ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.24

А. В. Буре

ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Оценка момента времени появления некоторого события по имеющейся статистической информации вызывает значительный интерес. В медицине, агрофизике, теории надежности, при анализе рисков задачи такого типа возникают довольно часто. При этом в силу конкретных особенностей прикладных задач могут присутствовать разные ограничения на выбор момента времени. Одним из возможных подходов в решении таких задач является использование штрафов и функций потерь. Ранее было проведено рассмотрение такого рода задач для линейных по времени потерь. В данной работе описываются квадратичные потери. Исследованы различные уровни информированности и найдены оптимальные оценки. Для неизвестной функции распределения применен минимаксный подход и получено оптимальное решение. В работе изучаются несобственные распределения. Они часто появляются в прикладных задачах в медицине, теории надежности, анализе рисков. Библиогр. 6 назв.

Ключевые слова: функция потерь, оптимальные решения, конечные смеси распределений, несобственные вероятностные распределения.

A. V. Bure

THE PROBLEM OF ESTIMATION OF THE MOMENT OF TIME OF THE EVENT OCCURRENCE FOR QUADRATIC LOSS FUNCTION

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

Evaluation of the time moment of the appearance of some events on the available statistical information is of considerable interest. In medicine, agricultural physics, reliability theory, risk analysis problems of this type arise often. The various restrictions on the choice of the moment time can be taken by virtue of the specific characteristics of this problem. One of the possible approaches to solving these problems is the use of fines and loss functions. In this paper we considered the quadratic loss. Different levels of awareness are considered and the optimal estimates are found. For unknown distribution function we suggest a minimax approach and the optimal solution is found also. Defective probability distributions are considered in the paper. Defective probability distributions are used in applied problems in medicine, in reliability theory, in risk analysis. Refs 6.

Keywords: loss function, optimal solution, finite mixture distribution, defective probability distribution.

Буре Артем Владимирович — аспирант; bure.artem@gmail.com

Bure Artem Vladimirovich — post-graduate student; bure.artem@gmail.com

 DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.201

Введение. В статье содержится обобщение результатов работ [1–3] на случай квадратичных потерь. При этом, как и в [3], рассматривается несобственное распределение вероятностей моментов времени появления некоторого события, представляющего интерес. Оценка квадратичных потерь позволяет учесть нелинейный характер зависимости суммарных потерь от времени, что довольно часто встречается в прикладных задачах. В [1, 2] решались конкретные прикладные задачи из области агрофизики, однако в действительности сфера применимости полученных результатов охватывает широкий спектр возможных приложений, включая медицину, теорию надежности, оценку рисков. В [4] были изучены похожие задачи, относящиеся к медицинским приложениям, для условных распределений. Близкие по постановке задачи описывались в [5]. Несобственные распределения часто встречаются в прикладных задачах теории надежности, теории оценки рисков, в медицинских приложениях при анализе данных типа времени жизни, поэтому обобщение результатов, полученных в [1, 2], на несобственные распределения является актуальной задачей.

Постановка задачи. Пусть τ — случайный момент времени наступления некоторого события, далее будем предполагать, в отличие от [1, 2], что функция распределения $F(t) = P\{\tau < t\}$ может быть несобственной [6], т. е.

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = P\{\tau < \infty\} = q \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что вероятность не наступления события равна $1-q$. Как это обычно принято, отсутствие события будем обозначать $\{\tau = \infty\}$, следовательно, $P\{\tau = \infty\} = 1 - q$. Будем предполагать, что функция распределения $F(t)$ непрерывна и строго монотонна на (α, β), где $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$, $F(\alpha) = 0$, $F(\beta) = q$.

Функцию $F(t)$ можно построить по имеющимся наблюдениям, полученным в ранее проведенных статистических исследованиях. Следуя [1, 2], будем считать, что известны штрафы в единицу времени, связанные с ошибкой в оценке момента времени τ. Выбираем момент времени $t_{0_1} \in [t_0, t_1]$ как оценку момента времени τ, при этом промежуток времени $[t_0, t_1]$ считается заданным заранее, исходя из содержательной постановки задачи. Пусть c — штраф в единицу времени при наступлении события $t_{0_1} < \tau$, l — штраф в единицу времени при наступлении события $\tau < t_{0_1}$.

