САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. З. Веселовская, Н. Б. Шепелявая

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Пространство $\mathbb{R}^n$ и его линейные подпространства

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург

2021

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент Б.М. Беккер (СПбГУ),
канд. техн. наук, доцент А. К. Рынская (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)

Рекомендовано к опубликованию
Учебно-методической комиссией по УГСН 01.00.00 «Математика и механика»
С.-Петербургского государственного университета

Веселовская А.З., Шепелявая Н.Б.
Элементы линейной алгебры. Пространство $\mathbb{R}^n$ и его линейные подпространства: учеб. пособие. – СПб.: СПбГУ, 2021. – 50 с.

В учебном пособии представлены основные сведения о пространстве $\mathbb{R}^n$ и его линейных подпространствах. Кроме классических тем рассматриваются такие важные для приложений задачи, как нахождение проекции вектора на линейное подпространство и приближенное решение несовместных систем линейных уравнений методом наименьших квадратов. Изложение ведется достаточно подробно, в доступной форме, иллюстрируется примерами, рисунками и задачами с решениями.

Пособие предназначено студентам нематематических специальностей, изучающим линейную алгебру.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемом пособии на примере пространства $\mathbb{R}^n$ и его линейных подпространств рассматриваются элементы линейной алгебры, связанные с понятием n-мерного евклидова пространства. Можно заметить, что этот раздел, несмотря на его важность для приложений, редко излагается в курсах линейной алгебры или включается в учебники, предназначенные для студентов нематематических специальностей.

Данная работа базируется на лекциях по линейной алгебре, которые на протяжении многих лет читались А. З. Веселовской на экономическом факультете СПбГУ, и на лекциях Н. Б. Шепелявой по высшей математике для студентов-лингвистов. Предполагается, что читателю знакомы основные темы, касающиеся матриц, определителей и систем линейных уравнений (включая матричную и векторную формы их записи, а также решение систем методом Гаусса). Соответствующие сведения можно найти в источниках, приведенных в списке литературы.

В учебном пособии вводятся понятия n-мерного координатного пространства, скалярного произведения, линейной зависимости векторов, базиса линейного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, а также рассматриваются такие задачи, как нахождение проекции вектора на линейное подпространство и приближенное решение несовместных систем линейных уравнений методом наименьших квадратов.

Учитывая, что пособие ориентировано в основном на студентов, не имеющих серьезной математической подготовки, изложение ведется достаточно подробно, в доступной форме, иллюстрируется примерами, рисунками и задачами с решениями. Большое внимание уделено разъяснению смысла определений и утверждений. Встречающийся в тексте символ $\blacksquare$ обозначает конец доказательства.

Пособие предназначается студентам нематематических специальностей, изучающим линейную алгебру, а также может оказаться полезным тем, кто связан с обработкой и анализом многомерных количественных данных и с использованием линейных моделей.

Авторы признательны Сергею Веселовскому, принимавшему активное участие в создании макета пособия.

§1. *n*-мерное координатное пространство

I. Понятие *n*-мерного вектора.

Приступая к знакомству с данным разделом линейной алгебры, определим основной объект изучения: n-мерный вектор.

1) Определение. Упорядоченный набор из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *n-мерным вектором*. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *координатами* этого вектора.

Для обозначения векторов будем использовать большие латинские буквы: $A, B, X, Y, \dots$ Иногда используют также строчные буквы и жирный шрифт: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots$

Пример. $A = (1; -2;\ 13;\ 8)$ – четырехмерный вектор.

Отметим, что в виде n-мерных векторов удобно представлять наборы различных количественных данных, относящихся к одному объекту исследования. Это могут быть наборы из n экономических показателей предприятия, результаты успеваемости студента по n предметам и т.д.

2) Допускается запись координат вектора в столбец:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Для уточнения вида записи координат вектора используют термины: «вектор-строка» и «вектор-столбец».

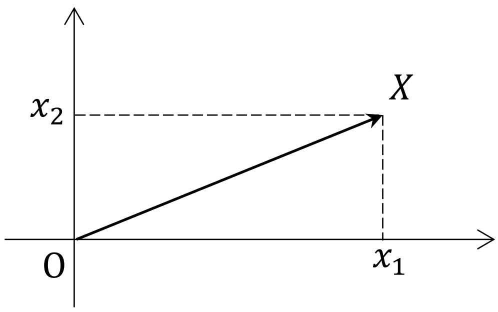
3) Вектор $\mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0)$ называется *нулевым*.

4) Для двумерных и трехмерных ненулевых векторов можно использовать геометрическую интерпретацию в виде направленных отрезков.

а) Пусть $n = 2$; рассмотрим

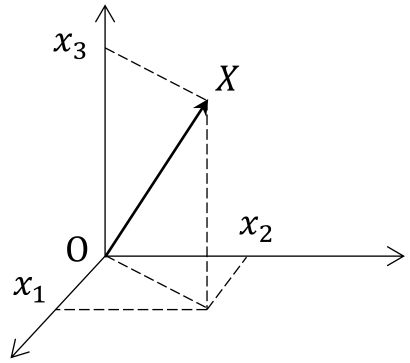
$X = (x_1, x_2)$.

Вектор X будем интерпретировать как направленный отрезок, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке с координатами (x_1, x_2).



Аналогично для трехмерного вектора:

б) $n = 3$; $X = (x_1, x_2, x_3)$.



Замечание. Нулевой вектор интерпретируется как точка с нулевыми координатами.

II. Действия над векторами.

Определим две операции над векторами: умножение вектора на число и сложение векторов.

1) Умножение вектора на число.

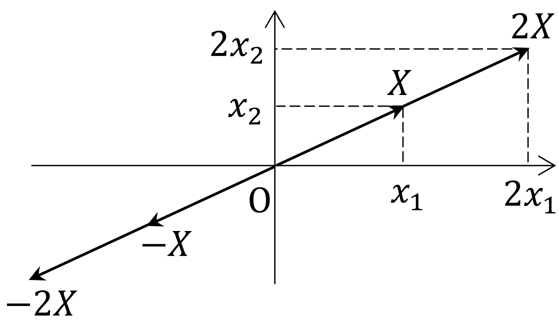
Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда $\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Иначе говоря, умножение вектора на число означает умножение всех его координат на данное число.

Пример. $X = (1;\ 2;\ 3;\ -4)$; $\ -3X = (-3; -6;\ -9;\ 12)$.

Приведем геометрическую иллюстрацию умножения двумерного вектора на число.

Пусть $X = (x_1, x_2)$.



Вектор $2X$ имеет то же направление, что и вектор X, а длину – в два раза большую, чем длина вектора X. Векторы $-X$ и $-2X$ имеют направление, противоположное вектору X.

2) Сложение векторов.

Пусть X, Y – n-мерные векторы. Сумма векторов определяется формулой

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Таким образом, при сложении векторов их соответствующие координаты складываются.

Замечание. Разность векторов определяется как

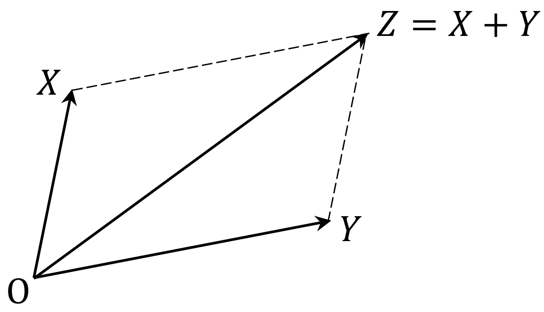
$$X - Y = X + (-Y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$

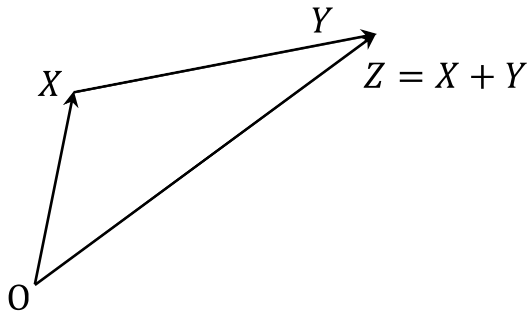
Пример. Пусть $X = (0;\ 1;\ -2;\ 5)$, $Y = (3; -2;\ 0;\ 4)$. Тогда

$X + Y = (3;\ -1;\ -2;\ 9)$, $X - Y = (-3;\ 3;\ -2;\ 1)$.

Приведем геометрическую интерпретацию сложения векторов для $n = 2$ или $n = 3$.

Пусть $Z = X + Y$. Вектор Z – это результат сложения направленных отрезков X и Y по правилу параллелограмма или по правилу треугольника:





3) Свойства действий над векторами.

Пусть X, Y, Z – n-мерные векторы; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $X + Y = Y + X$;
2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;
3. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$;
4. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$;
5. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$.

Все эти свойства вытекают непосредственно из определений действий над векторами.

Пример. Пусть $X = (0;\ 1;\ -2;\ 5)$, $Y = (3; -2;\ 0;\ 4)$. Тогда

$3(X + Y) - 2X = 3X + 3Y - 2X = X + 3Y = (0;\ 1;\ -2;\ 5) +$
$+ (9; -6;\ 0;\ 12) = (9; -5; -2;\ 17)$.

Замечание. Если рассматривать вектор как матрицу, состоящую из одной строки (одного столбца), то введенные операции над векторами будут идентичны линейным операциям над матрицами.

III. Определение *n*-мерного координатного пространства.

Определение. *n-мерным координатным пространством* называется совокупность всех n-мерных векторов, которая рассматривается с определенными в ней операциями сложения и умножения на число.

Обозначение: $\mathbb{R}^n$.

Частные случаи: $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}$ – координатная (числовая) прямая;

$\mathbb{R}^2$ – координатная плоскость;

$\mathbb{R}^3$ – трехмерное координатное пространство.

§2. Скалярное произведение векторов

В этом параграфе мы введем новую операцию над элементами пространства $\mathbb{R}^n$. В отличие от двух предыдущих, результатом ее выполнения будет не вектор, а вещественное число.

I. Определение скалярного произведения.

Определение. *Скалярным произведением* векторов $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется *число*

$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$

Замечания.

1) Точка между векторами как знак скалярного произведения обязательна.

2) Иногда скалярное произведение обозначают так: (X, Y).

Пример. $A = (2; -1),\ B = (1;\ 3)\ \Rightarrow\ A \cdot B = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = -1;$

$C = (2;\ 0;\ 1;\ 0),\ D = (0; -2;\ 0;\ 4)\ \Rightarrow\ C \cdot D = 0.$

II. Свойства скалярного произведения.

Пусть X, Y, Z – n-мерные векторы.

1. а) $X \cdot X \geq 0$;
б) $X \cdot X = 0$ тогда и только тогда, когда $X = \mathbb{O}$.
Доказательство.
$X \cdot X = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$, причем сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда все $x_i = 0$, то есть $X = \mathbb{O}$. ■

2. $X \cdot Y = Y \cdot X$ (следует из определения).

Следующие два свойства легко проверяются с помощью определений.

3. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$.

Пример (использование скалярного произведения в экономической задаче).

Пусть X – вектор объемов различных товаров, Y – вектор их цен. Тогда суммарная стоимость этих товаров будет равна $X \cdot Y$.

III. Длина (норма) вектора.

1) Определение. *Длиной (нормой)* вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется число

$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$

Пример. $X = (1;\ 2;\ 0; -2);\ \|X\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$

Замечание. Для двумерных и трехмерных векторов $\|X\|$ – это длина соответствующего направленного отрезка.

2) Свойства нормы вектора

1°. а) $\|X\| \geq 0$;
б) $\|X\| = 0$ тогда и только тогда, когда $X = \mathbb{O}$.
(См. свойство 1 скалярного произведения.)

