

ВЛИЯНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОСИ ВРАЩЕНИЯ ЦИЛИНДРА НА ЕГО ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

А. Н. Рябинин, Н. А. Киселев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Экспериментально изучаются установившиеся вращательные колебания круговых цилиндров в воздушном потоке. Цилиндры закреплены на упругой пружинной подвеске, которая позволяет совершать вращательные колебания вокруг оси, перпендикулярной вектору скорости набегающего потока. Полупроводниковый тензопреобразователь С-50, присоединенный к РС-осциллографу Velleman PCS500A, измеряет зависимость натяжения одной из пружин подвески от времени. Результаты измерения натяжения пружины используются для определения амплитуды установившихся вращательных колебаний цилиндра в потоке. На основе экспериментальных данных, полученных при различных скоростях воздушного потока, определены параметры математической модели, описывающей колебания цилиндра в потоке. Испытания проводились для цилиндров с удлинениями 1,5, 2 и 3 при нескольких положениях оси вращения. Для цилиндра удлинения 2 максимальная амплитуда колебаний наблюдается, когда ось вращения проходит через геометрический центр цилиндра. Амплитуда колебаний цилиндра с удлинением 1,5 превосходит амплитуду колебаний цилиндра с удлинением 2, если расстояние от оси вращения до подветренного торца равно диаметру цилиндра. Но в такой конфигурации колебания не развиваются из состояния покоя. Во всех экспериментах изменялся в пределах нескольких градусов равновесный угол наклона оси цилиндра по отношению к вектору скорости набегающего потока. Математическая модель правильно описывает влияние угла наклона на амплитуду колебаний. Библиогр. 14 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: аэродинамическая труба, плохо обтекаемое тело, нестационарные силы, колебания, математическое моделирование.

Введение. В случаях, когда аэродинамические силы, действующие на тело, зависят лишь от мгновенных углов атаки и скольжения, для описания колебаний упруго закрепленных тел хорошо зарекомендовало себя квазистационарное приближение [1–3]. Однако к вращательным колебаниям плохо обтекаемых тел квазистационарное приближение не применимо, поскольку аэродинамические силы в этом случае зависят не только от мгновенных углов атаки и скольжения, но и от производных этих углов по времени [4, 5]. Квазистационарное приближение не применимо даже для описания вращательных колебаний, когда радиус дуги окружности, по которой происходит движение, в несколько раз превышает размер вращающегося тела [6]. Моделирование вращательных колебаний плохо обтекаемых тел является актуальным в задаче транспортировки грузов, подвешенных под летательным аппаратом [4, 5, 7]. В частности, для кругового цилиндра, длина L которого в два раза больше диаметра D (удлинение $\lambda = L/D = 2$), снабженного хвостовым стабилизатором, одной из основных форм движения в потоке, являются вращательные колебания вокруг вертикальной оси [7].

Математическая модель, описывающая вращательные колебания некоторых тел, изучалась в работах [8–11]. Модель содержит параметры, определяющиеся в эксперименте, поэтому эксперимент является основным методом исследования. В настоящей работе изучались колебания цилиндров вокруг оси, перпендикулярной вектору скорости набегающего потока. В экспериментах изменялось положение оси вращения и

удлинение цилиндра. Упругая подвеска позволяла цилиндрам совершать вращательные колебания.

Математическая модель. Пусть β — угол между осью цилиндра и вектором скорости набегающего потока. В равновесном положении имеем $\beta = \beta_0$. Уравнение движения цилиндра, закрепленного в потоке на упругой подвеске, имеет вид

$$I\ddot{\beta} = L_a + L_s, \quad (1)$$

где β — угол наклона цилиндра, I — момент инерции цилиндра относительно оси вращения, L_a — момент аэродинамических сил, L_s — момент сил, действующих со стороны подвески. Точка над символом обозначает дифференцирование по времени.

