В.А. Барт, Е.Л. Барт, П.К. Черняев

МАТЕМАТИКА

Повторение курса средней школы

Санкт-Петербург
Издательский центр экономического факультета СПбГУ
2013

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Барт, Е.Л. Барт, П.К. Черняев

МАТЕМАТИКА

Повторение курса средней школы

Санкт-Петербург
Издательский центр экономического факультета СПбГУ
2013

УДК 330.4
ББК 65.271
Б 24

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. *М.А. Нарбут*, СПбГУ

Печатается по постановлению

Редакционно-издательского совета экономического факультета СПбГУ

Барт В.А., Барт Е.Л., Черняев П.К.
Б24 Математика. Повторение курса средней школы: Методич, пособие. – Издат. Центр эконом. Ф-та СПбГУ. – 2013. – 82с.

Настоящее методическое пособие адресовано в первую очередь студентам и преподавателям курсов повторения школьного курса математики на экономическом факультете. Методические указания снабжены упражнениями как для работы в аудитории, так и для самостоятельной работы.

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Действия с числовыми и алгебраическими дробями. Свойство степени и корня. Формулы сокращённого умножения и бином Ньютона. Разложение на множители………………………… 4

Тема 2. Линейная и квадратичная функции, график и множество значений. Линейные и квадратные уравнения, неравенства и системы…………………………………………..…………………… 16

Тема 3. Модуль действительного числа и его свойства. Расстояние между точками на прямой. Уравнения и неравенства с модулем. Геометрическая интерпретация множества решений на прямой и на плоскости………………………………………...…………………… 26

Тема 4. Дробно-линейная функция. Элементарные преобразования графиков. Асимптоты графика функции. Обратная функция ………. 31

Тема 5. Рациональные уравнения и неравенства ……………...…… 35

Тема 6. Системы алгебраических уравнений. Прогрессии…….…..... 40

Тема 7. Иррациональные уравнения и неравенства……….……….... 45

Тема 8. Показательная функция и ее свойства. Уравнения, неравенства и системы………………………………….……….... 48

Тема 9. Логарифмы и их свойства. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения, неравенства и системы…….……….... 52

Тема 10. Тригонометрические функции и их свойства. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства…….…….……….... 59

Тема 11. Множества на плоскости, заданные уравнениями и неравенствами. Объединение и пересечение множеств…….……….... 73

Тема 12. Задачи с процентами ……………………….………………..…… 79

Тема 13. Контрольная работа ……….…………………….………..…… 82

Тема 1. ДЕЙСТВИЯ С ЧИСЛОВЫМИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ И КОРНЯ. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Действия с численными и алгебраическими дробями.
1. Сложение и вычитание.
Для того, чтобы сложить или вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить или вычесть их числители, оставив знаменатель без изменения.
Для того, чтобы сложить или вычесть дроби с разными знаменателями, нужно сначала привести эти дроби к общему знаменателю.
2. Умножение.
Произведение двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей умножаемых дробей, а знаменатель равен произведению знаменателей.
3. Деление.
Частное от деления одной дроби на другую равно дроби, числитель которой равен произведению числителя делимого на знаменатель делителя, а знаменатель равен произведению знаменателя делимого на числитель делителя.

Свойства степени.
Для любых x, y и положительных a и b верны равенства:

1. $a^0 = 1$;

2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

4. $(a^x)^y = a^{xy}$;

5. $(ab)^x = a^x b^x$;

6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

7. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Пусть n натуральное число (далее мы будем писать короче $n \in \mathbf{N}$ – где **N** обозначает множество натуральных чисел, то есть **N** = {1, 2, 3, …}).
Арифметическим корнем четной *n*-ой степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, *n*-ая степень которого равна a ;

$b=\sqrt[n]{a}$, если $b \ge 0$ и $b^n = a$. Например, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt[4]{(-3)^4}=3$ (по определению арифметический корень четной степени всегда неотрицателен). Извлечь корень нечетной степени $\sqrt[n]{a}$ можно из любого действительного числа a, он является действительным числом, удовлетворяющим условию $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Свойства арифметических корней.

Для любых неотрицательных a и b, натуральных n и k, больших 1, верны равенства:

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\ne 0)$;

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$;

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

5. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$;

6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a\ (a\ge 0)$;

7. $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$, если $0\le a<b$;

8. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0\\ -a, & a<0\end{cases}$;

9. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$;

10. $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$.

Арифметический корень n-й степени, может быть записан, как степень с рациональным показателем:

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}}$.

Формулы сокращенного умножения.

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ или

$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

Первые три формулы являются частными случаями более общей формулы, называемой *биномом Ньютона:*

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n .$$

Легко проверить справедливость формулы при $n = 1, 2, 3, 4.$:

$$\left(a+b\right)^1 = a + 1\cdot a^{1-1}b = a+b \ ,$$

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + \frac{2\left(2-1\right)}{1\cdot 2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ ,$$

$$\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ab^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \ ,$$

$$\left(a+b\right)^4 = a^4 + 4a^3b + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}a^2b^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}ab^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \ .$$

Коэффициенты при произведении $a^{n-k}b^k$ называются *биномиальными коэффициентами*, обозначаются C_n^k и могут быть вычислены по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (запись $m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m$ обозначает *факториал* натурального числа m, причем полагают $0! = 1$). Их также можно найти из «треугольника Паскаля»:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

В этом треугольнике в каждой строке по краям стоят 1, а любое число внутри строки является суммой двух чисел предыдущей строки, ближайших к нему сверху. Сравнив строки треугольника Паскаля с формулами бинома при различных n = 1, 2, 3, 4, легко заметить, что числа, стоящие в n-ой строке (считая вершину треугольника нулевой строкой), являются последовательными коэффициентами разложения $(a+b)^n$.

Выражение вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots \ \ldots + a_1 x + a_0$, если $a_n \neq 0$, называется алгебраическим многочленом n-й степени. Здесь a_n, …, a_0 – коэффициенты многочлена (действительные числа); x – переменная.
Если $P_n(x_0) = 0$, то x_0 называется *корнем многочлена.*
Многочлен второй степени $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ называется *квадратным трехчленом*. Его корни являются корнями общего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Через коэффициенты многочлена они выражаются следующим образом:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если b четное число, то удобнее использовать формулу

$$x_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}.$$

Если коэффициент $a = 1$, то квадратное уравнение называется *приведенным* и записывается в виде $x^2 + bx + c = 0$, тогда

$$x_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - c}.$$

Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то квадратный трехчлен можно разложить на произведение линейных сомножителей:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то x_1 и x_2 удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a; \\ x_1 x_2 = c/a; \end{cases}$$

для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

где x_1 и x_2 – корни трехчлена.
Замечание. Теорема Виета для корней квадратного уравнения является частным случаем более общей теоремы, устанавливающей связь между корнями алгебраического многочлена n-й степени и его действительными коэффициентами.
Так, если :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \ ,$$

и $x_1, x_2, \ldots x_n$ − корни этого уравнения, то

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + \dots x_n = -a_1 \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2 \\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_1 \cdot x_2 \dots x_n = (-1)^n a_n
\end{cases}
$$

Пусть

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0;$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_m x + b_0,$$

причем $m \le n$. Тогда $P_n(x)/Q_m(x) = S_{n-m}(x) + R_k(x)/Q_m(x)$ есть результат деления многочленов. Многочлен $S_{n-m}(x)$ называется *целой частью* дробно-рациональной функции $P_n(x)/Q_m(x)$, а $R_k(x)$ – *остатком* ($k < m$) от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$. Результат деления многочленов может быть записан в другой форме:

$P_n(x) = S_{n-m}(x)\, Q_m(x) + R_k(x)$.

По общему правилу деление многочленов выполняется в следующей последовательности:

1) делимое и делитель расположить по убывающим степеням x;

2) разделить старший член делимого на старший член делителя, получив первый (старший) член частного $S_{n-m}(x)$;

3) умножить первый член частного на делитель и вычесть полученное выражение из делимого, получив многочлен, который является первым остатком деления;

4) повторить деление в указанном порядке, принимая за делимое первый остаток, продолжать деление до тех пор, пока не получим остаток, степень которого ниже степени делителя, или остаток, равный нулю.

Этот метод называется «деление углом». Поясним его на примере.

Пример. Разделить $x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ на $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

Решение. Многочлены уже расположены по убывающим степеням x, поэтому можно производить деление:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3} \end{array} & \begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ \hline x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \end{array}.
\end{array}
$$

Первый остаток

$$
-\begin{array}{l} 4x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{4x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 4x^2} \end{array}
$$

Второй остаток

$$
-\begin{array}{l} 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 3x + 1 \\ \underline{2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x} \end{array}
$$

Третий остаток $$-\frac{x^3+2x^2-x+1}{\underline{x^3+2x^2-2x+1}}$$

Четвертый остаток равен x.
Степень многочлена x меньше степени делителя, следовательно, $R(x) = x$ и есть остаток от деления данных многочленов.
Заметим, что, если остаток $R_k(x)=0$, то говорят, что многочлен $P_n(x)$ *делится нацело* на многочлен $Q_m(x)$.
Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен вида $x-a$ равен значению многочлена при $x=a$, т.е. $R(x) = P_n(a)$.
Следовательно, если $x=a$ является корнем многочлена $P_n(x)$, то $R(x) = 0$, и справедливо разложение $P_n(x) = S_{n-1}(x)\,(x-a)$.
Если многочлен $P_n(x)$ делится нацело на $(x-a)^k$, а на $(x-a)^{k+1}$ уже не делится, то $x=a$ называется *корнем кратности* k.
Справедливо более общее утверждение.
Основная теорема алгебры (Гаусс). Любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных двучленов вида $x-a$ и квадратных трехчленов вида x^2+px+q, т.е.
$P_n(x)=a_n(x-a)^k(x-b)^m\ldots(x^2+px+q)^l$, где $k, m,\ldots$ – кратности корней $a, b,\ldots$.

1.1. Выполнить действия с дробями:

1. $$\frac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}$$ *Ответ:* 0,1

2. $$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{7}{1{,}3}\right)}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$$
Ответ: $20\frac{3}{4}$

3. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}$ *Ответ:* $\frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}$

4. $\frac{2}{x+y}+\frac{1}{x-y}-\frac{3x}{x^2-y^2}$ *Ответ:* $\frac{y}{y^2-x^2}$

5. $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+2}{x+3}$ *Ответ:* $\dfrac{x+1}{x+3}$

6. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}:\dfrac{x-1}{x+1}$ *Ответ:* $\dfrac{x-1}{x+2}$

7. $\dfrac{2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$ *Ответ:* $\dfrac{2}{x}$

1.2. Выполнить деление многочленов:

1. $(2x^5+5x^4+11x^3+\ 14x^2+11x+5)$ на $(2x^2+x+5)$
2. $(4x^6-3x^5+2x-4)$ на (x^2+2x-1).
3. (x^3-3x^2+2x-1) на (x^2-4x+5)

1.3. Разложить на множители выражения:

1. $6x^2+5x-6$.
2. $x^2-ax-6a^2$.
3. $3a^2+2ab-5b^2$.
4. $x^2-2ax+a^2-b^2$.
5. $3x^4-4x^3+1$
6. x^4-2x^3+2x+1

1.4. Упростить выражения:

1. $\sqrt{a^3}:\sqrt[3]{a}\cdot\dfrac{\sqrt[6]{a^{-1}}}{a}$ *Ответ:* $\sqrt[3]{a^2}$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{z^2}:\sqrt{z^3}}{(\sqrt{z\sqrt[3]{z^2}})^{-1}}$ *Ответ:* 1

3. $\dfrac{\sqrt[5]{ab^3}\cdot\sqrt[10]{a^8b}}{a^2\sqrt[10]{b^{-3}}}$ *Ответ:* b/a

4. $\dfrac{\sqrt[9]{a^3b}:\sqrt[3]{a^{15}\sqrt[3]{b^{-1}}}}{\sqrt[5]{a^{-25}}\cdot\sqrt[9]{b^2}}$ *Ответ:* $\sqrt[3]{a^2}$

5. $\sqrt{\dfrac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{y^2}}}:\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{x^{-6}}}$ *Ответ:* $1/\sqrt[3]{y}$

6. $\sqrt[3]{\left(\frac{8c^{-3}}{27b^{6}}\right)^{-1}}\cdot\frac{2}{3}\cdot a^{-1}b^{-2}$ *Ответ:* c/a

1.5. Вычислить или упростить:

1. $\left(\sqrt{10+5\sqrt{3}}-\sqrt{10-5\sqrt{3}}\right)^{2}$ *Ответ: 10*
2. $\sqrt[9]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[9]{9+4\sqrt{5}}$ *Ответ: 1*
3. $\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^{2}$ *Ответ: 4*
4. $\sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[4]{5+2\sqrt{6}}$ *Ответ: 1*
5. $\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$ *Ответ: 2*
6. $2\sqrt{27}+4\sqrt{48}-0.2\sqrt{75}-9\sqrt{3}$ *Ответ:* $12\sqrt{3}$
7. $\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ *Ответ: 6*
8. $\left(4-2\sqrt{3}\right)\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}-4}{\left(1+\sqrt{7}\right)^{-2}}$ *Ответ: – 16*
9. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$ *Ответ: 8*
10. $2\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{13-4\sqrt{3}}$ *Ответ: 3*
11. $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$ *Ответ:* $3+\sqrt{2}$
12. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}$ *Ответ:* $\frac{1}{2}$

1.6. Выполнить следующие действия:

1. Внести под знак корня.

а) $\left(2-\sqrt{5}\right)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; б) $\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; в) $(\sqrt{5}-3)\sqrt{14+6\sqrt{5}}$; г) $a\sqrt[4]{3}$, $a\geq 0$; д) $b\sqrt[6]{2}$, $b\leq 0$; е) $ab\sqrt[4]{3}$, $a\leq 0$, $b\geq 0$; ж) $-ab\sqrt[8]{b^{3}}$; з) $x\sqrt{-x^{3}}$; и) $y^{3}\cdot\sqrt{-y}$; к) $ab\sqrt[6]{-a}$; л) $-ab\sqrt[10]{-b}$;

2. Записать как полный квадрат.

а) $3+2\sqrt{2}$; б) $7-4\sqrt{3}$; в) $28-6\sqrt{3}$; г) $37-12\sqrt{7}$; д) $13-4\sqrt{10}$; е) $5+2\sqrt{6}$;

3. Разложить по разности квадратов.

а) $x^4 - y^4$; б) $x - y$; в) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$; г) $x^2 - y^3$; д) $a - 8b^3$; е) $25 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; ж) $a^{-1} - \sqrt[3]{b}$;

4. Разложить по разности кубов.

а) $x - y$; б) $x^2 - y^2$; в) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$; г) $x^5 - y^7$; д) $\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}$; е) $8a^{-3} - 1$; ж) $a^{-1} - b^4$;

5. Разложить по сумме кубов.

а) $125 + a^3$; б) $\dfrac{64}{x^2} + \dfrac{y}{125}$; в) $\sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{y}$; г) $a + \sqrt[4]{b}$; д) $\dfrac{1}{a} + 1$; е) $x^4 + y^5$; ж) $a^{-3} + b^{-6}$;

6. Выделить полный квадрат.

а) $x^2 + 2x + 5$; б) $x^2 - 4x + 13$; в) $4x^2 + 4x - 10$; г) $x^2 + 3x + 1$; д) $x^2 - x + 5$; е) $3x^2 - 6x + 21$; ж) $2x^2 - 5x + 1$; з) $1 - 2x - x^2$; и) $4 + 3x - x^2$; к) $3 + 2x - 5x^2$; л) $7x^2 + 10x - 4$;

7. Избавиться от иррациональности в знаменателе.

а) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{14}{3 + \sqrt{2}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$;

д) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ *Ответ:* $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2}{4}$;

е) $\dfrac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}}$ *Ответ:* $2\sqrt{2} - 2$;

ж) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}$ *Ответ:* $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$;

з) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{-49}}$ *Ответ:* $-\dfrac{2\sqrt[3]{7}}{7}$;

и) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2}$ *Ответ:* $\dfrac{2 - \sqrt[4]{8}}{2}$.

1.7. Упростить выражение:

1. $$\frac{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{\frac{2}{m}}-a^{\frac{2}{n}})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$$ *Ответ:* $\dfrac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$

2. $$\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}+\sqrt[3]{x}\right)+\frac{8-x}{\sqrt[3]{x}+2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2}\right)$$ *Ответ:* 2.