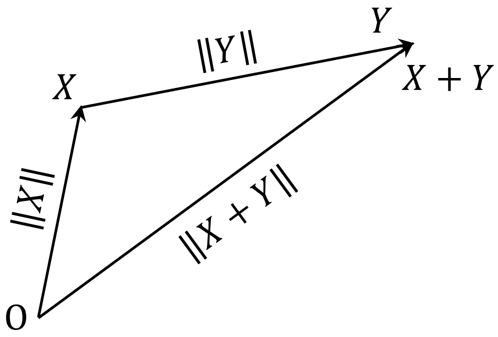
2°. Изменение нормы при умножении вектора на число:
$\|\alpha X\| = |\alpha| \cdot \|X\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Доказательство.
$\|\alpha X\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \cdots + (\alpha x_n)^2} =$
$\sqrt{\alpha^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} = |\alpha| \cdot \|X\|$. ■

Пример. $\|-2X\| = 2 \cdot \|X\|$.

3°. Неравенство треугольника. Для любых n-мерных векторов X и Y

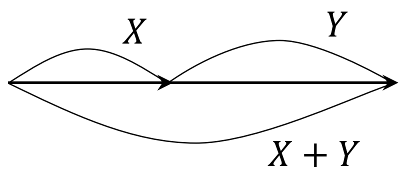
$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Геометрические иллюстрации для $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.



а) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, следовательно,

$\|X + Y\| < \|X\| + \|Y\|$.



б) $\|X + Y\| = \|X\| + \|Y\|$

3) Определение. Вектор называется *единичным (нормированным),* если его норма (длина) равна 1.

Пример. $X = (1; 0; 0; 0)$, $\|X\| = \sqrt{1 + 0 + 0 + 0} = 1$;

$Y = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\|Y\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

Следовательно, X, Y – единичные векторы.

Нормирование вектора.

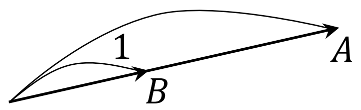
Пусть A – ненулевой вектор, причем $\|A\| \neq 1$, то есть вектор A – не нормированный (не единичный).

Рассмотрим вектор $B = \alpha A$, где $\alpha = \frac{1}{\|A\|}$. Тогда

$\|B\| = |\alpha| \cdot \|A\| = \frac{1}{\|A\|} \cdot \|A\| = 1.$

То есть мы получили нормированный вектор B, пропорциональный данному вектору A.

Геометрическая иллюстрация для $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.



Пример. $A = (2; -1)$, $\|A\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \neq 1$.

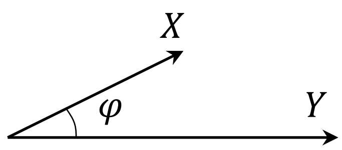
Нормируем вектор A. Пусть $B = \frac{1}{\sqrt{5}} A = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, тогда $\|B\| = 1$. Вектор B – это единичный вектор, полученный в результате нормирования вектора A.

IV. Угол между векторами.

Пусть X, Y – ненулевые векторы в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Справедлива формула (известная из школьного курса):

$X \cdot Y = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos\varphi,$

где φ – угол между векторами X и Y, причем $0 \leq \varphi \leq \pi$.



Тогда $\cos\varphi = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \cdot \|Y\|}$.

Эту формулу можно распространить на случай n-мерных векторов.

Определение. *Углом между ненулевыми n-мерными векторами X и Y* называется угол $\varphi \in [0; \pi]$, для которого $\cos\varphi = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \cdot \|Y\|}$, то есть

$$\boxed{\varphi = \arccos\frac{X \cdot Y}{\|X\| \cdot \|Y\|}}$$

Замечание. Для любых векторов X и Y выполняется неравенство Коши-Буняковского: $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$. Отсюда следует, что для ненулевых векторов

$\left|\frac{X\cdot Y}{\|X\|\cdot\|Y\|}\right| \le 1$ и, значит, существует $\arccos\frac{X\cdot Y}{\|X\|\cdot\|Y\|}$. Таким образом, введенное выше определение корректно.

Пример. $X = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $Y = (2;\ 1; -2;\ 0)$. Найти угол φ между векторами X и Y.

Решение. $X \cdot Y = 1 - \frac{1}{2} + 1 + 0 = \frac{3}{2}$; $\|X\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$;

$\|Y\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$; $\cos\varphi = \frac{3/2}{1\cdot 3} = \frac{1}{2}$. Тогда $\varphi = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

V. Ортогональные векторы.

1) Определение. Векторы X и Y называются *ортогональными*, если $X \cdot Y = 0$.

Пример. $X = (-1;\ 0;\ 11;\ 1)$, $Y = (1; -8;\ 0;\ 1)$,

$X \cdot Y = -1 + 0 + 0 + 1 = 0$, значит, X и Y ортогональные векторы.

2) Нулевой вектор ортогонален любому вектору X:

$\mathbb{O} \cdot X = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0.$

3) Если два ненулевых вектора ортогональны, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Пусть X и Y – ненулевые ортогональные векторы. Тогда $X \cdot Y = 0$, $\cos\varphi = \frac{X\cdot Y}{\|X\|\cdot\|Y\|} = 0$, следовательно, $\varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. ■

Пример. $A = (1; -2)$, $B = (2;\ 1)$, $A \cdot B = 2 - 2 = 0$, то есть A и B ортогональны, а значит, они перпендикулярны.

Замечание. С помощью скалярного произведения нам удалось ввести в $\mathbb{R}^n$ такие геометрические понятия как длина вектора и угол между векторами. Поэтому пространство $\mathbb{R}^n$ с введенным скалярным произведением называют также *евклидовым* пространством.

§3. Уравнение прямой на плоскости и плоскости в пространстве в векторной форме

I. Уравнение прямой в векторной форме.

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид:

$$\boxed{ax + by + c = 0}, \tag{1}$$

где хотя бы один из коэффициентов a, b не равен нулю.

Пусть $A = (a, b)$, $X = (x, y)$. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\boxed{A \cdot X + c = 0} \tag{1'}$$

Уравнение (1') – это общее уравнение прямой в векторной форме.

Геометрический смысл вектора A: этот вектор перпендикулярен данной прямой, то есть является ее нормалью.

Напомним, что *нормалью* к прямой называется любой вектор, перпендикулярный данной прямой.

Пример. Рассмотрим прямую

L: $2x - 3y + 5 = 0$.

В векторной форме уравнение прямой запишется так:

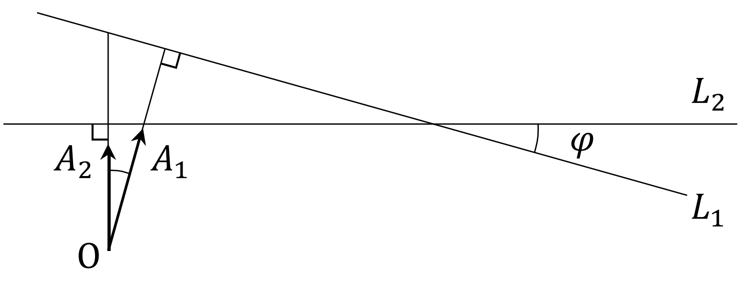
L: $A \cdot X + 5 = 0$,

где $A = (2; -3)$, $X = (x, y)$.

II. Угол между прямыми

Угол между прямыми L_1 и L_2 равен углу между их нормалями A_1 и A_2:

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{A_1 \cdot A_2}{\|A_1\| \cdot \|A_2\|}}$$



Замечание. Приведенная формула дает острый или тупой угол между прямыми в зависимости от того, острый или тупой угол образуют данные нормали. В геометрии часто за угол между прямыми принимают наименьший из углов, то есть именно острый угол. Для выполнения этого требования достаточно в случае тупого угла между нормалями взять за угол между прямыми смежный с ним угол $\varphi_0 = \pi - \arccos\frac{A_1 \cdot A_2}{\|A_1\| \cdot \|A_2\|}$. Чтобы в любом случае получать острый угол φ_0 между прямыми, можно воспользоваться формулой $\varphi_0 = \arccos\frac{|A_1 \cdot A_2|}{\|A_1\| \cdot \|A_2\|}$.

Пример. L_1: $2x + y + 2 = 0$, L_2: $-3x - 5 = 0$.

Найти угол φ между прямыми L_1 и L_2.

Решение. Нормали прямых L_1 и L_2: $A_1 = (2; 1)$ и $A_2 = (-3; 0)$;

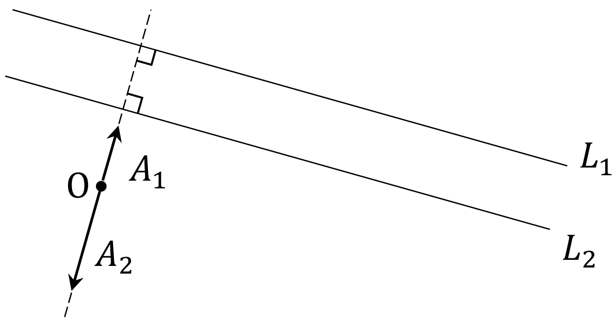
$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2}{\|A_1\| \cdot \|A_2\|} = \frac{-6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\varphi = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{5}})$.

В данном примере косинус угла между нормалями – отрицательный, следовательно, мы нашли тупой угол φ между прямыми. Если бы требовалось найти острый угол φ_0 между прямыми, можно было бы использовать формулу $\varphi_0 = \arccos\left|-\frac{2}{\sqrt{5}}\right| = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Условие параллельности прямых.

$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow A_1 = \lambda A_2$, то есть их нормали пропорциональны.



Пример.

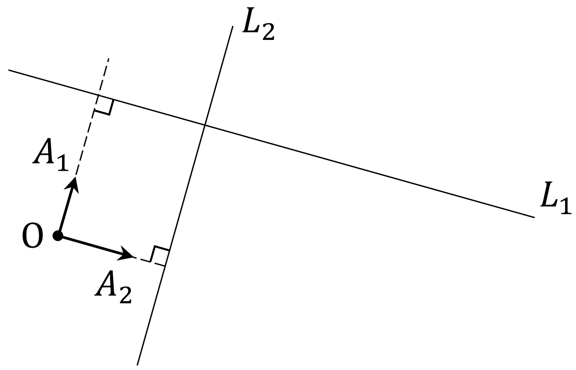
L_1: $5x - y + 2 = 0$; $A_1 = (5; -1)$

L_2: $10x - 2y + 3 = 0$; $A_2 = (10; -2)$

$A_2 = 2A_1 \Rightarrow L_1 \parallel L_2$.

Условие перпендикулярности прямых.

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1 \perp A_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 = 0$, то есть их нормали ортогональны.



Пример.

L_1: $2x + 3y - 6 = 0$; $A_1 = (2;\ 3)$

L_2: $-3x + 2y = 0$; $A_2 = (-3; 2)$

$A_1 \cdot A_2 = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow L_1 \perp L_2$.

III. Уравнение плоскости в векторной форме.

Общее уравнение плоскости имеет вид

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}, \qquad (2)$$

где хотя бы один из коэффициентов a, b, c не равен нулю.

Пусть $A = (a, b, c)$, $X = (x, y, z)$, тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$\boxed{A \cdot X + d = 0}. \qquad (2')$$

Уравнение (2') – это общее уравнение плоскости в векторной форме.

Геометрический смысл вектора *A*: этот вектор перпендикулярен данной плоскости (является ее нормалью).

Пример. Рассмотрим плоскость

L: $7x + 3y + 5z - 6 = 0$.

Уравнение плоскости L в векторной форме:

$A \cdot X - 6 = 0$, где $A = (7; 3; 5)$, $X = (x, y, z)$.

(A – нормаль плоскости L.)

