg\|_{L^{q,s}(\mathcal{C}^+(r))} \ \leq \ c(q_1, q_2, s_1, s_2) \ \|f\|_{L^{q_1,s_1}(\mathcal{C}^+(r))} \|g\|_{L^{q_2,s_2}(\mathcal{C}^+(r))}$$

В работе потребуется неравенство О'Нейла примененное для трех функций

Лемма 3.4. *Пусть* q_1, q_2, q_3, $q \in (1, +\infty]$ *и* s_1, s_2, s_3, $s \in (0, +\infty]$ *такие, что:*

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = \frac{1}{q} \quad \textit{и} \quad \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = \frac{1}{s}$$

Тогда

$$\|fgh\|_{L^{q,s}(\mathcal{C}^+(r))} \ \leq \ c(q_i, s_i) \ \|f\|_{L^{q_1,s_1}(\mathcal{C}^+(r))} \|g\|_{L^{q_2,s_2}(\mathcal{C}^+(r))} \|h\|_{L^{q_3,s_3}(\mathcal{C}^+(r))} \tag{3.4}$$

Доказательство. Применим сначала неравенство О'Нейла для функций f, gh и показателей $q_1, \frac{q_2 q_3}{q_2+q_3}$, $s_1, \frac{s_2 s_3}{s_2+s_3}$

$$\|fgh\|_{L^{q,s}(\mathcal{C}^+(r))} \ \leq \ c(q_i, s_i) \ \|f\|_{L^{q_1,s_1}(\mathcal{C}^+(r))} \|gh\|_{L^{\frac{q_2 q_3}{q_2+q_3}, \frac{s_2 s_3}{s_2+s_3}}(\mathcal{C}^+(r))} \tag{3.5}$$

Далее еще раз применим неравенство О'Нейла для последнего множителя

$$\|gh\|_{L^{\frac{q_2 q_3}{q_2+q_3}, \frac{s_2 s_3}{s_2+s_3}}(\mathcal{C}^+(r))} \leq C(q_i, s_i) \|g\|_{L^{q_2,s_2}(\mathcal{C}^+(r))} \|h\|_{L^{q_3,s_3}(\mathcal{C}^+(r))} \tag{3.6}$$

Что и требовалось доказать. □

4 Доказательство основного результата

Сначала из интерполяционного неравенства получим оценку функционала $C(u,r)$. Далее для краткости обозначим $A_w(r) := A_w(u,r)$, $C(r) := C(u,r)$ и аналогично для всех функционалов в (1.14).

Теорема 4.1. *Пусть u и p подходящее слабое решение в Q^+. Тогда для него верно следующее неравенство:*

$$C(r) \ \leq \ c\ A_w^{\frac{1}{2}}(r)\ E^{\frac{1}{2}}(r) \tag{4.1}$$

Доказательство. Применяя (3.2) для показателей $p = 3,\ q = 2$, и $\theta = \frac{1}{2}$, получаем требуемое неравенство. □

Далее доказывается оценка на функционал давления, она является основой для доказательства Теоремы 2.1. Эта теорема отлична от ее аналога во внутреннем случае и требует более точных вычислений. Для ее доказательства используется техника, разработаная в статье [10], которая позволяет оценивать решение вплоть до границы.

Теорема 4.2. *Для любого $\delta \in (0,1)$ существуют положительные константы c_1, c_2, такие что для любого подходящего слабого решения (u,p) системы Навье-Стокса в Q^+ выполнена следующая оценка:*

$$D(\theta r) \ \leq \ c_1\theta^{\frac{4}{3}}\big(C(r) + D(r)\big) + c_2\theta^{-\frac{4}{3}}E^{1+\delta}(r)A_w^{1-\delta}(r), \tag{4.2}$$

для любых $r \in (0,1)$ и $\theta \in (0,\frac{1}{2})$.