Составляющие момента сил представим в виде

$$L_a = \frac{\rho v^2}{2} LS \left(m + \frac{L\dot{\beta}}{v} m^{\dot{\beta}} \right), \quad L_s = -kl^2(\beta - \beta_0) - k_1\dot{\beta}. \quad (2)$$

В формуле (2) ρ — плотность воздуха, v — скорость набегающего потока, S — характерная площадь цилиндра, равная площади основания цилиндра, m — коэффициент аэродинамического момента сил, $m^{\dot{\beta}}$ — коэффициент аэродинамической производной [12], k — жесткость упругой подвески, l — расстояние от оси вращения до места крепления подвески, k_1 — коэффициент, соответствующий вязкому сопротивлению подвески.

Пусть коэффициент момента сил пропорционален β , а коэффициент вращательной производной описывается формулой [5]

$$m = -C_\beta\beta, \quad m^{\dot{\beta}} = C_{\dot{\beta}}(1 - \delta\beta^2). \quad (3)$$

В выражения (3) входят безразмерные параметры C_β , $C_{\dot{\beta}}$ и δ . Последний из них в настоящей работе определяется экспериментально.

После подстановки выражений (3) в уравнение движения (1) получим

$$\ddot{\beta} + \omega^2(\beta - \beta_0) + \Omega\beta = \mu \frac{v}{L} (1 - \delta\beta^2) \dot{\beta} - \mu k_2\dot{\beta},$$

где

$$\omega^2 = \frac{kl^2}{I}, \quad \Omega = \frac{\rho v^2}{2I} LSC_\beta, \quad \mu = \frac{\rho L^3 S}{2I} C_{\dot{\beta}}, \quad k_2 = \frac{k_1}{\mu I}.$$

Принимая, что момент упругих сил подвески намного больше составляющей аэродинамического момента сил, пропорциональной углу β , приходим к уравнению

$$\ddot{\beta} + \omega^2(\beta - \beta_0) = \mu \left[\frac{v}{L} (1 - \delta\beta^2) \dot{\beta} - k_2\dot{\beta} \right]. \quad (4)$$

Полагая μ малым параметром, систему уравнений (4) можно решать методом Крылова—Боголюбова в первом приближении [13].

В результате получим уравнения для медленно меняющихся амплитуды A и фазы φ вращательных колебаний:

$$\dot{A} = \frac{A\mu}{2} \left[\left(\frac{v}{L} - k_2 \right) - \frac{v}{L} \delta\beta_0^2 - \frac{v}{L} A^2 \frac{\delta}{4} \right], \quad \dot{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Приравнивая производную амплитуды нулю в первом из уравнений (5), что соответствует колебаниям с постоянной амплитудой, получаем

$$\left(\frac{A^2}{4} + \beta_0^2\right) = \frac{1}{\delta} - \frac{k_2 L}{\delta v}. \quad (6)$$

Описание эксперимента. Эксперименты проводились в дозвуковой аэродинамической трубе АТ-12 СПбГУ, описание которой содержится в работе [14]. Установка имеет открытую рабочую часть. Диаметр сопла круглого сечения равен 1,5 м. Средние скорости потока в рабочей части плавно регулируются в пределах от 0 до 40 м/с. Начальная степень турбулентности набегающего потока, определенная по критическому числу Рейнольдса шара, равна 0,4%. Макеты цилиндров закреплялись на проволочной подвеске таким образом, что могли вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной вектору средней скорости набегающего потока. К заднему (подветренному) торцу цилиндра прикреплена стальная хвостовая державка. С помощью проволочных тяг к державке прикреплены две стальные пружины. Схема конструкции приведена на рис. 1.