Функция потерь. При определении функции потерь $\widetilde{Q}(\tau, t_{0_1}, t_0, t_1, F)$ заметим, что возможны следующие варианты наступления момента времени τ: $\{\tau \leqslant t_0\}$, $\{t_0 < \tau \leqslant t_{0_1}\}$, $\{t_{0_1} < \tau \leqslant t_1\}$, $\{t_1 < \tau < \infty\}$, $\{\tau = \infty\}$. Следуя работе [3], будем предполагать, что, если событие не происходит, т. е. $\{\tau = \infty\}$, то потери отсутствуют при любом выборе t_{0_1}. Также примем во внимание, что по условию задачи $t_{0_1} \in [t_0, t_1]$. В статьях [1, 2] исследовалась линейная функция потерь от времени. В данной работе примем, что потери носят квадратичный характер, а это представляется более правильным, исходя из содержательных постановок задач. Поэтому определим функцию потерь равенством

$$\widetilde{Q}(\tau, t_{0_1}, t_0, t_1, F) = l(t_{0_1} - t_0)^2 I\{\tau \leqslant t_0\} + l(t_{0_1} - \tau)^2 I\{t_0 < \tau \leqslant t_{0_1}\} +$$

$$+ c(\tau - t_{0_1})^2 I\{t_{0_1} < \tau \leqslant t_1\} + c(t_1 - t_{0_1})^2 I\{t_1 < \tau < \infty\},$$

где $I\{.\}$ — индикатор события, содержащегося в скобках.

Учитывая, что потери $\widetilde{Q}(\tau, t_{0_1}, t_0, t_1, F)$ зависят от случайной величины τ, целесообразно перейти к математическому ожиданию, используя распределение случайной величины τ. Ожидаемые потери имеют следующий вид:

$$Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = E\widetilde{Q}(\tau, t_{0_1}, t_0, t_1, F) = l(t_{0_1} - t_0)^2 \int\limits_{-\infty}^{t_0} dF(t) +$$

$$+ l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} (t_{0_1} - t)^2 dF(t) + c(t_1 - t_{0_1})^2 \int\limits_{t_1}^{\infty} dF(t) +$$

$$+ c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (t - t_{0_1})^2 dF(t) = l(t_{0_1} - t_0)^2 F(t_0) + c(t_1 - t_{0_1})^2 (q - F(t_1)) +$$

$$+ l(t_{0_1} - t)^2 F(t)|_{t_0}^{t_{0_1}} + 2l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} (t_{0_1} - t) F(t) dt + c(t - t_{0_1})^2 F(t)|_{t_{0_1}}^{t_1} -$$

$$- 2c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (t - t_{0_1}) F(t) dt =$$

$$= cq(t_1 - t_{0_1})^2 + 2l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} (t_{0_1} - t) F(t) dt - 2c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (t - t_{0_1}) F(t) dt =$$

$$= 2c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (t - t_{0_1})(q - F(t)) dt + 2l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} (t_{0_1} - t) F(t) dt.$$

Оптимальное оценивание. Момент времени наступления события t_{0_1} оценим как решение задачи минимизации потерь

$$t_{0_1}^* = \arg \min_{t_{0_1} \in [t_0, t_1]} Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F). \tag{1}$$

Теорема 1. *Предположим, что $E\tau \in R$ и существуют такие α и β, что $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$, $F(\alpha) = 0$, $F(\beta) = q$, функция $F(t)$ строго монотонна и непрерывна на (α, β), тогда решение задачи* (1) *является единственным решением уравнения*

$$-c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (q - F(t)) dt + l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} F(t) dt = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ранее было найдено следующее представление ожидаемых потерь:

$$Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = 2c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (t - t_{0_1})(q - F(t)) dt + 2l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} (t_{0_1} - t) F(t) dt. \tag{2}$$

Ожидаемые потери $Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F)$ в (2) будем рассматривать как функцию аргумента $t_{0_1} \in [t_0, t_1]$. Границы промежутка t_0, t_1 зафиксированы. Продифференцируем $Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F)$ по t_{0_1}, тогда производная имеет вид

$$Q^{(1)}(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = -2c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (q - F(t))dt + 2l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} F(t)dt.$$

Вычислим вторую производную функции $Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F)$ по t_{0_1}

$$Q^{(2)}(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = 2c(q - F(t_{0_1})) + 2lF(t) > 0.$$

Нетрудно видеть, что функция $Q^{(1)}(t_{0_1}, t_0, t_1, F)$, как функция t_{0_1}, возрастает на промежутке $[t_0, t_1]$, при этом она меняет знак с минуса на плюс (на левом конце промежутка функция отрицательна, на правом — положительна).