3. $$\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}.$$ *Ответ:*

$$\left[\begin{array}{l}1,\ \text{если } a>0;\\ -1,\ \text{если } a<0.\end{array}\right.$$

4. $$\sqrt{\frac{3x+a^3}{2a}+\sqrt{3ax}}-\sqrt{\frac{3x+a^3}{2a}-\sqrt{3ax}}\quad \text{при}\ \ a>0, x\ge 0$$

Ответ: $$\begin{cases} a\sqrt{2} & \text{при } 3x\ge a^3;\\ \sqrt{6x/a} & \text{при } 3x<a^3\,. \end{cases}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1.8. Вычислить:

1. $$\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2{,}2\cdot\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}$$

2. $$\frac{\left(0.3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0.07}{(13-0.416):6.05+1.92}$$

1.9. Упростить выражение:

1. $\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt{a}\cdot a^{-2}$

2. $\sqrt{x^5}:\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{1}{x^2}$

3. $\sqrt[3]{x}:x^{-2/3}\cdot\sqrt{x^{-1}}$

4. $\sqrt{a^3}:\sqrt[3]{a}\cdot\dfrac{\sqrt[6]{a^{-1}}}{a}$

5. $\dfrac{\sqrt[3]{c}\cdot(\sqrt[5]{c})^3}{\sqrt[4]{c^3}}$

6. $\sqrt[3]{a^2}:\sqrt{a^3}\cdot\dfrac{1}{a^2}$

7. $b^{-1}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt{b^3}$

8. $\dfrac{\sqrt[3]{z^2}:\sqrt{z^3}}{(\sqrt{z\sqrt[3]{z^2}})^{-1}}$

9. $\dfrac{\sqrt[16]{y^{12}}:y^{7/8}\cdot y^{0,25}}{\sqrt[8]{y}}$

10. $\dfrac{\sqrt[7]{a^3}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[7]{a^{-4}}\sqrt{a^3}}$

11. $\dfrac{\sqrt[5]{ab^3}\cdot\sqrt[10]{a^8b}}{a^2\sqrt[10]{b^{-3}}}$

12. $\dfrac{\sqrt[9]{a^3b}:\sqrt[3]{a^{15}\sqrt[3]{b^{-1}}}}{\sqrt[5]{a^{-25}}\cdot\sqrt[9]{b^2}}$

13. $\sqrt{\dfrac{x^3}{y^4}}\cdot\sqrt[3]{xy^{-4}}:\sqrt[6]{x^{-1}}\ \sqrt{\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}}:\dfrac{\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt{a^{-3}}}$

1.10. Вычислить:

1. $\dfrac{\sqrt{6,3\cdot1,7}\left(\sqrt{6,3/1,7}-\sqrt{1,7/6,3}\right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^2-4\cdot6,3\cdot1,7}}$

2. $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$

3. $\sqrt{\sqrt{b}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{2}}$

4. $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$

5. $2\sqrt{18}+5\sqrt{50}-0.25\sqrt{32}-7\sqrt{2}$

6. $\left(2\sqrt{6}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)3\sqrt{6}+36\sqrt{2}$

7. $\left(6+2\sqrt{2}\right)\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\dfrac{4.5-\sqrt{14}}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^{-2}}$

8. $\sqrt{18-8\sqrt{2}}+\sqrt{38+12\sqrt{2}}$

9. $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$

1.11. Упростить выражения:

1. $\left(a+\sqrt{\dfrac{b^3}{a}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1}+\dfrac{1}{\sqrt{b^{-2}}}$.

2. $\left(\left(\dfrac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5$.

3. $\left(\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}-x^{1/3}-1}{x^{2/3}(x-1)}\right)\cdot\left(\dfrac{x^{1/3}+1}{x^{2/3}}\right)^{-1}$.

4. $\dfrac{\left(\sqrt{x}-x^{\frac{1}{3}}\right)^2+4x^{-\frac{1}{2}}:x^{-\frac{8}{6}}}{x^{-\frac{4}{3}}\left(x-x^{\frac{2}{3}}\right)\left(x\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}\right)}$.

5. $\dfrac{\left(ab^{-3}-a^{-3}b\right)^{-1}\cdot\left(a^{-2}+b^{-2}\right)}{\left(b^{-2}-a^{-2}\right)^{-1}}$.

6. $\left(\dfrac{x^2}{y^2}-2+\dfrac{y^2}{x^2}\right):\left(\dfrac{x^4y^4}{xy+y^2}\right)^{-1}\cdot\dfrac{\dfrac{y}{x}-1+\dfrac{x}{y}}{x^3-2x^2y+xy^2}$.

7. $3\,\dfrac{(xy)^{-1}-x^{-2}}{y^{-2}-x^{-2}}+\dfrac{(x-y)^3+2x^3+y^3}{x^3+y^3}$.

Тема 2. ЛИНЕЙНАЯ И КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИИ, ГРАФИК И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ.

Линейная функция.

Если a и b – некоторые фиксированные вещественные (действительные) числа, то выражение $y = ax + b$, где x – произвольное вещественное число (независимая переменная), задает *линейную функцию*. Кратко можно записать $y = ax + b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

График линейной функции в различных случаях (для разных коэффициентов a и b), может иметь вид, изображенный на рис.2.1. - 2.6.

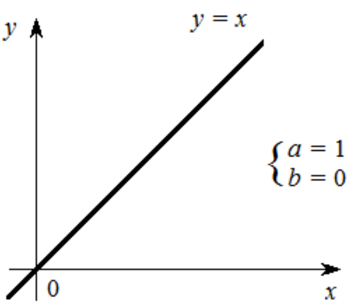


рис.2.1,

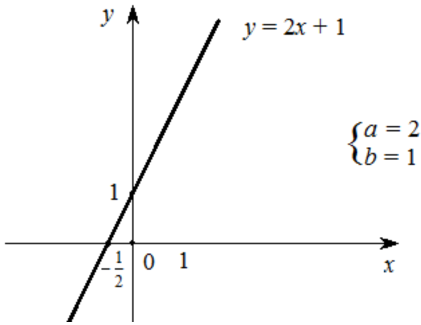


рис.2.2,

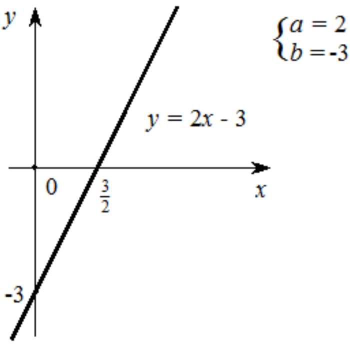


рис.2.3,

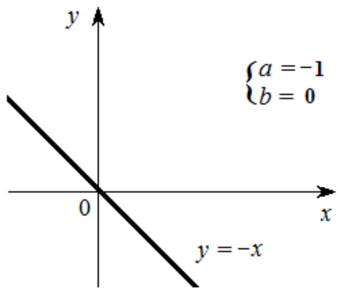


рис.2.4,

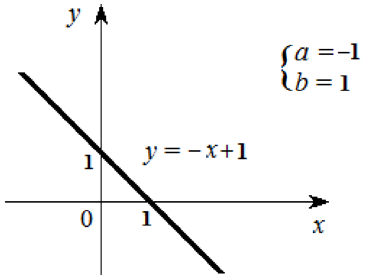


рис.2.5,

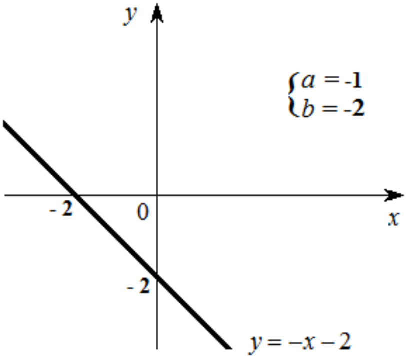


рис.2.6,

Во всех указанных случаях ($a \neq 0$) множеством значений E(y) функции $y = ax + b$ является вся вещественная ось $\mathbf{R}$.

В случае $a = 0$ линейная функция превращается в постоянную $y = b : \mathbf{R} \to \{b\}$, у которой область определения – вся вещественная ось $\mathbf{R}$, а множество значений – одно число b. График такой постоянной при $\begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$ см. на рис.2.7.

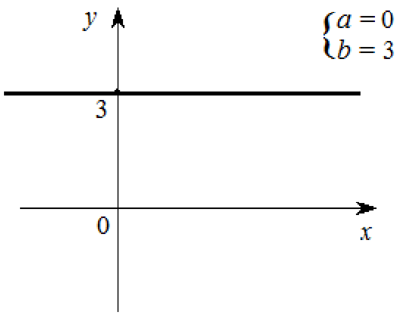


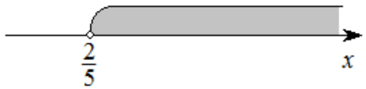
рис.2.7.

2.1. Решить уравнение:

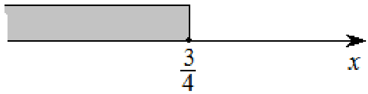
1. $5x - 2 = 0$ *Ответ*: $\left\{ \frac{2}{5} \right\}$.
2. $-3x + 4 = 0$ *Ответ*: $\left\{ \frac{4}{3} \right\}$.
3. $-2x - 7 = 0$ *Ответ*: $\left\{ -\frac{7}{2} \right\}$.

2.2. Решить неравенство и изобразить решение на числовой прямой:

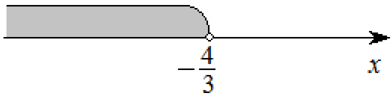
1. $7x-3>2x-1$ *Ответ*: $\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$, см. рис.



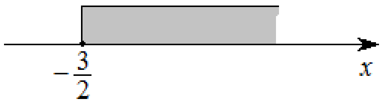
2. $-8x+5\geq 2-4x$ *Ответ:* $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]$, см. рис.



3. $8x+4<5x$ *Ответ*: $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$, см. рис.

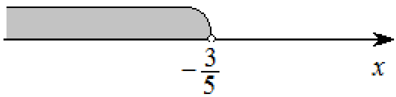


4. $2x-9\leq 4x-6$ *Ответ*: $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$, см. рис.

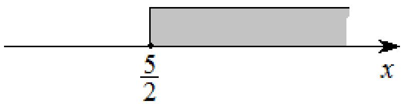


2.3. Решить систему неравенств и изобразить решение на числовой прямой:

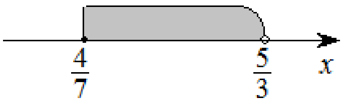
1. $\begin{cases}3x-2<0,\\5x+3<0.\end{cases}$ *Ответ*: $\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)$, см. рис.



2. $\begin{cases}2x-5\geq 0,\\4x-3\geq 0.\end{cases}$ *Ответ*: $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$, см. рис.



3. $\begin{cases} -3x+5>0, \\ 7x-4\geq 0. \end{cases}$ *Ответ*: $\left[\frac{4}{7};\frac{5}{3}\right)$, см. рис.



4. $\begin{cases} -2x-7>0, \\ 3x+4>0. \end{cases}$ *Ответ*: нет решений.

Квадратичная функция.

Если $a\neq 0, b, c-$ известные вещественные (действительные) числа, то выражение $y=ax^2+bx+c:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ задает *квадратичную функцию*. Её свойства и график зависят от знака коэффициента *a*, и от величин *b* и *c*. Обозначим $D=b^2-4ac$.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является *парабола* с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{2a}\right)$, симметричная относительно прямой $x=-\frac{b}{2a}$. Корнями функции (в случае $D>0$) являются числа $x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{D}}{2a}$. В случае $D=0$ парабола касается оси Ox в точке $\left(-\frac{b}{2a};0\right)$, т. е. имеется один корень.

Возможные варианты расположения графика квадратичной функции см. на рис. 2.15.-2.20.

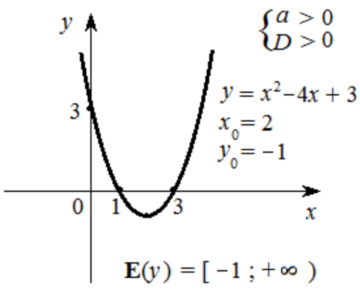


рис.2.15,

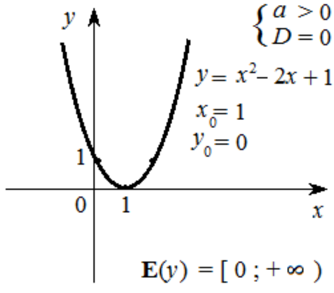


рис.2.16,

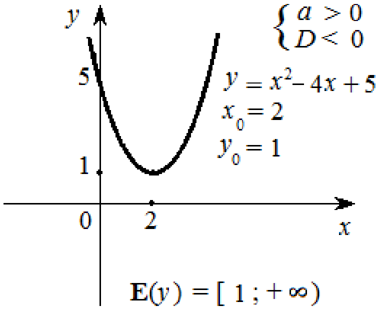


рис.2.17,

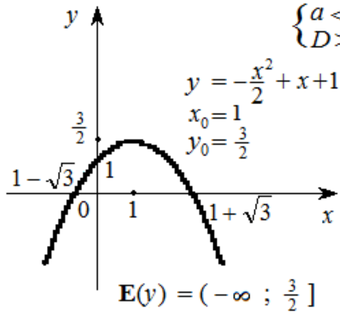


рис.2.18,

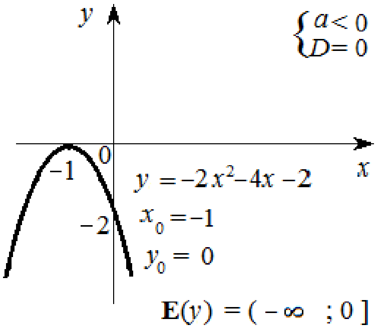


рис.2.19,

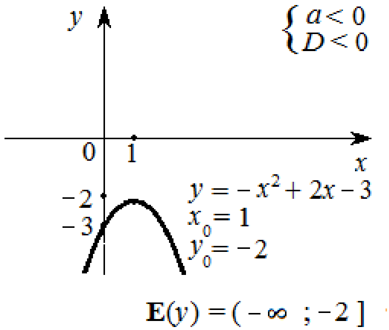


рис.2.20,

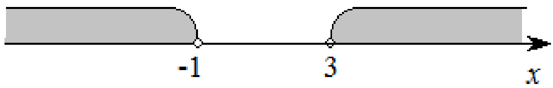
Для нахождения корней x_1, x_2 часто бывает удобно применить теорему Виета (см. **Тему 1**)

2.4. Решить уравнение:

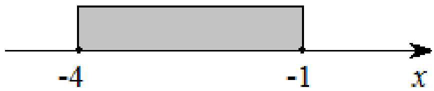
1. $x^2 - 5x + 6 = 0$ *Ответ*: $\{2; 3\}$,
2. $x^2 + 5x - 6 = 0$ *Ответ*: $\{1; -6\}$,
3. $x^2 - 4x + 2 = 0$ *Ответ*: $\{2 \pm \sqrt{2}\}$,
4. $x^2 - 4x + 4 = 0$ *Ответ*: $\{-2\}$,
5. $61x^2 - 184x + 124 = 0$ *Ответ*: $\left\{\frac{62}{61}; 2\right\}$,
6. $15x^2 - 32x - 927 = 0$ *Ответ*: $\left\{-\frac{103}{15}; 9\right\}$.

2.5. Решить неравенство и изобразить решение на числовой прямой:

1. $x^2 - 4x + 3 > 0$ *Ответ*: $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$, см. рис.



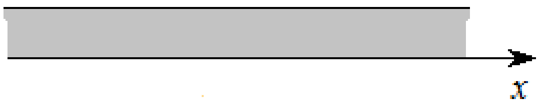
2. $-x^2 - 5x - 4 > 0$ *Ответ*: $[-4;-1]$, см. рис.



3. $4x^2 + 4x + 1 \le 0$ *Ответ*: $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, см. рис.

4. $-x^2 - 6x - 10 \ge 0$ *Ответ*: нет решений.

5. $x^2 - 2x + 2 \ge 0$ *Ответ*: $x \in \mathbf{R}$, см. рис.



2.6. Решить систему уравнений:

1. $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x^2 - 3x - 28 = 0 \end{cases}$ *Ответ*: $\{-4\}$

2. $\begin{cases} x^2 - 7x - 8 = 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = 0 \end{cases}$ *Ответ*: решений нет.

2.7. Решить систему неравенств:

1. $\begin{cases} x^2 - 6x - 7 < 0, \\ x^2 - 7x + 12 \ge 0. \end{cases}$ *Ответ*: $(-1;3]\cup[4;7)$

2. $\begin{cases} x^2 - 8x - 9 < 0, \\ x^2 - 5x - 14 \ge 0. \end{cases}$ *Ответ*: $[-7;9)$

3. $\begin{cases} x^2-5x-6>0, \\ -x^2+8x-15>0. \end{cases}$ *Ответ*: решений нет.

