Санкт-Петербургский государственный университет

Рабочий экземпляр Петра Константиновича Черняева

МАТЕМАТИКА

Варианты 2002 года

Пособие для абитуриентов

Санкт-Петербург
2003

Представлено к изданию Центральной приемной комиссией Санкт-Петербургского государственного университета

составители: Б.М. Беккер, Ю.Н. Бибиков (председатель комиссии), Ю.А. Ильин, В.В. Макеев, Н.Ю. Нецветаев, А.В. Осипов, П.К. Черняев, Ю.В. Чурин

название: **Варианты 2002 года**

Методическое пособие для абитуриентов

Пособие содержит условия задач, предлагавшихся в 2002 году на вступительных экзаменах в Санкт-Петербургский государственный университет. Приведены ответы, а также решения задач первого варианта. Пособие адресовано поступающим в СПбГУ, учителям и старшеклассникам.

отв. редактор: канд. физ.-мат. наук, доцент **Еремеев Владимир Валерьевич**

рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент **Ильин Юрий Анатольевич**

А б и т у р и е н т у   С П б Г У

Методические указания к вступительным экзаменам по математике

Цель этой памятки — познакомить Вас с порядком проведения вступительных экзаменов по математике, с обязанностями абитуриентов во время экзаменов, а также с задачами, которые предлагались на вступительных экзаменах в СПбГУ в 2002 году.

Накануне экзамена узнайте в приемной комиссии факультета, в каком месте он будет проходить, как туда вовремя добраться. На экзамен нужно приходить отдохнувшим, хорошо выспавшимся. В случае болезни не приходите на экзамен, а обратитесь в поликлинику СПбГУ, возьмите справку об освобождении и известите приемную комиссию факультета.

На экзамене Вам потребуется ручка, не помешает и запасная. Писать можно только синей, черной или фиолетовой пастой (чернилами). Разрешается иметь при себе карандаш. Пропуском на экзамен служат экзаменационный лист и паспорт. Если их нет, то допустить Вас до экзамена могут только по письменному разрешению ответственного секретаря приемной комиссии факультета. Найти его Вам помогут дежурные у входа.

На экзамен рекомендуется приходить за 15 — 20 минут до его начала. Примерно в это время начинается впуск в аудиторию. Требования экзаменатора поменять место должны выполняться безоговорочно. Выходить из аудитории во время экзамена нельзя. После окончания впуска в аудиторию экзаменаторы напомнят основные правила поведения на экзамене. Вы заполните титульный лист, на котором не следует делать никаких других записей. Затем Вам продиктуют тексты задач, объявят время окончания экзамена. Варианты письменных экзаменов содержат по 5 задач, на решение которых отводится 4 часа.

Все предлагаемые на экзаменах задачи укладываются в рамки “Программы вступительных экзаменов для поступающих в Санкт-Петербургский государственный университет”. Трудность вариантов обусловлена потребностями факультетов в определенном уровне мате-

матических знаний, реальными возможностями абитуриентов данного факультета, а также конкурсной ситуацией на данном факультете.

Обычно в каждом варианте имеется не менее двух несложных задач и по крайней мере одна трудная или нестандартная задача. Начинайте решать ту задачу, которая кажется Вам проще. Доведите решение до конца, проверьте и перепишите в чистовик (ответ при этом рекомендуется выделить). Решения на чистовике можно располагать в любом порядке, необходимо лишь сохранить нумерацию задач. Не относящиеся к решению задач надписи и рисунки в работе делать нельзя.

Решенная задача придаст Вам уверенности в себе и успокоит. После этого принимайтесь за самую легкую из оставшихся задач. Если за 10 — 20 минут Вы не можете найти решения, отложите эту задачу и примитесь за следующую. Если задача нестандартная, имеет непривычную формулировку, не спешите сразу приниматься за выкладки, сперва обдумайте условие, наметьте план решения. Помните, что все предлагаемые задачи доступны, для их решения не требуются сведения, не входящие в программу вступительных экзаменов.

В конце экзамена не забудьте тщательно проверить решения, затем вложите все листы один в другой, а затем в титульный лист. Ваш экзаменационный лист останется у экзаменаторов. После экзамена в приемной комиссии факультета и в месте проведения экзамена будут вывешены ответы и решения задач. Оценку Вам сообщат в приемной комиссии факультета накануне следующего экзамена.

Далее приведены задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в университет в 2002 году, ответы ко всем задачам, а также краткие решения задач первого варианта.

Дневное отделение

1. Факультеты: математико-механический, прикладной математики — процессов управления

Вариант I

1. Выяснить, какое из двух чисел больше: $7\log_{14} 2$ или $\log_4 3 + \log_7 9$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + x + 6| = x + 1$.
3. Решить уравнение $\sin x = 7\sqrt{3}\cos^3 x - \sin^3 x$.
4. Треугольник KLM вписан в окружность S радиуса 5 и описан вокруг окружности радиуса 2, касающейся его сторон в точках P, Q и R. Периметр треугольника с вершинами в серединах дуг $\smile KL$, $\smile LM$ и $\smile MK$ окружности S равен 20. Найти периметр треугольника PQR.
5. Дана правильная четырехугольная пирамида с высотой h и стороной основания b. Ее основания касаются два шара, каждый из которых касается двух боковых граней пирамиды и другого шара (шары касаются разных граней). Найти радиусы шаров, если известно, что один из них в полтора раза больше другого.

Вариант II

1. Выяснить, какое из чисел больше $\log_{15} 127$ или $\log_3 2 + \log_5 8$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + 5x - 2| = x - 1$.
3. Решить уравнение $\cos x = 3\sin^3 x - \cos^3 x$.
4. Окружность радиуса 2 касается сторон треугольника ABC в точках A', B' и C'. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна 5. Найти площадь треугольника с вершинами в серединах дуг $\smile AB$, $\smile BC$ и $\smile CA$ описанной окружности треугольника ABC, если известно, что ее радиус равен 6.
5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол между основанием и боковой гранью равен α. Даны два шара, каждый из которых касается основания пирамиды, двух ее боковых граней и другого шара (шары касаются разных граней). Найти радиусы шаров, если известно, что один из них вдвое больше другого.

2. Физический факультет

Вариант I

1. Доказать неравенство $7\log_{14} 2 < \log_4 3 + \log_7 9$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + x + 6| = x + 1$.
3. Решить уравнение $\sin x = 7\sqrt{3}\cos^3 x - \sin^3 x$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} |x - y| \le 1, \\ x^2 + y^2 + 2(x + y) \le 0. \end{cases}$
5. Дана правильная четырехугольная пирамида с высотой h и стороной основания b. Ее основания касаются два шара, каждый из которых касается двух боковых граней пирамиды и другого шара (шары касаются разных граней). Найти радиусы шаров, если известно, что один из них в полтора раза больше другого.

Вариант II

1. Доказать неравенство $\log_{15} 127 < \log_3 2 + \log_5 8$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + 5x - 2| = x - 1$.
3. Решить уравнение $\cos x = 3\sin^3 x - \cos^3 x$.

4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} |x+y| \le 1, \\ x^2+y^2 \ge x+y. \end{cases}$

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол между основанием и боковой гранью равен α. Даны два шара, каждый из которых касается основания пирамиды, двух ее боковых граней и другого шара (шары касаются разных граней). Найти радиусы шаров, если известно, что один из них вдвое больше другого.

3. Филологический факультет

Вариант I

1. Выяснить, какое из двух чисел больше: $7\log_{14} 2$ или $\log_4 3 + \log_7 9$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + x + 6| = x + 1$.
3. Решить уравнение $\cos 3x - \sin 3x = \cos 2x$.
4. Треугольник KLM вписан в окружность S радиуса 5 и описан вокруг окружности радиуса 2, касающейся его сторон в точках P, Q и R. Периметр треугольника с вершинами в серединах дуг $\smile KL$, $\smile LM$ и $\smile MK$ окружности S равен 20. Найти периметр треугольника PQR.
5. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} |x-y| \le 1, \\ x^2+y^2+2(x+y) \le 0. \end{cases}$

Вариант II

1. Выяснить, какое из двух чисел больше: $\log_{15} 127$ или $\log_3 2 + \log_5 8$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + 5x - 2| = x - 1$.
3. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 3x = \dfrac{1}{2} + \sin 2x$.
4. Окружность радиуса 2 касается сторон треугольника ABC в точках A', B' и C'. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна 5. Найти площадь треугольника с вершинами в серединах дуг $\smile AB$, $\smile BC$ и $\smile CA$ описанной окружности треугольника ABC, если известно, что ее радиус равен 6.
5. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} |x+y| \le 1, \\ x^2+y^2 \ge x+y. \end{cases}$

4. Факультеты: экономический (специальности: математические методы в экономике, прикладная информатика), биолого-почвенный (специальности: биология, экология)

Вариант I

1. Том Сойер красил забор длиной 105 м, причем день за днем количество выкрашенного за день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был выкрашен забор, если за первые 3 дня Том выкрасил 36 м забора, а за последние 3 дня — 27 м?
2. При каких a уравнение $\cos x - \dfrac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \cos x + a}$ имеет хотя бы одно решение?
3. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 - 3 \cdot 2^x \le |y^2 + 2y + 2^x|$.
4. Решить уравнение $(4x+1)\sqrt{(x+1)(1-2x)} = -1$.
5. Точка D расположена на стороне AC треугольника ABC таким образом, что $\angle ABD = 45°$, $\angle DBC = 30°$. В каком отношении отрезок BD делится медианой AE, если $AB = \sqrt{50}$, $BC = 5$?

Вариант II

1. Косцы косили траву на поле площадью 170 га. Известно, что количество выкошенного за день увеличивалось ежедневно на одну и ту же величину. За сколько дней поле было выкошено полностью, если за первые 5 дней было выкошено 25 га, а за последние 5 дней — 60 га?
2. При каких a уравнение $\sin x - \frac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \sin x - a}$ не имеет решений?
3. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 + \lg x \geq |y^2 + 2y - \lg x|$.
4. Решить уравнение $(2x - 5)\sqrt{(x-1)(x-4)} = 2$.
5. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, причем $\angle CBD = 45°$, $\angle ABD = 60°$, $AB = 4\sqrt{6}$, $BC = 6$. В каком отношении отрезок BD делится медианой CE?

5. Факультеты: биолого-почвенный (специальность: почвоведение), химический

Вариант I

1. Том Сойер красил забор длиной 105 м, причем день за днем количество выкрашенного за день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был выкрашен забор, если за первые 3 дня Том выкрасил 36 м забора, а за последние 3 дня — 27 м?
2. Решить уравнение $\cos x - \frac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \cos x + 1}$.
3. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 - 3 \cdot 2^x \leq |y^2 + 2y + 2^x|$.
4. Решить уравнение $(4x + 1)\sqrt{(x+1)(1-2x)} = -1$.
5. Точка D расположена на стороне AC треугольника ABC таким образом, что $\angle ABD = 45°$, $\angle DBC = 30°$. Найти длины отрезков AD и DC, если $AB = \sqrt{2}$, $BC = 1$?