IV. Угол между плоскостями.

Аналогично прямым на плоскости:

1) угол между плоскостями равен углу между их нормалями (или смежному с ним);
2) условие параллельности плоскостей – пропорциональность их нормалей;
3) условие перпендикулярности плоскостей – ортогональность их нормалей.

Пример. Даны три плоскости:

$L_1:\ 2x - 3y + 5z - 1 = 0,$

$L_2:\ -4x + 6y - 10z + 7 = 0,$

$L_3:\ -5x + 2z - 11 = 0.$

Выяснить, есть ли среди данных плоскостей параллельные и перпендикулярные.

Решение. Пусть $X = (x, y, z)$.

L_1: $A_1 \cdot X - 1 = 0$, где $A_1 = (2; -3,\ 5)$;

L_2: $A_2 \cdot X + 7 = 0$, где $A_2 = (-4;\ 6; -10)$;

L_3: $A_3 \cdot X - 11 = 0$, где $A_3 = (-5,\ 0;\ 2)$.

$A_2 = -2A_1 \Longrightarrow L_2 \parallel L_1;\quad A_1 \cdot A_3 = 0 \Longrightarrow L_1 \perp L_3 \Longrightarrow L_2 \perp L_3.$

§4. Линейная зависимость векторов

I. Линейная комбинация векторов.

Определение. Пусть даны векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$, принадлежащие пространству $\mathbb{R}^n$. Вектор $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – любые вещественные числа, называется *линейной комбинацией* векторов $A_1, A_2, \dots, A_m$. При этом числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ называются *коэффициентами* данной линейной комбинации.

Если $B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m$, то говорят, что вектор B *линейно выражается* через $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Пример. $2A_1 + A_2$ – линейная комбинация векторов A_1 и A_2.

$2A_1 - 3A_2 + 5A_3$ – линейная комбинация векторов A_1, A_2, A_3.

Но $2A_1 + A_2 = 2A_1 + A_2 + 0 \cdot A_3$, следовательно, вектор $2A_1 + A_2$ можно рассматривать также как линейную комбинацию векторов A_1, A_2, A_3.

II. Предварительное объяснение.

Пусть даны любые векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ из пространства $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что

$0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \cdots + 0 \cdot A_m = \mathbb{O}$.

То есть линейная комбинация с нулевыми коэффициентами всегда дает нулевой вектор. Но может оказаться, что какая-нибудь другая линейная комбинация тоже дает $\mathbb{O}$. Приведем пример.

Пример 1. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $2A_1 + A_2 - A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$.

Возникает вопрос: можно ли для любого набора векторов подобрать такие коэффициенты, не все равные 0, при которых линейная комбинация данных векторов будет равна $\mathbb{O}$?

Пример 2. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Предположим, $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \mathbb{O}$.

Тогда $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$.

Итак, в данном случае только нулевые коэффициенты дают линейную комбинацию, равную $\mathbb{O}$.

Различие между наборами векторов в этих примерах состоит в том, что в примере 1 существуют коэффициенты, не все равные 0, при которых линейная комбинация равна $\mathbb{O}$, а в примере 2 таких коэффициентов не существует. Это различие и лежит в основе понятия линейной зависимости.

III. Определения.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ называются *линейно зависимыми* (ЛЗ), если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, хотя бы одно из которых отлично от 0, такие, что

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_m A_m = \mathbb{O}. \qquad (*)$$

В примере 1 $2A_1 + A_2 - A_3 = \mathbb{O}$. Тогда по определению 1 векторы A_1, A_2, A_3 линейно зависимы (ЛЗ).

Определение 2. Если равенство

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_m A_m = \mathbb{O} \qquad (*)$$

возможно лишь в случае, когда все $\lambda_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$, то векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ называются *линейно независимыми* (ЛНЗ).

В примере 2 векторы A_1, A_2 ЛНЗ.

IV. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости.

Теорема. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$, $m \geq 2$. Векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство для $m = 3$.

1) Пусть векторы A_1, A_2, A_3 ЛЗ. Тогда по определению существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не все равные 0, такие, что $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \mathbb{O}$.
   Пусть для определенности $\lambda_2 \neq 0$. Тогда $A_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} A_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} A_3$, то есть A_2 линейно выражается через остальные векторы.
2) Пусть для определенности A_1 линейно выражается через остальные векторы, то есть $A_1 = \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$. Тогда $A_1 - \lambda_2 A_2 - \lambda_3 A_3 = \mathbb{O}$, причем коэффициент при A_1 равен 1, то есть не равен 0. Значит, в соответствии с определением набор A_1, A_2, A_3 является ЛЗ. ∎

V. Свойства линейной зависимости.

1. Набор векторов, содержащий $\mathbb{O}$, линейно зависим.

Доказательство. Нулевой вектор можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов набора с нулевыми коэффициентами. Тогда по теореме, приведенной в п. IV, набор ЛЗ.

2. Два вектора A_1 и A_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны (то есть $A_1 = \lambda A_2$ или $A_2 = \lambda A_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Это свойство вытекает из теоремы п. IV при $m = 2$.

Следствие. Если два вектора не пропорциональны, то они ЛНЗ.

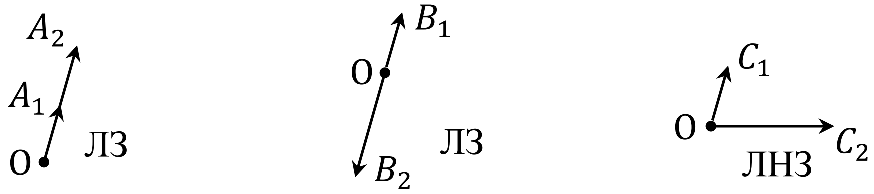
Пример 3. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Тогда $A_2 = -2A_1$, и по свойству 2 векторы A_1 и A_2 ЛЗ.

Пример 4. Пусть $B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Векторы B_1 и B_2 не пропорциональны, и по следствию из свойства 2 они ЛНЗ.

Геометрические иллюстрации для векторов из $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.



3. Если несколько векторов из данного набора ЛЗ, то и весь набор ЛЗ.

Доказательство для частного случая.

Пусть дан набор векторов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, причем A_1, A_2, A_3 ЛЗ. По определению линейной зависимости существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не все равные 0, такие, что $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \mathbb{O}$.

Тогда $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + 0 \cdot A_4 + 0 \cdot A_5 = \mathbb{O}$, причем в левой части равенства стоит линейная комбинация векторов $A_1, A_2, \dots, A_5$, в которой есть ненулевые коэффициенты. Отсюда следует, что набор $A_1, A_2, \dots, A_5$ ЛЗ. ■

Пример 5. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Так как $A_2 = 2A_1$, по свойству 2 векторы A_1 и A_2 ЛЗ. Тогда по свойству 3 весь набор A_1, A_2, A_3 ЛЗ. В данном случае для наглядности можно записать равенство $A_2 = 2A_1 + 0 \cdot A_3$, что также показывает линейную зависимость векторов A_1, A_2, A_3.

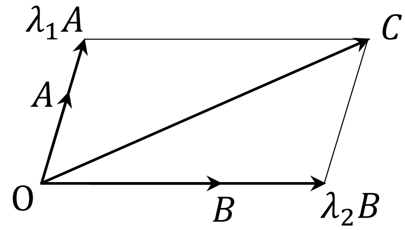
4. Пусть векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ принадлежат $\mathbb{R}^n$. Если $m > n$, то есть количество векторов больше размерности пространства, то эти векторы линейно зависимы.

(Данное свойство приводится без доказательства.)

Геометрические иллюстрации линейной зависимости трех векторов в $\mathbb{R}^2$.

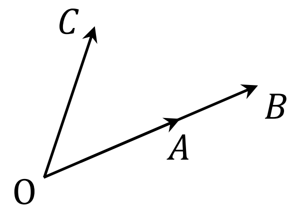
Пусть $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим два случая:

а) Среди векторов A, B, C нет пропорциональных.



По правилу параллелограмма $C = \lambda_1 A + \lambda_2 B$. Тогда по теореме п. IV векторы A, B, C линейно зависимы.

б) Среди векторов A, B, C есть пропорциональные.



Пусть $B = \lambda A \Rightarrow B = \lambda A + 0 \cdot C$.

Отсюда по теореме п. IV векторы A, B, C линейно зависимы.

Пример 6. Даны векторы $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 31 \\ -9 \end{pmatrix}$. Являются ли эти векторы линейно зависимыми?

Имеем три вектора в $\mathbb{R}^2$, $3 > 2$, значит, по свойству 4 набор A_1, A_2, A_3 линейно зависим.

5. Ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы.

(В данном случае строки матрицы рассматриваются как векторы. Свойство 5 приводится без доказательства).

Пример 7. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – ступенчатая матрица; по свойству 5 ее строки ЛНЗ, следовательно, векторы $A_1 = (2; 7; -4; 6)$, $A_2 = (0; -3; 11; 8)$, $A_3 = (0; 0; 0; 2)$ ЛНЗ.

Пример 8. Рассмотрим векторы $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Из этих векторов, записанных в виде строк, можно составить ступенчатую матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; по свойству 5 ее строки ЛНЗ, значит, векторы A_1, A_2, A_3 ЛНЗ.

Следствия из свойства 5.

1) Набор векторов в $\mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{e_1} = (1; 0; \dots; 0)$,
$\boldsymbol{e_2} = (0; 1; \dots; 0)$,
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\boldsymbol{e_n} = (0; 0; \dots; 1)$
линейно независим, так как из этих векторов можно составить ступенчатую матрицу (матрицу E).

Пример.

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{e_1} = (1; 0; 0)\\ \boldsymbol{e_2} = (0; 1; 0)\\ \boldsymbol{e_3} = (0; 0; 1)\end{array}\right\}\text{ ЛНЗ векторы в } \mathbb{R}^3.$$

2) Наибольшее число ЛНЗ векторов в $\mathbb{R}^n$ равно n.
Это вытекает из следствия 1) и свойства 4.

6. Рассмотрим набор, состоящий из одного вектора A.

а) Если $A = \mathbb{O}$, то набор ЛЗ.
б) Если $A \neq \mathbb{O}$, то набор ЛНЗ.

Доказательство.

Для набора из одного вектора равенство (*) в определении линейной зависимости запишется так:

$$\lambda A = \mathbb{O}. \qquad (**)$$

а) Если $A = \mathbb{O}$, то равенство (**) будет выполнено при любом λ, в частности при $\lambda \neq 0$. Тогда по определению набор, состоящий из $\mathbb{O}$, ЛЗ.

б) Если $A \neq \mathbb{O}$, то равенство (**) возможно только при $\lambda = 0$. Тогда по определению набор ЛНЗ. ■

VI. Проверка линейной зависимости.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ принадлежат $\mathbb{R}^n$. Требуется выяснить, является ли данный набор векторов линейно зависимым.

Если $m > n$, то по свойству 4 набор линейно зависим.

Пусть $m \leq n$. Рассмотрим равенство

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_m A_m = \mathbb{O}. \qquad (*)$$

Равенство (*) можно рассматривать как векторное уравнение относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Это уравнение равносильно однородной системе линейных уравнений (СЛУ) с матрицей, столбцами которой являются векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ (подробное объяснение см. ниже в приведенном примере).

а) Если система имеет только нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то равенство (*) возможно только в случае, когда все $\lambda_i = 0$. Тогда набор $A_1, A_2, \dots, A_m$ ЛНЗ.

б) Если существует ненулевое решение системы $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$, то равенство (*) будет выполняться для этих значений $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$, среди которых есть не равные нулю. Тогда по определению набор $A_1, A_2, \dots, A_m$ ЛЗ. Чтобы получить выражение линейной зависимости данных векторов, достаточно подставить в уравнение (*) какое-либо ненулевое решение системы.