З а м е ч а н и е 1. Доказанная теорема 1 существенно отличается от соответствующего результата в [3], что вызвано нелинейным видом рассматриваемой функции потерь.

Минимаксный подход. Предположим теперь, что функция $F(t)$ полностью неизвестна, подобная ситуация соответствует самому низкому уровню информированности. В этом случае целесообразно рассмотреть минимаксную постановку задачи:

$$t_{0_1}^{**} = \arg \inf_{t_{0_1} \in [t_0, t_1]} \sup_{F \in \Sigma} Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F), \tag{3}$$

где Σ — множество всех функций распределения, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = q \leqslant 1$.

Теорема 2. *Решение задачи* (3) *имеет вид*

$$t_{0_1}^{**} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{l}} t_1 + \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{c} + \sqrt{l}} t_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\widetilde{Q}(\tau, t_{0_1}, t_0, t_1, F) = l(t_{0_1} - t_0)^2 I\{\tau \leqslant t_0\} + l(t_{0_1} - \tau)^2 I\{t_0 < \tau \leqslant t_{0_1}\} +$$
$$+ c(\tau - t_{0_1})^2 I\{t_{0_1} < \tau \leqslant t_1\} + c(t_1 - t_{0_1})^2 I\{t_1 < \tau \leqslant \infty\} \leqslant l(t_{0_1} - t_0)^2 I\{\tau \leqslant t_{0_1}\} +$$
$$+ c(t_1 - t_{0_1})^2 I\{t_{0_1} < \tau < \infty\}.$$

С одной стороны,

$$Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = E\widetilde{Q}(\tau, t_{0_1}, t_0, t_1, F) \leqslant l(t_{0_1} - t_0)^2 F(t_{0_1}) +$$
$$+ c(t_1 - t_{0_1})^2 (q - F(t_{0_1})) \leqslant q \max\{l(t_{0_1} - t_0)^2, c(t_1 - t_{0_1})^2\}.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от F, потому

$$\sup_{F \in \Sigma} Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) \leqslant q \max\{l(t_{0_1} - t_0)^2, c(t_1 - t_{0_1})^2\}.$$

С другой стороны, как было показано ранее,

$$Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = 2c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (t - t_{0_1})(q - F(t))dt + 2l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} (t_{0_1} - t)F(t)dt.$$

Выберем в качестве несобственной функции распределения $F(t)$ такую, для которой $F(t_0) = q$ и, следовательно, $F(t) = q$ при любом $t > t_0$. Но тогда для этой функции распределения

$$Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = lq(t_{0_1} - t_0)^2.$$

Если в качестве $F(t)$ выбрать функцию, для которой $F(t_1) = 0$ и, отсюда, $F(t) = 0$ при $t < t_1$, получим

$$Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = cq(t_1 - t_{0_1})^2.$$

Таким образом,

$$\sup_{F\in\Sigma} Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) \geqslant \max\{lq(t_{0_1} - t_0)^2, cq(t_1 - t_0)^2\} =$$

$$= q\max\{l(t_{0_1} - t_0)^2, c(t_1 - t_{0_1})^2\}.$$

Сравнивая два неравенства, приходим к равенству

$$\sup_{F\in\Sigma} Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = q\max\{l(t_{0_1} - t_0)^2, c(t_1 - t_{0_1})^2\}. \tag{4}$$

Слева и справа в нем стоят функции от t_{0_1}, которые совпадают на отрезке $[t_0, t_1]$. Но тогда совпадают и точки, в которых достигается минимум функций на множестве $[t_0, t_1]$.

Поэтому для решения задачи (3) достаточно минимизировать функцию из правой части равенства (4). Очевидно, что минимум достигается в точке пересечения парабол $g_1(t_{0_1}) = c(t_1 - t_{0_1})^2$ и $g_2(t_{0_1}) = l(t_{0_1} - t_0)^2$.

Решая уравнение

$$c(t_1 - t_{0_1})^2 = l(t_{0_1} - t_0)^2$$

относительно t_{0_1}, приходим к решению задачи (3):

$$t_{0_1}^{**} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{l}} t_1 + \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{c} + \sqrt{l}} t_0.$$

З а м е ч а н и е 2. Следовательно, минимаксное решение также изменилось при сравнении с линейными потерями [3].