Вариант II

1. Косцы косили траву на поле площадью 170 га. Известно, что количество выкошенного за день увеличивалось ежедневно на одну и ту же величину. За сколько дней поле было выкошено полностью, если за первые 5 дней было выкошено 25 га, а за последние 5 дней — 60 га?
2. Решить уравнение $\sin x - \frac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \sin x + 1}$.
3. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 + \lg x \geq |y^2 + 2y - \lg x|$.
4. Решить уравнение $(2x - 5)\sqrt{(x-1)(x-4)} = 2$.
5. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, причем $\angle CBD = 45°$, $\angle ABD = 60°$, $AB = 4\sqrt{6}$, $BC = 6$. Найти длины отрезков AD и DC.

6. Факультет географии и геоэкологии

Вариант I

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{2(a - \sin x)(a - \cos x)} = 1 - \sin x - \cos x$ имеет по крайней мере одно решение?
2. Решить уравнение $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-4) = 2$.
3. Решить уравнение $\sqrt[3]{-x^2 - x + 8} = \sqrt{x-2} - 1$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x|x| + y|y| = x + y$.

5. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Площадь треугольника $ABD = 6$, площадь треугольника $ADC = 12$, а площадь треугольника CBE равна 9. Найти площадь треугольника AFC, где F — точка пересечения отрезков AD и CE.

Вариант II

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{2(a+\sin x)(a+\cos x)} = 1+\sin x+\cos x$ имеет по крайней мере одно решение?
2. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x-1) + \log_x(2x-3)^2 = 2$.
3. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^2+3x-2} = \sqrt{x+2}-1$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x,y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x|x| + y^2 = x + |y|$.
5. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Площади треугольников ABD и ADC равны 6, а площадь треугольника CBE равна 4. Найти площадь треугольника AFC, где F — точка пересечения отрезков AD и CE.

7. Геологический факультет

Вариант I

1. Найти все решения уравнения $\sin x + \cos x + 1 = 0$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Решить уравнение $\log_x(x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-4) = 2$.
3. Решить уравнение $\sqrt[3]{-x^2-x+8} = \sqrt{x-2}-1$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x,y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x|x| + y|y| = x + y$.
5. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Площадь треугольника $ABD = 6$, площадь треугольника $ADC = 12$, а площадь треугольника CBE равна 9. Найти площадь треугольника AFC, где F — точка пересечения отрезков AD и CE.

Вариант II

1. Найти все решения уравнения $1 - \sin x - \cos x = 0$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x-1) + \log_x(2x-3)^2 = 2$.
3. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^2+3x-2} = \sqrt{x+2}-1$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x,y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x|x| + y^2 = x + |y|$.
5. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Площади треугольников ABD и ADC равны 6, а площадь треугольника CBE равна 4. Найти площадь треугольника AFC, где F — точка пересечения отрезков AD и CE.

8. Факультеты: экономический (специальности: финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит, экономика и управление на предприятии, мировая экономика, менеджмент организации; направление: экономика), международных отношений (специальность: прикладная информатика в гуманитарной сфере)

Вариант I

1. Банк А начисляет вкладчикам ежегодно 5% от первоначально вложенной суммы, а банк Б — 20% от первоначально вложенной суммы. Вкладчик вложил в банк Б определенную сумму, а пятью годами ранее он положил в банк А сумму на 50% большую. Через сколько лет после вклада в банк Б оба счета сравняются (деньги со счетов не снимались)?

2. Решить уравнение $\sqrt{x^2\sin x+\cos x}=\sqrt{x^2\cos x+\sin x}$.
3. Решить уравнение $\log_x[(x-1)(x-2)]-\log_{x^2}(x-2)^2=2$.
4. Решить уравнение $f(x)=10$, где $f(x)=\min\{4(x+1)^2,\,(x-1)^2\}$.
5. Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB=6$, $BC=6\sqrt{2}$, $CD=2\sqrt{7}$, $DA=8$ вписан в окружность. Найти длину окружности.

Вариант II

1. Вкладчик открыл счет в банке на некоторую сумму на условии, что счет увеличивается ежегодно на 5% от первоначально вложенной суммы. Через два года он сделал новый вклад на длительный срок на условии, что этот вклад увеличивается ежегодно на 10% от первоначально вложенной суммы. На сколько процентов первый вклад должен был быть больше второго, чтобы через 10 лет после первого по времени вклада оба вклада оказались равными (деньги со счетов не снимались)?
2. Решить уравнение $\sqrt{x\cos 2x+\sin x}=\sqrt{\cos 2x+x\sin x}$.
3. Решить уравнение $\log_{y+1}\dfrac{y}{y-1}+\log_{y^2+2y+1}(y-1)^2=2$.
4. Решить уравнение $f(x)=18$, где $f(x)=\max\{x^2,\,2(x-2)^2\}$.
5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем $AB=10$, $BC=3\sqrt{10}$, $CD=2\sqrt{15}$, $DA=\sqrt{50}$. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

9. Факультет менеджмента

Вариант I

1. Сколько решений в зависимости от k имеет уравнение $3-kx=\sqrt{12-x}$?
2. Решить неравенство $\log_{2-x}2>\log_{x^2}16$.
3. Решить уравнение $(x-2)\sqrt{x^2+2x}=(x+1)\sqrt{x^2-x}$.
4. Решить уравнение $\cos 4x\,\cos 5x=\cos x\,\cos 6x$.
5. Биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D, а биссектриса внешнего угла A пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке E. Известно, что $BC=a$, $AC:AB=1:3$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ADE.

Вариант II

1. Сколько решений в зависимости от k имеет уравнение $kx+4=\sqrt{20+x}$?
2. Решить неравенство $\log_{x^2}81>\log_{x+2}3$.
3. Решить уравнение $(x+2)\sqrt{x^2-2x}=(x-1)\sqrt{x^2+x}$.
4. Решить уравнение $\sin x\,\cos 6x+\sin 5x\,\cos 4x=0$.
5. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, равен R. Прямая, проходящая через вершину A прямого угла, пересекает продолжение стороны CB за точку B в точке P. На стороне BC выбрана точка Q так, что $AQ:AP=3:5$, а $\angle CAQ+\angle CAP=180°$. Найти длину отрезка PQ.

Вечернее и заочное отделения

10. Факультеты: математико-механический и прикладной математики — процессов управления

Вариант I

1. Найти все решения уравнения $\sin x = 4\cos^3 2x$ на промежутке $[0, \pi/2]$.
2. Решить уравнение $|x^4 - x + 2| = 2 + 3x - x^4$.
3. Решить неравенство $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-3) \le 2$.
4. Биссектрисы AL, BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке P, причем $AP/PL = 4$ и $BP/PM = 2$. Найти отношение CP/PN.
5. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $5, 6, 9$, а боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом $60°$. Найти высоту пирамиды.

Вариант II

1. Найти все решения уравнения $\cos x + 4\cos^3 2x = 0$ на промежутке $[0, \pi/2]$.
2. Решить уравнение $|x^4 - 3x^3 + 2| = x^4 - x^3 - 2$.
3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} (x-1) + \log_x (2x-4)^2 \le 2$.
4. Точка C, лежащая вне окружности диаметра 12, соединена с двумя диаметрально противоположными точками A и B этой окружности. Отрезки AC и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP/PA = 4$ и $CQ/QB = 2$. Найти PQ.
5. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, в котором $AB = 3$, $AC = 5$ и угол $BAC = 60°$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом $45°$. Найти высоту пирамиды.

11. Физический факультет

Вариант I

1. Найти все решения уравнения $\sin x = 4\cos^3 2x$ на промежутке $[0, \pi/2]$.
2. Решить уравнение $|x^4 - x + 2| = 2 + 3x - x^4$.
3. Решить уравнение $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-3) = 2$.
4. Решить неравенство $x\sqrt{2 - \dfrac{2}{x}} > -2$.
5. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $5, 6, 9$, а боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом $60°$. Найти высоту пирамиды.

Вариант II

1. Найти все решения уравнения $\cos x + 4\cos^3 2x = 0$ на промежутке $[0, \pi/2]$.
2. Решить уравнение $|x^4 - 3x^3 + 2| = x^4 - x^3 - 2$.
3. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} (x-1) + \log_x (2x-4)^2 = 2$.
4. Решить неравенство $x\sqrt{1 - \dfrac{3}{x}} < -2$.
5. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, в котором $AB = 3$, $AC = 5$ и угол $BAC = 60°$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом $45°$. Найти высоту пирамиды.

12. Факультет географии и геоэкологии

Вариант I

1. Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$.
2. $|x^4 - x + 2| = 2 + 3x - x^4$.
3. Решить неравенство $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-3) \le 2$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{2 - \dfrac{2}{x}} = -2$.
5. Биссектрисы AL, BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке P, причем $AP/PL = 4$ и $BP/PM = 2$. Найти отношение CP/PN.

Вариант II

1. Решить уравнение $\cos x = \sqrt{3}\cos 2x$.
2. Решить уравнение $|x^4 - 3x^3 + 2| = x^4 - x^3 - 2$.
3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} (x-1) + \log_x (2x-4)^2 \le 2$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{1 - \dfrac{3}{x}} = -2$.
5. Точка C, лежащая вне окружности диаметра 12, соединена с двумя диаметрально противоположными точками A и B этой окружности. Отрезки AC и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP/PA = 4$ и $CQ/QB = 2$. Найти PQ.

13. Геологический факультет

Вариант I

1. Решить уравнение $\cos^2 x + \dfrac{3}{4} = 2\cos x$.
2. Решить уравнение $|x^4 - x + 2| = 2 + 3x - x^4$.
3. Решить уравнение $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-3) = 2$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{2 - \dfrac{2}{x}} = -2$.
5. Биссектрисы AL, BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке P, причем $AP/PL = 4$ и $BP/PM = 2$. Найти отношение CP/PN.

Вариант II

1. Решить уравнение $\sin^2 x - 2\sin x = \dfrac{5}{4}$.
2. Решить уравнение $|x^4 - 3x^3 + 2| = x^4 - x^3 - 2$.
3. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} (x-1) + \log_x (2x-4)^2 = 2$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{1 - \dfrac{3}{x}} = -2$.
5. Точка C, лежащая вне окружности диаметра 12, соединена с двумя диаметрально противоположными точками A и B этой окружности. Отрезки AC и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP/PA = 4$ и $CQ/QB = 2$. Найти PQ.

14. Факультеты: биолого-почвенный (специальность: почвоведение), химический

Вариант I

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+2|x|+1}$.
2. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos x = \sin x$.
3. Решить уравнение $3^{|x-2|} = 27$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO=5$, $CO=7$, $AB=6$. Найти BC.

Вариант II

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2+4|x|+4}$.
2. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x = \cos x$.
3. Решить уравнение $2^{|x-3|} = 8$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{5-2x}{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AB=5$, $BC=8$, $CO=7$. Найти AO.

15. Биолого-почвенный факультет (специальности: биология, экология)

Вариант I

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+2|x|+1}$.
2. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos x = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. Решить уравнение $\log_2\left(\dfrac{2}{x}-4\right) = \log_x(1-2x)$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO=5$, $CO=7$, $AB=6$. Найти BC.

Вариант II

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2+4|x|+4}$.
2. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos x$.
3. Решить уравнение $\log_3\left(6-\dfrac{3}{x}\right) = \log_x(2x-1)$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{5-2x}{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AB=5$, $BC=8$, $CO=7$. Найти AO.