Доказательство. Сначала докажем оценку (4.2) при $r = 1$. Представим давление и скорость $p = p_1 + p_2$; $u = u_1 + u_2$, где u_1 и p_1 решения следующей начально-краевой задачи:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u_1 - \Delta u_1 + \nabla p_1 & = & (u\cdot\nabla)u \\ \operatorname{div} u_1 & = & 0 \\ u_1|_{\partial Q^+} = 0 & & \end{array}\right. \qquad \text{в} \quad Q^+. \tag{4.3}$$

Тогда функции $u_2 = u - u_1$ и $p_2 = p - p_1$ удовлетворяют системе:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u_2 - \Delta u_2 + \nabla p_2 & = & 0 \\ \operatorname{div} u_2 & = & 0 \\ u_2|_{x_3=0} = 0 & & \end{array}\right. \qquad \text{в} \quad Q^+.$$

Более того, без ограничения общности можно считать, что при $t \in (-1,0)$ $[p]_{\mathcal{C}^+} = [p_1]_{\mathcal{C}^+} = [p_2]_{\mathcal{C}^+} = 0$. Правая часть $(u\cdot\nabla)u$ системы (4.3) принадлежит $L_{\frac{9}{8},\frac{3}{2}}(Q)$. Следовательно, применяя коэрцетивную оценку решения системы Стокса в анизотропных пространствах соболева (см. [27]) получаем что для любого $\varepsilon \in (0,\frac{1}{8}]$:

$$\|u_1\|_{W^{2,1}_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} + \|\nabla p_1\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} \;\leq\; c\;\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)}.$$

Далее оцениваем правую часть,разбивая ее следующим образом:

$$|(u\cdot\nabla)u| \;\leq\; |u|^{\frac{1}{3}}|u|^{\frac{2}{3}}|\nabla u|.$$

Применяя (3.4) с показателями $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = \frac{6(1+\varepsilon)}{1-5\varepsilon}$ и $r_1 = 2$, $r_2 = \infty$, $r_3 = \frac{2(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}$ такими,что :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1-5\varepsilon}{6(1+\varepsilon)}, \qquad \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty} + \frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$$

Мы получаем,что для п.в. $t \in (-1,0)$ выполнено следующее неравенство:

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{1+\varepsilon}(\mathcal{C}^+)} \;\leq\; c\;\|\nabla u\|_{L_2(\mathcal{C}^+)}\||u|^{\frac{2}{3}}\|_{L_{3,w}(\mathcal{C}^+)}\||u|^{\frac{1}{3}}\|_{L^{\frac{6(1+\varepsilon)}{1-5\varepsilon},\frac{2(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}}(\mathcal{C}^+)}$$

Правую часть можно упростить по свойству нормы пространства Лоренца : $\left\||u|^\theta\right\|_{L^{q,s}(\mathcal{C}^+)} \;=\; \|u\|^\theta_{L^{\theta q,\theta s}(\mathcal{C}^+)}$, где $q,\theta \in (0,+\infty)$ и $s \in (0,+\infty]$, и в итоге получить:

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{1+\varepsilon}(\mathcal{C}^+)} \;\leq\; c\;\|\nabla u\|_{L_2(\mathcal{C}^+)}\|u\|^{\frac{2}{3}}_{L_{2,w}(\mathcal{C}^+)}\|u\|^{\frac{1}{3}}_{L^{\frac{2(1+\varepsilon)}{1-5\varepsilon},\frac{2(1+\varepsilon)}{3(1-\varepsilon)}}(\mathcal{C}^+)}.$$

Далее мы проинтегрируем по времени и применим неравенство Гельдера с показателями $l_1 = 2$, $l_2 = \infty$, $l_3 = 6$,

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{6},$$

В итоге мы оценили конвективный член следующим образом:

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} \;\leq$$
$$\leq\;\; c\;\|\nabla u\|_{L_2(Q^+)}\;\|u\|^{\frac{2}{3}}_{L_{2,w;\infty}(Q^+)}\;\|u\|^{\frac{1}{3}}_{L_2\left(-r^2,0;\;L^{\frac{2(1+\varepsilon)}{1-5\varepsilon},\frac{2(1+\varepsilon)}{3(1-\varepsilon)}}(\mathcal{C}^+)\right)}$$

С помощью интерполяционного неравенства (3.1) правую часть можно оценить:

$$\|u\|_{L_{\frac{2(1+\varepsilon)}{1-5\varepsilon},\frac{2(1+\varepsilon)}{3(1-\varepsilon)}}(\mathcal{C}^+)} \leq c\ \|u\|^{1-\delta'}_{L_{2,w}(\mathcal{C}^+(r))}\|u\|^{\delta'}_{L_6(\mathcal{C}^+)}.$$