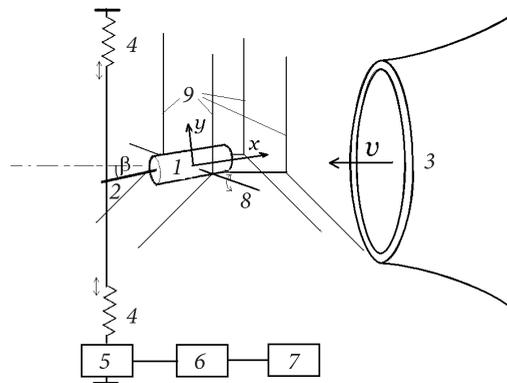


Рис. 1. Схема эксперимента по измерению вращательных колебаний цилиндра.

1 — цилиндр, 2 — хвостовая державка, 3 — сопло аэродинамической трубы, 4 — пружины, 5 — полупроводниковый тензопреобразователь С-50, 6 — РС-осциллограф Velleman PCS500A, 7 — персональный компьютер, 8 — ось вращения цилиндра, 9 — проволочная подвеска.

Верхняя пружина подвешена к механизму изменения угла атаки аэродинамических весов. Нижняя пружина прикреплена к неподвижно установленному полупроводниковому тензопреобразователю С-50. Пружины находились вне воздушного потока. Механизм изменения угла атаки позволял менять средний угол наклона цилиндра β_0 . На рис. 1 нанесены также оси x и y системы координат, связанной с цилиндром. Начало системы координат находится в центре цилиндра. Ось вращения цилиндра перпендикулярна плоскости xy и пересекает эту плоскость в точке с координатами $(x, 0)$.

Сигнал с тензопреобразователя поступал на РС-осциллограф Velleman PCS500A, связанный с персональным компьютером. РС-осциллограф работал в режиме самописца. Во время эксперимента показания прибора записывались в файл с частотой

100 Гц для последующей обработки. За 17 с в файл записывались результаты 1700 измерений.

Типичный образец записи сигнала при установившихся колебаниях цилиндра представлен на рис. 2.

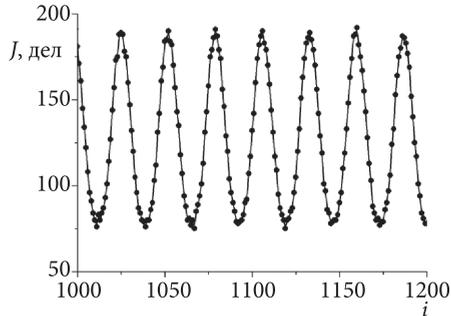


Рис. 2. Образец экспериментальной зависимости сигнала прибора J от номера измерения i .

Сигнал пропорционален натяжению нижней пружины. Оказалось, что частота колебаний не зависит от скорости набегающего потока. При отсутствии потока в рабочей части колебания цилиндров на упругой подвеске были затухающими, а частота колебаний в пределах погрешности эксперимента оставалась такой же, как и в колебаниях под воздействием воздушного потока. Этот факт подтверждает малость аэродинамических сил по сравнению с упругими силами, действующими со стороны подвески.

Было выдвинуто предположение, что натяжение пружин в экстремумах зависимости сигнала от времени равно натяжению пружин при действии постоянной нагрузки, вызывающей отклонение, равное амплитуде колебаний. Это предположение позволило связать амплитуду колебаний с максимальной или минимальной силой натяжения нижней пружины, регистрируемой прибором. Проведены два градуировочных эксперимента. В одном эксперименте в ходе записи показаний тензопреобразователя к точке крепления хвостовой державки к проволочным ттягам навешивался груз известной массы. По результатам измерения определялось изменение показаний прибора, вызываемое известной силой. В другом градуировочном эксперименте определялось смещение конца хвостовой державки под влиянием подвешивания груза известной массы. По результатам двух градуировочных экспериментов определялся коэффициент, связывающий амплитуду колебаний натяжения нижней пружины с амплитудой вращательных колебаний цилиндра.