Пример. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Требуется проверить, является ли данный набор линейно зависимым.

Решение.

Рассмотрим векторное уравнение относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \mathbb{O}. \qquad (*)$$

Запишем его в координатах:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приравняем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} \lambda_1 & & -\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \end{cases}.$$

Мы получили однородную СЛУ с матрицей, столбцы которой – это векторы A_1, A_2, A_3. Уравнение (*) равносильно этой СЛУ. Решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & & -\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{cases}, \ \lambda_3 = \alpha, \ \lambda_2 = -\alpha, \ \lambda_1 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Итак, множество решений уравнения (*): $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = -\alpha \\ \lambda_3 = \alpha \end{cases}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Таким образом, существует ненулевое решение, следовательно, векторы A_1, A_2, A_3 ЛЗ. Более того, найденное множество решений позволяет найти конкретный вид линейной зависимости. Пусть $\alpha = 1$, тогда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. Подставим полученные значения в уравнение (*): $A_1 - A_2 + A_3 = \mathbb{O}$; это равенство является выражением линейной зависимости данных векторов.

Ответ: A_1, A_2, A_3 ЛЗ.

§5. Ранг матрицы

I. Понятие ранга матрицы.

1) Наибольшее число линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

Строки и столбцы матрицы можно рассматривать как векторы. Поэтому можно говорить о линейной зависимости строк или столбцов матрицы и, в частности, о наибольшем числе линейно независимых строк или столбцов.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. Определим, чему равно наибольшее число линейно независимых строк и столбцов этой матрицы. 1-я и 2-я строки не пропорциональны, значит, по следствию из свойства 2 они линейно независимы. 1-я и 3-я строки пропорциональны, значит, по свойству 2 они линейно зависимы. Следовательно, по свойству 3 набор из трех строк линейно зависим. Тогда наибольшее число линейно независимых строк равно 2.

Аналогично, 1-й и 2-й столбцы линейно независимы, а все три столбца – линейно зависимы, так как 2-й и 3-й столбцы пропорциональны. Значит, наибольшее число линейно независимых столбцов равно 2.

2) Теорема. Для любой матрицы A наибольшее число линейно независимых строк совпадает с наибольшим числом линейно независимых столбцов.

(Теорема приводится без доказательства.)

3) Определение. *Рангом матрицы A* называется наибольшее число линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.

Обозначение ранга: $r(A)$.

В рассмотренном примере $r(A) = 2$.

II. Свойства ранга.

1. Ранг матрицы не меняется при транспонировании, т.е. $r(A) = r(A^T)$.

(Это следует из определения ранга.)

2. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над строками (столбцами) матрицы.

(Это свойство примем без доказательства.)

3. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк этой матрицы.

Доказательство.

Нулевые строки не могут входить в линейно независимые наборы. А все ненулевые строки ступенчатой матрицы образуют линейно независимый набор (по свойству 5). Следовательно, число ненулевых строк ступенчатой матрицы равно наибольшему числу линейно независимых строк этой матрицы, то есть равно ее рангу. ■

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $r(A) = 2$, так как A – ступенчатая матрица, в которой ровно две ненулевые строки.

III. Нахождение ранга матрицы.

Для нахождения ранга матрицы A достаточно привести данную матрицу с помощью элементарных преобразований над строками (столбцами) к ступенчатой матрице A'. Тогда $r(A) = r(A') = k$, где k – число ненулевых строк ступенчатой матрицы A'.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $r(A)$.

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ – ступенчатая матрица.

Следовательно, $r(A) = r(A') = 2$.

Ответ: $r(A) = 2$.

IV. Критерий совместности системы линейных уравнений.

Приведем без доказательства следующую важную теорему.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы, то есть $r(A) = r(A|B)$.

V. Необходимое и достаточное условие невырожденности матрицы, использующее понятие ранга.

Утверждение. Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Матрица A является невырожденной тогда и только тогда, когда $r(A) = n$.

Доказательство для $n = 3$ (для произвольного n – аналогично).

Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками (столбцами) к ступенчатой матрице A'. При элементарных преобразованиях свойство вырожденности (невырожденности) сохраняется (по свойствам определителя). Таким образом, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |A'| \neq 0 \Leftrightarrow$ в матрице A' нет нулевых строк, то есть

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$, где $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, 3 \iff r(A') = 3 \iff r(A) = 3.$ ■

§6. Понятие линейного пространства. Линейные подпространства

I. Определение линейного пространства.

Определение. Пусть L – непустое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$. Множество векторов L называется *линейным пространством* (ЛП), если выполняются следующие условия:

1) для любых векторов X, Y, принадлежащих L, их сумма $X + Y$ тоже принадлежит L;
2) для любого вектора X, принадлежащего L, и любого числа c вектор cX тоже принадлежит L.

Пример 1. Пусть X_0 – ненулевой вектор в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество $L = \{\alpha X_0\}$, где α принимает всевозможные числовые значения. Таким образом, L – это множество векторов, пропорциональных вектору X_0. В дальнейшем будем использовать обозначение: $L = \{\alpha X_0\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

Проверим (по определению), что L – это ЛП. Пусть $X, Y \in L$. Тогда $X = \alpha_1 X_0, Y = \alpha_2 X_0$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Проверяем условия:

1) $X + Y = \alpha_1 X_0 + \alpha_2 X_0 = (\alpha_1 + \alpha_2) X_0 \in L$;

2) для любого числа c $\quad cX = c(\alpha_1 X_0) = (c\alpha_1) X_0 \in L$.

Итак, выполняются оба условия из определения ЛП, следовательно, $L = \{\alpha X_0\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ является ЛП.

Пример 2. $L = \{\mathbb{O}\}$ является ЛП (выполняются оба условия).

Пример 3. $\mathbb{R}^n$ является ЛП (тоже выполняются оба условия).

II. Свойства линейного пространства.

Пусть L – любое линейное пространство.

1. $\mathbb{O} \in L$.

Доказательство.

Возьмем любой вектор $X \in L$. Тогда по определению (при $c = 0$)

$0 \cdot X \in L$, то есть $\mathbb{O} \in L$. ■

2. Если $X \in L$, то $-X \in L$ (следует из определения при $c = -1$).

3. Если $X_1, X_2, \dots, X_k \in L$, то для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$
$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k \in L$.

Доказательство.

По условию $X_i \in L$, тогда по определению

$\alpha_i X_i \in L; \; i = 1, \dots, k,$

а тогда, опять же из определения, следует, что сумма этих векторов принадлежит L. ■

III. Линейная оболочка векторов.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество

$L = \{\alpha_1 X_1 + \; \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k\}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ принимают всевозможные числовые значения.

Иначе говоря, L – множество всевозможных линейных комбинаций векторов $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Проверим, что L является ЛП.

Пусть $X, Y \in L$.

Тогда $X = \alpha_1 X_1 + \; \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$, $Y = \beta_1 X_1 + \; \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k$. Проверяем выполнение условий:

1) $X + Y = (\alpha_1 + \beta_1) X_1 + (\alpha_2 + \beta_2) X_2 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) X_k \in L$, так как это линейная комбинация векторов $X_1, X_2, \dots, X_k$;

2) для любого числа c $cX = (c\alpha_1) X_1 + (c\alpha_2) X_2 + \dots + (c\alpha_k) X_k \in L$, так как полученный вектор также является линейной комбинацией векторов $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Оба условия из определения линейного пространства выполняются, следовательно, L – это ЛП.

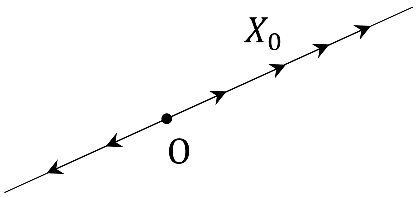
Определение. Линейное пространство, состоящее из всевозможных линейных комбинаций векторов $X_1, X_2, \dots, X_k$, называется *линейной оболочкой* этих векторов или линейным пространством, *порожденным векторами* $X_1, X_2, \dots, X_k$. При этом векторы $X_1, X_2, \dots, X_k$ называются *порождающей системой* данного ЛП.

Обозначение: $L\langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle$ – линейная оболочка векторов $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Пример 4. Пусть X_0 – ненулевой вектор из $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Тогда $\{\alpha X_0\}_{\alpha \in \mathbb{R}} = L\langle X_0 \rangle$ – линейное пространство, порожденное вектором X_0 (линейная оболочка вектора X_0).

Порождающая система: X_0.

Геометрическая иллюстрация.



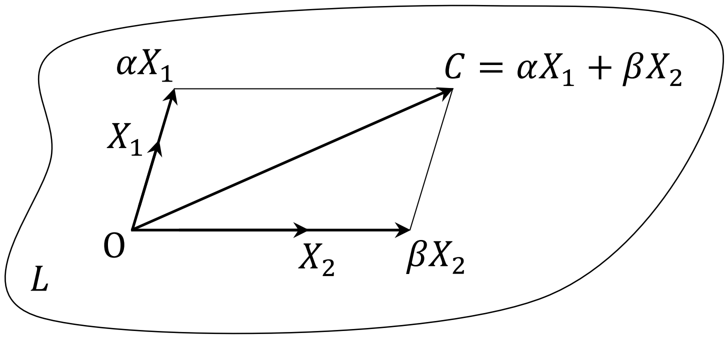
$L\langle X_0\rangle$ – прямая, которая проходит через начало координат и на которой лежит вектор X_0.

Один ненулевой вектор в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ порождает прямую.

Пример 5. Пусть X_1, X_2 – линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим множество $\{\alpha X_1 + \beta X_2\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} = L\langle X_1, X_2\rangle$ – линейное пространство, порожденное векторами X_1, X_2 (линейная оболочка векторов X_1, X_2).

Порождающая система: X_1, X_2.

Геометрическая иллюстрация.

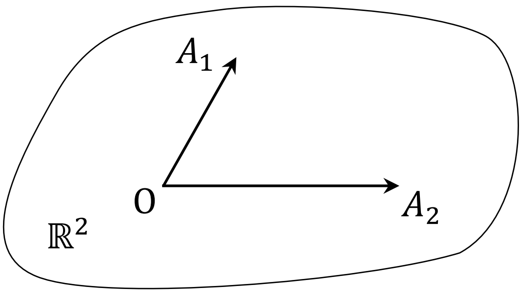


Пусть L – плоскость, в которой лежат X_1 и X_2. Тогда $L\langle X_1, X_2\rangle = L$, так как по правилу параллелограмма любая линейная комбинация векторов X_1 и X_2 лежит в плоскости L, и наоборот: любой вектор C, лежащий в плоскости L, раскладывается по векторам X_1 и X_2.

Два ЛНЗ вектора в $\mathbb{R}^3$ порождают плоскость в $\mathbb{R}^3$.

Пример 6. Пусть A_1, A_2 – линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\{\alpha A_1 + \beta A_2\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} = L\langle A_1, A_2\rangle$ – линейное пространство, порожденное векторами A_1, A_2.

Геометрическая иллюстрация.



$L\langle A_1, A_2\rangle = \mathbb{R}^2$, так как любой вектор из $\mathbb{R}^2$ раскладывается по двум ЛНЗ векторам (см. геометрическую иллюстрацию линейной зависимости трех векторов в $\mathbb{R}^2$).

Два ЛНЗ вектора в $\mathbb{R}^2$ порождают $\mathbb{R}^2$.

IV. Линейные подпространства.

Определение. Если L_1 и L_2 являются линейными пространствами и $L_1 \subset L_2$, то L_1 называется *линейным подпространством* пространства L_2.