Конечные смеси распределений. В прикладных исследованиях часто возникают ситуации, когда исходная генеральная совокупность состоит из нескольких относительно однородных совокупностей, причем распределение каждой из них известно. Также известна относительная частота встречаемости объектов для каждой из совокупностей. Формализуем обсуждаемую ситуацию следующим образом. Предположим, что функция распределения $F(t)$ представима в виде конечной смеси непрерывных строго возрастающих на промежутке (α, β) функций распределения $F_1(t), ..., F_m(t)$:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i F_i(t), \tag{5}$$

где весовые множители $p_i \geqslant 0$, $\;i = 1, ..., m$; $\;\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Введенные в (5) функции распределения определяют законы распределения однородных совокупностей, из которых состоит исходная генеральная совокупность, а весовые множители представляют собой вероятности встречаемости объектов из однородных совокупностей в общей выборке.

Предположим, что функции распределения $F_i(t)$ несобственные, $\lim\limits_{t\to+\infty} F_i(t) = q_i \leqslant 1$, тогда очевидно, что

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i = q \leqslant 1,$$

т. е. функция распределения $F(t)$ также является несобственной.

Введем дискретную случайную величину ν с распределением $P\{\nu = i\} = p_i,\ \ i = 1, ..., m$, значение введенной случайной величины определяет номер однородной совокупности.

Числовые реализации случайной величины τ происходят следующим образом. Вначале с вероятностью $p_i,\ \ i = 1, ..., m$, выбирается однородная совокупность с номером i, соответствующая функции распределения $F_i(t)$, а затем из этой совокупности выбирается числовая реализация, подчиняющаяся распределению $F_i(t)$.

Если событие $\{\nu = i\}$ можно безошибочно идентифицировать, то естественно применять теорему 1 не к общей функции распределения $F(t)$ из (5), а к функции распределения однородной совокупности $F_i(t)$. При этом можно предположить, что ожидаемые потери окажутся меньше.

Введем обозначения:

$$t_{0_1}^* = \arg \min_{t_{0_1} \in [t_0, t_1]} Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F),$$

$$t_{0_1 i}^* = \arg \min_{t_{0_1} \in [t_0, t_1]} Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F_i), \ \ i = 1, ..., m,$$

где $F(t)$ — конечная смесь распределений.

Пусть

$$\widetilde{t_{0_1}} = t_{0_1 1}^* I\{\nu = 1\} + ... + t_{0_1 m}^* I\{\nu = m\},$$

здесь $I\{\nu = i\}$ — индикатор события $\{\nu = i\}$.

Таким образом, $t_{0_1}^*$ — оптимальное решение для всей смеси $F(t)$, $t_{0_1 i}^*$ — оптимальное решение для распределения $F_i(t)$, $\widetilde{t_{0_1}}$ — оптимальное решение для смеси, если точно идентифицируются события $\{\nu = i\},\ \ i = 1, ..., m$.

Ранее было выведено соотношение

$$Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = 2c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (t - t_{0_1})(q - F(t))dt + 2l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} (t_{0_1} - t)F(t)dt.$$

Подставим вместо $F(t)$ конечную смесь (5) с учетом $q = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i q_i$. Тогда

$$Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F) = \sum_{i=1}^{m} p_i (2c \int\limits_{t_{0_1}}^{t_1} (t - t_{0_1 i})(q_i - F_i(t))dt +$$

$$+ 2l \int\limits_{t_0}^{t_{0_1}} (t_{0_1 i} - t)F_i(t)dt) = \sum_{i=1}^{m} p_i Q(t_{0_1}, t_0, t_1, F_i).$$

В условиях точной идентифицируемости событий $\{\nu = i\}$ и при использовании решения $\widetilde{t_{0_1}}$ можно выписать ожидаемые потери от выбора решения $\widetilde{t_{0_1}}$:

$$Q(\widetilde{t_{0_1}}, t_0, t_1, F) = \sum_{i=1}^{m} Q(t^*_{0_1 i}, t_0, t_1, F_i) I\{\nu = i\}.$$

Величина $Q(\widetilde{t_{0_1}}, t_0, t_1, F)$ является случайной, так как она зависит от случайной величины ν. Тогда полное математическое ожидание потерь имеет вид

$$EQ(\widetilde{t_{0_1}}, t_0, t_1, F) = \sum_{i=1}^{m} p_i Q(t^*_{0_1 i}, t_0, t_1, F_i).$$

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$EQ(\widetilde{t_{0_1}}, t_0, t_1, F) \leqslant Q(t^*_{0_1}, t_0, t_1, F).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в вышенайденное представление вместо t_{0_1} момент времени $t^*_{0_1}$:

$$Q(t^*_{0_1}, t_0, t_1, F) = \sum_{i=1}^{m} p_i Q(t^*_{0_1}, t_0, t_1, F_i) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} p_i Q(t^*_{0_1 i}, t_0, t_1, F_i) = EQ(\widetilde{t_{0_1}}, t_0, t_1, F).$$

З а м е ч а н и е 3. Как видим, сохраняется результат из [1].