16. Экономический факультет (специальности: математические методы в экономике, прикладная информатика)

Вариант I

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+2|x|+1}$.
2. Решить неравенство $\sqrt{3}\cos x > \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. Решить уравнение $\log_2\left(\dfrac{2}{x} - 4\right) = \log_x(1-2x)$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = 5$, $CO = 7$, $AB = 6$. Найти отношение площадей треугольников ABC и AOC.

Вариант II

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2+4|x|+4}$.
2. Решить неравенство $\sqrt{3}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) < 2\cos x$.
3. Решить уравнение $\log_3\left(6 - \dfrac{3}{x}\right) = \log_x(2x-1)$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{5-2x}{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AB = 5$, $BC = 8$, $CO = 7$. Найти отношение площадей треугольников AOB и COB.

17. Факультет менеджмента

Вариант I

1. Первый член конечной геометрической прогрессии равен $\sqrt{3}$, а последний $4\sqrt{3}$. Найти число членов этой прогрессии, если известно, что сумма всех ее членов равна $7\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$.
2. Решить уравнение $x^{\frac{1}{3}} + (10-x)^{\frac{1}{3}} = 2{,}5(10x - x^2)^{\frac{1}{6}}$.
3. Решить уравнение $5^{1+\log_5 \cos x} = 2{,}5$.
4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}, \\ x + y = 1. \end{cases}$
5. В круге радиуса 3 проведена хорда, стягивающая дугу в 252°. Найти длину этой хорды.

Вариант II

1. Первый член конечной геометрической прогрессии равен $\sqrt{6}$, а последний $16\sqrt{6}$. Найти число членов этой прогрессии, если известно, что сумма всех ее членов равна $31\sqrt{6} + 30\sqrt{3}$.
2. Решить уравнение $(3+x)^{\frac{1}{3}} - (3-x)^{\frac{1}{3}} = (9-x^2)^{\frac{1}{6}}$.
3. Решить уравнение $3^{\log_3|\cos x|} = 0{,}5$.
4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x - y = 2. \end{cases}$
5. В круге радиуса 2 проведена хорда, стягивающая дугу в 292°. Найти площадь треугольника AOB.

18. Экономический факультет (специальности: финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит, экономика и управление на предприятии, мировая экономика, менеджмент организации; направление: экономика)

Вариант I

1. Двое вложили в дело 1 300 000 рублей. Если бы первый увеличил свой взнос на 40%, а второй уменьшил свой взнос на 25%, то вложенная сумма не изменилась бы. У кого взнос больше и на сколько процентов?
2. Решить уравнение $2^{3-\lg x} = 64$.
3. Решить неравенство $\dfrac{x}{x^2+7x+12} > \dfrac{x}{x^2+3x+2}$.
4. Построить график функции $y = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{\sin 2x - \operatorname{ctg} x}}$.
5. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 12$, $BC = 5$. Найти площадь четырехугольника ABO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно.

Вариант II

1. Двое сговорились купить товара на 20 000 рублей. Первый должен был заплатить 12 000 рублей, но в наличии у него оказалось на 15% меньше. На сколько процентов должен увеличить свой взнос второй покупатель, чтобы сделка состоялась?
2. Решить уравнение $3^{2+\lg x} = 81$.
3. Решить неравенство $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8} < \dfrac{x}{2x^2-6x+4}$.
4. Построить график функции $y = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg} x - \sin 2x}{\operatorname{ctg} 2x}}$.
5. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 12$, $BC = 9$. Найти площадь четырехугольника ADO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABC соответственно.

Ответы и решения

Дневное отделение

1. Факультеты: математико-механический, прикладной математики — процессов управления

Ответы

Вариант I		Вариант II	
$\boxed{1}$	$\log_4 3 + \log_7 9$	$\boxed{1}$	$\log_3 2 + \log_5 8$
$\boxed{2}$	$-1,\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$	$\boxed{2}$	$1,\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
$\boxed{3}$	$x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$	$\boxed{3}$	$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$
$\boxed{4}$	8	$\boxed{4}$	45
$\boxed{5}$	$R_1 = \dfrac{2b}{5\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2h}{b}\right) + 2\sqrt{3}},\quad R_2 = \dfrac{3R_1}{2}$	$\boxed{5}$	$R_1 = \dfrac{a}{3\operatorname{ctg}\alpha/2 + 2},\quad R_2 = 2R_1$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Приведем оба числа к основанию логарифма, равному 14. Получим числа $\log_{14} 128$ и $\log_{14} 3^{\log_4 14} + \log_{14} 9^{\log_7 14}$. Следовательно, требуется сравнить числа 128 и $3^{\log_4 14 + 2\log_7 14}$. Так как $128 < 3^{4,5} = 81 \cdot \sqrt{3}$, то целесообразно попробовать доказать неравенство $4,5 < \log_4 14 + 2\log_7 14$. Положим $z = \log_7 2 > 0$. Доказываемое неравенство имеет вид $4,5 < \dfrac{1}{2z} + 2,5 + 2z$, или $2 < \dfrac{1}{2z} + 2z$. Последнее неравенство выполняется при всех положительных $z \neq 1/2$. Отсюда получаем ответ.

$\boxed{2}$ Замечая, что при $x = -1$ левая часть уравнения обращается в ноль, разложим многочлен под знаком модуля на множители. После этого получаем уравнение $|x+1||x-2||x-3| = x+1$. Сразу находим первый корень $x_1 = -1$. Далее рассматриваем случаи:

а) $x \geq 3$. Уравнение после сокращения на $x-1$ принимает вид уравнения $(x-2)(x-3) = 1$, корнями которого являются числа $\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Подходит $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

б) $2 \leq x \leq 3$. Здесь получается уравнение $(x-2)(3-x) = 1$, не имеющее корней.

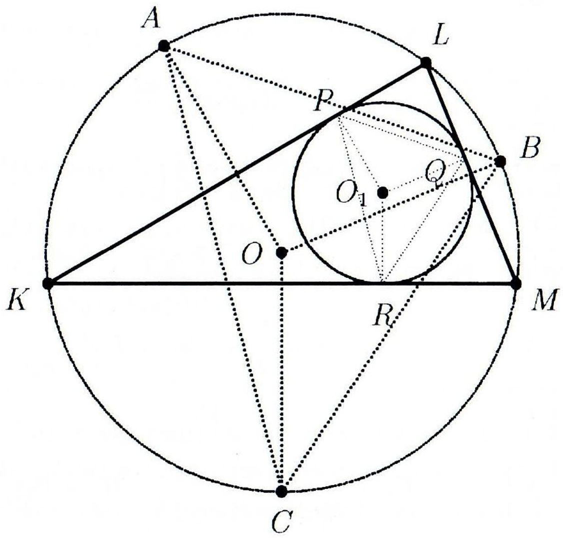
в) $-1 \leq x \leq 2$. Получается то же уравнение, что и в случае а), но подходит корень $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

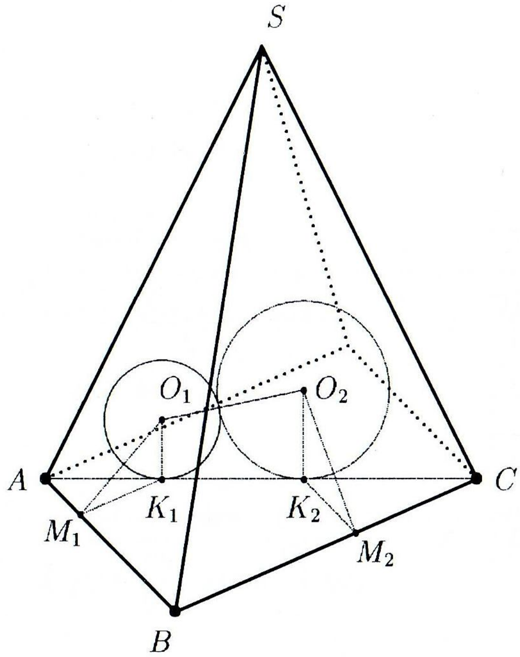
г) $x \leq -1$. Получается то же уравнение, что и в случае б).

$\boxed{3}$ После умножения левой части на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ уравнение оказывается однородным. Деля его обе части на $\cos x \neq 0$ (легко видеть, что $\cos x = 0$ не удовлетворяет уравнению), получим $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x = 7\sqrt{3} - \operatorname{tg}^3 x$.

Положим $\operatorname{tg} x = z$. Уравнение $2z^3 + z - 7\sqrt{3} = 0$ имеет очевидный корень $z_1 = \sqrt{3}$. Разлагая левую часть на множители, получим $(z - \sqrt{3})(2z^2 + 2\sqrt{3}z + 7) = 0$, откуда видно, что других корней нет. Решая уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, получаем ответ.

$\boxed{4}$ Пусть O — центр окружности S (она описана вокруг треугольника KLM и ее радиус равен 5), а O_1 — центр окружности, описанной вокруг треугольника PQR (она вписана в треугольник KLM и ее радиус равен 2. Пусть A — середина дуги KL, B — середина дуги LM, C — середина дуги MK. Прямые OA и O_1P параллельны, т.к. они перпендикулярны прямой KL. Действительно, OA — перпендикуляр через через середину отрезка KL, а O_1P — радиус в точку касания касательной KL. Аналогично, параллельны прямые OB и O_1Q, OC и O_1R. Отсюда вытекает, что треугольники PQR и ABC подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{2}{5}$. Следовательно, периметр треугольника PQR равен $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$.





$\boxed{5}$ Обозначим через S вершину пирамиды, а через $ABCD$ — квадрат в ее основании. Пусть шар меньшего радиуса r_1 касается граней SAB и SAD пирамиды, а шар большего радиуса — граней SCB и SCD. Центры O_1 меньшего шара и O_2 большего шара, а также точки касания K_1 и K_2 ими основания пирамиды лежат в плоскости ASC. Через L_1 и L_2 обозначим точки касания шарами граней SAB и SCB, а через M_1 и M_2 — основания перпендикуляров, опущенных на AB и BC из точек K_1 и K_2 соответственно. При этом O_1M_1 и O_2M_2 также перпендикулярны к AB и BC соответственно, а четырехугольники $O_1K_1M_1L_1$ и $O_2K_2M_2L_2$ лежат в плоскостях, ортогональных AB и BC.

Рассмотрим четырехугольник $O_1K_1M_1L_1$. Так как $O_1L_1 = O_1K_1 = r_1$, то M_1O_1 — биссектриса угла наклона боковой грани пирамиды к ее основанию, равного $\operatorname{arctg}\frac{2h}{b}$ ($= \alpha$ для краткости). Следовательно, $K_1M_1 = O_1K_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Аналогично, рассматривая четырехугольник $O_2K_2M_2L_2$ заключаем, что $K_2M_2 = O_2K_2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{3}{2}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Отсюда, $AK_1 = \sqrt{2}K_1M_1 = \sqrt{2}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $K_2C = \sqrt{2}K_2M_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а $K_1K_2 = \sqrt{2}b - \sqrt{2}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}b - \frac{5}{\sqrt{2}}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Опустим в четырехугольнике $O_1K_1K_2O_2$ из точки O_1 перпендикуляр на сторону O_2K_2. По теореме Пифагора $O_1N^2 = O_1O_2^2 - O_2N^2$, что, поскольку $O_1N = K_1K_2$, приводит к уравнению, определяющему r_1 : $\left(\sqrt{2}b - \frac{5}{\sqrt{2}}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}r_1 + r_1\right) - \left(r_1 + \frac{3}{2}r_1 - r_1\right) = 6r_1^2$. Извлекая корень, находим, что $r_1 = \dfrac{2b}{5\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{3}}$. Отсюда получаем ответ.