Пример 7. Линейные подпространства пространства $\mathbb{R}^2$:

1) $\{\mathbb{O}\}$;
2) $L\langle X_0\rangle$, где $X_0 \in \mathbb{R}^2, X_0 \neq \mathbb{O}$ (прямая на плоскости);
3) $\mathbb{R}^2$.

Пример 8. Линейные подпространства пространства $\mathbb{R}^3$:

1) $\{\mathbb{O}\}$;
2) $L\langle X_0\rangle$, где $X_0 \in \mathbb{R}^3, X_0 \neq \mathbb{O}$ (прямая в $\mathbb{R}^3$);
3) $L\langle X_1, X_2\rangle$, где X_1, X_2 – линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^3$ (плоскость в $\mathbb{R}^3$);
4) $\mathbb{R}^3$.

V. Линейное пространство решений однородной системы линейных уравнений.

Рассмотрим однородную СЛУ в матричной форме:

$$AX = \mathbb{O}, \qquad (1)$$

где $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец из неизвестных.

Пусть L_0 – множество решений этой системы, то есть множество векторов X, удовлетворяющих (1). Проверим (по определению), что L_0 – ЛП.

Пусть $X_1, X_2 \in L_0$. Тогда $AX_1 = \mathbb{O}$ и $AX_2 = \mathbb{O}$. Проверяем условия:

1) $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$, то есть $X_1 + X_2$ – тоже решение системы, значит, $X_1 + X_2 \in L_0$;

2) для всех c $A(cX_1) = cAX_1 = c \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$, следовательно, $cX_1 \in L_0$.

Оба условия из определения ЛП выполняются, значит, L_0 является ЛП. Таким образом, множество решений однородной СЛУ является линейным пространством.

§7. Размерность и базис линейного пространства

I. Размерность линейного пространства.

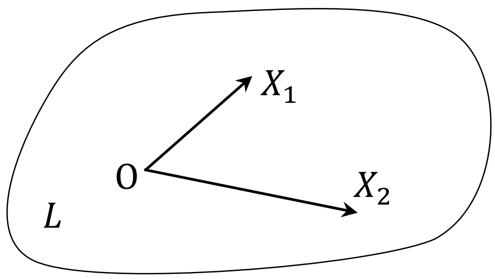
1) Определение. *Размерностью* линейного пространства L называется наибольшее число линейно независимых векторов в этом пространстве.

Иначе говоря, размерность ЛП L будет равна k, если в пространстве L существует линейно независимый набор из k векторов, а любой набор, содержащий более, чем k векторов, линейно зависим.

Обозначение: $\dim L$ – размерность ЛП (от лат. *dimensionem*).

Пример 1. Пусть $L = L\langle X_0 \rangle = \{\alpha X_0\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$, где X_0 – ненулевой вектор в $\mathbb{R}^n$. Чему равна размерность L?

Используем определение: X_0 – ЛНЗ вектор (так как ненулевой), а любые два вектора из L пропорциональны, и значит, линейно зависимы. Таким образом, наибольшее число ЛНЗ векторов в L равно 1, то есть $\dim L = 1$.



Пример 2. Пусть $L = L\langle X_1, X_2\rangle$, где X_1, X_2 – ЛНЗ векторы в $\mathbb{R}^3$; L – плоскость в $\mathbb{R}^3$, в которой лежат X_1, X_2.

Векторы X_1 и X_2 ЛНЗ, а любые три вектора на плоскости ЛЗ, следовательно,

$\dim L = 2.$

2) $\dim \mathbb{R}^n = n$, так как наибольшее число ЛНЗ векторов в $\mathbb{R}^n$ равно n (см. §4. Линейная зависимость).

3) Размерность любого линейного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$ не превосходит n. Это следует из п. 2 и из определения размерности.

4) Пусть $L = \{\mathbb{O}\}$ – нулевое пространство. Размерность L равна нулю, так как в нулевом пространстве нет ЛНЗ векторов.

II. Базис линейного пространства.

1) Определение. Если L – линейное пространство размерности k, то любой линейно независимый набор из k векторов, принадлежащих L, называется *базисом* линейного пространства L.

Из этого определения следует: если $A_1, A_2, \dots, A_k$ – базис ЛП L, то

а) векторы $A_1, A_2, \dots, A_k$ ЛНЗ;

б) $\dim L = k$.

В примере 1: X_0 – базис ЛП L; $2X_0$ – тоже базис. Любой ненулевой вектор из L будет базисом ЛП L.

В примере 2: X_1, X_2 – базис L (так как $\dim L = 2$, а X_1, X_2 – это два ЛНЗ вектора из L); $2X_1, X_2$ – тоже базис. Любые два ЛНЗ вектора из L будут базисом ЛП L.

Пример 3. Векторы $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ – базис пространства $\mathbb{R}^2$;

$A_1 = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ – тоже базис пространства $\mathbb{R}^2$; любые два не пропорциональных вектора из $\mathbb{R}^2$ являются базисом $\mathbb{R}^2$.

Пример 4. Рассмотрим набор векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ в $\mathbb{R}^n$, где $\boldsymbol{e_i}$ – вектор, у которого i-я координата равна 1, а все остальные координаты равны 0. Этот набор векторов является базисом пространства $\mathbb{R}^n$ (такой базис принято называть *каноническим)*.

Любые n линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$ также являются базисом пространства $\mathbb{R}^n$.

Замечание. В нулевом пространстве не существует базиса, так как в нем нет линейно независимых векторов (его размерность равна нулю).

2) Теорема 1 (о разложении вектора по базису).

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k$ – базис линейного пространства L. Тогда для любого вектора X из L существует единственное представление

$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

(Без доказательства)

Таким образом, любой вектор из линейного пространства раскладывается по векторам базиса, причем единственным образом.

Следствие. Если $X_1, X_2, \dots, X_k$ – базис линейного пространства L, то $L = L\langle X_1, X_2, \dots, X_k\rangle$, то есть линейное пространство совпадает с линейной оболочкой своего базиса.

Определение. Коэффициенты разложения вектора по базису называются *координатами вектора в этом базисе*.

Пример 5. а) Разложение вектора из $\mathbb{R}^3$ по базису $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$:

$$A = \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e_1} - 3\boldsymbol{e_2} + 5\boldsymbol{e_3}.$$

Числа $2; -3;\ 5$ – координаты вектора A в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$.

б) Разложение любого вектора из $\mathbb{R}^n$ по базису $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$:

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}.$$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты вектора X в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$.

Замечание. Из пункта б) примера 5 следует, что координаты вектора X совпадают с его координатами в каноническом базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$.

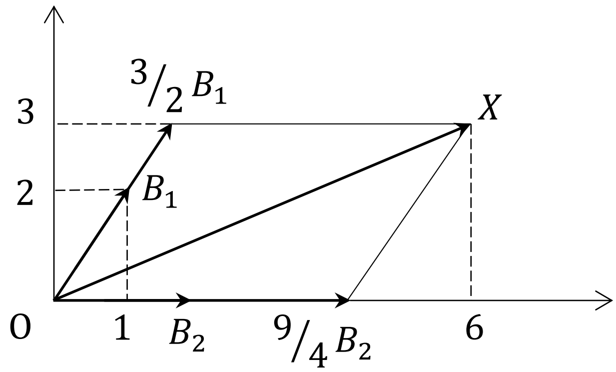
Пример 6. Пусть $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда B_1, B_2 – базис пространства $\mathbb{R}^2$. Найдем разложение вектора $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ по базису B_1, B_2.

По теореме 1 $X = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$\begin{cases} 6 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 3 = 2\alpha_1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_2 = \frac{9}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow X = \frac{3}{2} B_1 + \frac{9}{4} B_2;$$

$\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$ – координаты вектора X в базисе B_1, B_2.

Геометрическая иллюстрация.



3) Теорема 2. Размерность линейного пространства, порожденного набором векторов $A_1, A_2, \dots, A_m$, равна наибольшему числу линейно независимых векторов в этом наборе.

(Без доказательства)

Следствие. Если $L = L\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$, где $A_1, A_2, \dots, A_k$ – ЛНЗ векторы, то $\dim L = k$, а векторы $A_1, A_2, \dots, A_k$ являются базисом пространства L.

Пример 7. Пусть $L = L\langle A_1, A_2 \rangle$, где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Найти $\dim L$ и базис. Каким геометрическим объектом является ЛП L?

Решение. Векторы A_1, A_2 – ЛНЗ, значит, по следствию из теоремы 2 $\dim L = 2$, а векторы A_1, A_2 образуют базис. ЛП L – это плоскость в $\mathbb{R}^3$, так как два ЛНЗ вектора в $\mathbb{R}^3$ порождают плоскость.

Заметим, что данном примере в качестве базиса можно также взять векторы $\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}4\\14\\18\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix}$.

Пример 8. Пусть $L = L\langle A_1, A_2, A_3\rangle$, где $A_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$. Найти $\dim L$ и базис. Каким геометрическим объектом является ЛП L?

Решение. Векторы A_1, A_2, A_3 – ЛЗ, так как A_1 и A_3 пропорциональны. Векторы A_1, A_2 ЛНЗ, так как не пропорциональны.

Тогда по теореме 2 $\dim L = 2$, а базисом будут любые два ЛНЗ вектора из L, например, A_1, A_2. Отсюда по следствию из теоремы 1 $L = L\langle A_1, A_2\rangle$, значит, L – плоскость в $\mathbb{R}^3$.

III. Ортогональные и ортонормированные базисы.

1) Теорема 3. Ненулевые попарно ортогональные векторы линейно независимы.

Доказательство.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ – ненулевые попарно ортогональные векторы. Тогда $A_i \cdot A_j = 0$ для любых $i \neq j$. Рассмотрим равенство

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_m A_m = \mathbb{O}. \qquad (*)$$

Выберем любое i и умножим обе части равенства (*) скалярно на A_i $(i = 1, \dots, m)$:

$$\lambda_1 \underbrace{A_1 \cdot A_i}_{0} + \lambda_2 \underbrace{A_2 \cdot A_i}_{0} + \dots + \lambda_i \underbrace{A_i \cdot A_i}_{\|A_i\|^2} + \dots + \lambda_m \underbrace{A_m \cdot A_i}_{0} = 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda_i \|A_i\|^2 = 0$. При этом число $\|A_i\|^2$ не равно 0, так как $A_i \neq \mathbb{O}$, а значит, $\lambda_i = 0$. Таким образом, все $\lambda_i = 0$, и по определению $A_1, A_2, \dots, A_m$ линейно независимы. ■

2) Определение 1. Базис, состоящий из попарно ортогональных векторов, называется *ортогональным*.

Теорема 4. n ненулевых попарно ортогональных векторов в $\mathbb{R}^n$ образуют ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^n$.

(Это следует из теоремы 3 и определения 1.)

Определение 2. Если в ортогональном базисе нормы всех векторов равны 1, то такой базис называется *ортонормированным*.

Пример 9. Покажем, что канонический базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$, является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{R}^n$. Действительно, а) это набор из n ненулевых векторов, для которых $\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = 0$ для любых $i \neq j$, то есть векторы набора попарно ортогональны, и по теореме 4 они образуют ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^n$;

б) $\|\boldsymbol{e_i}\| = 1$ для любого $i = 1, \dots, n$, следовательно, данный базис – ортонормированный.

Пример 10. Пусть $A_1 = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), A_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Является ли векторы A_1, A_2 ортонормированным базисом пространства $\mathbb{R}^2$?

Решение.

Так как $A_1 \cdot A_2 = 0$, A_1, A_2 – это два ненулевых ортогональных вектора в $\mathbb{R}^2$, а тогда по теореме 4 A_1, A_2 – ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^2$.

Нетрудно также заметить, что $\|A_1\| = \|A_2\| = 1$, и по определению 2 векторы A_1, A_2 являются ортонормированным базисом пространства $\mathbb{R}^2$.