Теорема 3 показывает, что в условиях точной идентифицируемости событий $\{\nu = i\}, \quad i = 1, ..., m$, когда точно известно, из какой именно однородной совокупности извлекается реализация оцениваемой случайной величины, ожидаемые потери при использовании оценки $\widetilde{t_{0_1}}$ оказываются меньше, чем при применении оценки $t^*_{0_1}$. Результат теоремы выглядит очень естественным, действительно, наличие дополнительной априорной информации позволяет получить дополнительный выигрыш.

Заключение. В работе последовательно проведено обобщение результатов работ [1–3] на случай нелинейных потерь квадратичного типа и несобственных распределений. Несобственные распределения характерны для оценки рисков и естественным образом возникают при анализе медицинской информации, например вследствие отсутствия информации о пациентах, переехавших в другой город. Для разного уровня информированности получены теоремы, в которых найдены оптимальные решения.

Литература

1. *Якушев В. П., Буре В. М.* Методологические подходы к оценке оптимального момента времени проведения агротехнологических мероприятий // Докл. Рос. академии сельскохоз. наук. 2001. № 4. С. 27–29.

2. *Якушев В. П., Буре В. М.* Статистическая оценка распределения оптимального момента времени проведения агротехнического мероприятия // Докл. Рос. академии сельскохоз. наук. 2002. № 3. С. 11–13.

3. *Буре А. В.* Оценка момента времени появления события // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 1. С. 23–29.

4. *Буре А. В.* Оценка момента времени кризисного состояния больного по медицинским базам // Труды XLIII междунар. науч. конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. С. 272–276.

5. *Barker K., Haimes Ya. Y.* Assessing uncertainty in extreme events: Applications to risk-based decision making in interdependent infrastructure sectors // Reliability Engineering and System Safety. 2009. Vol. 94, issue 4. P. 830–837.

6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. / пер. с англ. Ю. В. Прохорова; под ред. Б. Б. Дынкина. М.: Мир, 1984. Т. 2. 752 с. (*Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. New York; London; Sydney: John Wiley, Inc., 1957. 738 p.)

References

1. Yakushev V. P., Bure V. M. Metodologicheskie podkhodi k ocenke optimal'nogo momenta vremeni provedeniya agrotekhnologicheskikh meropriyatii [Methodological approaches to the estimation of the optimal moment in time for the conducting of the agrotechnological event]. *Dokl. RASXN* [*Reports of RAAS*], 2001, no. 4, pp. 27–29. (In Russian)

2. Yakushev V. P., Bure V. M. Statisticheskaja ocenka raspredelenija optimal'nogo momenta vremeni provedenija agrotekhnicheskogo meropriyatija [Statistical evaluation of the distribution of the optimum moment in time for the agrotechnical event]. *Dokl. RASXN* [*Reports of RAAS*], 2002, no. 3, pp. 11–13. (In Russian)

3. Bure A. V. Ocenka momenta vremeni pojavlenija sobitija [Evaluation of the time moment for the occurrence of an event]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2014, issue 1, pp. 23–29. (In Russian)

4. Bure A. V. Ocenka momenta vremeni krizisnogo sostoyaniya bol'nogo po medicinskim bazam dannix [Estimation of the crisis time of patient's state using medical database]. *Trudi XLIII mezdynarodnoi naychnoi konferencii aspirantov i studentov* [*Proc. of XLIII Intern. science of conference of post-graduate students and students*]. Saint-Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2012, pp. 272–276. (In Russian)

5. Barker K., Haimes Ya. Y. Assessing uncertainty in extreme events: Applications to risk-based decision making in interdependent infrastructure sectors. *Reliability Engineering and System Safety*, 2009, vol. 94, issue 4, pp. 830–837.

6. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications. In 2 vol.* New York, London, Sydney, John Wiley, Inc., 1957, 738 p. (Russ. ed.: Feller W. *Vvedenie v teoriu veroyatnostei i ee prilozenia: in 2 t.* Moscow, Mir Publ., 1984, vol. 2, 752 p.)

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 31 декабря 2015 г.

Статья принята к печати 25 февраля 2016 г.