2. Физический факультет

О т в е т ы

Вариант I

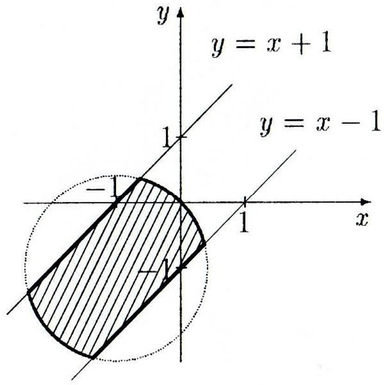
$\boxed{1}$ $\log_4 3 + \log_7 9$

$\boxed{2}$ $-1,\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{3}$ $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$

$\boxed{5}$ $R_1 = \dfrac{2b}{5\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2h}{b}\right) + 2\sqrt{3}}, \qquad R_2 = \dfrac{3R_1}{2}$

$\boxed{4}$



Вариант II

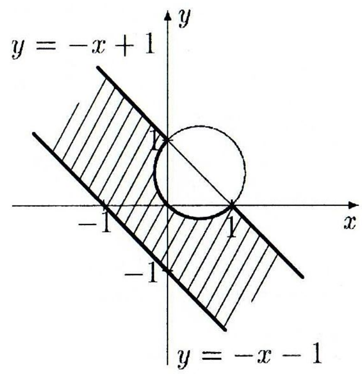
$\boxed{1}$ $\log_3 2 + \log_5 8$

$\boxed{2}$ $1,\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{3}$ $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$\boxed{5}$ $R_1 = \dfrac{a}{3\operatorname{ctg}\alpha/2 + 2}, \qquad R_2 = 2R_1$

$\boxed{4}$



Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ См. решение задачи 1 предыдущего задания.

$\boxed{2}$ См. решение задачи 2 предыдущего задания.

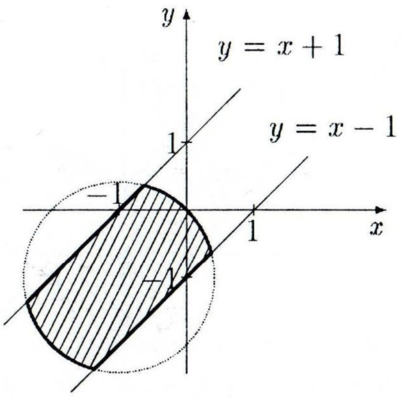
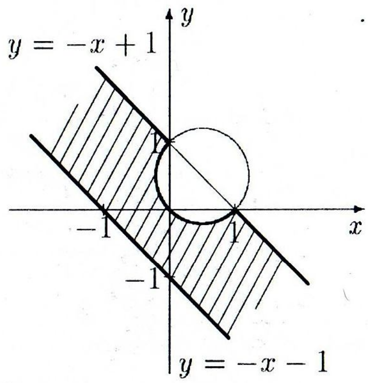
$\boxed{3}$ См. решение задачи 3 предыдущего задания.

$\boxed{4}$ Множество точек, удовлетворяющих первому неравенству — это полоса, ограниченная прямыми $y = x \pm 1$ вместе с этими прямыми. Ширина этой полосы равна $\sqrt{2}$. Второе неравенство перепишем в виде $(x+1)^2 + (y+1)^2 \le 2$. Оно определяет круг с центром в точке $(-1, 1)$ и диаметром, равным $2\sqrt{2}$ вместе с граничной окружностью. Искомое множество — это общая часть полосы и круга.

$\boxed{5}$ См. решение задачи 5 предыдущего задания.

3. Филологический факультет

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1	$\log_4 3 + \log_7 9$	1	$\log_3 2 + \log_5 8$
2	$-1,\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$	2	$1,\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
3	$-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ 2\pi k$ $-\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)+2\pi k,\ k\in Z$	3	$-\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\ \dfrac{7\pi}{12}+\pi k,$ $-\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)+2\pi k,\ k\in Z$
4	8	4	45
5		5	

Решения задач 1-го варианта

1 См. решение задачи 1 задания 1.

2 См. решение задачи 2 задания 1.

3 Так как $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$, то целесообразно разложить на множители и левую часть уравнения. Для этого прибавим и вычтем в левой части величину $\cos x + \sin x$. Имеем $\cos 3x - \sin 3x = (\cos 3x - \cos x) - (\sin 3x + \sin x) + (\cos x + \sin x) = -2\sin x \cos 2x - 2\sin 2x \cos x + \cos x + \sin x = (\cos x + \sin x)(1 - 2\sin x)$.

Уравнение распадается на два:

1) $\cos x + \sin x = 0$,

2) $1 - 2\sin 2x = \cos x - \sin x$.

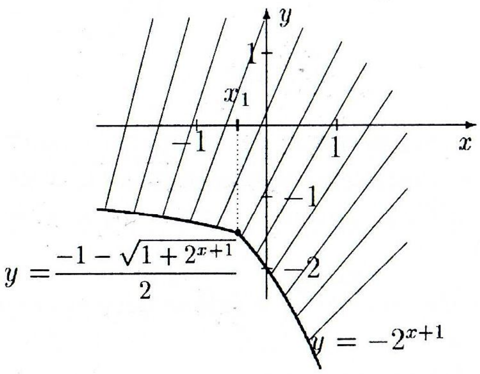
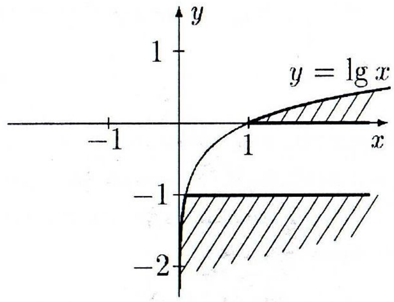
Первое уравнение эквивалентно $\operatorname{tg} x = -1$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. Для решения второго положим $\cos x - \sin x = z$. Уравнение примет вид $1 - 2(z^2 - 1) = z$, откуда $z_1 = 1,\ z_2 = -1/2$. Получаем уравнения $\cos x - \sin x = 1$ и $\cos x - \sin x = -1/2$. Первое имеет решения $x = 2\pi k$ и $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, а второе эквивалентно уравнению $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, откуда $x + \dfrac{\pi}{4} = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$. Собирая все серии, получаем ответ.

4 См. решение задачи 4 задания 1.

5 См. решение задачи 4 предыдущего задания.

4. Факультеты: экономический (специальности: математические методы в экономике, прикладная информатика), биолого-почвенный (специальности: биология, экология)

О т в е т ы

	Вариант I		Вариант II
1	10 дней	1	20 дней
2	$\frac{1}{4} \le a \le \frac{57}{32}$	2	$a < -\frac{57}{32}$, $a > -\frac{1}{4}$
4	$-\frac{1}{2}$, $-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}$	4	$\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}}\right)$
5	3:2, считая от вершины B	5	3:1, считая от вершины B
3		3	

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Используем свойство арифметической прогрессии, заключающееся в том, суммы двух членов прогрессии, равноотстоящих от первого и последнего (в том числе сумма первого и последнего) равны между собой. Из условия задачи вытекает, что за каждые два дня, равноотстоящих от первого и последнего, Том выкрашивал $\frac{27+36}{3}$ м $= 21$ м забора. Следовательно, за $n-6$ дней, начиная с четвертого дня, где n — искомое число дней, Том выкрасил 105 м — 63 м = 42 м. По формуле суммы членов арифметической прогрессии $42 = 21 \cdot \frac{n-6}{2}$, откуда $n = 10$.

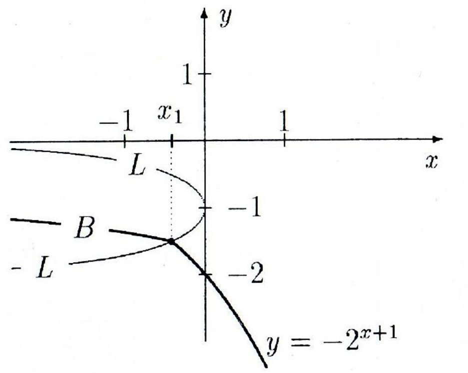
$\boxed{2}$ ОДЗ задается неравенством $\cos 4x - \cos x + a \ge 0$. Кроме того, имеется дополнительное условие $\cos x \ge \frac{1}{2}$, что эквивалентно $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. При выполнении дополнительного условия возведем обе части уравнения в квадрат: $\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = \cos 4x - \cos x + a$. Заметим, что корни этого уравнения автоматически принадлежат ОДЗ. Полученное уравнение эквивалентно следующему: $-2\cos^2 2x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{7}{4} = a$. Так как $2x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \frac{2\pi}{3} + 4k\pi\right]$, то величина $z = \cos 2x$ меняется на промежутке $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Уравнение имеет хотя бы одно решение, если параметр a принадлежит области значений функции $f(z) = -2z^2 + \frac{z}{2} + \frac{7}{4}$, определенной на промежутке $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. График $f(z)$ — парабола. На концах промежутка $f(z)$ равна $\frac{1}{4}$ и 1, а ее единственный экстремум (максимум) достигается при $z = \frac{1}{8}$ и равен $\frac{57}{32}$. Отсюда вытекает ответ.

$\boxed{3}$ Обозначим через L кривую, в точках которой выражение под знаком модуля, обращается в ноль. Она задается уравнениями $y = -1 \pm \sqrt{1-2^x}$ и лежит в третьем квадранте. Внутри кривой L выражение под знаком модуля отрицательно, а вне нее — положительно. Граница B искомого множества задается уравнением $y^2 - 3 \cdot 2^x = |y^2 + 2y + 2^x|$. Вне кривой L она задается уравнением $y^2 - 3 \cdot 2^x = y^2 + 2y + 2^x$, или $y = -2^{x+1}$. Внутри кривой L она задается уравнением $y^2 - 3 \cdot 2^x = -y^2 - 2y - 2^x$, или $y^2 + y - 2^x = 0$. Решая последнее уравнение относительно y, получаем $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+2^{x+2}}}{2}$, причем знак $+$ следует отбросить, т.к. в этом случае $y > 0$, а мы находимся внутри L, следовательно, в третьем квадранте.

Т.о., кривая B задается следующим образом:

$$y = \begin{cases} -2^{x+1} & \text{при } x \geq x_1, \\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+2^{x+2}}}{2} & \text{при } x \leq x_1, \end{cases}$$

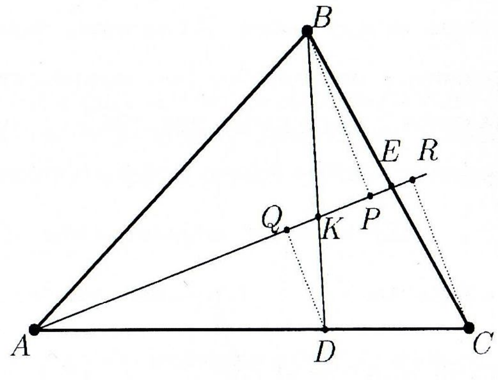
где x_1 удовлетворяет уравнению $-2^{x+1} = -1 - \sqrt{1-2^x}$.
Действительно, это уравнение имеет единственный корень x_1, причем $2^{x_1} = \dfrac{3}{4}$, а уравнение $-2^{x+1} = -1 + \sqrt{1-2^x}$ вообще не имеет решений. Имеем: $x_1 = \log_2 3$, $y_1 = -\dfrac{3}{2}$.