Обработка результатов эксперимента. В качестве основы обработки сигнала было выдвинуто предположение, что измеряемый угол поворота цилиндра β_i в момент времени t_i представляет собой сумму гармонической функции $B \cos \omega t_i + C \sin \omega t_i$, постоянной составляющей E и случайной величины ξ_i с нулевым математическим ожиданием, соответствующей экспериментальной погрешности:

$$\beta_i = B \cos \omega t_i + C \sin \omega t_i + E + \xi_i. \quad (7)$$

Период колебаний T и угловая частота колебаний $\omega = 2\pi/T$ определяются по результатам подсчета числа колебаний за известный промежуток времени, содержащий десятки периодов колебаний. Пусть за один период происходит n считываний,

номера которых будем обозначать индексом $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Тогда, умножая формулу (7) последовательно на $\cos \omega t_i$ и $\sin \omega t_i$ и находя среднее арифметическое по всем считываниям, получим

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \cos \omega t_i = B \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega t_i + C \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i \cos \omega t_i + E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \cos \omega t_i, \quad (8)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \sin \omega t_i = B \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i + C \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega t_i + E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \sin \omega t_i. \quad (9)$$

Суммы в уравнениях (8) и (9), которые содержат только тригонометрические функции, можно вычислить. Параметр E определяется в эксперименте при отсутствии колебаний. Для большого числа считываний n справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega t_i &\approx 0,5, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega t_i &\approx 0,5, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i &\approx 0, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i &\approx 0, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i &\approx 0, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \cos \omega t_i &\approx 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из уравнений (8) и (9) можно найти параметры B, C и вычислить амплитуду вращательных колебаний $A = \sqrt{B^2 + C^2}$.

Влияние расположения оси вращения на колебания цилиндра с удлинением $\lambda = 2$. На рис. 3 представлен график зависимости $A^2/4 + \beta_0^2$ от $1/v$ для цилиндра с удлинением $\lambda = 2$, ось вращения которого проходит через геометрический центр цилиндра. Диаметр цилиндра D равен 0,14 м. Как и предсказывает уравнение (6), точки, соответствующие разным углам β_0 , ложатся на одну прямую линию.

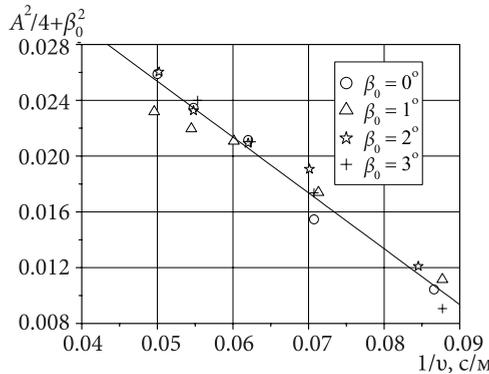


Рис. 3. Зависимость $A^2/4 + \beta_0^2$ от $1/v$ для разных углов β_0 . Ось вращения проходит через геометрический центр цилиндра, имеющего удлинение $\lambda = 2$.

На рис. 4 приведены зависимости $A^2/4 + \beta_0^2$ от $1/v$ для разного расположения оси вращения цилиндров. Оказалось, что экспериментальные зависимости для всех вариантов расположения оси вращения можно приблизить прямыми линиями, причем наклон всех линий одинаков: $k_2 L / \delta = -0,059$ м/с.

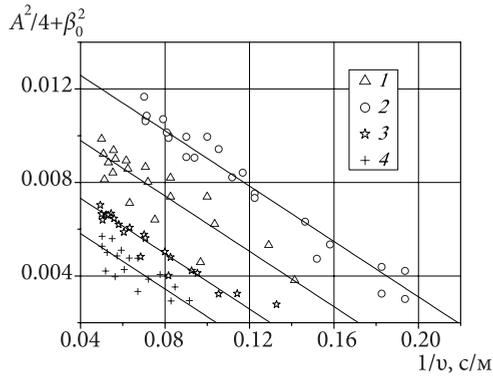


Рис. 4. Зависимость $A^2/4 + \beta_0^2$ от $1/v$ для различного расположения оси вращения цилиндра, имеющего удлинение $\lambda = 2$: 1 — ось смещена ($x = D/7$), 2 — ось проходит через центр ($x = 0$), 3 — ось смещена ($x = -D/7$), 4 — ось смещена ($x = -2D/7$).