2.8. При различных значениях параметра *a* решить неравенство:

1. $ax>0$ *Ответ*: $\left[\begin{array}{l} a>0 \Rightarrow x>0; \\ a=0 \Rightarrow \text{нет решений}; \\ \mathrm{a}<0 \Rightarrow \mathrm{x}<0. \end{array}\right.$

2. $ax+1<0$ *Ответ*: $\left[\begin{array}{l} a>0 \Rightarrow x<-1/a; \\ a=0 \Rightarrow \text{нет решений}; \\ \mathrm{a}<0 \Rightarrow \mathrm{x}>-1/\mathrm{a}. \end{array}\right.$

3. $ax^2+2x>0$ *Ответ*: $\left[\begin{array}{l} a>0 \Rightarrow x>0,\ x<-2/a; \\ a=0 \Rightarrow x>0; \\ a<0 \Rightarrow x<0,\ x>-2/a. \end{array}\right.$

4. $x^2+ax>0$ *Ответ*: $\left[\begin{array}{l} a>0 \Rightarrow x>0,\ x<-a; \\ a=0 \Rightarrow x\neq 0; \\ a<0 \Rightarrow x<0,\ x>-a. \end{array}\right.$

5. $x^2-2x+a>0$ *Ответ*: $\left[\begin{array}{l} a>1 \Rightarrow x\in R; \\ a=1 \Rightarrow x\neq 1; \\ a<1 \Rightarrow x<1-\sqrt{1-a};\ x>1+\sqrt{1-a}. \end{array}\right.$

2.9. Найти множество значений функции и построить её график:

1. $y=x^2-5x+4$ *Ответ*: $E(y)=\left[-\frac{9}{4};+\infty\right)$, см. рис.2.25.

2. $y=x^2-4x+4$ *Ответ*: $E(y)=[0;+\infty)$, см. рис.2.26.

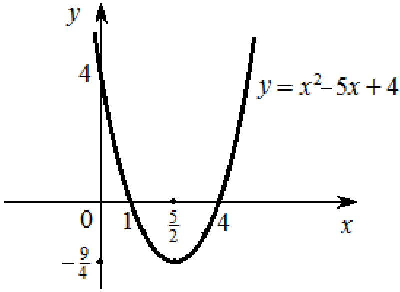


рис. 2.25,

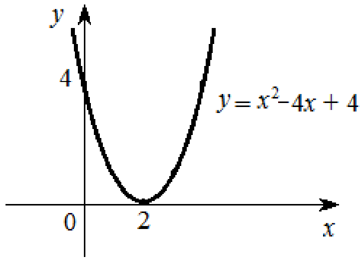


рис.2.26.

3. $y = x^2 + 2x + 4$ *Ответ*: $E(y) = [3;+\infty)$, см. рис.2.27.

4. $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + 6$ *Ответ*: $E(y) = (-\infty;8]$, см. рис.2.28.

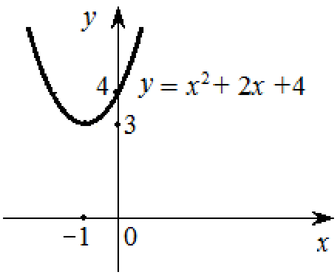


рис. 2.27,

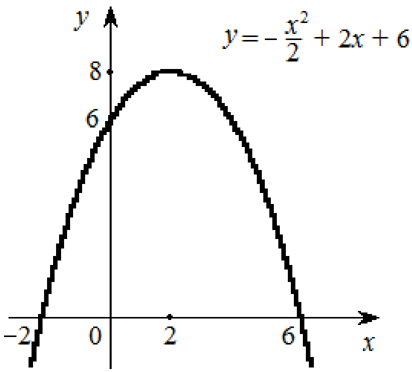


рис.2.28.

5. $y = -2x^2 - 4x - 5$ *Ответ*: $E(y) = (-\infty;-3]$, см. рис.2.29.

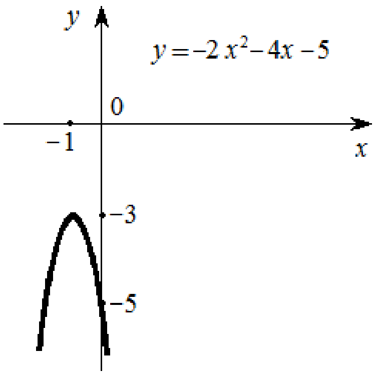


рис. 2.29.

2.10. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого были бы обратны корням данного уравнения:

1. $4x^2 - 13x + 7 = 0$ *Ответ*: $7y^2 - 13y + 4 = 0$
2. $5x^2 - 11x - 6 = 0$ *Ответ*: $6y^2 + 11y - 5 = 0.$

2.11. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\frac{x_1^2}{x_2}$ и $\frac{x_2^2}{x_1}$, где x_1, x_2 – корни следующего уравнения:

1. $3x^2 - 7x - 6 = 0$ *Ответ*: $54y^2 + 721y - 108 = 0$
2. $6x^2 - 2x - 5 = 0$ *Ответ*: $90y^2 + 94y - 75 = 0$
3. $7x^2 + 8x + 2 = 0$ *Ответ*: $49y^2 + 88y + 14 = 0.$

2.12. Найти множество значений выражения:

1. $2a^2 - 3b^2$, если $-5 \le a \le 4,\ -3 \le b \le 4.$ *Ответ*:[– 48; 50]
2. $3a^2 - 5b^2$, если $-2 \le a \le 4,\ -1 \le b \le 3.$ *Ответ*: [– 45; 48]
3. $4a^2 - 3b^2$, если $-3 \le a \le 1,\ -5 \le b \le 7.$ *Ответ*:[– 147; 36]

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

2.13. Решить уравнение:

1. $3x - 4 = 1 - 5x.$
2. $2 - 7x = x + 4.$

2.14. Решить неравенство и изобразить решение на числовой прямой:

1. $7x - 5 < 3 + x.$
2. $3 - 11x > 5x + 2.$

2.15. Решить систему неравенств и изобразить решение на числовой прямой:

1. $\begin{cases} 5x - 3 > 1 - 2x, \\ 3x + 4 < x + 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 6 - x < 3x + 5, \\ 2x - 3 > 5x + 1. \end{cases}$

2.16. Решить уравнение:

1. $x^2 - 10x + 21 = 0.$
2. $x^2 - 8x + 13 = 0.$
3. $7x^2 - 26x - 2280 = 0.$

2.17. Решить и изобразить решение на числовой прямой:

1. $x^2 - 11x + 24 > 0.$
2. $-x^2 - 14x - 48 > 0.$
3. $9x^2 + 6x + 1 \le 0.$

4. $x^2+3x+3>0$.

5. $x^2+5x+7<0$.

2.18. Решить систему уравнений:

1. $\begin{cases} x^2-7x+12=0, \\ x^2+5x-24=0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2-4x-32=0, \\ x^2+2x-24=0. \end{cases}$

2.19. Решить систему неравенств и изобразить решение на числовой оси:

1. $\begin{cases} x^2-3x-28<0, \\ -x^2-x+6\ge 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2-5x-66\ge 0, \\ x^2+10x+21>0. \end{cases}$

2.20. При различных значениях параметра a решить неравенство:

1. $ax<1$.

2. $(x-a)^2<a^2$.

3. $(ax)^2-4x\le 0$.

2.21. Найти множество значений функции и построить её график:

1. $y=x^2-8x+7$.

2. $y=-9x^2-6x-1$.

3. $y=-x^2-4x-5$.

4. $y=\frac{x^2}{4}-x+4$.

5. $y=25x^2-22x-768$.

2.22. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого были бы обратны корням уравнения:

1. $3x^2-17x+9=0$.

2. $7x^2+19x-3=0$.

2.23. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\frac{x_1^2}{x_2}$ и $\frac{x_2^2}{x_1}$, где x_1, x_2 – корни следующего уравнения:

1. $9x^2-2x-3=0$.

2. $5x^2+14x+7=0$.

3. $2x^2-5x-4=0$.

2.24. Найти множество значений выражения :

1. $3a^2 - 2b^2$, $-2 \le a \le 1$, $-5 \le b \le 1$.

2. $4a^2 - 5b^2$, $-3 \le a \le 2$, $-4 \le b \le 3$.

3. $7a^2 - 3b^2$, $-4 \le a \le 5$, $-7 \le b \le 2$.

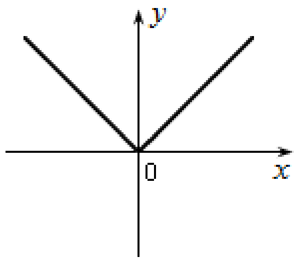
Тема 3. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ НА ПРЯМОЙ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ НА ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

Модулем (или *абсолютной величиной*) действительного числа x (обозначается $|x|$) называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее следующим условиям:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл: $|x|$ **–** расстояние на координатной оси от точки с абсциссой x до точки 0, а выражение $|x_1 - x_2|$ – расстояние на координатной оси между двумя точками, с абсциссами x_1 и x_2.

График функции $y = |x|$ **:**



Свойства модуля:

1. $|x| \ge 0$;
2. $|x| = |-x|$
3. $|x| \ge x$;
4. $|xy| = |x| \cdot |y|$;
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \ne 0$;

6. $|x|+|y|=x+y \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

7. $|x+y|\le|x|+|y|$;

8. $|x-y|\ge|x|-|y|$;

При $a>0$

9. $|x|\le a \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -a \\ x\le a \end{cases}$, $или -a\le x\le a$;

10. $|x|\ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -a \\ x\ge a \end{array}\right.$

Простейшие уравнения с модулем:

$$|f(x)|=f(x) \Leftrightarrow f(x)\ge 0$$

$$|f(x)|=-f(x) \Leftrightarrow f(x)\le 0$$

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$$

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$$

$$|f(x)|+|g(x)|=|f(x)+g(x)| \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\ge 0$$

$$|f(x)|+|g(x)|=f(x)-g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\le 0 \end{cases}$$

$$|f(x)|+|g(x)|=|f(x)-g(x)| \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\le 0$$

Простейшие неравенства с модулем:

$$|f(x)|>f(x) \Leftrightarrow f(x)<0$$

$$|f(x)|\le f(x) \Leftrightarrow f(x)\ge 0$$

$$|f(x)|\ge f(x) : \forall x\in ОДЗ$$

$|f(x)|<f(x)$: решений нет

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$$

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{array}\right.$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x) \geq |g(x)|| \;\Leftrightarrow\; f^2(x) \geq g^2(x) \;\Leftrightarrow\; (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) \geq 0$$

$$|f(x) < |g(x)|| \;\Leftrightarrow\; f^2(x) < g^2(x) \;\Leftrightarrow\; (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) < 0$$

3.1. Решить уравнения:

1. $|x-5| = 5$ *Ответ:* $x = 0; \quad x = 10$
2. $|x-3| = 0$ *Ответ:* $x = 3$
3. $|2x-10| = -8$ *Ответ:* решений нет
4. $|x^2-4x-20| = 1$ *Ответ:* $x = -3;\ x = 7$
5. $|2x+4| = |x+8|$ *Ответ:* $x = -4;\ x = 4$
6. $x^2 - 8|x| - 9 = 0$ *Ответ:* $x = -9;\ x = 9$
7. $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| = \dfrac{2-x}{x+1}$ *Ответ:* $x \in (-1; 2]$
8. $||x+3|-1| = 3$ *Ответ:* $x = -7;\ x = 1$
9. $|x+2| - |3x-6| = 1$ *Ответ:* $x = 1.25$
10. $|x-1| - |x+1| + |x+4| = 3$ *Ответ:* $x = -5;\ x = -3;\ x = 1$
11. $|x-1| \cdot |x+1| = x+4$ *Ответ:* $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$
12. $|||x-2|+1|-x| = 5-x$ *Ответ:* $x = \dfrac{3}{11};\ \ x = 1$

3.2. Решить неравенства:

1. $|2-x|<1$ *Ответ:* $(1;3)$

2. $|3x-2|\geq 4$ *Ответ:* $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty)$

3. $|5x-3|>-2$ *Ответ:* $x\in\mathbf{R}$

4. $|x+3|\leq 0$ *Ответ:* $x=-3$

5. $|x^2-1|>0$ *Ответ:* $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

6. $x^2-2|x|<3$ *Ответ:* $(-3;3)$

7. $|13-2x|\geq|4x-9|$ *Ответ:* $\left[-2;3\dfrac{2}{3}\right]$

8. $|4-2x|-|5x-12|>6$ *Ответ:* решений нет

9. $|3-x|+|x^2-3x|\leq 0$ *Ответ:* $\{3\}$

10. $|x^2-2x|\geq x$ *Ответ:* $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$

11. $|x^2+2x|\leq -x$ *Ответ:* $[-3;-1]\cup\{0\}$

12. $|2x-|3x+2||<5$ *Ответ:* $\left(-1\dfrac{2}{5};3\right)$

13. $|x-6>|x^2-5x+9||$ *Ответ:* $(1;3)$

14. $|2x-|x-2||\leq 4$ *Ответ:* $\left[-\dfrac{2}{3};2\right]$

15. $|2x-|x-3|-2|\geq 4$ *Ответ:* $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup[3;+\infty)$

16. $\left|\dfrac{2x}{x^2-3}\right|\geq 1$ *Ответ:* $[-3;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};-1]\cup[1;\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};3]$

17. $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|+3\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|\leq 4$ *Ответ:* $[0.5;\,1.25]\cup[3.5;+\infty)$

18. $|4x-5|-\sqrt{x^2+6x+9}\geq 17$ *Ответ:* $(-\infty;-3]\cup\left[8\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

19. $\dfrac{28}{|x-4|+4} < 7-|x-4|$ *Ответ:* $(-7;-4)\cup(-4;-1)$

20. $\dfrac{x^2-|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 1$ *Ответ:* $[1.5;2)\cup(3;+\infty)$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

3.3. Решить уравнения:

1. $|7-x|=14$

2. $|x-1|-2x-1$

3. $|2x-10|=-8$

4. $|3-x|-|x+1|=3$

5. $x^2-5|x|-6=0$

6. $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|=\dfrac{x+1}{x-1}$

7. $||x-1|-1|=2$

8. $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4$

9. $||-x-4|+x+2|-7=x$

10. $\dfrac{1}{|x^2+5x-6|}=\dfrac{|x|}{x^2+5x-6}$

3.4. Решить неравенства:

1. $|x^2+x-1|>1$

2. $|x^2-2x|\leq 0$

3. $3x^2-5|x|+2\leq 0$

4. $1<|3x-8|<5$

5. $\dfrac{10}{|x-3|+2}<5-|x-3|$

6. $\left|\dfrac{4x}{x^2-5}\right|<1$

7. $|3x+7|-\sqrt{x^2-4x+4}\le 13$

8. $||2x-1|-x|\le 2$

9. $|x^3-x|\le x$

10. $\sqrt{7-6|x|}>x$

Тема 4. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Если $c\ne 0, ad\ne bc$, то выражение $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}:\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}\to\mathbf{R}$

задает *дробно-линейную функцию.*

Функцию *обратной пропорциональности* $y=\dfrac{b}{x}:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ можно

считать частным случаем дробно-линейной функции (при $a=0$, $c=1$, $d=0$). Свойства этих двух функций одинаковы. Для установления связи между ними можно воспользоваться преобразованием

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\dfrac{ad}{c}}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$$

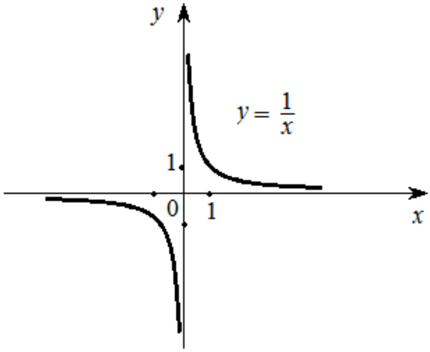
или, если принять обозначения $\dfrac{a}{c}=\alpha$, $\dfrac{bc-ad}{c^2}=\beta$, $\dfrac{d}{c}=\gamma$, то

$$y=\alpha+\frac{\beta}{x+\gamma}\cdot$$

График этой функции получается из графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ (см.

рис.2.30.) после трех *элементарных преобразований*:

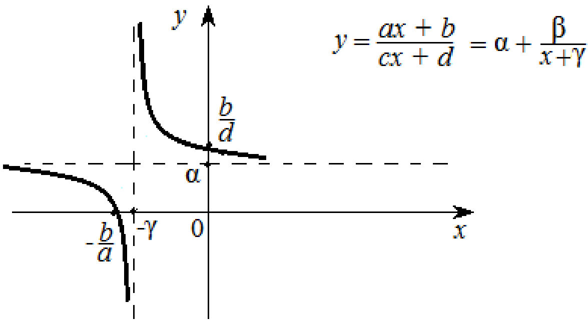
1) *Сдвиг* по оси $Ox: y_1=\dfrac{1}{x+\gamma}$ (влево на γ единиц);
2) *Растяжение* вдоль оси $Oy: y_2=\beta y_1$ (при $\beta>1$), или *сжатие* (при $0<\beta<1$)
3) *Сдвиг* по оси $Oy: y=y_2+\alpha$ (вверх на α единиц).



Если $\beta < 0$, то к растяжению добавляется еще одно:

4) Преобразование *симметрии* относительно оси Ox, т. е. $y_3 = -y_2$ $\left(\text{здесь } y_2 = |\beta| y_1\right)$.

Асимптотами графика функции $y = \alpha + \dfrac{\beta}{x+\gamma}$ являются прямые $y = \alpha$ и $x = -\gamma$, к которым точка графика приближается при удалении её в бесконечность, см. рис.