Где $\frac{1-5\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} = \frac{1-\delta'}{2} + \frac{\delta'}{6}$ и $\delta' = \frac{3\varepsilon}{1-5\varepsilon}$. И применив теорему вложения Соболева получаем:

$$\|u\|_{L_{\frac{2(1+\varepsilon)}{1-5\varepsilon},\frac{2(1+\varepsilon)}{3(1-\varepsilon)}}(\mathcal{C}^+)} \ \leq \ c\ \|u\|^{1-\delta'}_{L_{2,w}(\mathcal{C}^+)}\|\nabla u\|^{\delta'}_{L_2(\mathcal{C}^+)},$$

А следовательно:

$$\|u{\cdot}\nabla u\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} \ \leq \ c\,\|\nabla u\|^{1+\frac{\delta'}{3}}_{L_2(Q^+)}\|u\|^{\frac{2}{3}+\frac{1-\delta'}{3}}_{L_{2,w;\infty}(Q^+)} \ = \ c\,\|\nabla u\|^{1+\delta}_{L_2(Q^+)}\|u\|^{1-\delta}_{L_{2,w;\infty}(Q^+)},$$

где $\delta := \frac{\delta'}{3} = \frac{\varepsilon}{1-5\varepsilon}$. И в итоге получаем финальную оценку для u_1, p_1 :

$$\|u_1\|_{W^{2,1}_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} + \|\nabla p_1\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} \ \leq \ c\ \|\nabla u\|^{1+\delta}_{L_2(Q^+)}\|u\|^{1-\delta}_{L_{2,w;\infty}(Q^+)}.$$

Далее нужно оценить норму ∇p_2. Из локальной теории регулярности для линейной системы Стокса вблизи границы, (см. [18, Теорема 2.3]), следует что для любого $m \in (1, +\infty)$ давление лежит в следующем классе: $p_2 \in W^{1,0}_{m,\frac{3}{2}}(Q^+(\frac{1}{2}))$ и верна оценка:

$$\begin{aligned}
\|\nabla p_2\|_{L_{m,\frac{3}{2}}(Q^+(\frac{1}{2}))} \ &\leq \ c\ \Big(\|u_2\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} + \|p_2\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)}\Big) \ \leq \\
\leq \ c\ \Big(\|u_1\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} &+ \|u\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} + \|p\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} + \|p_1\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)}\Big) \ \leq \\
\leq \ c\ \Big(\|u\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} &+ \|p\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)} + \|\nabla u\|^{1+\delta}_{L_2(Q^+)}\|u\|^{1-\delta}_{L_{2,w;\infty}(Q^+)}\Big).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Выберем любое $\theta < \frac{1}{2}$ и применим неравенство Пуанкарэ

$$\|p_2 - [p_2]_{\mathcal{C}^+(\theta)}\|_{L_{\frac{3}{2}}(Q^+(\theta))} \ \leq \ c\ \theta^{\beta}\|\nabla p_2\|_{L_{m,\frac{3}{2}}(Q^+(\frac{1}{2}))},$$

где $\beta > 0$ зависит от $m \in (1, +\infty)$. При $m = 9$ получаем что $\beta = \frac{8}{3}$. Теперь можно оценить $p = p_1 + p_2$:

$$\|p - [p]_{\mathcal{C}^+(\theta)}\|_{L_{\frac{3}{2}}(Q^+(\theta))} \leq 2\|p_1\|_{L_{\frac{3}{2}}(Q^+(\theta))} + \|p_2 - [p_2]_{C^+(\theta)}\|_{L_{\frac{3}{2}}(Q^+(\theta))} \leq$$

$$\leq c\Big(\ \|\nabla u\|^{1+\delta}_{L_2(Q^+)}\|u\|^{1-\delta}_{L_{2,w;\infty}(Q^+)} + \theta^{\frac{8}{3}}\|\nabla p_2\|_{L_{9,\frac{3}{2}}(Q^+(\frac{1}{2}))}\Big).$$