Результаты определения параметра δ приведены на рис. 5. Оказалось, что наиболее интенсивные установившиеся колебания происходят при прохождении оси вращения вблизи центра цилиндра.

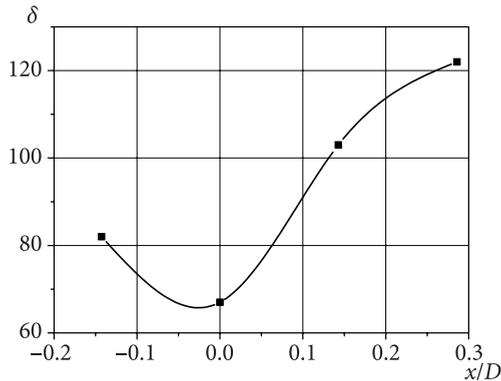


Рис. 5. Зависимость параметра δ от смещения x оси вращения цилиндра с удлинением $\lambda = 2$.

Следующие эксперименты были предприняты, чтобы определить наличие установившихся колебаний в потоке упруго закрепленных цилиндров других удлинений.

Колебания цилиндров других удлинений. Испытывались цилиндры с удлинениями $\lambda = 1,5$ и $\lambda = 3$, имеющие соответственно диаметры $D = 0,14$ м и $D = 0,1$ м. Эксперименты с осью вращения, проходящей через геометрический центр, показали, что колебания этих цилиндров затухают при любой возможной в аэродинамической трубе скорости потока. Следующие опыты проводились с цилиндром, имеющим удлинение $\lambda = 1,5$, ось вращения которого смещена на $x = \pm D/4$, и с цилиндром с удлинением $\lambda = 3$ со смещением оси $x = \pm D/2$ (по два варианта для каждого цилиндра). И только в одном варианте возникали установившиеся колебания. В этом случае имеем $x = D/4$, удлинение цилиндра $\lambda = 1,5$. Для возникновения колебаний необхо-

димо придать цилиндру первоначальный момент импульса. Математическая модель, изложенная выше, предсказывает возникновение колебаний из состояния покоя. Следовательно, эта модель в данном случае не применима к описанию возникновения колебаний. Тем не менее зависимость $A^2/4 + \beta_0^2$ от $1/v$ также является линейной, что демонстрирует рис. 6.

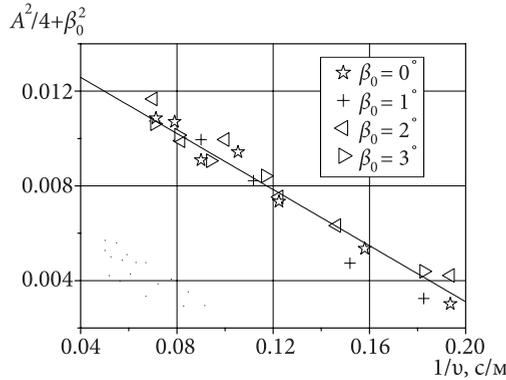


Рис. 6. Зависимость $A^2/4 + \beta_0^2$ от $1/v$ для разных углов β_0 . Координата оси вращения $x = D/4$. Удлинение цилиндра $\lambda = 1,5$.

Как и в случае колебаний цилиндра с удлинением $\lambda = 2$, точки, соответствующие разным углам β_0 , лежат на одной прямой. Параметр δ равен 22, что свидетельствует о том, что амплитуда колебаний цилиндра с удлинением $\lambda = 1,5$ превышает амплитуду колебаний цилиндра с удлинением $\lambda = 2$.