4.1. Построить график функции:

1. $y = \dfrac{2x-4}{x-3}$ *Ответ:* см. рис.4.1.

2. $y = \dfrac{-2x+3}{x-2}$ *Ответ:* см. рис.4.2.

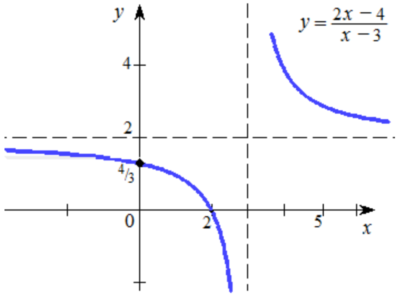


рис.4.1.

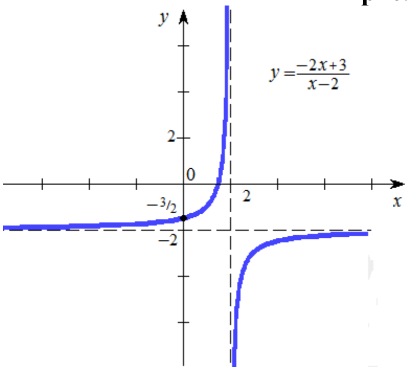


рис.4.2.

Помимо преобразований 1– 4 к элементарным преобразованиям относятся еще два:

5) *Сжатие (-растяжение)* вдоль оси Ox: имея график функции $y = f(x)$ можно построить график функции $y = f(kx)$ – сжатие при $k > 1$, растяжение при $0 < k < 1$.

6) *Симметрия* относительно оси Oy: по графику функции $y = f(x)$ строится график функции $y = f(-x)$.

Объединяя все преобразования 1) – 6), получим график функции вида $y = \beta\, f(kx + \gamma) + \alpha$, где $\alpha, \beta, \gamma, \mathrm{k}$ – различные константы. Строиться такой график путём последовательного применения преобразований 1) – 6) к графику исходной функции $y = f(x)$ (см. также примеры 4.2.)

4.2. Построить график функции с помощью элементарных преобразований:

1. $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + 3$ *Ответ:* см. рис.4.3.

2. $y = -3x^2 + 12x - 9$ *Ответ:* см. рис.4.4.

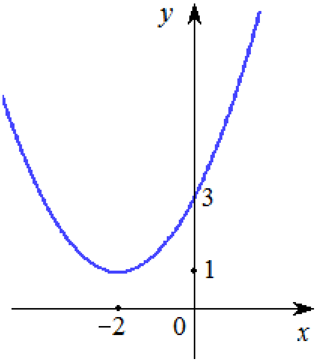


рис.4.3.

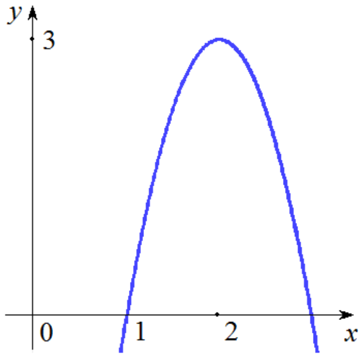


рис.4.4.

Обратная функция.
Если уравнение $y = f(x)$ имеет единственное решение $x = \varphi(y)$ для всех x из области определения функции $f(x)$, то функция $y = \varphi(x)$ называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

4.3. Найти обратную функцию к данной:

1. $y = 3x + 1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *Ответ:* $y = \dfrac{x-1}{3} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

2. $y = \dfrac{x+3}{3x-2} : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \to \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ *Ответ:* $y = \dfrac{2x+3}{3x-1} : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \to \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

3. $y = \dfrac{7x-5}{x+2} : \mathbf{R} \setminus \{-2\} \to \mathbf{R} \setminus \{7\}$ *Ответ:* $y = \dfrac{-2x+5}{x-7} : \mathbf{R} \setminus \{7\} \to \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

4.4. Построить график функции с помощью элементарных преобразований:

1. $y = 3x^2 - 15x + 12$.
2. $y = -2x^2 - 4x - 4$.
3. $y = \dfrac{3x-8}{x-2}$.

4. $y = \dfrac{-2x}{x+1}$.

4.5. Найти обратную функцию:

1. $y = 5x - 2$.
2. $y = \dfrac{3x+7}{x-4}$.
3. $y = \dfrac{-5x+4}{x+1}$.

Тема 5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Алгебраическими называются уравнения, в которых над переменными выполняются только операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. *Уравнением с одной переменной* называется равенство, содержащее эту переменную (ее иногда называют неизвестным). *Корнем уравнения* называется такое значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается тождественное равенство. *Решить уравнение* – это значит найти все его корни или доказать, что их нет. Два уравнения называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений. Если в результате преобразований нарушается равносильность, то возможны как потеря корней уравнения, так и появление у преобразованного уравнения корней, которые не являются корнями исходного уравнения. В последнем случае принято говорить о посторонних («лишних») корнях. В связи с этим решение уравнения полезно начинать с установления области допустимых значений уравнения.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество значений переменной, при которых определены все функции, входящие в уравнение.

Корнем уравнения может быть только такое значение переменной, которое принадлежит ОДЗ уравнения. Значение переменной, которое получено при решении, но не принадлежит ОДЗ уравнения, является посторонним, его следует отбросить.

Уравнение вида $ax + b = 0$ (при $a \neq 0$) называется *линейным* алгебраическим и имеет единственное решение $x = -b/a$.

Если в *квадратном* уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициенты b или c равны нулю, то такое квадратное уравнение называется неполным. Пусть $b = 0$, тогда $ax^2 + c = 0$. Если $ac \le 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$; если $ac > 0$, то действительных корней нет.

Пусть $c = 0$. Тогда $ax^2 + bx = 0$ или $x\,(ax + b) = 0$ и уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$.
Основным методом решения алгебраических уравнений $P_n(x) = 0$ степени большей двух является метод разложения левой части на линейные и квадратичные множители и замены исходного уравнения на равносильную ему совокупность уравнений. В справочной литературе приводятся формулы для вычисления корней алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней через коэффициенты последних. В частности, для решения уравнения третьей степени (кубического уравнения) имеются формулы Кардано.
Если уравнение четвёртой степени имеет специальный вид, например, является *биквадратным*:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

то заменой $x^2 = t$ оно сводится к квадратному уравнению; или является *возвратным*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx \pm a = 0,$$

тогда применяется замена $x \pm \dfrac{1}{x} = t$, которая тоже сводит уравнение к квадратному.
Неравенства с одной переменной имеют вид

$$f(x) > g(x);\;\; f(x) < g(x);\;\; f(x) \ge g(x);\;\; f(x) \le g(x)$$

Решением неравенства называется множество значений переменной, при которых данное неравенство становится верным числовым неравенством.
Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.
Основная идея решения неравенства заключается в замене неравенства более простым, но равносильным данному.
Пусть задано неравенство:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \qquad \text{(вместо знака > могут быть знаки <, } \le,\ \ge\text{).}$$

Для решения неравенства применяется метод интервалов, который состоит в следующем:

- на числовую ось наносят точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $f(x)/g(x)$ определено и сохраняет знак (плюс или минус). Такими точками могут быть корни уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$;
- корни уравнения $g(x) = 0$ всегда изображаются на оси пустыми кружочками («выкалываются»), т.к. $g(x)$ является знаменателем дроби $f(x)/g(x)$;

- корни уравнения $f(x)=0$ изображаются на оси либо закрашенными, либо пустыми точками, в зависимости от знака неравенства. Если исходное неравенство является нестрогим ($\leq$, $\geq$), то корни числителя надо изображать закрашенными точками (т.е. они «присоединяются»), т.к. в них достигается равенство и их нельзя потерять. Если исходное неравенство является строгим $(<, >)$, то корни числителя изображаются пустыми точками, как и корни знаменателя;
- если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются многочленами, не содержащими множители вида $(x-a)^{2n}$, $n \in N$, то достаточно определить знак на одном каком-либо промежутке, а в остальных промежутках знаки будут чередоваться;
- если же в числителе и знаменателе дроби $f(x)/g(x)$ имеется множитель $(x-a)^{2n}$, $n \in N$, то, полагая $x \neq a$, делят обе части заданного неравенства на множитель $(x-a)^{2n}$, положительный при всех значениях $x \neq a$ и непосредственной проверкой выясняют, удовлетворяет ли значение $x = a$ заданному неравенству.

5.1. Решить уравнения:

1. $x^4+12x^2-64=0$ *Ответ:* $x=2; x=-2$
2. $8x^6+7x^3-1=0$ *Ответ:* $x=-1; x=0.5$
3. $x^3+2011x+2012=0$ *Ответ:* $x=-1$
4. $x^3+4x^2-5=0$ *Ответ:* $x=1;\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$
5. $x^3+4x^2-x-4=0$ *Ответ:* $x=-4, x=1, x=-1$
6. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2$ *Ответ:*
   $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{66}}{2};\quad x=0;\ x=-2$
7. $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$
   Ответ: $x=2,\ x=1/2,\ x=-3,\ x=1/3$
8. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$ *Ответ:* $x=-4; x=2.$
9. $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=1680$ *Ответ:* $x=11; x=-2$

10. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$ *Ответ:* $x=-1;\ x=-0.5\ \ x=2;\ x=4$

11. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\dfrac{13}{3}=0$ *Ответ:* $x=1;\ \ x=4$

12. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=3$ *Ответ:* $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

5.2. Решить неравенства:

1. $2-3x>1$ *Ответ:* $(-\infty;1/3)$
2. $\dfrac{2x-5}{4}-\dfrac{3-2x}{5}<1$ *Ответ:* $(-\infty;3\tfrac{1}{6})$
3. $x^2-4x+3>0$ *Ответ:* $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$
4. $x^2+8x\le 0$ *Ответ:* $[-8;0]$
5. $-25x^2+10x-1\le 0$ *Ответ:* $\{1/5\}$
6. $-10x^2+8x-2<0$ *Ответ:* $(-\infty;+\infty)$
7. $x^2-4x+4<0$ *Ответ:* нет решений
8. $x^2>25$ *Ответ:* $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$
9. $\dfrac{x-2}{2x+1}\ge 0$ *Ответ:* $(-\infty;-0{,}5)\cup[2:+\infty)$
10. $\dfrac{2\sqrt{2}-3}{5x+4}<0$ *Ответ:* $(-0.8;+\infty)$
11. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}\ge 0$ *Ответ:* $(-\infty;1]\cup(2;3]\cup(4;+\infty)$
12. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-8x}\ge 0$ *Ответ:* $(-\infty;0)\cup\{1\}\cup(8;+\infty)$
13. $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-6x+5}>0$ *Ответ:* $(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(5;+\infty)$
14. $\dfrac{(16-x^2)(x^2+14x+49)}{x^2-6x+9}\ge 0$ *Ответ:* $\{-7\}\cup[-4;3)\cup(3;4]$
15. $x-\dfrac{16}{1-x}+7\ge 0$ *Ответ:* $\{-3\}\cup(1;+\infty)$

16. $5-\dfrac{40}{2-x}\ge x$ *Ответ:* $(-\infty;-3]\cup(2;10]$

17. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}>\dfrac{3}{x-1}$ *Ответ:* $(0;1)\cup(2;4)$

18. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\le\dfrac{1-2x}{x^3+1}$ *Ответ:* $(-\infty;-1)\cup(-1;2]$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

5.3. Решить уравнения:

1. $\dfrac{9}{2x+1}-\dfrac{6}{2x-1}=\dfrac{12x^2-15}{4x^2-1}$
2. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x-5}{x-3}=\dfrac{12}{x^2-3x}$
3. $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$
4. $12x^4+7x^3+7x-12=0$
5. $x^4-5x^2+4=0$

5.4. Решить неравенства и системы неравенств:

1. $\dfrac{2}{x^2-x}>1$
2. $(2x-3)^3\,\dfrac{(4-x)(x-2)^2}{(x+3)x}\ge 0$
3. $\dfrac{18}{2x+4}<3$
4. $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$
5. $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}<-2$
6. $x-2+\dfrac{4}{x+3}\le 0$
7. $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{3}{x-1}>\dfrac{8x}{x^2+2x-3}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} < 1 \\ x + \dfrac{4}{x} \geq \dfrac{4}{3}x \\ 9x^2 - 9x + 1 < 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{1}{x} \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} \geq \dfrac{2x-3}{4x-1} \\ x^4 - 10x^2 + 16 \geq 0 \end{cases}$

Тема 6. СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ПРОГРЕССИИ

Пара чисел (x ; y), называется *решением* системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x, y:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases},$$

если при подстановке их в каждое из уравнений получаются верные числовые равенства. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) системы уравнений называется множество пар чисел (x ; y), при которых левые части уравнений системы определены. Решить систему уравнений – означает найти все такие значения неизвестных из ОДЗ системы, при которых каждое из уравнений системы обращается в тождественное равенство, или доказать, что таких значений неизвестных нет. Системы уравнений *эквивалентны*, если полностью совпадают их множества решений.

Пусть n – натуральное число. Совокупность расположенных друг за другом чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *конечной числовой последовательностью*. Элементы, из которых она составлена, называются ее *членами*. Если для любого натурального n определено число $a_n \in \mathbf{R}$, то совокупность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется (*бесконечной*) *числовой последовательностью.*

Конечная или бесконечная числовая последовательность называется *арифметической прогрессией*, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d,

называемым *разностью* арифметической прогрессии, т.е. имеет место формула $a_{n+1} = a_n + d, \quad \forall n \geq 1$. Если $d > 0$, то прогрессия называется *возрастающей*, если $d < 0$, – *убывающей*.
Для арифметической прогрессии справедливы следующие формулы:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2};$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d;$$

$$a_k + a_m = a_p + a_q, \text{ где } k + m = p + q.$$

Пусть S_n – сумма первых n членов арифметической прогрессии, тогда

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Поскольку арифметическая прогрессия однозначно задается своим первым членом и разностью, то практически любая задача на прогрессию решается составлением системы уравнений относительно a_1 и d.
Конечная или бесконечная числовая последовательность отличных от нуля членов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ называется *геометрической прогрессией*, если каждый ее член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число q, называемое *знаменателем* геометрической прогрессии, т.е. имеет место формула $b_{n+1} = b_n q, \ \forall n \geq 1$.
Заметим, что из определения следует $b_1 \neq 0, \ q \neq 0.$
Геометрическая прогрессия называется *возрастающей*, если выполнено одно из следующих условий:

$$а)\, b_1 > 0, \quad q > 1; \qquad б)\, b_1 < 0, \quad 0 < q < 1$$

и *убывающей*, если выполнено одно из следующих условий:

$$а)\, b_1 > 0, \quad 0 < q < 1; \qquad б)\, b_1 < 0, \quad q > 1.$$

При $q < 0$ геометрическая прогрессия является *знакопеременной*. Для геометрической прогрессии справедливы следующие формулы:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}, \text{ при } n > 1,$$

$$b_n = b_1 q^{n-1};$$

$$b_k b_m = b_p b_q, \text{ где } k + m = p + q.$$

Пусть S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии, тогда имеют место формулы:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1};$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Если число членов геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ бесконечно растет $(n \to \infty)$, то S_n приближается к пределу, равному

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Число S называется *суммой бесконечной геометрической прогрессии.* Поскольку геометрическая прогрессия однозначно задается своим первым членом и знаменателем, то практически любая задача на прогрессию решается составлением системы уравнений относительно b_1 и q.

6.1. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} = 4 \\ 3x + 2y = 1. \end{cases}$; *Ответ:* $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{6}; \\ x - y = 5. \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7; \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54; \\ 4y^2 + xy = 115. \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 36 \\ y = -11.5 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -36 \\ y = 11.5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2 \\ xy = 27 \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 27 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = -27 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20; \\ xy = 8. \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{10}{x-y} = 1; \\ \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = \dfrac{-3}{5}. \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x+y} = \dfrac{10}{3}; \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

6.2.

1. Найти сумму членов арифметической прогрессии с 11-го по 25-й член включительно, если третий ее член $a_3 = 4$, а пятый $a_5 = 8$. *Ответ:* 510.
2. Сумма первых n членов арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, равна половине суммы следующих n членов. Найти отношение суммы первых $3n$ членов этой прогрессии к сумме ее первых n членов. *Ответ:* 6.
3. Найти 6-й член геометрической прогрессии: 1, –2, 4, … . *Ответ:* –32.
4. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма первых трех членов равна 7, а произведение этих членов равно 8. *Ответ:* 8.
5. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму 11 первых членов этой прогрессии. *Ответ:* 44.
6. Найти сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело. *Ответ:* 810.
7. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии. *Ответ:* 5103 или 7/81.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

6.3. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 4 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 12 \\ xy + x + y = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} + 6\dfrac{x+y}{x-y} = 5; \\ xy + 8 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y = 1; \\ x^3 + y^3 = 19. \end{cases}$

7. $\begin{cases} xy\left(x+y\right) = 20; \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ xy = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 2y^2 = 4 \\ 4x^2 - 4xy - y^2 = 8 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19; \\ x^2y + xy^2 = -6. \end{cases}$

6.4.

1. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 91, если ее третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20?

2. Сумма второго и пятого членов убывающей арифметической прогрессии равна 11, а их произведение равно 28. Найти разность прогрессии.

3. Сумма четырех первых членов арифметической прогрессии равна 56. Сумма четырех последних равна 112. Найти число членов прогрессии, если ее первый член равен 11. В арифметической прогрессии 1000 членов. Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 100, а сумма членов с четными номерами равна 400. Найти разность прогрессии.

4. Сколько имеется двузначных натуральных чисел, кратных 6?

5. Найти средний член геометрической прогрессии, состоящей из трех членов, если их произведение равно 64, а сумма равна 14.

6. В геометрической прогрессии 1990 членов. Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 138, а сумма членов с четными номерами равна 69. Найти знаменатель прогрессии.
7. Три положительных числа образуют арифметическую прогрессию. Третье число больше первого на 14. Если к третьему числу прибавить первое, а остальные два оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найти произведение этих чисел.
8. Между числами 1 и 256 вставить три числа так, чтобы все пять чисел составляли геометрическую прогрессию.
9. Сумма бесконечно убывающей прогрессии рана 32, а сумма ее первых пяти членов равна 31. Найти первый член прогрессии.

Тема 7. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Иррациональным уравнением (неравенством) называется уравнение (неравенство), содержащее переменную под знаком корня (радикала) или нескольких корней различных степеней.
Решение иррациональных уравнений основано на следующих основных теоремах:

1. $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad f^2(x) = g^2(x)$
2. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^3(x) = g^3(x)$
3. $\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

4. $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

Решение иррациональных неравенств основано на следующих основных теоремах:

1. $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g^2(x) \\ f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)<0 \end{cases} \\ f(x)>g^2(x) \end{array} \right.$

7.1. Решить уравнения:

1. $\sqrt{x-2}=x-4$ *Ответ:* $x=6$
2. $\sqrt{5x+6}-\sqrt{x+2}=2$ *Ответ:* $x=2$
3. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-2}$ *Ответ:* $x=2$
4. $\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}=4$ *Ответ:* $x=6, \quad x=-7$
5. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$ *Ответ:* $x=2$
6. $\sqrt{\sqrt{6x^2+1}-2x}=1-x$ *Ответ:* $x=-2, \quad x=0$
7. $\sqrt{\dfrac{3x+3}{x-3}}-3\sqrt{\dfrac{x-3}{3x+3}}=2$ *Ответ:* $x=5$
8. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$ *Ответ:* $x=-4, \quad x=2$
9. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2$ *Ответ:* $x\in[13;+\infty)$
10. $\sqrt{|x+3|-2}=3-x$ *Ответ:* $x=\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}$

7.2. Решить неравенства:

1. $\sqrt{x^2-5x-24}>x-2$ *Ответ:* $(-\infty;-3]$

2. $\sqrt{2x+9} < 3-x$ *Ответ:* $[-4.5;0)$

3. $\sqrt{x^2+x-12} \le 6-x$ *Ответ:* $(-\infty;-4]\cup\left[3;3\frac{9}{13}\right]$

4. $\sqrt{x^2-7x+12} \le 4-x$ *Ответ:* $\{4\}$

5. $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-6<0$ *Ответ:* $[0;\ 81)$

6. $(x-2)\sqrt{x-1}\ge 0$ *Ответ:* $\{1\}\cup[2;+\infty)$

7. $x^2 \ge 8\sqrt{x}$ *Ответ:* $\{0\}\cup[4;+\infty)$

8. $\sqrt{1+\frac{8}{x-1}}-3\sqrt{1-\frac{8}{x+7}} \le 2$ *Ответ:* $(-\infty;-8]\cup(1;+\infty)$

9. $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$ *Ответ:* $\left[2;\sqrt{\frac{28}{3}}\right)$

10. $\sqrt{3x-1+2\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x+2-4\sqrt{3x-2}} < 1$ *Ответ:* $\left[\frac{2}{3};\ 1\right)$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

7.3. Решить уравнения:

1. $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x-3}=1$

2. $\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}=\sqrt{x-1}$

3. $\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}+3=4\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$

4. $x^2+1+\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+1)$

5. $\sqrt[3]{x}+2=\sqrt[3]{8-x}$

6. $\sqrt{16-x\sqrt{x^2+16}}=4-x$

7. $\sqrt{x+3}-1=\sqrt{x-\sqrt{x-2}}$

8. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$

9. $9-\sqrt{81-7x^3}=\frac{x^3}{2}$

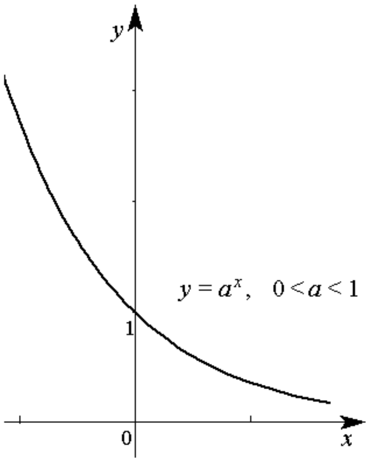
10. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$

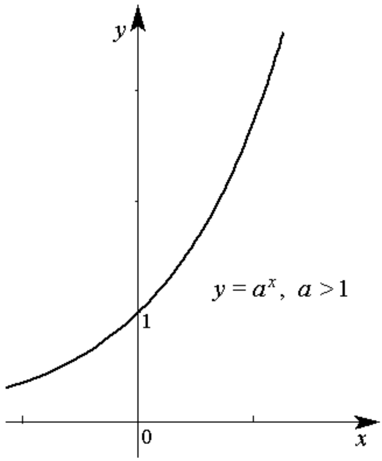
7.4. Решить неравенства:

1. $\sqrt{x^2-x-12}\le x$
2. $\sqrt{x^2-8x+15}>x+2$
3. $\sqrt{x}-3\le\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$
4. $27\sqrt{-x}-x^2\le 0$
5. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>x-1$
6. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}$
7. $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$
8. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\le 2$
9. $\sqrt{x^2-9x+20}\le\sqrt{x-1}\le\sqrt{x^2-13}$
10. $\begin{cases}\sqrt{4x-7}<x\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4\end{cases}$

Тема 8. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \ne 1$, определена при всех $x \in \mathbf{R}$. Область определения $D(y) = (-\infty, +\infty)$, область значений $E(y) = (0; +\infty)$, т.е. $0 < y < +\infty$. Функция монотонно возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.





Показательным уравнением (неравенством) называется уравнение (неравенство), содержащее переменную в показателе степени.
Пусть $a > 0$ и $a \neq b$. Тогда:

1. Если $b \leq 0$, то уравнение $a^x = b$ не имеет решения.
2. Если $b > 0$, то уравнение $a^x = b$ имеет единственное решение, называемое логарифмом по основанию a числа b:

$a^x = b \iff x = \log_a b$.

3. Для $b > 0$ будут равносильными неравенства:

если $a > 1$, то $a^x > b \iff x > \log_a b$ и $a^x < b \iff x < \log_a b$,

если $0 < a < 1$, то $a^x > b \iff x < \log_a b$ и $a^x < b \iff x > \log_a b$

4. Для $b \leq 0$ неравенство $a^x < b$ не имеет решений, а неравенство $a^x > b$ верно при любом x.

8.1. Решить уравнения.

1. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3} = 7^{-7x^2}$ *Ответ:* $x = \frac{1}{4};\ x = -\frac{3}{4}$

2. $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ *Ответ:* $x = 6$

3. $2^{x^2-3}5^{x^2-3} = 0{,}01\left(10^{x-1}\right)^3$ *Ответ:* $x = 1;\ x = 2$

4. $6^{2x-1}+6^{2x+1}=31+6^{2x}$ *Ответ:* $x=\dfrac{1}{2}$

5. $4^{x}-2^{x+1}-8=0$ *Ответ:* $x=2$

6. $25^{\frac{1}{x}}+1=6\cdot 5^{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$ *Ответ:* $x=\pm 2$

7. $5^{1+x^{3}}-5^{1-x^{3}}=24$ *Ответ:* $x=1$

8. $3\cdot 2^{\frac{x}{2}}-7\cdot 2^{\frac{x}{4}}=20$ *Ответ:* $x=8$

9. $5^{2x}-9^{x}=9^{x-1}+3\cdot 5^{2x-1}$ *Ответ:* $x=2$

10. $3^{\sqrt{x}+1}-2\cdot 5^{\sqrt{x}-2}=5^{\sqrt{x}}-2\cdot 3^{\sqrt{x}}$ *Ответ:* $x=9$

11. $9^{x}+6^{x}=2^{2x+1}$ *Ответ:* $x=0$

12. $6^{x}-3^{x}+2^{x}=1$ *Ответ:* $x=0$

13. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{x}+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^{x}=14$ *Ответ:* $x=\pm 2$

14. $x^{2}\cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^{x}=2^{\sqrt{2x+1}+1}+x^{2}\cdot 2^{x-2}$ *Ответ:* $x=2;\ x=4$

15. $|x-3|^{3x^{2}-10x+3}=1$ *Ответ:* $x=\dfrac{1}{3};\ x=2;\ x=4$

8.2. Решить неравенства:

1. $(0,4)^{2x^{2}-3x+6}<(0,4)^{5}$ *Ответ:* $(-\infty;0,5)\cup(1;+\infty)$

2. $3^{\frac{5x-2}{2x}}>\dfrac{1}{9}$ *Ответ:* $(-\infty;0)\cup(\frac{2}{9};+\infty)$

3. $\left(\dfrac{1}{4}\cdot 4^{x}\right)^{x}\geq 2^{2x+6}$ *Ответ:* $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$

4. $2^{x}+2^{1-x}<3$ *Ответ:* $(0;1)$

5. $(0,7)^{\frac{x^{2}+6x+11}{x-3}}<1$ *Ответ:* $(0;+\infty)$

6. $7\cdot 6^{-x}-36^{-x}\geq 6$ *Ответ:* $[-1;0]$

7. $4^{\sqrt{9-x^{2}}+1}+2<9\cdot 2^{\sqrt{9-x^{2}}}$ *Ответ:* $[-3;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};3]$

8. $4^{x}+3\cdot 6^{x}-4\cdot 9^{x}<0$ *Ответ:* $(0,\infty)$

9. $|x+1|^{x^{2}-2x-3}>1$ *Ответ:* $(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(3;+\infty)$

10. $2^{x^{2}-4x+5}\leq 4x-2-x^{2}$ *Ответ:* $\{2\}$

8.3. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2; \\ y = 1{,}5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ 81^x = 243 \cdot 3^y \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2; \\ y = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^{1/x} = 2 \\ y^x = 16 \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2; \\ y = 4, \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -2; \\ y = 0{,}25. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 2; \\ y = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x+y)^{1/x} = 9 \\ (x+y) \cdot 2^x = 18 \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x = 1; \\ y = 8. \end{cases}$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

8.4. Решить уравнения:

1. $(0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$
2. $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$
3. $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$
4. $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$
5. $2^{3x} - 3^x = 3^{x-1} + 2^{3x-1}$
6. $5^{x+6} - 3^{x+7} = 43 \cdot 5^{x+4} - 19 \cdot 3^{x+5}$
7. $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$
8. $10^x + 3 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x = 15$
9. $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 2$
10. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$

8.5. Решить неравенства:

1. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \dfrac{27}{64}$
2. $8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 \le 0$
3. $9^x - 9^{1-x} > 8$

4. $\left(x^2+x+1\right)^{x^2-4}<1$

8.6. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases}(x+y)^{\frac{1}{x-y}}=2\sqrt{3}\\(x+y)\cdot 2^{y-x}=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}3^{y-1}-2^{x+2}=7\\2^{-x}+3^{4-y}=5\end{cases}$

3. $\begin{cases}3^y\cdot 64^{1/x}=36\\5^y\cdot 512^{1/x}=200\end{cases}$

Тема 9. ЛОГАРИФМЫ И ИХ СВОЙСТВА. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ.

Логарифмом числа b по основанию a ($a>0, a\neq 1$) называется показатель степени m, в которую надо возвести основание, чтобы получить число b. Это определение записывается формулой $\log_a b=m \Leftrightarrow a^m=b.$ Таким образом, *основное логарифмическое тождество* $a^{\log_a b}=b$ следует из определения логарифма.

Логарифм по основанию a = e $\approx$ 2,718 называется *натуральным* логарифмом и обозначается $\ln x$. Логарифм по основанию a = 10 называется *десятичным* и обозначается $\lg x$.

Свойства логарифма:

1. $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$

2. При $x>0$ и $y>0$ логарифмы произведения и частного соответственно равны

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y \text{ и } \log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y.$$

Если $x<0$ и $y<0$, то эти формулы применить нельзя, так как правые части равенств не имеют смысла (логарифм отрицательного числа не существует). В этом случае

$xy>0 \Rightarrow xy=|xy|=|x||y|,\ \frac{x}{y}>0\Rightarrow \frac{x}{y}=\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ и формулы в общем случае принимают вид:

$$\log_a xy = \log_a|x| + \log_a|y| \text{ и } \log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|,$$

где x и y одного знака.

3. Если $x > 0$, то для логарифм степени и корня верны формулы:

$$\log_a x^n = n\log_a x, \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x \quad .$$

Если $n = 2k$ – четное число, то при $\forall\, x \neq 0$ справедливо равенство

$$\log_a x^n = n\log_a|x|.$$

Например, $\log_a x^2 = 2\log_a|x|; \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x,$ где $x > 0$.

4. Логарифм степени и корня основания:

если $n = 2k+1$ – нечетное число, то $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

если $n = 2k$ – четное число, то $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_{|a|} x$

Например, $\log_{a^2} x = \frac{1}{2}\log_{|a|} x, \quad a \neq \pm 1$.

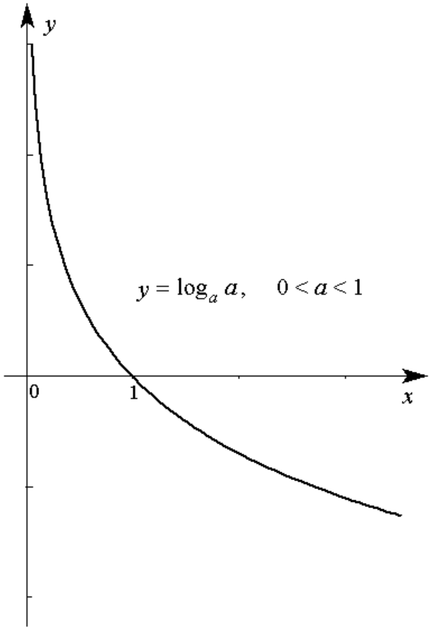
5. Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию

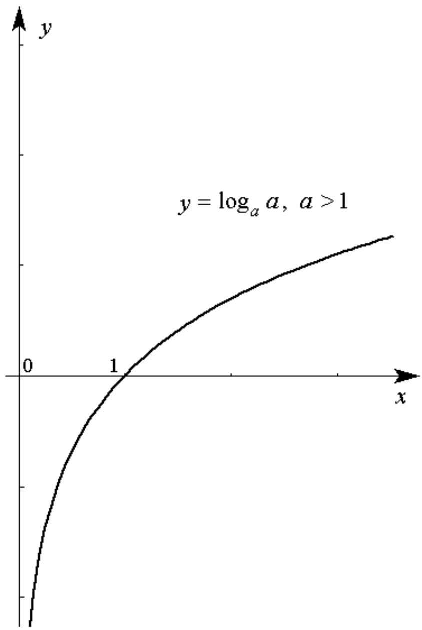
$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}, \text{ где } a \neq 1,\ c \neq 1$$

В частности, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad b \neq 1.$

6. Если $x > 0, \quad b > 0$, то на основании предыдущих свойств, справедливо равенство $x^{\log_a b} = b^{\log_a x}$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена на множестве положительных чисел $x > 0$, т.е. $D(f) = (0;\infty)$. Область значений логарифмической функции $E(f) = (-\infty;\infty)$.





Отметим, что:

–логарифмическая функция $y = \log_a x$ имеет единственный корень $x = 1$;

–логарифмическая функция $y = \log_a x$ монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$.