Непосредственно убеждаемся, что начало координат удовлетворяет неравенству задачи и лежит выше кривой B, а точка $(0, -3)$ не удовлетворяет неравенству задачи и лежит ниже кривой B. Т.о., искомой областью является та часть плоскости Oxy, которая лежит выше кривой B и включает саму кривую.

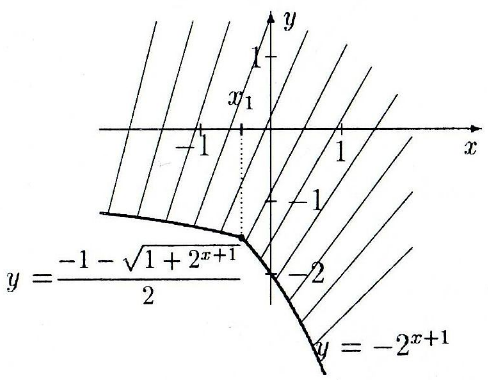
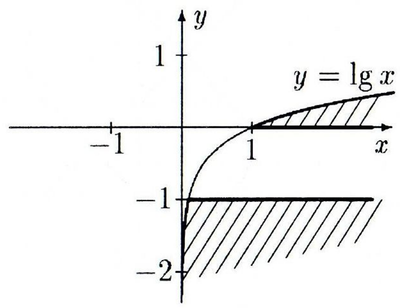
$\boxed{4}$ Положим $4x + 1 = y$. Тогда $x + 1 = \dfrac{y+3}{4}$, $1 - 2x = \dfrac{3-y}{2}$. Уравнение принимает вид $y\sqrt{\dfrac{9-y^2}{8}} = -1$. Отсюда видно, что $|y| \leq 9$, $y < 0$. После возведения в квадрат получается биквадратное уравнение $-y^4 + 9y^2 + 8 = 0$. Полагая $z = y^2$, находим $z_1 = 8$, $z_2 = 1$. Следовательно, $y_1 = -\sqrt{8}$, $y_2 = -1$. Отсюда получаем ответ.

$\boxed{5}$ Пусть S_1 — площадь треугольника ABD, а S_2 — площадь треугольника DBC. Вычисляя эти площади двумя способами, составим их отношение: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2S_1}{2S_2} = \dfrac{h \cdot AD}{h \cdot DC} = \dfrac{\sin 45° \cdot \sqrt{50} \cdot BD}{\sin 30° \cdot 5 \cdot BD}$, где h — высота треугольника ABC.
Отсюда вытекает, что $AD : DC = 2 : 1$. Опустим на медиану AE (и ее продолжение) перпендикуляры BP, DQ, CR. Треугольники BPE и ECR равны по стороне ($BE = EC$) и двум углам. Следовательно, $BP = CR$. Из подобия треугольников AQD и ARC находим $DQ : RC = AD : AC = 2 : 3$, а из подобия треугольников BPK и KDQ находим $BK : KD = BP : QD = CR : QD = 3 : 2$.



5. Факультеты: химический, биолого-почвенный (специальность: почвоведение)

О т в е т ы

	Вариант I		Вариант II
$\boxed{1}$	10 дней	$\boxed{1}$	20 дней
$\boxed{2}$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,$ $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$	$\boxed{2}$	$\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,$ $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi k,\ k \in Z$
$\boxed{4}$	$-\frac{1}{2},\ -\frac{2\sqrt{2}+1}{4}$	$\boxed{4}$	$\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}}\right)$
$\boxed{5}$	$AD = \frac{2}{3}\sqrt{4-\sqrt{3}},\ CD = \frac{1}{3}\sqrt{4-\sqrt{3}}$	$\boxed{5}$	$AD = \frac{2}{3}\sqrt{204-24\sqrt{3}},\ CD = \frac{1}{3}\sqrt{204-24\sqrt{3}}$
$\boxed{3}$		$\boxed{3}$	

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ См. решение задачи 1 предыдущего задания.

$\boxed{2}$ ОДЗ определяется неравенством $\cos 4x - \cos x + 1 \geq 0$. Кроме того, имеется дополнительное условие $\cos x \geq \frac{1}{2}$. При выполнении дополнительного условия возведем обе части уравнения в квадрат. Используя формулы тригонометрии, придем к уравнению $\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1}{4} = 2\cos^2 2x$. Положим $\cos 2x = z$. Решая уравнение $-2z^2 + \frac{z}{2} + \frac{3}{4} = 0$, находим $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{3}{4}$. Из уравнений $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $\cos 2x = \frac{3}{4}$ с учетом дополнительного условия получаем ответ.

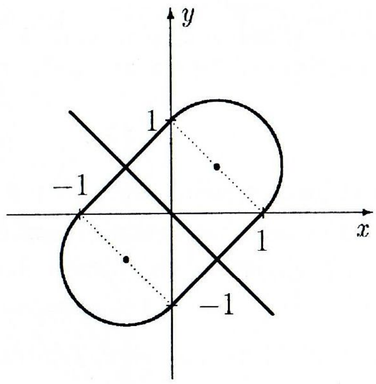
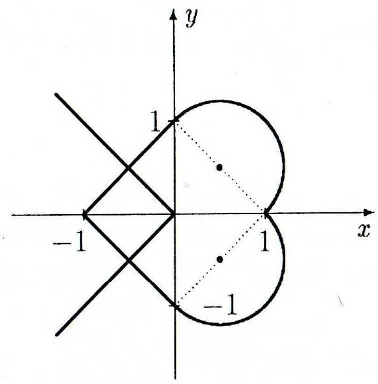
$\boxed{3}$ См. решение задачи 3 предыдущего задания.

$\boxed{4}$ См. решение задачи 4 предыдущего задания.

$\boxed{5}$ Раасуждая как при решении задачи 5 предыдущего задания, докажем, что $AD : DC = 2 : 1$. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(45° + 30°) = 2 + 1 - 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right) = 4 - \sqrt{3}$. Учитывая вышесказанное, получаем ответ.

6. Факультет географии и геоэкологии

Ответы

	Вариант I	Вариант II
1	$a \in [-1-\sqrt{2}; 0] \cup \{1\}$	$a \in [-1-\sqrt{2}; 0] \cup \{1\}$
2	$\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$	$\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$
3	$\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
5	$7\dfrac{1}{5}$	$4\dfrac{4}{5}$
4		

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Помимо условия положительности подкоренного выражения, имеется дополнительное условие $1 - \sin x - \cos x \geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим $2a^2 - 2a(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x = 1 + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x - 2\cos x + \sin x \cos x$, или $a^2 - 1 = (a-1)(\sin x + \cos x)$. При $a = 1$ получается тождество. Следовательно, при $a = 1$ решения существуют.

При $a \neq 1$ получается уравнение $a + 1 = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Это уравнение имеет решение, если $-\sqrt{2} \leq a + 1 \leq \sqrt{2}$. Учитывая дополнительное условие, получаем ответ.

$\boxed{2}$ ОДЗ: $x > 4$, $x \neq 5$. Данное уравнение эквивалентно уравнению $\log_x \dfrac{(x-5)^2}{(x-4)^2} = 2$, которое в ОДЗ эквивалентно уравнению $\dfrac{|x-5|}{x-4} = x$. При $x > 5$ получается уравнение $x - 5 = x^2 - 4x$, которое не имеет корней. При $4 < x < 5$ получается уравнение $5 - x = x^2 - 4x$, имеющее два корня $\dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$, из которых подходит $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.

$\boxed{3}$ ОДЗ: $x \geq 2$. Возведем обе части уравнения в куб. В результате получается уравнение $-(x+1)(x-3) = \sqrt{x-2}(x+1)$. Корень $x = -1$ этого уравнения не входит в ОДЗ. Поделив на $x+1$ и возведя обе части получившегося уравнения в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2 - 7x + 11 = 0$, из двух корней которого проверку выдерживает $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

$\boxed{4}$ В каждом квадранте плоскости Oxy уравнение, определяющее искомое множество, имеет различный вид. Рассмотрим 4 случая.

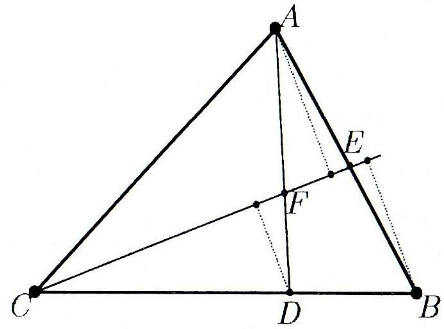
1) В первом квадранте получается уравнение $x^2 + y^2 = x + y$, или $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Это уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Во втором квадранте получаем уравнение $-x^2 + y^2 = x + y$, распадающееся на два уравнения прямых: $x + y = 0,\ y - x = 1$.

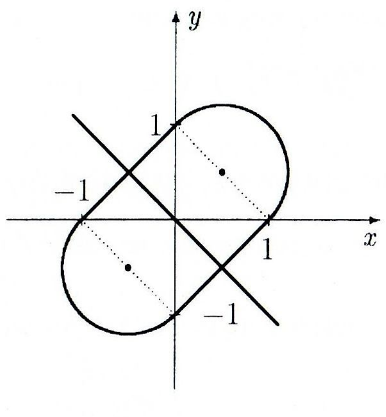
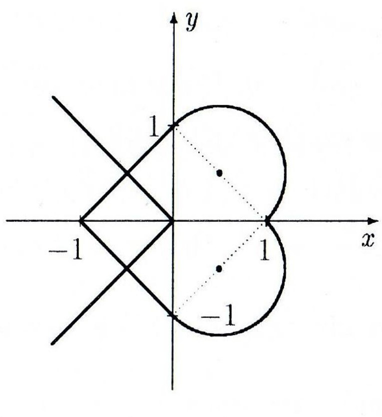
3) Аналогично случаю 1 в третьем квадранте получаем уравнение $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ окружности с центром в точке $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Аналогично случаю 2 в четвертом квадранте получаем уравнения двух прямых: $x + y = 0,\ x - y = 1$. Объединяя эти результаты, получаем ответ.

$\boxed{5}$ По условию задачи площадь треугольника ADC вдвое больше площади треугольника ADB, а площади треугольников AEC и BEC равны 9. Отсюда вытекает, что $CD = 2DB$, а $AE = BE$, так как у этих треугольников попарно равные высоты.
Отсюда $S_{AEF} = S_{BEF}$, $S_{CDF} = 2S_{BDF}$, $S_{ACF} = S_{BDF} + S_{CDF} = 3S_{BDF}$. Следовательно, $5S_{BDF} = 12$ и $S_{ACF} = \frac{36}{5}$.



7. Геологический факультет

	Вариант I		Вариант II
$\boxed{1}$	$-\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$	$\boxed{1}$	$-\frac{3\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$
$\boxed{2}$	$\frac{3 + \sqrt{29}}{2}$	$\boxed{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$
$\boxed{3}$	$\frac{7 - \sqrt{5}}{2}$	$\boxed{3}$	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
$\boxed{5}$	$7\frac{1}{5}$	$\boxed{5}$	$4\frac{4}{5}$
$\boxed{4}$		$\boxed{4}$	

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Уравнение $\sin x + \cos x = -1$ возведем в квадрат. Поскольку $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получим, что $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$. Проверяя точки, входящие в заданный промежуток, получим ответ.