Заключение. Проведенные эксперименты по изучению вращательных колебаний цилиндров в воздушном потоке выявили, что максимальная амплитуда установившихся вращательных колебаний кругового цилиндра с удлинением $\lambda = 2$ соответствует колебаниям вокруг оси, проходящей через геометрический центр цилиндра. Для цилиндра с удлинением $\lambda = 1,5$ установившиеся колебания вокруг оси, смещенной на $x = D/4$, происходят с амплитудой, превосходящей амплитуду колебаний цилиндра с удлинением $\lambda = 2$, причем этот колебательный режим реализуется только после предварительной раскачки. Математическая модель колебаний правильно описывает влияние на установившиеся колебания равновесного угла наклона цилиндра β_0 и скорости набегающего потока, но не применима к описанию возникновения колебаний.

Литература

1. Parkinson G. V., Smith J. D. The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1964. Vol. 17. P. 225–239.
2. Люсин В. Д., Рябинин А. Н. Исследование влияния удлинения призмы на ее аэродинамические характеристики и амплитуду колебаний при галопировании // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 139–145.
3. Ryabinin A. N., Lyusin V. D. Galloping of small aspect ratio square cylinder // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, 2015. Vol. 10, N 1. P. 134–138.
4. Рябинин А. Н., Тюрин Б. Ф. Поведение груза, подвешенного под вертолетом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1993. Вып. 1. С. 87–91.
5. Рябинин А. Н. Колебания маятника со стабилизатором в воздушном потоке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 2. С. 71–77.

6. Габдылхакова В. Г., Рябинин А. Н. Экспериментальное исследование вращательных колебаний призмы в воздушном потоке // Седьмые Поляховские чтения. Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 2–6 февраля 2015 г. М., 2015. С. 92.

7. Рябинин А. Н. Некоторые задачи аэродинамики плохообтекаемых тел. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997.

8. Луценко И. В., Рябинин А. Н. Экспериментальные исследования колебаний цилиндра в воздушном потоке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 2. С. 120–123.

9. Рябинин А. Н., Титаренко И. С. Исследование вращательных колебаний параллелепипеда в потоке газа // Струйные, отрывные и нестационарные течения. XXII Юбилейный семинар. Тезисы докладов. СПб., 2010. С. 231–232.

10. Киселев Н. А., Рябинин А. Н. Вращательные колебания цилиндров // Седьмые Поляховские чтения. Тезисы докладов Международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург, 2–6 февраля 2015 г. М., 2015. С. 109.

11. Киселев Н. А., Рябинин А. Н. Исследование вращательных колебаний цилиндра в воздушном потоке // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. №2(15). С. 83–87.

12. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М., 1971. 768 с.

13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / 4-е изд. М.: Наука, 1974. 504 с.

14. Ковалев М. А. О расчете и исследовании аэродинамических труб // Уч. зап. Ленингр. ун-та. 1939. Вып. 7. С. 61–86.

Статья поступила в редакцию 14 сентября 2015 г.

Сведения об авторах

Рябинин Анатолий Николаевич — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; a_riabinine@mail.ru

Киселев Николай Андреевич — студент; kisnikn@mail.ru

EFFECT OF ROTATION AXIS POSITION OF THE CYLINDER ON ITS ROTATIONAL OSCILLATIONS IN THE AIR STREAM

Anatoly N. Ryabinin, Nikolai A. Kiselev

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; a_riabinine@mail.ru, kisnikn@mail.ru