Следовательно, при $a > 1$

$$\begin{cases} \log_a x > 0, & \text{если} \quad x > 1; \\ \log_a x < 0, & \text{если} \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

при $a < 1$

$$\begin{cases} \log_a x > 0, & \text{если} \quad 0 < x < 1 \\ \log_a x < 0, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

9.1. Вычислить:

1. $2^{\log_2 5 - \log_4 36}$ *Ответ:* $\dfrac{5}{6}$

2. $5^{-\log_5 3 + \log_{25} 16}$ *Ответ:* $\dfrac{4}{3}$

3. $\dfrac{\log_6 27}{\log_6 60-\log_6 20}$ *Ответ:* 3

4. $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$ *Ответ:* 2

5. $0{,}7\left(2+\sqrt{3}^{\log_3 \frac{1}{16}}\right)^{\log_{\frac{9}{4}} 3}$ *Ответ:* 2,1

6. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$ *Ответ:* $\dfrac{1}{3}$

7. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$ *Ответ:* 19

9.2. Решить уравнения:

1. $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$ *Ответ:* $x=37$
2. $\log_2(x-5)=3-\log_2(x+2)$ *Ответ:* $x=6$
3. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$ *Ответ:* $x=64$
4. $\log_5 x+\log_{25} x=\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{3}$ *Ответ:* $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$
5. $\log_2 x\cdot\log_3 x=\log_3 x^3+\log_2 x^2-6$ *Ответ:* $x=8;\ x=9$
6. $\log_4(x+9)=\log_2(x+3)$ *Ответ:* $x=0$
7. $\log_{(x-6)^2}(x^2+x+3)=\dfrac{1}{2}$ *Ответ:* $x=1;\ x=3$
8. $\log_{x-1}(x-7)^2=4$ *Ответ:* $x=3$
9. $\log_5(5^x-4)=1-x$ *Ответ:* $x=1$
10. $5^{\log_6 x}+x^{\log_6 5}=x_{2-6x-16}+2x^{\log_6 5}$ *Ответ:* $x=8$
11. $(\log_2 x+4)\log_2 x=\log_2 32$ *Ответ:* $x=\dfrac{1}{32};\ x=2$
12. $\dfrac{1}{2}\log_3^2 x-\dfrac{19}{6}\log_3 x+1=0$ *Ответ:* $x=729;\ x=\sqrt[3]{3}$
13. $2\log_x 27-3\log_{27} x=1$ *Ответ:* $x=\dfrac{1}{27};\ x=9$
14. $2\lg x^2-\lg^2(-x)=4$ *Ответ:* $x=-100$

15. $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0,5}(x+1)$ *Ответ:* $x=1$

16. $\lg^2 x^4+2\lg x^2=24$ *Ответ:* $x=\pm\sqrt{10}$; $x=\pm\dfrac{\sqrt[4]{10}}{10}$

17. $\sqrt{2\log_8(-x)}=\log_8|x|$ *Ответ:* $x=-64$; $x=-1$

18. $\log_2^2(x-1)^2-4\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-24=0$ *Ответ:*

$x=1{,}25$; $x=5$

19. $\lg\dfrac{x}{10}\cdot\lg\dfrac{10}{x}+4=0$ *Ответ:* $x=\dfrac{1}{10}$; $x=1000$

20. $x^{1+\log_3 x}=81x$ *Ответ:* $x=\dfrac{1}{9}$; $x=9$

21. $2^{\log_7 x^2}+\left(x_2\right)^{\log_7 2}=4$ *Ответ:* $x=\pm\sqrt{7}$; $x=2$; $x=0{,}5$

22. $\log_3 x\cdot\log_4 x\cdot\log_5 x=\log_3 x\cdot\log_4 x+\log_4 x\cdot\log_5 x+\log_3 x\cdot\log_5 x$

Ответ: $x=1$; $x=60$

23. $\log_2\log_2^2(x-4)=0$ *Ответ:* $x=4{,}5$; $x=6$

9.3. Решить системы:

1. $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2{,}5\\ \log_3 x+\log_3 y=3\end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases}x=3\\ y=9\end{cases}$ и $\begin{cases}x=9\\ y=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}y-\log_3 x=1\\ x^y=3^{12}\end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases}x=27\\ y=4\end{cases}$ и $\begin{cases}x=\dfrac{1}{81}\\ y=-4\end{cases}$

3. $\begin{cases}\log_{13}(x^2+y^2)-1=\log_{13}10\\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=3\lg 2\end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases}x=9\\ y=7\end{cases}$

4. $\begin{cases}\log_2^2 x-\log_2^2 y=16\\ 4(\log_2 x-\log_2 y)=\log_2 x+\log_2 y\end{cases}$

Ответ: $\begin{cases}x=32\\ y=8\end{cases}$ и $\begin{cases}x=\dfrac{1}{32}\\ y=\dfrac{1}{8}\end{cases}$

5. $\begin{cases} y\cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1 \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} x=4 \\ y=16 \end{cases}$

9.4. Решить неравенства:

1. $\log_2(2x^2+x)\ge 0$ *Ответ:* $(-\infty;-2)\cup[\frac{1}{2};+\infty)$;

2. $\log_{\frac{1}{3}}(7x-1)>1$ *Ответ:* $\left(\frac{1}{7};\frac{4}{21}\right)$

3. $\log_3(x-2)\ge 1+\log_{\frac{1}{3}} x$ *Ответ:* $[3;+\infty)$

4. $\dfrac{\log_{0,4}(x^2+2x-2)}{\log_{0,4}12-\log_{0,4}2}<0$ *Ответ:* $(-3;-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};1)$

5. $\log_{0,1}\log_3\left(\dfrac{4x^2+22x+30}{x^2+7x+12}\right)<0$ *Ответ:* $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$

6. $\log_{\frac{1}{3}}\log_4(x^2-5)>0$ *Ответ:* $(-3;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};3)$

7. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\dfrac{1}{2}$ *Ответ:* $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

8. $\sqrt{\lg x}<\lg x-6$ *Ответ:* $(10^9;+\infty)$

9. $\log_4^2(x+3)^2+28\log_{\frac{1}{4}}(x+3)+48\le 0$ *Ответ:* $[61;253]$

10. $\log_{x+1}x-2\log_x(x+1)\le 1$ *Ответ:* $\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};+\infty\right)$

11. $x^{\log_2 x-2}>\dfrac{x}{4}$ *Ответ:* $(0;2)\cup(4;+\infty)$

12. $\log_x(x^2-2x-3)\le 1$ *Ответ:* $\left(3;\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$

13. $\log_{x-3}(x-1)<2$ *Ответ:* $(3;4)\cup(5;+\infty)$

14. $\log_x\log_3(9^x-72)\le 1$ *Ответ:* $(\log_9 73;2]$

15. $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$ *Ответ:* $(4;10)$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

9.5. Решить уравнения:

1. $2\log_2(x-1)-1=\log_2(x+11)$
2. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{12}$
3. $\log_3 x = 9\log_x 3$
4. $\lg^2 x-\lg x=\lg 100$
5. $\left(\dfrac{1}{\log_3 x}+1\right)\log_3^2 x=2$
6. $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$
7. $\log_4\left(2\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right)\right)=\dfrac{1}{2}$
8. $\log_4 x+\log_x 2=3\dfrac{1}{6}$
9. $1+\lg x^6\cdot\log_5 x > \log_5 x^2+\lg x^3$
10. $\log_2\left(2^x-31\right)+x=5$

9.6. Решить неравенства:

1. $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\ge\log_{\frac{1}{2}}2-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$
2. $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x\right)>-1$
3. $\log_x\left(2x-\dfrac{3}{4}\right)>2$
4. $2\log_5 x - \log_x 125 \le 1$
5. $\log_2\left(2^x-1\right)\cdot\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(2^x-1\right)-1\right)<-2$
6. $\log_{\frac{1}{8}}\log_2\dfrac{3x^2-6x-17}{x^2-5x-6}\le 0$

7. $\log_3^2 (x+2)^2 - 20\log_{\frac{1}{3}} (x+2) - 24 \le 0$

8. $\dfrac{1}{1+\lg x} + \dfrac{1}{1-\lg x} > 2$

9. $x^{1+\log_3 x} > 81x$

10. $\log_x \log_2 \left(4^x - 56\right) \le 1$

11. $\log_x (\log_2 (4^x - 6)) \le 1$

12. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 - \frac{4}{5}\right)} > 1.$

13. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \left(6^{x+1} - 36^x\right) \ge -2$

14. $\log_3 \left(2x^2 - x\right) - 1 \le \log_3 (6x-3) - \log_3^2 x$

15. $\log_{x-1}(x-2) - 2\log_{x-2}(x-1) \le 1$

Тема 10. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Радианная мера угла. Углом в 1 *радиан* (1 рад) называется угол, под которым видна из центра окружности дуга длиной, равной радиусу этой окружности (рис.10.1.): $\angle MON = 1$ рад, $MN = OM$,

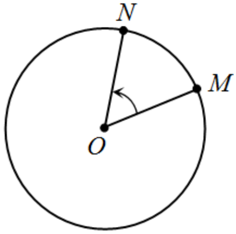


рис.10.1.

$$1\ \text{рад} = 180^\circ / \pi \approx 57^\circ 17' 45'';$$

$$1^\circ = \pi / 180^\circ \approx 0{,}01745\ \text{рад}.$$

Функция $y = \sin x : \mathbf{R} \to [-1;1]$ является нечетной и периодической с периодом $T = 2\pi$. Её график симметричен относительно начала координат и имеет вид (см. рис.10.2.)

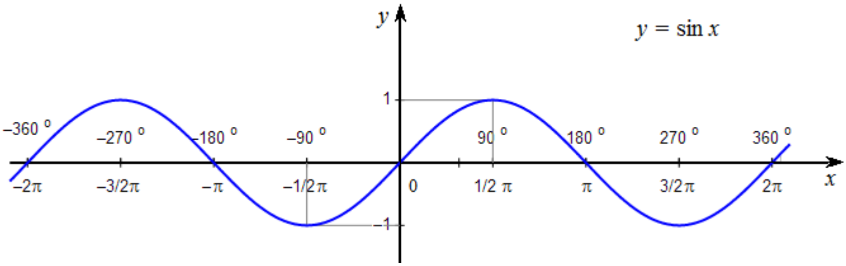


рис.10.2.

Уравнение $\sin x = 0$ имеет корни $x = n\pi, n \in Z$.

Функция $y = \cos x : \mathbf{R} \to [-1;1]$ является четной и периодической с периодом $T = 2\pi$. Её график симметричен относительно оси ординат *Oy* и имеет вид (см. рис.10.3.)

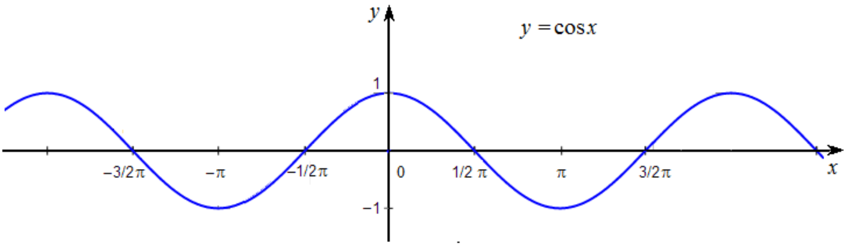


рис.10.3.

Уравнение $\cos x = 0$ имеет корни $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x : \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right\} \to \mathbf{R}$ является нечетной и периодической с периодом $T = \pi$. Её график симметричен относительно начала координат и имеет вид (см. рис.10.4.)

Уравнение $\operatorname{tg} x = 0$ имеет корни $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x : \mathbf{R} \setminus \{n\pi\} \to \mathbf{R}$ является нечетной и периодической с периодом $T = \pi$. Её график симметричен относительно начала координат и имеет вид (см. рис.10.5.)

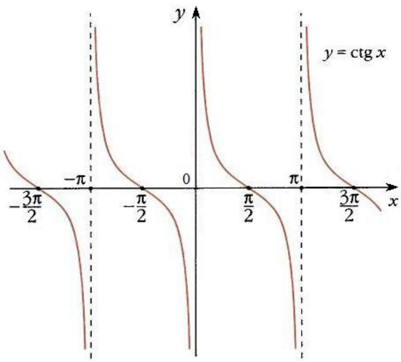


рис.10.4.

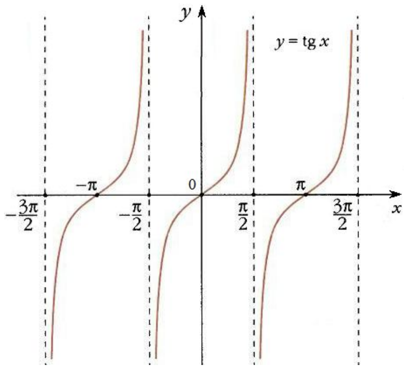


рис.10.5.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$ имеет корни $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

Часто встречающиеся значения функций приведены в таблице:

Угол в град.	0°	30°	45°	60°	90°
Угол в рад.	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
ctg	-	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

Другие значения данных функций будут получены в примерах 10.1.и задачах 10.6.

Основные тригонометрические тождества

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Остальные тождества получаются в результате несложных алгебраических действий с учетом определения и свойств функций $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$.

10.1. Доказать тождество:

1. $1+\mathrm{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in\mathbf{Z};$
2. $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$
3. $\mathrm{tg}\,(x+y)=\dfrac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y},$

$$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z};$$

4. $\sin 2x=2\sin x\cos x;$
5. $\mathrm{tg}2\,x=\dfrac{2\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x}, \quad x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k, \quad k\in\mathbf{Z}\;;$
6. $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2};$
7. $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}, \quad x\neq\pi+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.$
8. $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2};$
9. $\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2};$
10. $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=\dfrac{\sin\,(x+y)}{\cos x\cos y}, \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z};$
11. $\sin x\sin y=\dfrac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big);$
12. $\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}\big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\big).$
13. $\cos x=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad x\neq(2n+1)\pi, \quad n\in\mathbf{Z};$

14. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;$

15. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x;$

16. $\sin(\pi-x)=\sin x;$

17. $\sin(\pi+x)=-\sin x;$

18. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x;$

19. $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x;$

20. $\cos^2 x+\cos^2(x+y)-2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(x+y)=\sin^2 y.$

10.2. Определить знак разности:

1. $\sin 2{,}6-\sin 3;$ *Ответ:* $+$,
2. $\mathrm{ctg}\,40^\circ-\mathrm{tg}\,57^\circ;$ *Ответ:* $-$,
3. $\mathrm{tg}\,2-(-1);$ *Ответ:* $-$,
4. $\sin 1-\cos 1;$ *Ответ:* $+$,
5. $5\,\mathrm{tg}\,7-\mathrm{ctg}\,7;$ *Ответ:* $-$,
6. $\sin 4-\cos 4;$ *Ответ:* $+$,
7. $\mathrm{tg}\,1{,}6-\mathrm{tg}\,1{,}5.$ *Ответ:* $-$,

10.3. Вычислить значение функции:

1. $\cos\alpha, \mathrm{tg}\,\alpha, \mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi;$ *Ответ:*

$$\left\{-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -2\sqrt{2}\right\}.$$

2. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4.$ *Ответ:* 0,96.

10.4. Построить график функции :

1. $y=2\sin 2x;$ *Ответ:* см.рис.10.6.
2. $y=0{,}5\cos(x-0{,}5);$ *Ответ:* см.рис.10.7.
3. $y=|\sin x|.$ *Ответ:* см.рис.10.8.
4. $y=\sin|x|;$ *Ответ:* см.рис.10.9.

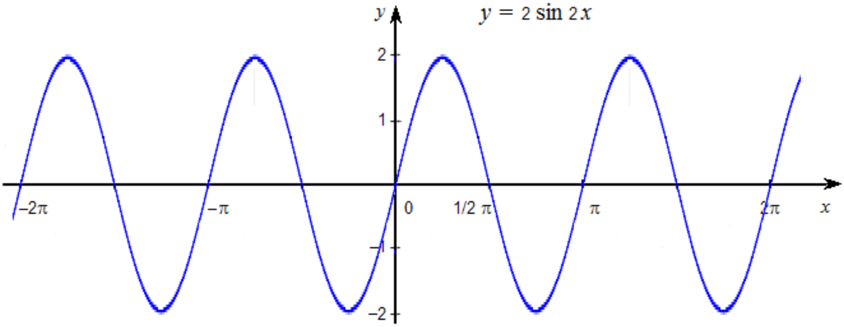


рис.10.6.

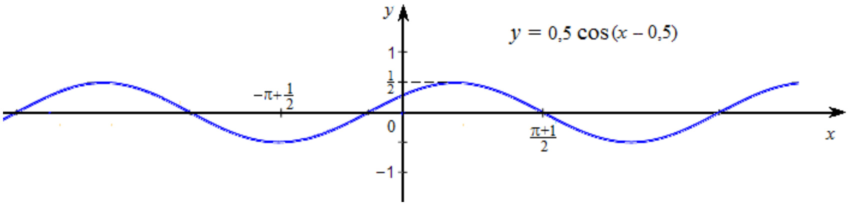


рис.10.7.

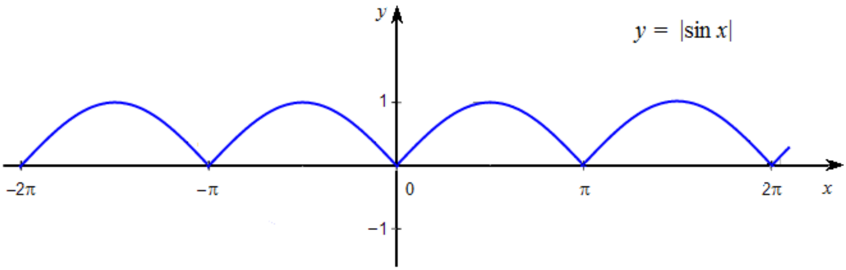


рис.10.8.