С учетом (4.4), где $m=9$ получаем следующее:

$$\begin{aligned} \|p-[p]_{\mathcal{C}^+(\theta)}\|_{L_{\frac{3}{2}}(Q^+(\theta))} \ \leq \ c\,\|\nabla u\|^{1+\delta}_{L_2(Q^+)}\|u\|^{1-\delta}_{L_{2,w;\infty}(Q^+)}+ \\ +c\,\theta^{\frac{8}{3}}\Big(\|u\|_{L_{1+\varepsilon,\frac{3}{2}}(Q^+)}+\|p\|_{L_{\frac{3}{2}}(Q^+)}\Big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Поделив обе части на меру области в соответсвующей степени мы можем переписать (4.5) в терминах масштабно-инвариантных функционалов:

$$D(\theta) \ \leq \ c_1\ \theta^{\frac{4}{3}}(C(1)+D(1))+c_2\theta^{-\frac{4}{3}}E^{1+\delta}(1)A_w^{1-\delta}(1).$$

Для завершения доказательства надо сделать масштабированое преобразование

$$u(x,t)=rv(rx,r^2t);\ \ p(x,t)=r^2q(rx,r^2t);$$

И получаем (4.2) для любых $r\in(0,1)$ и $\theta\in(0,\frac{1}{2})$. □

Теперь из этой оценки можно вывести Теорему 2.1:

Доказательство. Из того что (u,p)-подходящее слабое решение и выполнено (1.16),(1.13) следует что:

$$\sup_{r<1}A_w(r)\leq C_0, \qquad A\Big(\frac{3}{4}\Big)\ +\ E\Big(\frac{3}{4}\Big)\ \leq\ C_1\ <\ \infty$$

Применяя (4.1) получаем:

$$C(r)\ \leq\ c(C_0)\ E^{\frac{1}{2}}(r). \tag{4.6}$$

Обозначим $\mathcal{E}(r)=E(r)+A(r)+D(r)$. Далее используем локально-энергетическое неравенство (1.13) и получаем что для любого $\theta\in(0,\frac{1}{16})$:

$$\mathcal{E}(\theta r)\ \leq\ C(2\theta r)+C^{\frac{3}{2}}(2\theta r)+C^{\frac{1}{2}}(2\theta r)D^{\frac{1}{2}}(2\theta r)+D(\theta r).$$

Правая часть упрощается по неравенству Юнга:

$$\mathcal{E}(\theta r)\ \leq\ c\,(C(2\theta r)+C^{\frac{3}{2}}(2\theta r)+D(2\theta r)). \tag{4.7}$$

Выбирая в (4.2) $\delta=\frac{1}{7}$ и применив (4.6) мы получаем:

$$D(\theta r)+D(2\theta r)\ \leq\ c\,\theta^{\frac{4}{3}}\Big[C\Big(\frac{r}{4}\Big)+D\Big(\frac{r}{4}\Big)\Big]\ +\ c(C_0)\theta^{-\frac{4}{3}}E^{\frac{8}{7}}\Big(\frac{r}{4}\Big). \tag{4.8}$$

Собирая вместе (4.6), (4.7) и (4.8) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\theta r) \ &\le \ c(C_0)\Big[E^{\frac{1}{2}}(2\theta r) + E^{\frac{3}{4}}(2\theta r) + \theta^{-\frac{4}{3}}E^{\frac{8}{7}}\Big(\frac{r}{4}\Big)\Big] + c\theta^{\frac{4}{3}}\Big(C\Big(\frac{r}{4}\Big) + D\Big(\frac{r}{4}\Big)\Big) \le \\ &\le \ c(C_0)\Big[\theta^{-\frac{1}{4}}\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(r) + \theta^{-\frac{3}{8}}\mathcal{E}^{\frac{3}{4}}(r) + \theta^{-\frac{4}{3}}E^{\frac{8}{7}}\Big(\frac{r}{4}\Big)\Big] + c\theta^{\frac{4}{3}}\mathcal{E}\Big(\frac{r}{4}\Big)\end{aligned} \tag{4.9}$$