Steady rotational oscillations of circular cylinder in the air stream are studied experimentally. Cylinders are fixed by an elastic spring suspension, which allows making rotational oscillations about an axis perpendicular to the velocity vector of the incoming flow. Semiconductor strain gauge S-50 attached to the PC-oscilloscope Velleman PCS500A measures the dependence of the tension of one of the suspension springs on time. The results of the tension spring measurement are used to determine the amplitude of steady rotational oscillations of the cylinder in the flow. On the basis of experimental data obtained for different air flow velocities, the parameters of the mathematical model describing the oscillations of the cylinder in the flow are determined. Tests were conducted for cylinders with elongations 1.5, 2 and 3 at several positions of the axis of rotation. For the cylinder with elongation 2 maximum amplitude of oscillation occurs when the rotation axis passes through the geometric center of the cylinder. The amplitude of the oscillations of the cylinder with elongation 1.5 exceeds the amplitude of the oscillations of the cylinder with elongation 2, if the distance from the axis of rotation to downwind end is equal to the diameter of the cylinder. But in this configuration oscillations do not develop from the state of rest. In all experiments the equilibrium inclination angle of the cylinder axis with respect to the velocity vector of the the incoming flow varied in the range of several degrees. The mathematical model correctly describes the influence of angle of inclination on the amplitude of oscillation. Refs 14. Figs 6.

Keywords: wind tunnel, bluff body, unsteady forces, oscillations, mathematical simulation.

References

1. Parkinson G. V., Smith J. D., "The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **17**, 225–239 (1964).
2. Lyusin V. D., Ryabinin A. N., "Investigation of aspect ratio of the prism on its aerodynamic characteristics and the amplitude of oscillations during prism galloping", *Vestn. S.-Peterb. Un-ta. Ser. 1* Issue 2, 139–145 (2011) [in Russian].
3. Ryabinin A. N., Lyusin V. D., "Galloping of small aspect ratio square cylinder", *ARP Journal of Engineering and Applied Sciences* **10**(1), 134–138 (2015).
4. Ryabinin A. N., Tyurin B. F., "The behavior of the load suspended under a helicopter", *Vestn. S.-Peterb. Un-ta. Ser. 1* Issue 1, 87–91 (1993) [in Russian].
5. Ryabinin A. N., "Oscillations of the pendulum with stabilizer in the air stream", *Vestn. S.-Peterb. Un-ta. Ser. 1* Issue 2, 71–77 (1997) [in Russian].
6. Gabdykhakova V. G., Ryabinin A. N., "Experimental study of the rotational oscillation of the prism in the air stream", *Seventh Polyakhov's readings. Abstracts of the international conference on mechanics, St. Petersburg, 2–6 February 2015*, p.92 (Moscow, 2015) [in Russian].
7. Ryabinin A. N., *Some problems in aerodynamics of bluff bodies* (Saint Petersburg, St. Petersburg Univ. Press, 1997) [in Russian].
8. Luschenko I. V., Ryabinin A. N., "Experimental studies of cylinder oscillations in the air stream", *Vestn. S.-Peterb. Un-ta. Ser. 1* Issue 2, 120–123 (2007) [in Russian].
9. Ryabinin A. N., Titarenko I. S., "Study of parallelepiped rotational oscillations in the gas flow", *Jet, separated and unsteady flow XXII jubilee seminar. Abstracts*, 231–232 (Saint Petersburg, 2010) [in Russian].
10. Kiselev N. A., Ryabinin A. N., "The rotational oscillations of cylinders", *Seventh Polyakhov's readings. Abstracts of the international conference on mechanics, St. Petersburg, 2–6 February 2015*, p. 109 (Moscow, 2015) [in Russian].
11. Kiselev N. A., Ryabinin A. N., "The study of cylinder rotational oscillations in the airflow", *Estestvennye i matematicheskie nauki v sovremennoy mire* N 2(15), 83–87 (2014) [in Russian].
12. Belotserkovsky S. M., Skripach B. K., Tabachnikov V. G., *A wing in non-stationary gas flow* (Moscow, 1971) [in Russian].
13. Bogoliubov N. N., Mitropolski Y. A., *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Gordon and Breach, New York, 1961).
14. Kovalev M. A., "On calculation and investigation of wind tunnels", *Uchenye zapiski Leningradskogo universiteta* Issue 7, 61–86 (1939) [in Russian].