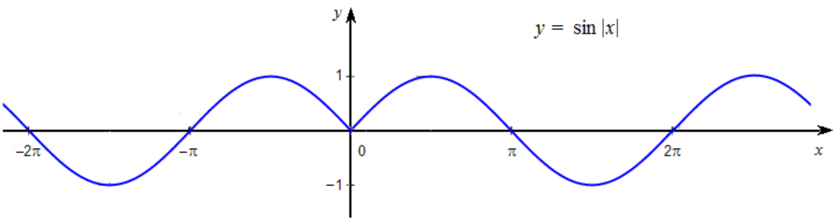


рис.10.9.

Обратные тригонометрические функции.

Символ $\arcsin a$ обозначает число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен *a*, $|a|<1$;

$\arccos b$ – число из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен *b*, $|b|<1$;

$\operatorname{arctg} c -$ число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен *c*;

$\operatorname{arcctg} d -$ число из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен *d*.

Функция $y=\arcsin x:[-1;1]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ является нечетной. Её график см.на рис.10.10.

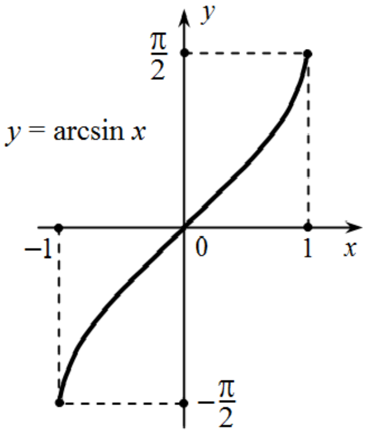


рис.10.10.

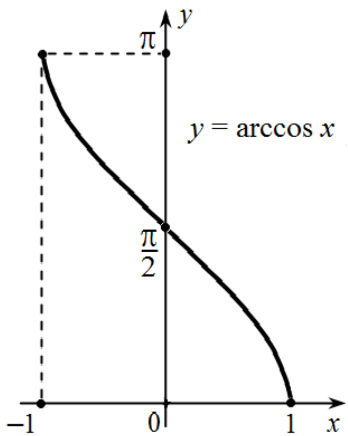


рис.10.11.

Функция $y=\arccos x:[-1;1]\to[0;\pi]$ является *функцией общего вида*, т.е. не имеет свойств четности и нечетности. Её график см.на рис.10.11.

Функция $y=\operatorname{arctg} x:\mathbf{R}\to\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ является нечетной. Её график см.на рис.10.12.

Функция $y=\operatorname{arcctg} x:\mathbf{R}\to(0;\pi)$ является функцией общего вида. Её график см.на рис.10.13.

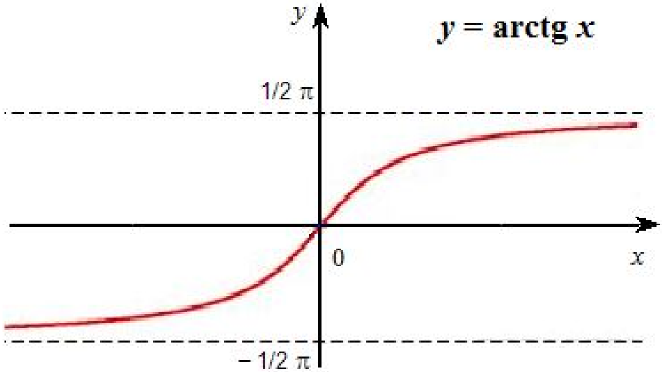


рис.10.12.

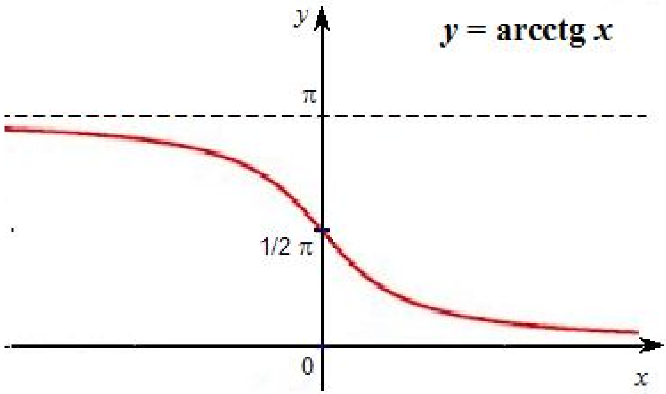


рис.10.13.

Простейшие тригонометрические уравнения.

1. $\sin x = a \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \textit{решений нет, если}: |a| > 1; \\ (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},\ \textit{если}: |a| \le 1. \end{array}\right.$

2. $\cos x = b \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \textit{решений нет, если}: |b| > 1; \\ \pm \arccos b + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z},\ \textit{если}: |b| \le 1. \end{array}\right.$

3. $\operatorname{tg} x = c \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} c + n\pi, n \in \mathbf{Z}.$

4. $\operatorname{ctg} x = d \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} d + n\pi, n \in \mathbf{Z}.$

10.5. Решить уравнение:

1. $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; *Ответ:* $\left\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}.$

2. $3\cos 4x + 5\sin 2x = -1$; *Ответ:* $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n}{2}\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

3. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$;

Ответ: $\left\{\dfrac{2n\pi}{3}; \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi; \dfrac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

4. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$;

Ответ: $\left\{\dfrac{n\pi}{5}; \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2n\pi}{5}; -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

5. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$; *Ответ:* $\left\{2n\pi; -\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

6. $\cos x + \sin x = a$;

Ответ: $x = \left[\begin{array}{l} \textit{решений нет, если}: |a| > \sqrt{2}; \\ \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{a}{\sqrt{2}}b + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z},\ \textit{если}: |a| \le 1. \end{array}\right.$

7. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$; *Ответ:* $\left\{-\dfrac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

8. $8\sin x \cdot \cos x + 7\cos 2x + 8\cos^2 x = 0$;

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + n\pi, \operatorname{arctg}\dfrac{15}{7} + n\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

9. $2(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 1) = \cos x$; *Ответ:* $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

10. $\cos x + \sin x = \sin 2x$;

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

10.6. При каком наибольшем отрицательном значении параметра *a* уравнение имеет решение?

1. $a \cdot \cos(3x) - 12\sin(3x) = 13$; *Ответ:* –5.

2. $4\sqrt{2}\cos x + a \cdot \sin x = 9.$; *Ответ:* –7.

10.7. При каком наименьшем положительном значении параметра *b* уравнение имеет решение?

1. $b \cdot \cos(5x) - 4\sin(5x) = 5$; *Ответ:* 3.

2. $24\cos x + b\cdot\sin x = 25$. *Ответ:* 7.

10.8. Найти числовое значение:

1. $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\right)$; *Ответ:* $\left\{\frac{63}{65}\right\}$.

2. $\arcsin\left(\sin\frac{5}{2}\right)$; *Ответ:* $\left\{\pi-\frac{5}{2}\right\}$.

3. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\right)$. *Ответ:* $\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

10.9. Построить график функции:

1. $y=\arcsin\frac{3-2x}{5}$; *Ответ:* см.рис.10.14.

2. $y=\arcsin|x|$; *Ответ:* см.рис.10.15.

3. $y=\sin(\arcsin x)$; *Ответ:* см.рис.10.16.

4. $y=\arcsin(\sin x)$. *Ответ:* см.рис.10.17.

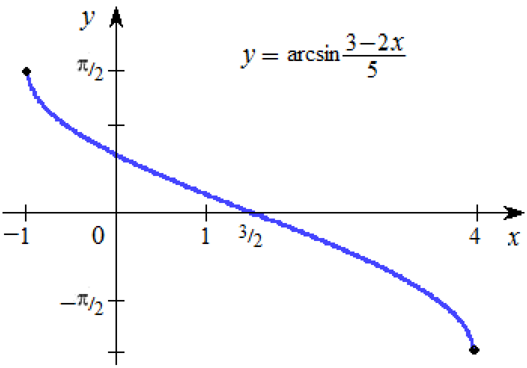


рис.10.14.

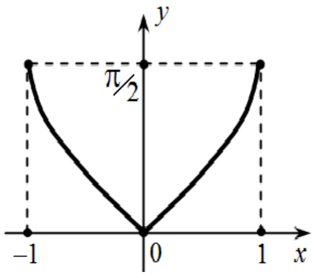


рис.10.15. .

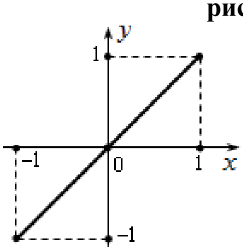


рис.10.16.

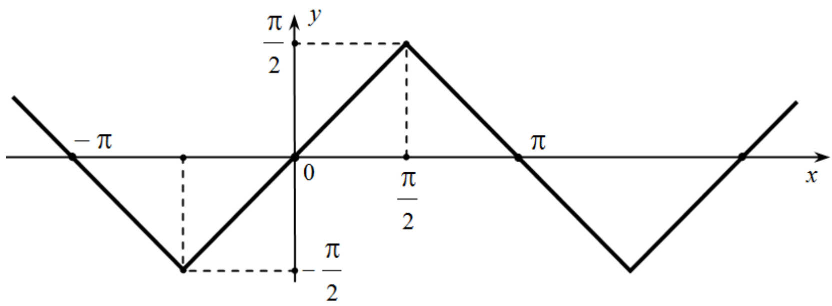


рис.10.17.

10.10. Решить неравенство:

1. $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *Ответ:* $\left\{\left[\dfrac{\pi}{3}+2n\pi;\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi\right], n\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. $\sin x < \dfrac{1}{2}$; *Ответ:* $\left\{\left(-\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi;\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right), n\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. $\cos x > -\dfrac{1}{2}$; *Ответ:* $\left\{\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi;\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi\right), n\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *Ответ:* $\left\{\left[\dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\dfrac{11\pi}{6}+2n\pi\right], n\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. $\operatorname{tg} x \geq 1$. *Ответ:* $\left\{\left[\dfrac{\pi}{4}+n\pi;\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right], n\in\mathbf{Z}\right\}$.

10.11. Решить уравнение:

1. $\arccos x - \arcsin x = \pi/6$; *Ответ:* $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

2. $\arccos x = \operatorname{arctg} x$; *Ответ:* $\left\{\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$.

3. $\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x) = \dfrac{\pi}{4}$. *Ответ:* $\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

10.12. Доказать тождество :

1. $1+\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n\in\mathbf{Z}$.

2. $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$;

3. $\operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x-y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

4. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$;

5. $\cos 2x=2\cos^2 x-1$;

6. $\cos 2x=1-2\sin^2 x$;

7. $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$;

8. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x},\quad x\neq\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$;

9. $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$;

10. $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

11. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y},\quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\quad y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}$;

12. $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$;

13. $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq(2n+1)\pi,\quad n\in\mathbf{Z}$;

14. $\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)=\cos x$;

15. $\sin(\dfrac{\pi}{2}+x)=\cos x$;

16. $\cos(\pi-x)=-\cos x$;

17. $\cos(\pi+x)=-\cos x$;

18. $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

10.13. Определить знак разности :

1. $\sin 5-\sin 5^\circ$;
2. $\operatorname{tg}3{,}7-\operatorname{tg}3{,}4$;

3. $\operatorname{tg}37^\circ - \operatorname{ctg}62^\circ$;

4. $\cos\pi/18 - \cos\pi/15$.

5. $\operatorname{tg}4 - \operatorname{ctg}4$;

6. $\cos 7{,}9 - \cos 7{,}8$;

7. $\sin 7 - \cos 7$;

10.14. Вычислить :

1. $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha, \textit{если} : \sin\alpha - \cos\alpha = 1/2$;

2. $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ$;

3. $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}88^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ$;

4. $\sin\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

10.15. Построить график функции:

1. $y = 3\cos\frac{x}{2}$;

2. $y = 0{,}5\sin(2x - \frac{\pi}{3})$;

3. $y = \cos|x|$;

4. $y = |\cos x|$.

10.16. Решить уравнение:

1. $2\cos^2(x+\pi) + 3\cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$;

2. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin 3x + \sin^2 x = \cos^2 x$;

3. $\sin x \cdot \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$;

4. $\operatorname{tg}x + 2\operatorname{ctg}x + 3 = 0$;

5. $\cos 4x \cdot \sin 2x = \cos 9x \cdot \sin 7x$;

6. $3\sin x + 4\cos x = \frac{5}{2}$;

7. $\cos x - \sin x = a$;

8. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

9. $\sin 2x + \sin^2 x - 3\cos^2 x = 0;$

10. $\sin x - \cos x = 3\sin 2x;$

10.17. При каком наибольшем отрицательном значении параметра *a* уравнение имеет решение?

1. $a \cdot \cos(3x) - 7\sin(3x) = 25$ ***;***
2. $15\cos x + a \cdot \sin x = 17.$

10.18. При каком наименьшем положительном значении параметра b уравнение имеет решение?

1. $b \cdot \cos(5x) - 5\sin(5x) = 11;$
2. $12\cos x + b \cdot \sin x = 40.$

10.19. Найти числовое значение:

1. $\cos\left(\arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{12}{13}\right);$
2. $\arccos(\cos 5);$
3. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right).$

10.20. Построить график функции:

1. $y = \arccos|x|;$
2. $y = \cos(\arccos x);$
3. $y = \arccos(\cos x);$
4. $y = \arccos\frac{1-x}{3}.$

10.21. Решить неравенство:

1. $\sin x \le -\frac{1}{2};$
2. $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2};$
3. $\cos x < \frac{1}{2};$
4. $\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2};$

5. $\operatorname{ctg} x \geq 1$.

10.22. Решить уравнение:

1. $\arccos x = \arcsin x$;
2. $\arccos x + \arccos(1-x) = \arccos(-x)$;
3. $\arccos\dfrac{x}{2} = 2\operatorname{arctg}(x-1)$.

Тема 11. МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЯМИ И НЕРАВЕНСТВАМИ. ОБЪЕДИНЕНИЕ И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Одно уравнение $\Phi(x, y) = 0$ с двумя переменными *x, y* обычно задает на плоскости некоторую кривую. Например, уравнение $x + y = 4$ задает прямую (см. рис.11.1.), а уравнение $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ задает окружность с радиусом $R = 3$ и центром в точке (-1; 2) (рис. 11.2.).

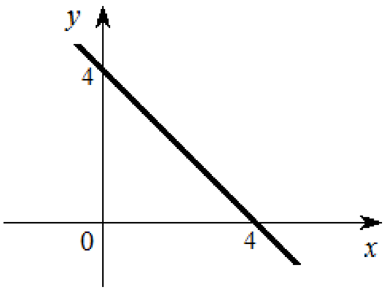


рис.11.1.

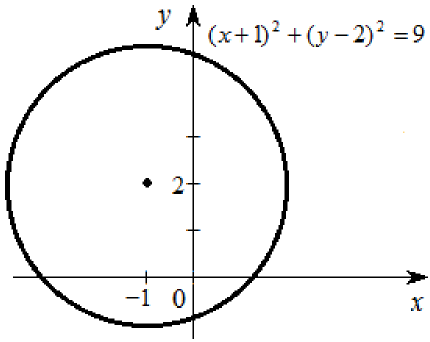


рис.11.2.

Система двух уравнений $\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0, \\ \Phi_2(x, y) = 0 \end{cases}$ задает, вообще говоря, *пересечение* двух кривых. В частности, система

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \end{cases}$$

задает две точки (-1;5) и (2;2), см. рис. 11.3.

Уравнение вида $\Phi_1(x,y)\cdot\Phi_2(x,y)=0$ задает множество, состоящее из *объединения* двух кривых, т.е. $\left[\begin{array}{l}\Phi_1(x,y)=0,\\ \Phi_2(x,y)=0\end{array}\right.$. Квадратная скобка читается здесь как «или».

Например, уравнение $(x-3)\cdot(y+2)=0$ равносильно объединению двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}x-3=0,\\ y+2=0\end{array}\right.,$$

которое изображается двумя пересекающимися прямыми, см.рис. 11.4.

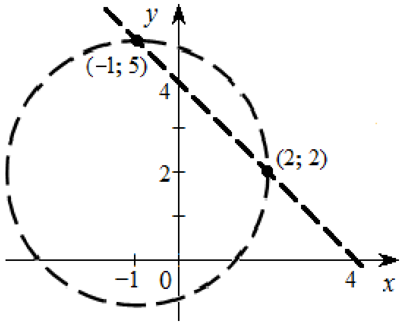


рис.11.3.

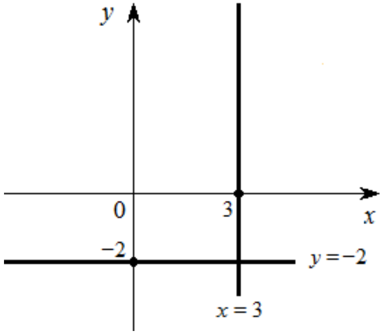


рис.11.4.