В правой части (4.9) функционал E в степени $\frac{8}{7} > 1$. Для того чтобы его оценить, воспользуемся еще раз (4.6) и (4.7) :

$$\begin{aligned}E^{\frac{8}{7}}(\frac{r}{4}) \ &\le \ \Big(C\Big(\frac{r}{2}\Big) + C^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{r}{2}\Big) + D\Big(\frac{r}{2}\Big)\Big)^{\frac{8}{7}} \ \le \\ &\le c(C_0)\Big(\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(r) + \mathcal{E}^{\frac{3}{4}}(r)\Big)^{\frac{8}{7}} \ \le \ c(C_0)\Big(\mathcal{E}^{\frac{4}{7}}(r) + \mathcal{E}^{\frac{6}{7}}(r)\Big).\end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (4.9), мы получаем:

$$\mathcal{E}(\theta r) \ \le \ c(C_0)\Big[\theta^{-\frac{1}{4}}\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(r) + \theta^{-\frac{3}{8}}\mathcal{E}^{\frac{3}{4}}(r) + \theta^{-\frac{4}{3}}\Big(\mathcal{E}^{\frac{4}{7}}(r) + \mathcal{E}^{\frac{6}{7}}(r)\Big)\Big] + c\theta^{\frac{4}{3}}\mathcal{E}(r)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ и воспользовавшись неравенством Юнга: $\theta^\beta\mathcal{E}^\alpha(r) \le \varepsilon\mathcal{E}(r) + c(\varepsilon, \theta, \alpha, \beta)$ для любых $\alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, мы выводим следующую оценку:

$$\mathcal{E}(\theta r) \ \le \ \mathcal{E}(r)(\varepsilon + c\theta^{\frac{4}{3}}) + F(\varepsilon, C_0, \theta),$$

где $F(\varepsilon, C, \theta)$ является непрерывной функцией, неубывающей по C и удвлетворяющая следующему свойству:

для любого фиксированого $\ \varepsilon, \theta \in (0,1) \quad F(\varepsilon, C, \theta) \to 0 \quad$ при $\quad C \to +0.$

Теперь мы фиксируем $\theta \in (0, \frac{1}{16})$ и выберем $\varepsilon \in (0,1)$ так, чтобы $\varepsilon + c\theta^{\frac{4}{3}} \le \frac{1}{2}$. Из этого следует оценка:

$$\mathcal{E}(\theta r) \ \le \ \frac{1}{2}\,\mathcal{E}(r) + F(C_0), \qquad \forall\, r \in (0,1). \tag{4.10}$$

Далее нужно применить стандартную итерационную технику. Пусть $r \le \frac{1}{16}$ тогда существует номер n такой что $\frac{1}{2^n} \ge r > \frac{1}{2^{n+1}}$, из (4.10) вытекает:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(r) \ &\le \ c\mathcal{E}(\frac{1}{2^n}) \ \le c\Big(\frac{1}{2}\,\mathcal{E}(\frac{1}{2^{n-1}}) + F(C_0)\Big) \le \\ &\le ... \le \frac{c}{2^n}\mathcal{E}(1) + F(c_0)(1 + \frac{1}{2} + ...\frac{1}{2^{n-1}}) \le C(r + F(C_0)).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Для $r > \frac{1}{16}$ можно применить неравенство Гельдера:

$$\mathcal{E}(r) \ \leq C\mathcal{E}(1) \tag{4.12}$$

В итоге получаем, что

$$\sup_{r<1} \mathcal{E}(r) \ \leq \ C(C_0, \mathcal{E}(1)) \ < \ +\infty. \tag{4.13}$$

Теорема 2.1 доказана. □

Теперь, из основного резульатата можно получить Теорему 2.2 как следствие:

Доказательство. Пусть $C_0 \leq \varepsilon$. Так как функция $F(C)$ в (4.11) непрерывна, монотонна и стремится к 0 при $C \to +0$ выбор такого $\varepsilon > 0$ возможен. Далее выберем достаточно малый радиус r_0 и из (4.11) следует:

$$\sup_{r<r_0} \mathcal{E}(r) \ \leq \ \varepsilon_*$$

где $\varepsilon_* > 0$-абослютная константа из граничного аналога теоремы Кафарелли-Кона-Ниренберга, см. [10]. Поэтому Теорема 2.2 следует из уже изветсных результатов: [10], см также [14] и [18]. □

Список литературы

[1] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation spaces. An introduction. Springer, 1976.

[2] L. Caffarelli, R.V. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.

[3] L. Escauriaza, G. Seregin, V. Sverak, $L_{3,\infty}$*–solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, Russian Math. Surveys **58** (2003), no. 2, 211–250.