IV. Замена базиса и преобразование координат.

Пусть L – линейное пространство с базисом $A_1, A_2, \dots, A_k$. Рассмотрим также некоторый новый базис пространства L: $B_1, B_2, \dots, B_k$.

Возьмем любой вектор $X \in L$. Этот вектор можно разложить по каждому из данных базисов:

$$X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_k A_k, \tag{1}$$

$$X = x'_1 B_1 + x'_2 B_2 + \dots + x'_k B_k. \tag{2}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ – это координаты вектора X в базисе $A_1, A_2, \dots, A_k$ (старые координаты),

$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix}$ – координаты вектора X в базисе $B_1, B_2, \dots, B_k$ (новые координаты).

Выясним, как связаны старые координаты вектора с новыми.

Разложим векторы $B_1, B_2, \dots, B_k$ нового базиса по базису $A_1, A_2, \dots, A_k$:

$$\begin{aligned} B_1 &= c_{11} A_1 + c_{12} A_2 + \dots + c_{1k} A_k \\ B_2 &= c_{21} A_1 + c_{22} A_2 + \dots + c_{2k} A_k \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_k &= c_{k1} A_1 + c_{k2} A_2 + \dots + c_{kk} A_k \end{aligned} \tag{3}$$

Можно доказать, что матрица $C = \{c_{ij}\}$ – невырожденная. Формула (3) означает, что переход от базиса $A_1, A_2, \dots, A_k$ к базису $B_1, B_2, \dots, B_k$ осуществляется с помощью матрицы C.

Формула выражения новых координат через старые (без доказательства):

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} = (C^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^2$ перейдем от базиса $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ к новому базису $B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найдем выражение новых координат произвольного вектора X через старые.

1) Разложим B_1 и B_2 по старому базису $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$: $\begin{matrix} B_1 = 3e_1 + e_2 \\ B_2 = 2e_1 \end{matrix}$.

Тогда $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Обозначим $D = C^T$. Найдем D^{-1}.

$\Delta = |D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$;

матрица из алгебраических дополнений: $\{D_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

присоединенная матрица $\widetilde{D} = \{D_{ij}\}^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

$D^{-1} = \frac{1}{\Delta}\widetilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

3) Далее, $(C^T)^{-1} = D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, и по формуле (4)

$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = (C^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Например, если вектор X имел координаты $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$, то в базисе B_1, B_2 он будет иметь координаты $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, то есть $X = 2B_1 - \frac{3}{2}B_2$.

Замечание. Из формулы (4) легко получить выражение старых координат через новые. Умножим равенство (4) на матрицу C^T слева:

$C^T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} = \underbrace{C^T (C^T)^{-1}}_{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, то есть $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix}$.

§8. Ортогональное дополнение линейного подпространства

I. Понятие ортогонального дополнения.

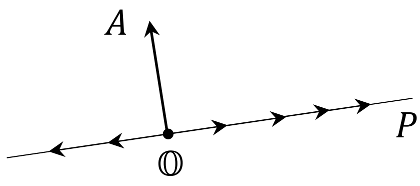
Пусть P – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, вектор $X \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Говорят, что *вектор* X *ортогонален* линейному подпространству P, если он ортогонален каждому вектору из P.

Обозначение: $X \perp P$ ($\perp$ – знак ортогональности).

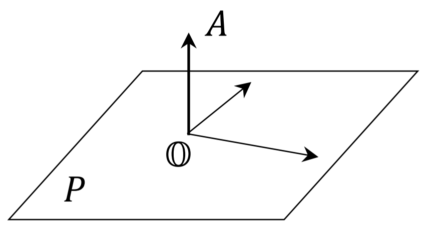
Пример 1. P – прямая в $\mathbb{R}^2$, проходящая через $\mathbb{O}$, A – нормаль этой прямой.

Тогда $A \perp P$.



Пример 2. P – плоскость в $\mathbb{R}^3$, проходящая через $\mathbb{O}$, A – нормаль этой плоскости.

Аналогично предыдущему примеру $A \perp P$.

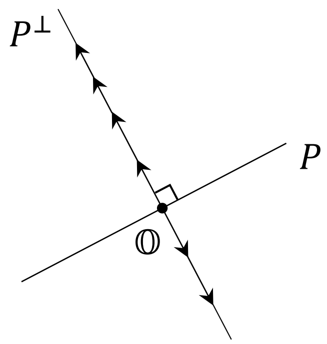


Определение 2. Множество векторов из пространства $\mathbb{R}^n$, ортогональных линейному подпространству P, называется *ортогональным дополнением* линейного подпространства P.

Обозначение: $P^{\perp}$ – ортогональное дополнение линейного подпространства P.

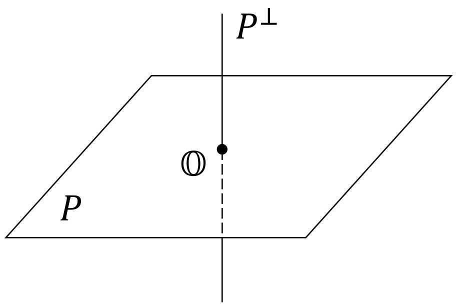
Пример 3. P – прямая в $\mathbb{R}^2$, проходящая через $\mathbb{O}$.

$P^{\perp}$ – прямая, перпендикулярная прямой P и проходящая через $\mathbb{O}$.



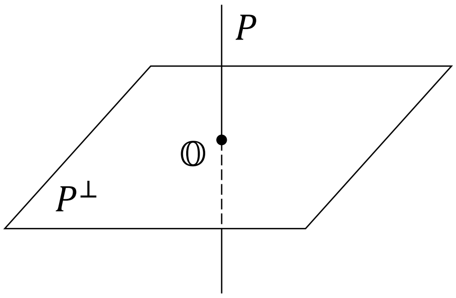
Пример 4. P – плоскость в $\mathbb{R}^3$, проходящая через $\mathbb{O}$.

$P^{\perp}$ – прямая, перпендикулярная плоскости P и проходящая через $\mathbb{O}$.



Пример 5. P – прямая в $\mathbb{R}^3$, проходящая через $\mathbb{O}$.

$P^{\perp}$ – плоскость, перпендикулярная прямой P и проходящая через $\mathbb{O}$.



II. Свойства ортогонального дополнения.

Пусть P – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$.

1. $P^{\perp}$ является линейным пространством (см. примеры 3-5).

(Без доказательства)

2. $P \cap P^{\perp} = \{\mathbb{O}\}$ (см. примеры 3-5).

Доказательство.

1) $\mathbb{O}$ принадлежит любому ЛП, следовательно,
   $\mathbb{O} \in P$ и $\mathbb{O} \in P^{\perp} \Rightarrow \mathbb{O} \in P \cap P^{\perp}$.
2) Пусть $X \in P \cap P^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} X \in P \\ X \in P^{\perp} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in P \\ X \perp P \end{cases} \Rightarrow X \perp X \Rightarrow$
   $\Rightarrow X \cdot X = 0 \Rightarrow X = \mathbb{O}$.

   Таким образом, $P \cap P^{\perp} = \{\mathbb{O}\}$. ■

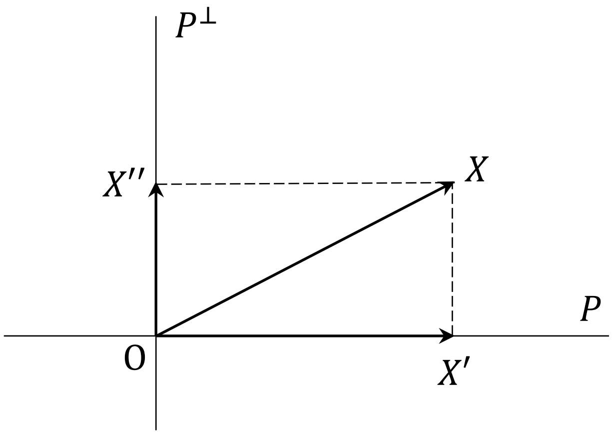
3. $\dim P + \dim P^{\perp} = n$ (см. примеры 3-5).

(Без доказательства)

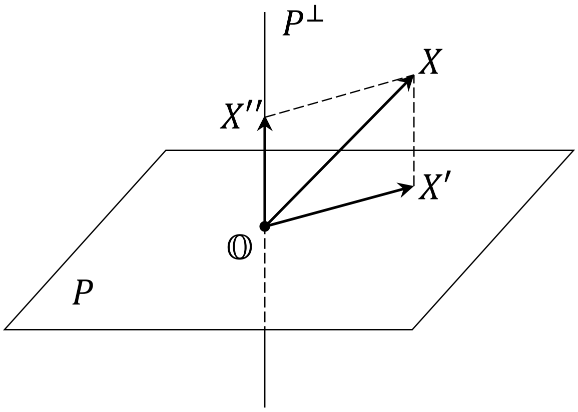
4. Для любого вектора $X \in \mathbb{R}^n$ существует единственное представление $X = X' + X''$, где $X' \in P$, а $X'' \in P^{\perp}$.
(Без доказательства)

Геометрические иллюстрации.

а) $\mathbb{R}^2$



б) $\mathbb{R}^3$



Из конца вектора X опускаем перпендикуляры на плоскость P и на прямую $P^{\perp}$. Получаем векторы $X' \in P$ и $X'' \in P^{\perp}$ такие, что

$X = X' + X''.$

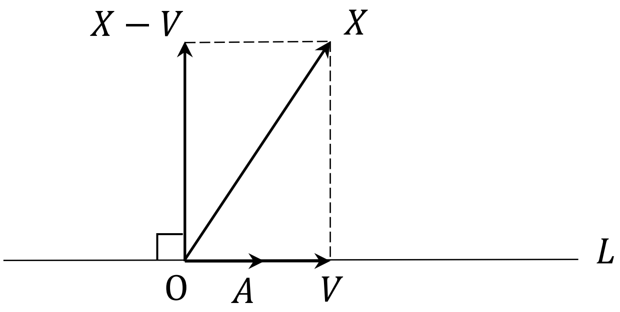
§9. Проекция вектора на линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$

I. Определение.

Пусть L – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^n$. Проекцией вектора X на линейное подпространство L называется вектор V такой, что $V \in L$, а вектор $X - V$ ортогонален L.

Замечание. Проекция вектора на линейное подпространство существует и единственна (по свойству 4 §8).

Иллюстрация для $\mathbb{R}^2$.



II. Нахождение проекции вектора на линейное пространство, порожденное одним вектором.

Пусть $L = L\langle A\rangle$, где A – ненулевой вектор в $\mathbb{R}^n$. Пусть $X \in \mathbb{R}^n$.

Найдем проекцию V вектора X на L:

$$\begin{cases} V \in L \\ X - V \perp L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \alpha A \\ X - V \perp A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \alpha A \\ (X - \alpha A) \cdot A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$X \cdot A = \alpha(A \cdot A), \quad \alpha = \frac{X \cdot A}{\|A\|^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \left(\frac{X \cdot A}{\|A\|^2}\right) A} \tag{1}$$

Пример 1. Найти проекцию V вектора $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ на линейное пространство $L = L\langle A\rangle$, где $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $V = \left(\frac{X \cdot A}{\|A\|^2}\right) A = \frac{3}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

III. Нахождение проекции вектора на линейное пространство, заданное ортогональным базисом.

1) Теорема. Если вектор B ортогонален каждому вектору из базиса линейного пространства L, то B ортогонален L.

Доказательство.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – базис линейного пространства L; $B \perp A_i,\ i = 1, \ldots, k$. Возьмем любой вектор $Y \in L$. По теореме 1 §7 $Y = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k$. Рассмотрим $B \cdot Y = B \cdot (c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k) =$

$= c_1 \underbrace{B \cdot A_1}_{0} + c_2 \underbrace{B \cdot A_2}_{0} + \cdots + c_k \underbrace{B \cdot A_k}_{0} = 0$, то есть $B \perp Y$ для любого $Y \in L$.