Неравенство вида $\Phi(x,y)>0$ (или $\Phi(x,y)\geq 0$) задает часть плоскости. Например: $x+y-4\geq 0$ – полуплоскость, см.рис. 11.5 ; или $(x+1)^2+(y-2)^2-9<0$ есть внутренность круга, см.рис. 11.6 .

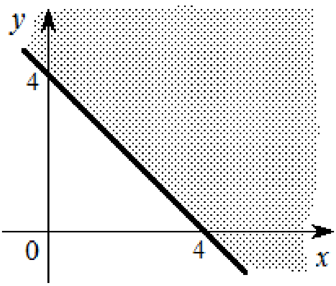


рис.11.5.

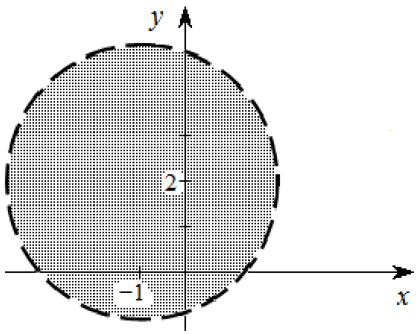


рис.11.6.

11.1. Изобразить на плоскости множество точек $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

1. $|x|+|y|\le 1$; *Ответ:* см. рис.11.7;

2. $|x-2|+|y+1|\le 1$; *Ответ:* см. рис.11.8;

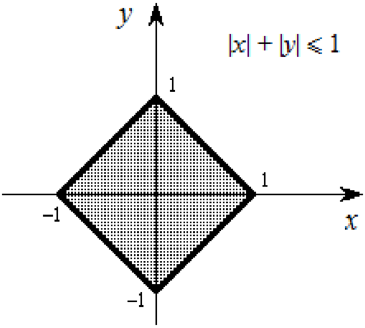


рис.11.7.

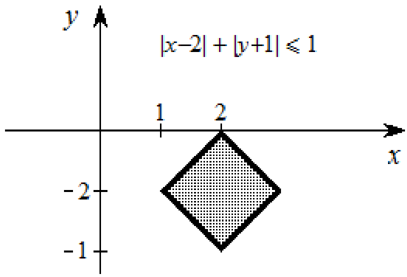


рис.11.8.

3. $\log_{x-y}(x+y)\ge 1$; *Ответ:* см. рис.11.9;

4. $\log_y|\sin x|\ge 0$; *Ответ:* см. рис.11.10;

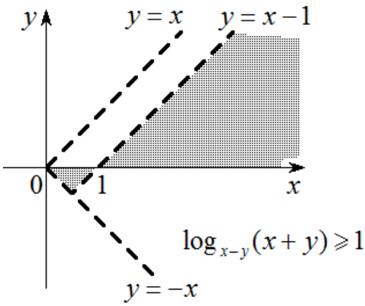


рис.11.9.

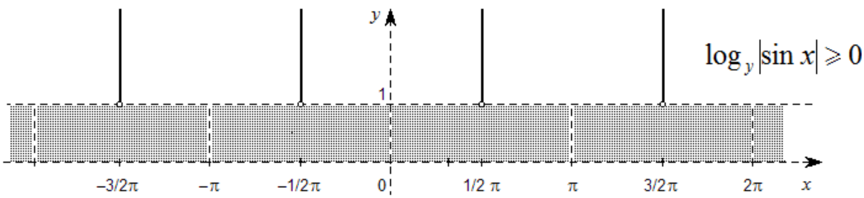
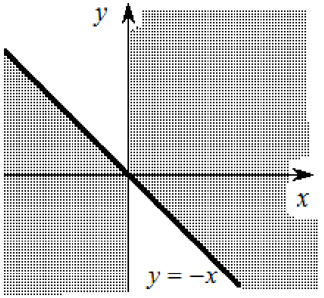


рис.11.10.

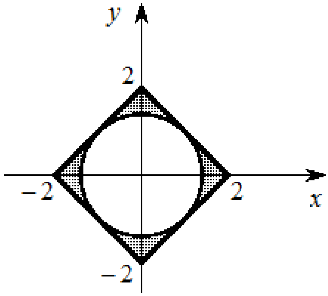
5. $|\ x^2+xy+y^2\ |\ge|x^2+xy-y^2|$; *Ответ:* см. рис.11.11;

6. $(2-x^2-y^2)\cdot(|x|+|y|-2)\ge 0$; *Ответ:* см. рис.11.12.



$|x^2+xy+y^2| \geq |x^2+xy-y^2|$

рис.11.11.



$(2-x^2-y^2)(|x|+|y|-2) \geq 0$

рис.11.12.

11.2. Изобразить на плоскости множество точек $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению:

1. $\dfrac{(y-x)\cdot(xy-1)}{(y-x)^2+(xy-1)^2}=0$; Ответ: см. рис.11.13;

2. $y-x=\left|\,x^2-y^2\,\right|$; Ответ: см. рис.11.14;

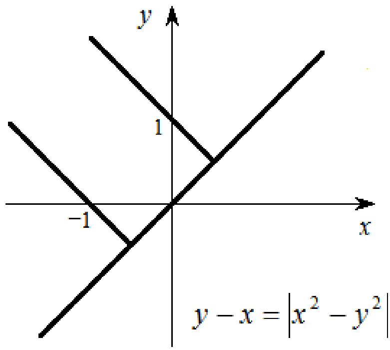


рис.11.13.

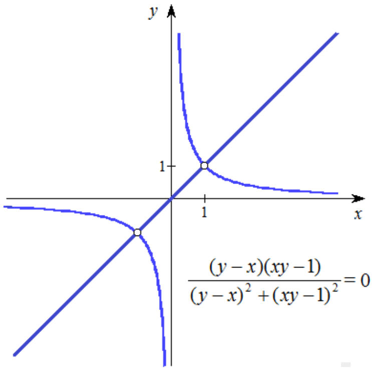


рис.11.14.

3. $x|x|+y|y|=x+y$; *Ответ:* см. рис.11.15;

4. $y=|y|\cos x$; *Ответ:* см. рис.11.16;

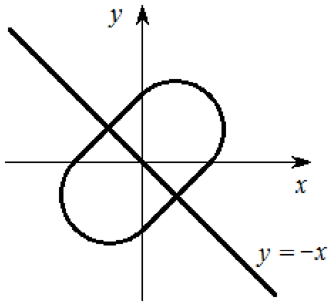


рис.11.15

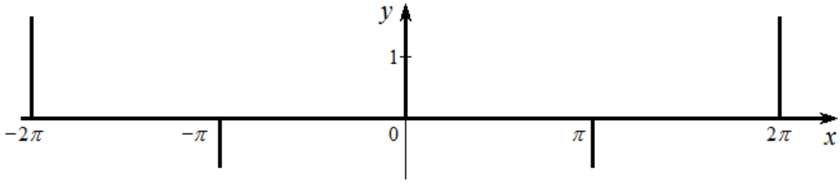


рис.11.16.

5. $y = |y - \sin x|$; *Ответ:* см. рис.11.17;

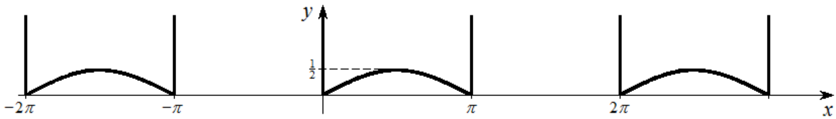


рис.11.17.

11.3. Изобразить на плоскости множество точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе:

1. $\begin{cases} |x - y| \le 1, \\ x^2 + y^2 + 2(x + y) \le 0; \end{cases}$ *Ответ:* см. рис.11.18;

2. $\begin{cases} |x + y| \ge 2, \\ x^2 + y^2 \le 2(1 + x + y); \end{cases}$ *Ответ:* см. рис.11.19.

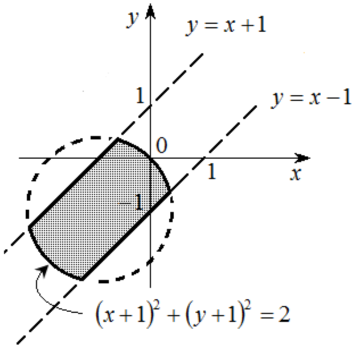


рис.11.18.

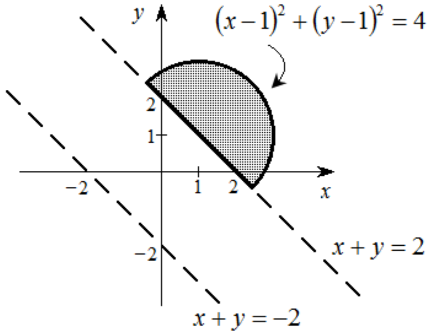


рис.11.19.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

11.4. Изобразить на плоскости множество точек $M(x, y)$**, координаты которых удовлетворяют неравенству:**

1. $|x-1|+|y+2|\le 2$; 4. $(x^2+y^2-1)\cdot(|x|+|y|-1)\ge 0$;
2. $|y|\le x-|x-2|$; 5. $\log_{x+y}(x-y)\ge 1$;
3. $|x^2+xy+y^2|\le|y^2+xy-x^2|$; 6. $\log_x|\cos y|\ge 0$;

11.5. Изобразить на плоскости множество точек $M(x, y)$**, координаты которых удовлетворяют уравнению:**

1. $\dfrac{(y+x)\cdot(xy+1)}{(y+x)^2+(xy+1)^2}=0$;
2. $y+x=|y^2-x^2|$;
3. $x|x|+y^2=x+|y|$;
4. $x=|x|\sin y$;
5. $x=|x-\cos y|$.

11.6. Изобразить на плоскости множество точек $M(x, y)$**, координаты которых удовлетворяют системе:**

1. $\begin{cases}|x+y|\le 1,\\ x^2+y^2\ge x+y;\end{cases}$ 2. $\begin{cases}|x+y|\le 3,\\ x^2+y^2\le 2(2-x+2y).\end{cases}$

Тема 12. ЗАДАЧИ С ПРОЦЕНТАМИ

1. Если x=1/12 и y=1/3, то x составляет от их суммы

(A) 20 % ; (B) 25 %; (C) 33,3 %; (D) 50 %; (E) 75 %.

2. Один насос выкачал из бассейна 20% воды, а другой 25% оставшейся воды. Какую часть воды выкачали оба насоса ?

(A) 25 % ; (B) 33,3 %; (C) 37,5 %; (D) 40 %; (E) 50 %.

3. Объем строительных работ увеличивается на 80%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, если производительность труда будет увеличена на 20% ?

(A) 0 % ; (B) 33,3 %; (C) 40 %; (D) 50 %; (E) 60 %.

4. Бабушка положила 60% своего состояния в банк, а остаток – в покупку акций, что принесло ей через год 60 % прибыли. Общая прибыль составила 40 % . Сколько процентов годовых выплачивает банк ?

(A) 10 % ; (B) 12,5 %; (C) 20 %; (D) 35 %; (E) 26,7 %.

5. Какую (приблизительно) часть от объема куба составляет объем вписанного шара ? .

(A) 24-27 % ; (B) 34-37 %; (C) 40-43 %; (D) 50-53 %; (E) 74-77 %.

6. На сколько процентов одно из чисел больше другого, если 5% одного равны 6% другого?

(A) 20 % ; (B) 25 %; (C) 33,3 %; (D) 50 %; (E) 12,5 %.

7. На сколько процентов увеличится объем куба, если каждое его ребро увеличить на 10%?

(A) 10 % ; (B) 30 %; (C) 33,1 %; (D) 33,3 % ; (E) 50 %.

8. Один насос выкачал из бассейна 25% воды, а другой 20% оставшейся воды. Какую часть воды выкачали оба насоса?

(A) 25 % ; (B) 33,3 %; (C) 37,5 %; (D) 40 %; (E) 50 %.

9. Цена товара упала на 20%, а затем на столько же возросла. На сколько процентов изменилась цена товара в итоге?

(A) –5 % ; (B) –4 %; (C) 0 %; (D) 4 %; (E) 5 %.

10. Площадь второго поля на 40% больше площади первого, а площадь третьего поля на 40% меньше площади второго. Вася вспахал 60% первого поля и 25% третьего поля. Какую часть работы проделал Вася, если ему надо было вспахать все три поля?

(A) 15 % ; (B) 25 %; (C) 33,3 %; (D) 35 %; (E) 40 %.

11. Торговая наценка на товар составляет 40% . Какую наибольшую скидку с розничной цены может предоставить продавец с тем, чтобы все же не продавать товар ниже его оптовой цены? *Ответ:* 28,6%

12. Я положил в банк 5000 рублей. Сколько процентов начисляет банк ежегодно на вклад, если в конце второго года вклад составил 6272 рубля? *Ответ:* 12%.

13. Цена товара с 200 рублей выросла дважды, каждый раз на 20%. Какова окончательная цена товара? *Ответ:* 288 *руб*.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Если x=1/6 и y=1/18, то x составляет от их суммы

(A) 40 % ; (B) 50%; (C) 66,7 %; (D) 75 %; (E) 120 %.

2. Площадь под графиком функции $y = x^2$ на отрезке $[0;1]$ составляет от площади под графиком функции $y = x$

(A) 33,3 % ; (B) 50%; (C) 66,7%; (D) 75%; (E) 40 %.

3. Книга до подорожания стоила на 20% меньше , чем сейчас. На сколько процентов подорожала книга?

(A) 10% ; (B) 15 %; (C) 20%; (D) 25 %; (E) 50 %.

4. На склад привезли тонну продукта, влажность которого составляла 98%. На следующий день процент влажности уменьшился на 2 единицы (влажность стала составлять 96%). Сколько стал весить продукт?

(A) 500*кг* ; (B) 750*кг*; (C) 800*кг*; (D) 980*кг*; (E) 988*кг*.

5. Площадь первого поля на 40% больше площади второго. Вася вспахал 60 % первого поля. Какую часть работы проделал Вася, если ему надо было вспахать оба поля?

(A) 12,25 % ; (B) 15 %; (C) 23,3 %; (D) 35%; (E) 40 %.

6. Ребро куба уменьшили на 40%. На сколько процентов уменьшился его объем?

7. Торговая наценка на товар составляет 50%. Какую наибольшую скидку с розничной цены может предоставить продавец с тем, чтобы все же не продавать товар ниже его оптовой цены?

Тема 13. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

З а д а ч и	*Ответы*	*Б а л л ы (от 0 до 2)*
1. Найдите целые решения системы неравенств $\begin{cases} 3x-2>5-5x, \\ 4x+3<x+10. \end{cases}$		
2. Найдите множество значений выражения $2a^2-3b^2$, если $-2\le a\le 3,\ -5\le b\le 4$.		
3. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{21-x^2}\cdot tgx=0$?		
4. Найдите $x_1^3+x_2^3$, где x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2-6x-1=0$.		
5. Найдите выражение для lg 2, если известно, что $\log_2 5=a$.		
6. Если радиус шара уменьшить на 10%, то на сколько уменьшится его объем?		
7. Сколько целых значений принимает функция $y=3^{-4x-x^2}$?		
8. Чему равно число $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\right)$?		
9. Решите неравенство $\lvert 3x+1\rvert\ge 7x+3$.		
10. Торговая наценка на товар составляет 15%. Какую наибольшую скидку с розничной цены может предоставить продавец с тем, чтобы все же не продавать товар ниже его оптовой стоимости?		
11. Сколько натуральных чисел являются решениями неравенства $4+\frac{1}{x-6}\le\frac{25}{x-2}$.		
12. Среди утверждений: 1) если $(x-1)(x-2)(x-3)=0$, то $x=1$; 2) если $\log_a 0{,}5>0$, то $a<1$; 3) если $\lvert x\rvert\le 1$, то $\lvert x+5\rvert\ge 4$, верными являются		
13. Сократите дробь $\frac{5x^2+11x+2}{5x^2+16x+3}$.		
14. Изобразите множество, заданное неравенством: $x+6y+3\le 0$.		
15. При каком наибольшем отрицательном значении параметра a уравнение $\arccos(2x)+5\sin(2x)=13$ имеет решение?		
16. Какие из приведенных неравенств являются верными? 1) $\sqrt{13}+\sqrt{23}>\sqrt{70}$; 2) $\log_2 3>\log_9 26$; 3) $\operatorname{tg} 2>-1$.		

Учебное издание

Барт В.А, Барт Е.Л., Черняев П.К.

Математика

Повторение курса средней школы

Учебное методическое пособие

Подписано в печать с оригинала-макета 16.09.2013

Формат 60x84$^1/_{16}$. Печать ризографическая.

Усл. печ. л. 4.7. Тираж 200 экз. Заказ № 1330.

Издательский центр экономического факультета СПбГУ
191123, С-Петербург, ул. Чайковского, д. 62.
Эл. почта: izdat@econ.pu.ru