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ См. решение соответствующей задачи предыдущего задания.

8. Факультеты: экономический (специальности: финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит, экономика и управление на предприятии, мировая экономика, менеджмент организации), международных отношений (информатика в гуманитарной сфере)

Ответы

	Вариант I		Вариант II
$\boxed{1}$	Через 7 лет	$\boxed{1}$	На 20%
$\boxed{2}$	$1,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$	$\boxed{2}$	$1,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,\ k \le 0$ $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z,\ k \ge 0$
$\boxed{3}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\boxed{3}$	$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$
$\boxed{4}$	$1+\sqrt{10},\ -1-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\boxed{4}$	$-1,\ \sqrt{18}$
$\boxed{5}$	10π	$\boxed{5}$	$37{,}5\pi$

Решения задач 1-го варианта

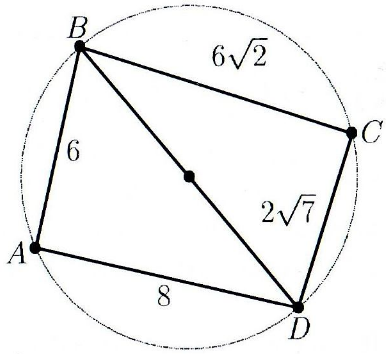
$\boxed{1}$ Пусть b — сумма, вложенная в банк Б. Тогда $1{,}5b$ — сумма, вложенная в банк А. Обозначим через n искомое число лет. Условие задачи записывается в виде уравнения $b(1 + 0{,}2n) = 1{,}5b(1 + 0{,}05(n + 5))$. Сокращая на b и приводя подобные, получаем уравнение $0{,}125n = 0{,}875$. Следовательно, $n = 7$.

$\boxed{2}$ Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $(x^2 - 1)(\sin x - \cos x) = 0$. Это уравнение распадается на два: $x^2 = 1$ и $\sin x = \cos x$, решая которые, находим $x = \pm 1$ и $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. Необходимо проверить, принадлежат ли эти решения ОДЗ. Так как $-\frac{\pi}{2} < -1 < 0$, то $\sin(-1) - \cos(-1) < 0$. Кроме того, при нечетных n выполняются неравенства $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) < 0$ и $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) < 0$. Следовательно, $x = -1$ и $x = \frac{\pi}{4} + \pi(2k+1)$, $k \in Z$ — посторонние корни. Остальные корни в ОДЗ входят.

$\boxed{3}$ ОДЗ: $0 < x < 1$ и $x > 2$. В ОДЗ рассматриваемое уравнение эквивалентно следующему: $\frac{(x-1)(x-2)}{|x-2|} = x^2$. При $x > 2$ получаем $x^2 = x - 1$. Это уравнение не имеет решений. При $0 < x < 1$ получаем $x^2 = 1 - x$. Его корни суть $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, причем знак $-$ следует отбросить.

$\boxed{4}$ Рассмотрим уравнение $4(x+1)^2 = 10$. Его корни суть $x_1 = -1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$ и $x_2 = -1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$. Уравнение $(x-1)^2 = 10$ имеет корни $x_3 = 1+\sqrt{10}$ и $x_4 = 1-\sqrt{10}$. Так как $(x_1-1)^2 = \left(-2 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 <$

10, то x_1 не является корнем уравнения $f(x) = 10$. В то же время $(x_2 - 1)^2 = \left(-2 - \sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2 > 10$. Следовательно, x_2 — корень уравнения $f(x) = 10$. Рассуждая аналогично, заключаем, что x_3 удовлетворяет уравнению $f(x) = 10$, а x_4 — нет.



$\boxed{5}$ Так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle A + \angle C = \pi$. Следовательно, $\cos\angle A = -\cos\angle C$. По теореме косинусов $BD^2 = 100 - 96\cos\angle A = 100 - 24\sqrt{14}\cos\angle C$. Отсюда вытекает, что $\cos\angle A = \cos\angle C = 0$. Следовательно, углы A и C — прямые, а $BD = 10$ — диаметр окружности. Отсюда получаем ответ.

9. Факультет менеджмента

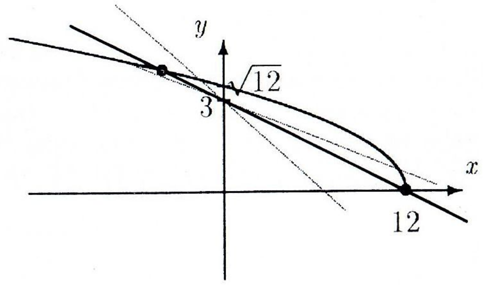
Ответы

	Вариант I		Вариант II
$\boxed{1}$	При $0 < k \le \frac{1}{4}$ — два решения, при остальных k — одно решение	$\boxed{1}$	При $0 < k \le \frac{1}{5}$ — два решения, при остальных k — одно решение
$\boxed{2}$	$(-1, 0) \cup (0, 1)$	$\boxed{2}$	$(-2, -1) \cup (1, \infty)$
$\boxed{3}$	$0,\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\boxed{3}$	$0,\ \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$
$\boxed{4}$	$\dfrac{\pi k}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z$	$\boxed{3}$	$\dfrac{\pi k}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z$
$\boxed{5}$	$\dfrac{3}{8}a$	$\boxed{5}$	$\dfrac{16}{15}R$

Решения задач 1-го варианта

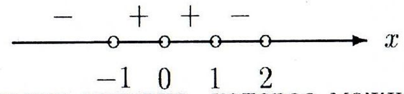
$\boxed{1}$ Решения данного уравнения — это абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 3 - kx$ и $y = \sqrt{12 - x}$. График функции $y = \sqrt{12 - x}$ — это половина параболы $x = 12 - y^2$. Она проходит через точку $(0, \sqrt{12})$.

График функции $y = 3 - kx$ — это прямая, проходящая через точку $(0, 3)$. Так как $\sqrt{12} > 3$, то точек пересечения — либо одна, либо две в зависимости от k, причем переход от одного пересечения к двум происходит, когда прямая $y = 3 - kx$ горизонтальна, т.е. $k = 0$, и когда она проходит через вершину параболы — точку $(12, 0)$. Решая уравнение $3 - 12k = 0$, находим $k = \frac{1}{4}$. Отсюда получаем ответ.



$\boxed{2}$ ОДЗ: $x < 2,\ x \neq \pm 1,\ x \neq 0$. Запишем данное неравенство в виде $\frac{1}{\log_2(2-x)} - \frac{2}{\log_2|x|} > 0$, или $\frac{\log_2|x| - 2\log_2(2-x)}{\log_2(2-x)\log_2|x|} > 0$. Применяя метод интервалов, находим возможные точки перемены знака: $x = \pm 1$, $x = 0$, а также корни уравнения $|x| = (2-x)^2$. Рассмотрим это уравнение. При $x \geq 0$ оно имеет вид $x^2 - 5x + 4$. При $x \leq 0$ получается уравнение $x^2 - 3x + 4$, не имеющее корней.

Вычисляя значение левой части при $x = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2$, получаем картину распределения знаков, что дает ответ.

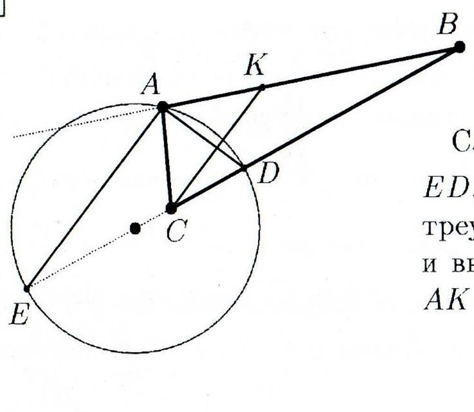


$\boxed{3}$ ОДЗ: $x \leq -2$, $x = 0$ и $x \geq 1$. Имеется также дополнительное условие, которое можно записать в виде $(x-2)(x+1) > 0$. После возведения обеих частей уравнения в квадрат и приведения подобных, получим уравнение $3x(x^2 + x - 3) = 0$. Его корни — 0 и $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Дополнительному условию удовлетворяют лишь $x = 0$ и $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

$\boxed{4}$ Используя формулы $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$, приведем рассматриваемое уравнение к виду $\cos x - \cos 5x = \cos 7x - \cos 9x$, а затем, используя формулы $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, запишем его в виде $2\sin x\cos x\sin 3x = \sin x \sin 8x$. Это уравнение распадается на два: 1) $\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z$. 2) $2\cos x\sin 3x = \sin 8x \Leftrightarrow \sin 4x + \sin 2x = \sin 8x \Leftrightarrow \sin 2x = 2\sin 2x\cos 6x$, распадающееся в свою очередь на 2а) $\sin 2x = 0,\ x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

2б) $2\cos 6x = 1,\ x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.

$\boxed{5}$



Так как $\angle EAD$ равен половине развернутого, то треугольник EAD — прямоугольный с гипотенузой ED. Следовательно, требуемый радиус равен $\frac{ED}{2}$. Чтобы найти ED, проведем прямую CK, параллельную биссектрисе AE. В треугольнике ACK прямая AD — одновременно и биссектриса и высота, следовательно $AC = AK$. Согласно условию задачи $AK : AB = 1 : 3$.

Пусть $EC = x$. Из подобия треугольников ABE и KBC получаем пропорцию $\frac{x+a}{x} = \frac{3}{1}$, откуда $x = EC = \frac{a}{2}$.

Кроме того, поскольку AD — биссектриса, сторона BC делится точкой D в отношении $3 : 1$, считая от точки B. Следовательно, $DC = \frac{a}{4}$. Итак, $ED = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$. Отсюда получаем ответ.

Вечернее и заочное отделения

10. Факультеты: математико-механический, прикладной математики — процессов управления

О т в е т ы

	Вариант I		Вариант II
$\boxed{1}$	$x=\dfrac{\pi}{6}$	$\boxed{1}$	$x=\dfrac{\pi}{3}$
$\boxed{2}$	$0,\ \sqrt[3]{2}$	$\boxed{2}$	2
$\boxed{3}$	$x\in[1+\sqrt{6},5)\cup(5,+\infty)$	$\boxed{3}$	$x\in\left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$
$\boxed{4}$	$CP/PN=8/7$	$\boxed{4}$	$PQ=8\sqrt{\dfrac{6}{5}}$
$\boxed{5}$	$\sqrt{6}$	$\boxed{5}$	$\sqrt{\dfrac{19}{3}}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Так как на промежутке $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ левая часть уравнения монотонно возрастает от 0 до 1, а правая часть — монотонно убывает от 4 до -4, то уравнение имеет одно решение. Легко видеть, что им является $x=\dfrac{\pi}{6}$.

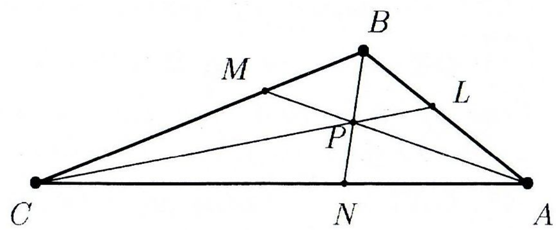
$\boxed{2}$ При любом x функция, стоящая под модулем в левой части уравнения, положительна: если $x<2$, то $-x+2>0$, если $x\geq 2$, то $x^4-x>0$. Поэтому исходное уравнение переписывается в виде $x^4-x+2=2+3x-x^4 \iff 2x^4-4x=0 \iff x_1=0,\ x_2=\sqrt[3]{2}$.