[4] L. Grafakos, Classical Fourier analysis-Springer, New York, 2009.

[5] K. Kang, *Regularity of axially symmetric flows in a half-space in three dimensions*, SIAM Journal of Math. Analysis, **35** (2004), no.6, pp. 1636–1643.

[6] G. Koch, N. Nadirashvili, G. Seregin, V. Sverak, *Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications.* Acta Math. **203** (2009), no. 1, 83–105.

[7] O.A. Ladyzhenskaya, *On the unique solvability in large of a three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry* (in Russian), Zapiski Nauchn. Sem. LOMI, **7** (1968), 155–177.

[8] Z. Lei, Q. Zhang, *A Liouville theorem for the axi-symmetric Navier-Stokes equations*, J. Funct. Anal. **261** (8), (2011) 2323–2345.

[9] S. Leonardi, J. Malek, J. Necas, M. Pokorny, *On axially symmetric flows in* $\mathbb{R}^3$, Journal for Analysis and its Applications, **18** (1999), no. 3, 639–649.

[10] G.A. Seregin, *Local regularity of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations near the boundary*, J. Math. Fluid Mech., **4** (2002), no.1, pp. 1–29.

[11] G.A. Seregin, *On smoothness of* $L_{3,\infty}$*-solutions to the Navier-Stokes equations up to boundary*, Mathematische Annalen, **332** (2005) 219–238.

[12] G.A. Seregin, *Note on bounded scale-invariant quantities for the Navier–Stokes equations*, Zapiski Nauchn. Sem. LOMI, **397** (2011), 150–156.

[13] G. Seregin, V. Sverak, *Rescalings at possible singularities of Navier-Stokes equations in half-space*, Algebra and Analysis, **25** (2013) no.5, 146–172.

[14] G.A. Seregin, Lecture notes on regularity theory for the Navier-Stokes equations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015.

[15] A. S. Mikhailov, *Local regularity for suitable weak solutions of the Navier-Stokes Equation near the boundary*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2009, Volume 370, 73–94

[16] A. S. Mikhailov, *On local regularity for suitable weak solutions of the Navier-Stokes Equation near the boundary*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2010, Volume 385, 83–98

[17] G. Seregin, D. Zhou, *regularity to the Navier-Stokes equations in* $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2018, Volume 477, 119–129

[18] G.A. Seregin, T.N. Shilkin, *The local regularity theory for the Navier-Stokes equations near the boundary*, Proceedings of the St Petersburg Mathematical Society, **15** (2014), 219–244.

[19] A.A. Kiselev, O.A. Ladyjenskaya, *On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous, incompressible fuid*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **21** (1957), 655–680.

[20] О.А. Ладыженская, *О единственности и гладкости обобщенных решений уравне- ний Навье-Стокса*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **5** (1967), 169–185

[21] Г.А. Серегин, *О локальной регулярности подходящих слабых решений уравнений Навье-Стокса*, Успехи математических наук, 62:3 (375) (2007), 149–168.

[22] L. Escauriaza, G. Seregin, V. Sverak , $L_{3,\infty}$ *-решения уравнений Навье-Стокса и обратная единственность*, Успехи математических наук , **58**:2 (350) (2003), 3–44. English translation: $L_{3,\infty}$-*solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, Russian Math. Surveys **58** (2003), no. **2**, 211–250.

[23] G. Seregin, V. Sverak, *Rescalings at possible singularities of Navier-Stokes equations in half-space.* Algebra i Analiz **25** (2013), no. 5, 146-172; translation in St. Petersburg Math. J. 25 (2014), no. 5, 815–833

[24] G. Seregin, T. Shilkin, *Liouville-type theorems for the Navier-Stokes equations*, Russian Mathematical Surveys, **73:4** (442) (2018), 103–170 (in Russian).

[25] G. Seregin, V. Sverak, *On type I singularities of the local axi-symmetric solutions of the Navier–Stokes equations*, Comm. Partial Differential Equations **34** (2009), no. 1-3, 171–201.

[26] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), no. 1, 193–248.

[27] В.А. Солонников, *Об оценках решений нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С.Л. Соболева и об оценках резольвенты оператора Стокса*, Успехи математических наук, **58**:2 (350) (2003), 123–156.