Отсюда по определению $B \perp L$. ■

2) Рассмотрим случай, когда базис линейного пространства состоит из двух ортогональных векторов.

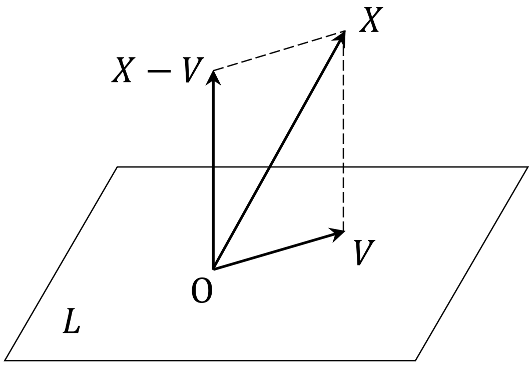
Пусть L – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$; A_1, A_2 – ортогональный базис L.

Пусть $X \in \mathbb{R}^n$. Найдем проекцию V вектора X на L.

Иллюстрация для $\mathbb{R}^3$.

Так как A_1, A_2 – базис L, по следствию из теоремы 1 §7

$L = L\langle \underbrace{A_1, A_2}_{\text{ЛНЗ}} \rangle$, а значит, L – плоскость в $\mathbb{R}^3$.



Итак, аналогично выводу формулы (1) в п. II:

$$\begin{cases} V \in L \\ X - V \perp L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 \\ X - V \perp A_1 \\ X - V \perp A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \big(X - (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2)\big) \cdot A_1 = 0 \\ \big(X - (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2)\big) \cdot A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

(так как $A_1 \cdot A_2 = 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{X} \cdot \mathrm{A}_1 = \alpha_1 \|A_1\|^2 \\ \mathrm{X} \cdot \mathrm{A}_2 = \alpha_2 \|A_2\|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{X \cdot A_1}{\|A_1\|^2} \\ \alpha_2 = \frac{X \cdot A_2}{\|A_2\|^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \left(\frac{X \cdot A_1}{\|A_1\|^2}\right) A_1 + \left(\frac{X \cdot A_2}{\|A_2\|^2}\right) A_2}, \qquad (2)$$

где A_1, A_2 – **ортогональный** базис ЛП L.

Можно заметить, что получили формулу, аналогичную формуле (1).

Пример 2. Найти проекцию V вектора $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ на линейное пространство $L = L\langle A_1, A_2 \rangle$, где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Векторы A_1, A_2 ЛНЗ, следовательно, это базис L;

$A_1 \cdot A_2 = 0$, значит, A_1, A_2 – ортогональный базис.

По формуле (2) $V = \left(\frac{X \cdot A_1}{\|A_1\|^2}\right) A_1 + \left(\frac{X \cdot A_2}{\|A_2\|^2}\right) A_2$;

$X \cdot A_1 = 5,\ X \cdot A_2 = -3,\ \|A_1\|^2 = 6,\ \|A_2\|^2 = 2$. Тогда

$$V = \frac{5}{6} A_1 - \frac{3}{2} A_2 = \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 10/6 \\ 5/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

3) Рассмотрим общий случай.

Пусть L – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^n$, и пусть ортогональный базис линейного пространства L состоит из k векторов: $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Тогда для проекции V вектора X на L справедлива формула, аналогичная формуле (2):

$$\boxed{V = \left(\frac{X \cdot A_1}{\|A_1\|^2}\right) A_1 + \left(\frac{X \cdot A_2}{\|A_2\|^2}\right) A_2 + \dots + \left(\frac{X \cdot A_k}{\|A_k\|^2}\right) A_k},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_k$ – **ортогональный** базис ЛП L.

IV. Нахождение проекции вектора на линейное пространство, заданное произвольным базисом.

1) Рассмотрим случай, когда базис линейного пространства L состоит из двух векторов A_1, A_2, причем эти векторы не являются ортогональными.

При выводе формулы (2) еще без использования ортогональности векторов была получена система

$$\begin{cases} \big(X - (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\big) \cdot A_1 = 0 \\ \big(X - (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\big) \cdot A_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 (A_1 \cdot A_1) + \alpha_2 (A_2 \cdot A_1) = X \cdot A_1 \\ \alpha_1 (A_1 \cdot A_2) + \alpha_2 (A_2 \cdot A_2) = X \cdot A_2 \end{cases},$$

Мы получили СЛУ относительно неизвестных α_1, α_2. Решив эту систему, найдем α_1, α_2. Тогда $V = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ – проекция вектора $X \in \mathbb{R}^n$ на ЛП $L = L\langle A_1, A_2 \rangle$.

2) Если базис линейного пространства L состоит из k векторов $A_1, A_2, \dots, A_k$, то будем иметь систему k линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, аналогичную системе, приведенной в п. 1. Найдя $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, получим $V = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$, где V – проекция вектора $X \in \mathbb{R}^n$ на ЛП $L = L\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$.

Замечание. Можно доказать, что матрица упомянутой системы будет невырожденной, поэтому СЛУ будет иметь единственное решение.

Пример 3. Найти проекцию V вектора $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ на линейную оболочку векторов $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Векторы A_1, A_2 – базис ЛП $L = L\langle A_1, A_2 \rangle$, так как A_1, A_2 ЛНЗ. Значит, для нахождения коэффициентов разложения вектора V по базису A_1, A_2 достаточно решить СЛУ, приведенную в п. 1:

$$\begin{cases} \alpha_1 \|A_1\|^2 + \alpha_2 (A_2 \cdot A_1) = X \cdot A_1 \\ \alpha_1 (A_1 \cdot A_2) + \alpha_2 \|A_2\|^2 = X \cdot A_2 \end{cases}.$$

Вычисляем: $\|A_1\|^2 = 3$, $\|A_2\|^2 = 3$, $A_1 \cdot A_2 = -1$, $X \cdot A_1 = 0$, $X \cdot A_2 = -2$.

Получаем СЛУ $\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha_2 = 3\alpha_1 \\ 8\alpha_1 = -2 \end{cases}$; $\alpha_1 = -\frac{1}{4}, \alpha_2 = -\frac{3}{4}$.

Следовательно, $V = -\frac{1}{4} A_1 - \frac{3}{4} A_2 = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

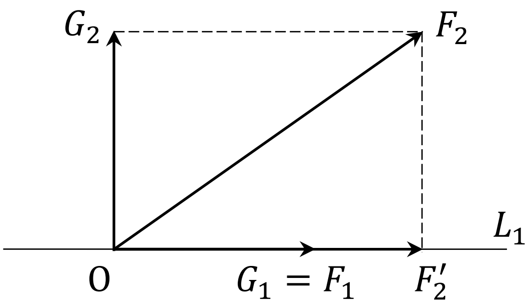
V. Процесс ортогонализации линейно независимого набора векторов.

Рассмотрим случай ЛНЗ набора из трех векторов (общий случай k ЛНЗ векторов рассматривается аналогично).

Пусть F_1, F_2, F_3 – ЛНЗ векторы в $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

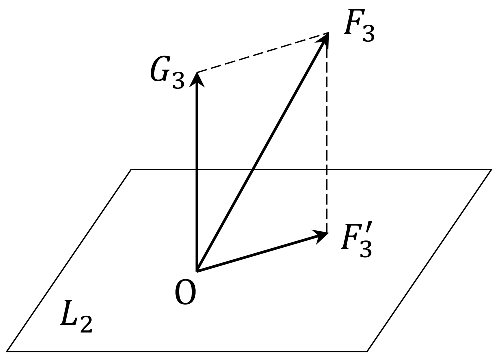
Построим набор из трех ненулевых попарно ортогональных векторов G_1, G_2, G_3, линейно выражающихся через векторы F_1, F_2, F_3.

Иллюстрация для $\mathbb{R}^3$



1) Пусть $G_1 = F_1$.
   Тогда $G_1 \neq \mathbb{O}$, так как $F_1 \neq \mathbb{O}$.
2) Пусть $G_2 = F_2 - F_2'$, где F_2' – проекция F_2 на $L_1 = L\langle G_1 \rangle$.
   Тогда $G_2 \perp L_1$, значит $G_2 \perp G_1$;
   $G_2 \neq \mathbb{O}$, так как иначе F_2 будет линейно выражаться через F_1, что противоречит линейной независимости набора F_1, F_2, F_3;
   G_2 линейно выражается через F_1, F_2.

Иллюстрация для $\mathbb{R}^3$



3) Пусть $G_3 = F_3 - F_3'$, где F_3' – проекция F_3 на $L_2 = L\langle G_1, G_2 \rangle$.
   Тогда $G_3 \perp L_2$, следовательно,
   $G_3 \perp G_1$ и $G_3 \perp G_2$;
   $G_3 \neq \mathbb{O}$, так как иначе F_3 будет линейно выражаться через F_1, F_2;
   G_3 линейно выражается через F_1, F_2, F_3.

Таким образом, G_1, G_2, G_3 – ненулевые попарно ортогональные векторы, которые линейно выражаются через F_1, F_2, F_3.

Замечание. Если векторы G_i нормировать, то есть рассмотреть векторы $B_i = \frac{1}{\|G_i\|} G_i$ $(i = 1, 2, 3)$, то получим единичные попарно ортогональные векторы B_1, B_2, B_3, линейно выражающиеся через F_1, F_2, F_3.

Пример 4. По описанной схеме провести ортогонализацию ЛНЗ набора векторов $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) $G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $G_2 = F_2 - F_2' = F_2 - \underbrace{\left(\frac{F_2 \cdot G_1}{\|G_1\|^2}\right) G_1}_{\text{по формуле (1)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $G_3 = F_3 - F_3' = F_3 - \underbrace{\left[\left(\frac{F_3 \cdot G_1}{\|G_1\|^2}\right) G_1 + \left(\frac{F_3 \cdot G_2}{\|G_2\|^2}\right) G_2\right]}_{\text{по формуле (2)}} =$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \left(\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{(-1)}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

Ответ: $G_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\-2/3\end{pmatrix}$.

VI. Теорема. Во всяком ненулевом линейном подпространстве пространства $\mathbb{R}^n$ существует ортонормированный базис.

Доказательство.

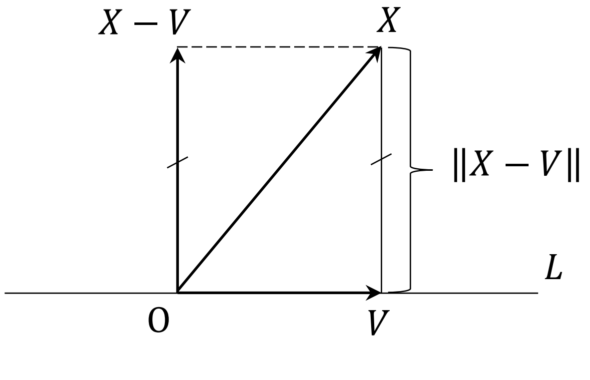
В любом ненулевом ЛП существует базис. В результате ортогонализации этого базиса можно получить набор ненулевых попарно ортогональных векторов из этого же ЛП, который будет ортогональным базисом данного ЛП. Нормируя векторы ортогонального базиса, получим ортонормированный базис. ■

VII. Расстояние между вектором и линейным пространством.

1) Определение. Пусть L – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^n$. *Расстоянием между вектором X и линейным подпространством L* называется длина вектора $X - V$, где V – проекция вектора X на L.

Обозначение: $\mathrm{dist}(X, L)$.

Иллюстрация для $\mathbb{R}^2$.