$\boxed{3}$ ОДЗ: $x>3$, $x\neq 5$. При указанных значениях x неравенство принимает вид $\log_{\sqrt{x}}\dfrac{|x-5|}{x-3} \iff |x-5|\leq x(x-3)$.

Если $x\in(3,5)$, то $5-x\leq x(x-3) \iff x^2-2x-5\geq 0 \iff x\in[1+\sqrt{6},5)$.

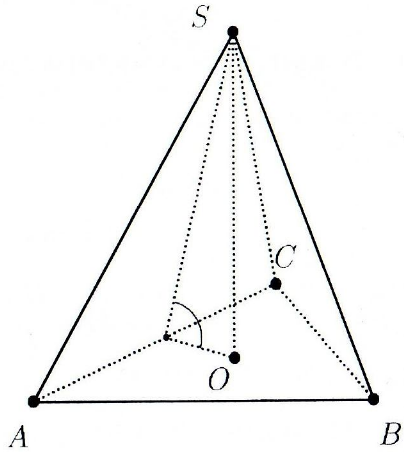
Если $x\in(5,+\infty)$, то $x-5\leq x(x-3) \iff x^2-4x+5\geq 0 \iff x\in(5,+\infty)$.

$\boxed{4}$ Пусть площади треугольников BPL, CPL, CPM и BPN равны x,y,z и u соответственно. Тогда, исходя из условия $AP/PL=4$ и $BP/PM=2$, имеем $S_{BPA}=4x$, $S_{APM}=2x$, $S_{APN}=4x-u$.



Кроме того $2x+z=4y$ и $x+y=2z$. Отсюда, учитывая, что x,y и z — положительны, получаем, что $\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{7}$ и $\dfrac{z}{x}=\dfrac{6}{7}$. Далее имеем $\dfrac{CP}{PN}=\dfrac{x+y}{u}=\dfrac{2x+z}{4x-u}=\dfrac{2z+4y}{4x}=\dfrac{2\cdot6+4\cdot5}{4\cdot7}=\dfrac{8}{7}$.

$\boxed{5}$ Все боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под углом $60°$. Следовательно, высота пирамиды падает в центр окружности, вписанной в основание, и при этом ее радиус r и высота h связаны равенством $h = r\operatorname{tg}60° = r\sqrt{3}$. Согласно условию, полупериметр основания $p = \dfrac{5+6+9}{2} = 10$. Следовательно, площадь основания $S = 10r$. Но по формуле Герона $S = \sqrt{10(10-5)(10-6)(10-9)} = 10\sqrt{2}$. Следовательно, $r = \sqrt{2}$ и $h = \sqrt{6}$.



11. Физический факультет

Ответы

	Вариант I		Вариант II
$\boxed{1}$	$x = \dfrac{\pi}{6}$	$\boxed{1}$	$x = \dfrac{\pi}{3}$
$\boxed{2}$	$0,\ \sqrt[3]{2}$	$\boxed{2}$	2
$\boxed{3}$	$1+\sqrt{6}$	$\boxed{3}$	$\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$
$\boxed{4}$	$x \in (-1,0)\cup[1,+\infty)$	$\boxed{4}$	$x \in (-\infty,-1)$
$\boxed{5}$	$\sqrt{6}$	$\boxed{5}$	$\sqrt{\dfrac{19}{3}}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1,2}$ См. задачи 1,2 предыдущего задания.

$\boxed{3}$ ОДЗ: $x > 3$, $x \neq 5$. В ОДЗ исходное уравнение эквивалентно уравнению $|x-5| = x(x-3)$. Если $x \in (3,5)$, то $5 - x = x(x-3) \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1+\sqrt{6}$.

Если $x \in (5,+\infty)$, то $x - 5 = x(x-3) \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 5 = 0$. Решений нет.

$\boxed{4}$ ОДЗ: $2 - \dfrac{2}{x} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty,0)\cup[1,+\infty)$. При $x \in [1,+\infty)$ исходное неравенство выполняется.

Пусть $x \in (-\infty,0)$. Тогда $x^2\left(2-\dfrac{2}{x}\right) < 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 < 0$ $(x_1 = -1,\ x_2 = 2)$ $\Leftrightarrow\; x \in (-1,0)$.

$\boxed{5}$ См. задачу 5 предыдущего задания.

12. Факультет географии и геоэкологии

Ответы

Вариант I		Вариант II	
1	$x_1 = (-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt3} + \pi n,$ $x_2 = (-1)^n\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$	1	$x_1 = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt3}\right) + 2\pi n,$ $x_2 = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$
2	$0,\ \sqrt[3]{2}$	2	2
3	$x \in [1+\sqrt6, 5)\cup(5,+\infty)$	3	$x \in \left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2\right)\cup(2,+\infty)$
4	-1	4	-1
5	$CP/PN = 8/7$	5	$PQ = 8\sqrt{\dfrac{6}{5}}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ $\sin x + \sqrt3\cos 2x = 0 \ \Leftrightarrow\ \sin x + \sqrt3(1-2\sin^2 x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2\sqrt3\sin^2 x - \sin x - \sqrt3 = 0 \ \Leftrightarrow\ \sin x = \dfrac{1\mp5}{4\sqrt3}$.

$\boxed{2,3}$ См. задачи 2,3 задания математико-механического факультета.

$\boxed{3}$ При $x \ge 0$ решений нет. Пусть $x < 0$. Тогда $x^2\left(2-\dfrac{2}{x}\right) = 4 \ \Leftrightarrow\ x^2 - x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = -1$.

$\boxed{5}$ См. задачу 4 задания математико-механического факультета.

13. Геологический факультет

Ответы

Вариант I		Вариант II	
1	$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$	1	$x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$
2	$0,\ \sqrt[3]{2}$	2	2
3	$1+\sqrt6$	3	$\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$
4	-1	4	-1
5	$CP/PN = 8/7$	5	$PQ = 8\sqrt{\dfrac{6}{5}}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ $\cos^2 x + \dfrac{3}{4} = 2\cos x \ \Leftrightarrow\ \cos^2 x - 2\cos x + \dfrac{3}{4} = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos x = \cos x = 1 \mp \sqrt{1-\dfrac{3}{4}} = 1 - \dfrac{1}{2}.$

$\boxed{2}$ См. задачу 2 задания математико-механического факультета.

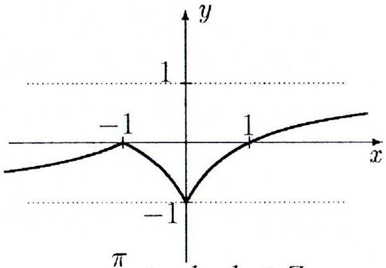
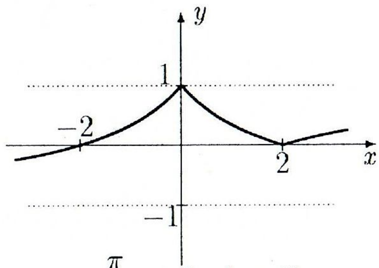
$\boxed{3}$ См. задачу 3 задания физического факультета.

$\boxed{4}$ См. задачу 4 задания факультета географии и геоэкологии.

$\boxed{5}$ См. задачу 4 задания математико-механического факультета.

14. Факультеты: биолого-почвенный (почвоведение), химический

Ответы

	Вариант I		Вариант II
$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	
$\boxed{2}$	$\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$	$\boxed{2}$	$\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$
$\boxed{3}$	$-1;\ 5$	$\boxed{3}$	$0;\ 6$
$\boxed{4}$	-4	$\boxed{4}$	$1/2$
$\boxed{5}$	$\sqrt{60}$	$\boxed{5}$	$\sqrt{10}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+2|x|+1}=\dfrac{(x-1)|x+1|}{(|x|+1)^2}\ \Rightarrow$ область задания: $x\in R$.

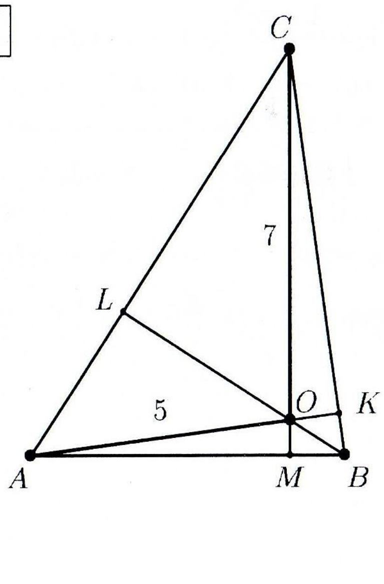
При $x\geq 0\quad y=\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}\equiv g(x)$. При $-1\leq x\leq 0\quad y=1-\dfrac{2}{1-x}=g(-x)$. При $x\leq -1\quad y=-1+\dfrac{2}{1-x}=-g(-x)$.

$\boxed{2}$ $\sqrt{3}\cos x=\sin x\ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg}x=\sqrt{3}\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z.$

$\boxed{3}$ $3^{|x-2|}=27\ \Leftrightarrow\ 3\ \Leftrightarrow\ x-2=\pm 3.$

$\boxed{4}$ $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{-x}}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{4}{-x}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x<0 \\ 2x^2+7x-4=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{-7-\sqrt{49+32}}{4}=$
$x=\dfrac{-7-9}{4}=-4.$

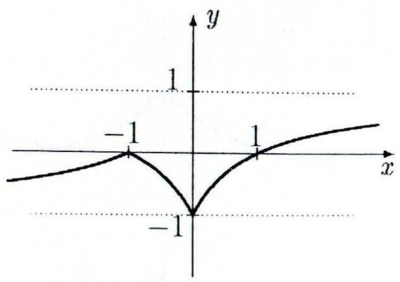
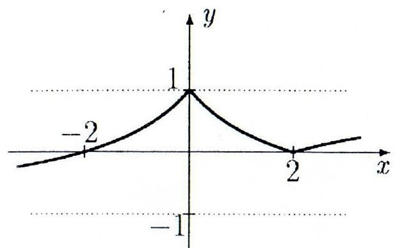
$\boxed{5}$



Пусть K и M — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и C соответственно. Обозначим через x синус угла BAK. Учитывая, что $\angle BAK=\angle BCM$, имеем $OK=7x$, $OM=5x$, $BK=6x$, $BM=BC\cdot x$. Используя теорему Пифагора, получаем $BM^2+OM^2=OK^2+BK^2$. Следовательно, $BC^2+25=49+36\ \Leftrightarrow\ BC=\sqrt{60}$.

15. Биолого-почвенный факультет

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1		1	
2	$\operatorname{arctg} 3\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z$	2	$\operatorname{arctg} \dfrac{4+\sqrt{3}}{3} + \pi k,\ k \in Z$
3	$1/3$	3	3
4	-4	4	$1/2$
5	$\sqrt{60}$	5	$\sqrt{10}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ См. задачу 1 предыдущего задания.