По определению $\mathrm{dist}(X, L) = \|X - V\|$, то есть $\mathrm{dist}(X, L)$ – это длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора X на прямую L.

2) Справедлива формула (без доказательства):

$$\boxed{\mathrm{dist}(X, L) = \|X - V\| = \min_{Z \in L}\|X - Z\|}, \tag{3}$$

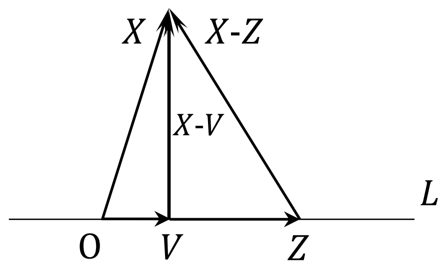
где L – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n, X \in \mathbb{R}^n$,

V – проекция X на L.

Пояснение.

$\min\limits_{Z\in L}\|X-Z\|$ означает, что рассматриваются всевозможные векторы Z из L и берется наименьшее из всех значений указанной нормы.

Для пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ формула (3) выражает тот факт, что перпендикуляр короче наклонной:



для любого $Z \in L$

$$\underbrace{\|X-V\|}_{\text{длина перпендикуляра}} \le \underbrace{\|X-Z\|}_{\text{длина наклонной}}$$

(используем сложение векторов по правилу треугольника).

Пример 5. Найти расстояние между вектором $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и линейным пространством $L = L\langle A_1, A_2\rangle$, где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

В примере 3 п. IV была найдена проекция вектора X на L:

$V = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Отсюда $X - V = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\operatorname{dist}(X, L) = \|X - V\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

§10. Метод наименьших квадратов для нахождения приближенного решения несовместной системы линейных уравнений

I. Постановка задачи.

Дана несовместная система линейных уравнений $AX = B$ или (в векторной форме)

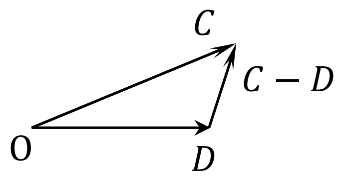
$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = B, \qquad (1)$$

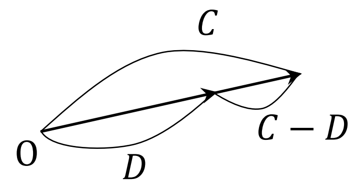
где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – столбцы матрицы A, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Будем предполагать, что векторы $A_1, A_2, \dots, A_n$ ЛНЗ.

Пояснение.

1) СЛУ несовместна, но мы хотим найти приближенное решение в том смысле, чтобы левая часть равенства (1) была «близка» к правой части, то есть чтобы вектор, стоящий в левой части, был «близок» к вектору B.
2) Интуитивное представление о «близости» двух векторов:

а) 

б) 

Чем меньше длина вектора $C - D$, тем более «близкими» представляются векторы C и D.

3) Естественно считать приближенное решение «хорошим», если норма разности между B и левой частью равенства (1) «мала», и считать приближение «наилучшим», когда эта норма – наименьшая из всех возможных.

Итак, задача ставится следующим образом. Требуется найти приближенное решение СЛУ, а именно, найти такие числа $\widehat{x_1}$, $\widehat{x_2}, \dots, \widehat{x_n}$, при которых

$$\|B - (\widehat{x_1}A_1 + \widehat{x_2}A_2 + \cdots + \widehat{x_n}A_n)\| = \min_{x_1,\dots,x_n} \|B - (x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n)\|. \qquad (2)$$

В правой части формулы (2) $x_1, \dots, x_n$ принимают любые значения, то есть рассматриваются всевозможные линейные комбинации векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ и берется наименьшее из всех значений указанной нормы.

Замечание. Квадрат нормы вектора есть сумма квадратов его координат, поэтому минимизация нормы равносильна минимизации этой суммы квадратов. Отсюда и происходит название «метод наименьших квадратов».

II. Решение задачи.

Пусть $L = L\langle A_1, A_2, \dots, A_n\rangle$. Рассмотрим правую часть формулы (2):

$$\min_{x_1,\dots,x_n} \|B - \underbrace{(x_1A_1 + \dots + x_nA_n)}_{Z}\| = \min_{Z\in L}\|B - Z\| \underbrace{=}_{\text{по формуле (3) §9}} \|B - V\|,$$

где V – проекция вектора B на L.

Тогда из формулы (2) имеем:

$$\|B - (\widehat{x_1}A_1 + \widehat{x_2}A_2 + \dots + \widehat{x_n}A_n)\| = \|B - V\|. \qquad (3)$$

Равенство (3) будет выполнено, если

$$\widehat{x_1}A_1 + \widehat{x_2}A_2 + \dots + \widehat{x_n}A_n = V.$$

Так как набор $A_1, \dots, A_n$ линейно независим, он является базисом ЛП L.

А так как $V \in L$, V раскладывается по векторам $A_1, \dots, A_n$.

Значит, искомые числа $\widehat{x_1}, \dots, \widehat{x_n}$ – это коэффициенты разложения вектора V по базису $A_1, \dots, A_n$.

Пример 1. Найти приближенное решение СЛУ, используя метод наименьших квадратов: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

Решение.

Данная СЛУ несовместна. Матрица СЛУ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

СЛУ в векторной форме:

$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, то есть $x_1A_1 + x_2A_2 = B$,

где $A_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ (столбцы матрицы СЛУ), $B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Рассмотрим линейное пространство $L = L\langle A_1, A_2\rangle$.

Векторы A_1, A_2 ЛНЗ; $A_1 \cdot A_2 = 0$, следовательно, A_1, A_2 – ортогональный базис ЛП L.

Найдем проекцию V вектора В на L. По формуле (2) §9

$$V = \left(\frac{B\cdot A_1}{\|A_1\|^2}\right)A_1 + \left(\frac{B\cdot A_2}{\|A_2\|^2}\right)A_2 = \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{3}A_2.$$

Числа $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{3}$ – коэффициенты разложения вектора V по базису A_1, A_2.

Таким образом, $\widehat{x_1} = \frac{1}{6}$, $\widehat{x_2} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\widehat{x_1} = \frac{1}{6}$, $\widehat{x_2} = \frac{1}{3}$ – приближенное решение СЛУ, найденное по методу наименьших квадратов.

Пример 2. Дана несовместная СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

Найти приближенное решение, используя метод наименьших квадратов.

Решение.

Матрица СЛУ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

СЛУ в векторной форме:

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ то есть } x_1A_1 + x_2A_2 = B,$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим линейное пространство $L = L\langle A_1, A_2\rangle$. Векторы A_1, A_2 ЛНЗ, значит, это базис L; $A_1 \cdot A_2 = 0$, следовательно, A_1, A_2 – ортогональный базис ЛП L.

Найдем проекцию V вектора B на L (по формуле (2) §9):

$$V = \left(\frac{B\cdot A_1}{\|A_1\|^2}\right)A_1 + \left(\frac{B\cdot A_2}{\|A_2\|^2}\right)A_2 = \frac{13}{18}A_1 + \left(\frac{-1}{9}\right)A_2.$$

Здесь $\frac{13}{18}$ и $\frac{-1}{9}$ – коэффициенты разложения вектора V по базису A_1, A_2.

Следовательно, $\widehat{x_1} = \frac{13}{18}$, $\widehat{x_2} = -\frac{1}{9}$ – искомые значения.

Ответ: $\widehat{x_1} = \frac{13}{18}$, $\widehat{x_2} = -\frac{1}{9}$ – приближенное решение СЛУ, найденное по методу наименьших квадратов.

Геометрическая интерпретация.

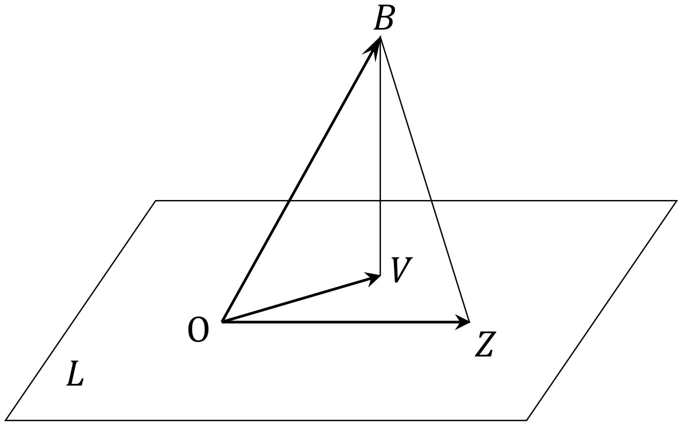
Рассмотрим систему трех линейных уравнений с двумя неизвестными в векторной форме:

$$x_1A_1 + x_2A_2 = B,$$

где A_1, A_2 и B – векторы из пространства $\mathbb{R}^3$, причем A_1 и A_2 ЛНЗ.

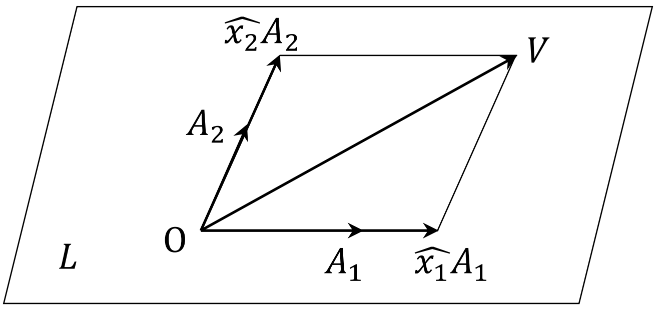
Пусть $L = L\langle A_1, A_2\rangle$. Тогда L – это плоскость в $\mathbb{R}^3$, а векторы A_1, A_2 – базис ЛП L.

СЛУ $x_1A_1 + x_2A_2 = B$ несовместна тогда и только тогда, когда B не принадлежит L. Из всех векторов, которые принадлежат L, наилучшим приближением к B будет вектор V – проекция вектора B на L, так как длина вектора $B - V$ не превосходит длины вектора $B - Z$ для любого $Z \in L$ (перпендикуляр короче наклонной).



Поэтому искомые значения x_1 и x_2 – те, для которых $x_1A_1 + x_2A_2 = V$, то есть коэффициенты разложения V по базису A_1, A_2.

Таким образом, найдя проекцию V и ее разложение по базису в виде $V = \widehat{x_1}A_1 + \widehat{x_2}A_2$, получаем, что $\widehat{x_1}, \widehat{x_2}$ – наилучшее приближенное решение СЛУ, полученное по методу наименьших квадратов.



В заключение отметим, что метод наименьших квадратов является наиболее распространенным методом решения прикладных задач, использующих линейные модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боревич З.И. Определители и матрицы: Учебное пособие. 5-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 192 с.

2. Беккер Б.М., Веселовская А.З. Линейная алгебра. Ч.1. Системы линейных уравнений: Учебное пособие. – СПбГУ, Полиграфический центр фак. менеджмента, С.-Петербург, 2000 – 25 с.

3. Высшая математика для экономистов. Под ред. Кремера Н.Ш. 3-е изд. – М.: 2010. – 479 с.

4. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для ВТУЗОВ. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. –3-е изд. – М.: 1993. – 480 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.

6. Малолеткин Г.Н., Семенов А.А., Халин В.Г., Черняев П.К., Бондарко М.В. Учебные и контрольные задания по математике: Высшая алгебра: Учеб. пособие. – СПб.: ЭФ СПбГУ, 2014. – 96 с.

7. Халин В.Г. Линейная алгебра для экономистов. Часть 1. Матрицы и определители. Векторные пространства. Рабочая тетрадь-конспект. СПб.: ОЦЭиМ, 2006. – 60 с.

СОДЕРЖАНИЕ