$\boxed{2}$ $\sqrt{3}\cos x = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos x = \sin x - \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 3\sqrt{3}.$

$\boxed{3}$ ОДЗ: $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. $\log_2\left(\dfrac{2}{x} - 4\right) = \log_x(1-2x) = \Leftrightarrow 1 + \log_2(1-2x) - \log_2 x = \dfrac{\log_2(1-2x)}{\log_2 x} \Leftrightarrow$
$(1 - \log_2 x)\left(1 - \dfrac{\log_2(1-2x)}{\log_2 x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2(1-2x) = \log_2 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \notin \text{ОДЗ}, \\ x = 1/3 \in \text{ОДЗ}. \end{array}\right.$

$\boxed{4}$ $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{-x}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ \dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{4}{-x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ 2x^2 + 7x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{-7 - \sqrt{49+32}}{4} =$
$x = \dfrac{-7-9}{4} = -4.$

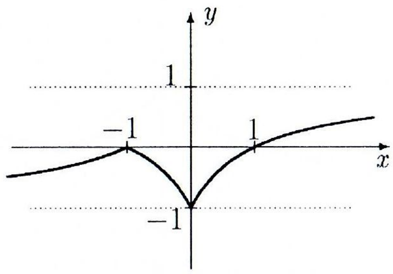
$\boxed{5}$ См. решение задачи 5 предыдущего задания.

16. Экономический факультеты: (математические методы в экономике)

О т в е т ы

Вариант I

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$ $x \in (-\pi + \operatorname{arctg} 3\sqrt{3} + 2\pi k,$

$\operatorname{arctg} 3\sqrt{3} + 2\pi k),\ k \in Z$

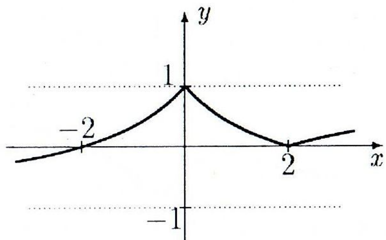
$\boxed{3}$ $1/3$

$\boxed{4}$ -4

$\boxed{5}$ $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOC}} = \dfrac{12\sqrt{15}}{35}$

Вариант II

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$ $x \in \left(-\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{4+\sqrt{3}}{3} + 2\pi k,\right.$

$\left.\operatorname{arctg}\dfrac{4+\sqrt{3}}{3} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

$\boxed{3}$ 3

$\boxed{4}$ $1/2$

$\boxed{5}$ $\dfrac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \dfrac{5\sqrt{10}}{56}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ См. решение задачи 1 задания 14.

$\boxed{2}$ $\sqrt{3}\cos x > \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos x > \sin x - \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow 3\sqrt{3}\cos x > \sin x \Leftrightarrow -\pi + \operatorname{arctg} 3\sqrt{3} + 2\pi k < x < \operatorname{arctg} 3\sqrt{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

$\boxed{3}$ ОДЗ: $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. $\log_2\left(\dfrac{2}{x} - 4\right) = \log_x(1-2x) = \Leftrightarrow 1 + \log_2(1-2x) - \log_2 x = \dfrac{\log_2(1-2x)}{\log_2 x} \Leftrightarrow$
$(1 - \log_2 x)\left(1 - \dfrac{\log_2(1-2x)}{\log_2 x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2(1-2x) = \log_2 x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2 \notin \text{ОДЗ},\\ x = 1/3 \in \text{ОДЗ}.\end{array}\right.$

$\boxed{4}$ $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{-x}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x < 0\\ \dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{4}{-x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x < 0\\ 2x^2 + 7x - 4 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{-7 - \sqrt{49+32}}{4} =$
$x = \dfrac{-7-9}{4} = -4.$

$\boxed{5}$ Пусть K, L и M — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B и C соответственно. Имеем тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AOC}} = \frac{BL}{OL} = 1 + \frac{OB}{OL}.$$

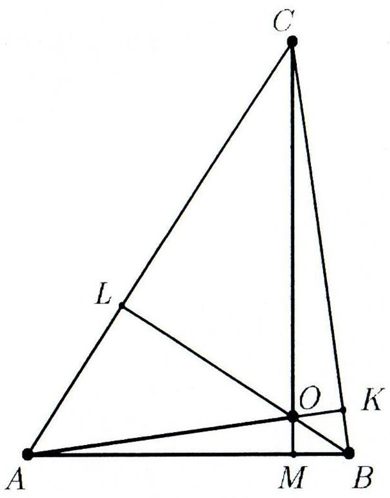
Из подобия треугольников OCL и OBM получаем $\dfrac{7}{OL} = \dfrac{OB}{OM}$. Следовательно, $\dfrac{OB}{OL} = \dfrac{OB}{7 \cdot OM}$.

Обозначим через x синус угла BAK. Учитывая, что $\angle BAK = \angle BCM$, имеем $OK = 7x$, $OM = 5x$, $BK = 6x$. По теореме Пифагора $OB^2 = OK^2 + BK^2 = 85x^2$. Таким образом, $\dfrac{OB}{OL} = \dfrac{85x^2}{7 \cdot 5x} = \dfrac{17}{7}x$.

Для нахождения x используем теорему Пифагора для треугольника ABK. Учитывая, что $AK = AO + OK = 5 + 7x$, имеем $(5+7x)^2 + 36x^2 = 36 \Leftrightarrow 85x^2 + 2\cdot 35x - 11$.

Так как $x > 0$, получаем $x = \dfrac{-35+\sqrt{35^2+11\cdot 85}}{85} = -\dfrac{7}{17} + \dfrac{6\sqrt{60}}{5\cdot 17}$.

Окончательно имеем $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOC}} = 1 + \dfrac{17}{7}x = \dfrac{6\sqrt{60}}{35}$.



17. Факультет менеджмента

Ответы

Вариант I: $\boxed{1}$ 5 $\boxed{2}$ $\dfrac{2}{13}$, $\dfrac{128}{13}$; $\boxed{3}$ $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; $\boxed{4}$ $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$; $\boxed{5}$ $6\sin 54°$.

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Пусть n — число членов геометрической прогрессии и q — ее знаменатель. Согласно условию, она имеет вид $\sqrt{3}, q\sqrt{3}, \ldots, q^{n-1}\sqrt{3}$ и при этом $q^{n-1}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = 7\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$. Отсюда следует $1 - q^n = 1 - 4q = (7 + 3\sqrt{2})(1 - q)$. Решая полученное линейное уравнение, имеем $q = \sqrt{2}$. Таким образом, $(\sqrt{2})^{n-1} = 4 \Leftrightarrow n = 5$.

$\boxed{2}$ Положим $u = x^{1/6}$, $v = (10-x)^{1/6}$. Тогда $\begin{cases} u^6 + v^6 = 10, \\ u^2 + v^2 - \dfrac{5}{2}uv = 0. \end{cases}$ Из 2-го уравнения системы получаем, что либо $v = 2u$, либо $v = \dfrac{u}{2}$. Если $v = 2u$, то $v^6 = 64u^6$. Следовательно, $(1+64)x = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{13}$.

Если $v = \dfrac{u}{2}$, то $v^6 = \dfrac{u^6}{64}$. Следовательно, $(1 + \dfrac{1}{64})x = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{128}{3}$.

$\boxed{3}$ ОДЗ: $\cos x > 0$. Так как $1 + \log_5 \cos x = \log_5(5\cos x)$, то, согласно определению логарифма, $5\cos x = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

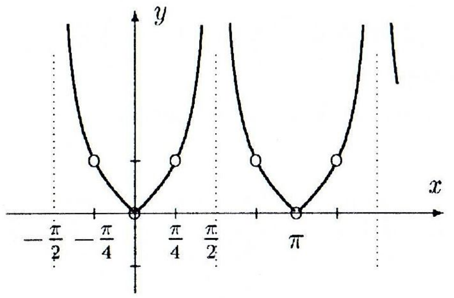
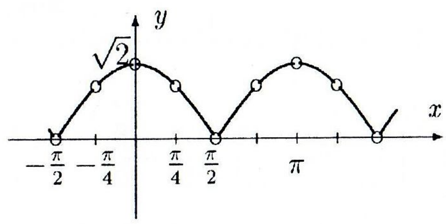
$\boxed{4}$ Вычитая второе уравнение системы из первого, получаем $x^2 + y^2 - x - y = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}$. Проверка подтверждает верность найденного решения.

Замечание: Система легко решается и стандартным методом подстановки.

$\boxed{5}$ Пусть AC — диаметр круга. Тогда $AC = 6$, $\angle ABC = 90°$ и $\angle ACB = \dfrac{1}{2}(360° - 252°) = 54°$. Следовательно, $AB = 6\cdot\sin 54°$.

18. Экономический факультет (специальности: финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит, экономика и управление на предприятии, мировая экономика, менеджмент организации; направление: экономика)

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1	На 60% (у второго)	1	На 22,5%
2	$x = \dfrac{1}{1000}$	2	$x = 100$
3	$x \in (-4,-3) \cup (-5/2,-2) \cup (-1,0)$	3	$x \in (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (2,+\infty)$
4		4	
5	$S_{ABO_1O_2} = 25$	5	$S_{ADO_1O_2} = 36$

Решения задач 1-го варианта

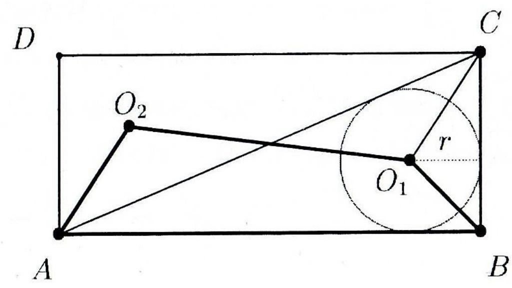
1 Пусть взносы первого и второго вкладчиков равна x и y соответственно. Согласно условию, $1,4x + 0,75y = x + y \Leftrightarrow 0,4x = 0,25y \Leftrightarrow 1,6x = y$. Следовательно, взнос больше у второго вкладчика на 60%. *Замечание:* От размера вложенной суммы ответ не зависит.

2 $2^{3-\lg x} = 64 \Leftrightarrow 3 - \lg x = \log_2 64 \Leftrightarrow \lg x = -3 \Leftrightarrow x = 10^{-3}$.

3 Исходное неравенство преобразуется к виду $\dfrac{x(4x+10)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} < 0$. Применяя метод интервалов, приходим к ответу.

4 Учитывая, что $\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{\sin 2x - \operatorname{ctg} x} = \dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x} - 2\cos x\right)}{\cos x\left(2\sin x - \dfrac{1}{\sin x}\right)} = \operatorname{tg}^2 x\,\dfrac{1 - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x - 1} = \operatorname{tg}^2 x$ (при условии, что $\sin^2 x \neq 1/2$), получаем $y = |\operatorname{tg} x|$, $x \neq \dfrac{k\pi}{4}$, $k \in Z$.

5 В силу симметрии ломаная AO_2O_1C разбивает прямоугольник $ABCD$ на две равные фигуры, площадь каждой из которых равна 30. Следовательно, $S_{ABO_1O_2} = 30 - S_{BCO_1}$. Учитывая, что $S_{BCO_1} = \dfrac{5}{2}r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, остается найти r. Так как $AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, то $r = \dfrac{1}{2}(12 + 5 - 13) = 2$. Окончательно получаем $S_{ABO_1O_2} = 25$.



тираж : специальный место издания: СПб, Первая линия
лицензия: ЛП N 000166 от 14.05.99; ПЛД N 69-369 от 21.05.99; утверждено к печати: 31 декабря 2002