

РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С РЕШЕТКОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ РАЗРЕЗОВ

Ю. М. Даль

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Найдены точные аналитические решения задач теории упругости для плоскости с вертикальной решеткой прямолинейных разрезов. Исследованы две основные задачи: в первой задаче берега разрезов свободны от внешних усилий, на бесконечности плоскость растянута постоянными внешними напряжениями; во второй задаче кромки разрезов нагружены сосредоточенными нормальными силами, напряжения на бесконечности отсутствуют. Библиогр. 9 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, решетка прямолинейных разрезов, комплексная переменная, формулы Колосова.

1. Введение. Аналитическое исследование напряженного состояния плоскости с решеткой прямолинейных разрезов остается до сих пор сложной задачей теории упругости. Зарубежные публикации по этой проблеме посвящены, как правило, вычислению коэффициентов интенсивности напряжений у вершин двух, трех или четырех коллинеарных разрезов, расположенных друг над другом [1, 2]. Такой утилитарный подход представляется вполне естественным, когда речь идет о прочности массивных тел, находящихся в условиях плоской деформации. В случае же обобщенного плоского напряженного состояния, характерного для растянутых тонких пластин, дело обстоит совершенно иначе. Здесь разрушению плоских листов обычно предшествует образование выпуклых зон в окрестности центров разрезов [3]. Возникновение последних обуславливается полем сжимающих напряжений, локализованных около кромок разрезов. При определенной величине растягивающих усилий данные напряжения вызывают местную потерю устойчивости пластин, что существенно понижает их несущую способность. В этой связи заслуживает быть особо отмеченной публикация [4], где на основе гидродинамической аналогии предложен общий подход к анализу упругих напряжений в плоскости с решеткой прямолинейных разрезов. К сожалению, авторы цитируемой статьи ограничились изучением напряжений во внешней области решетки, тогда как для приложений наибольший интерес представляет анализ поля напряжений в ее внутренней области.

Данная работа является своеобразным продолжением упомянутого исследования. Построенная ниже математическая модель решетки базируется на соотношениях плоских задач теории упругости в терминах двух функций комплексного переменного $z = x + iy$.

2. Общие соотношения. Рассмотрим плоскость S , содержащую вертикальную решетку из $(2m + 1)$ прямолинейных разрезов $a_k b_k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$). Пусть все разрезы имеют длину $2a$, параллельны оси x и равноудалены друг от друга на расстояние l . Разрез $a_0 b_0$ расположен на оси x , начало координат — в его середине. Предположим далее, что на бесконечности плоскость S растянута нормальными усилиями $\sigma_{yy}^\infty = p = \text{const}$, $\sigma_{xx}^\infty = q = \text{const}$ ($\sigma_{xy}^\infty = 0$), а берега разрезов свободны от внешней нагрузки (рис. 1).

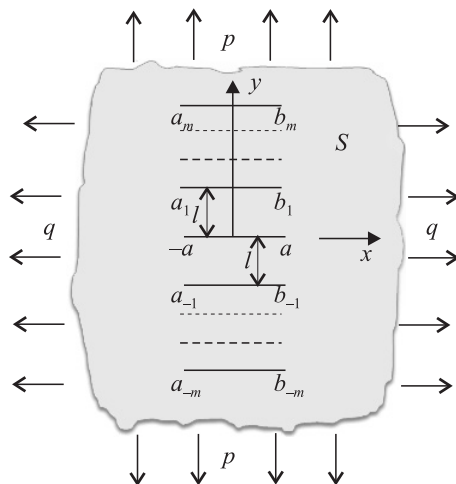


Рис. 1. Плоскость с решеткой $(2m + 1)$ разрезов.

Согласно Г. В. Колосову [5, с. 69], имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 \left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 \left[2x\Phi'(z) + \Psi_1(z) \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где функция $\Psi_1(z)$ и ее аналог $\Psi(z)$, фигурирующий в классических формулах

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 \left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 \left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) \right], \end{aligned}$$

связаны между собой зависимостью

$$\Psi_1(z) = \Psi(z) - z\Phi'(z). \quad (2.2)$$

Симметрия плоскости S и внешних усилий p и q относительно координатных осей x и y накладывает на $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ условия [6]

$$\Phi(z) = \bar{\Phi}(z) = \Phi(-z), \quad \Psi_1(z) = \bar{\Psi}_1(z) = \Psi_1(-z)$$

или

$$\overline{\Phi(z)} = \Phi(\bar{z}) = \Phi(-\bar{z}), \quad \overline{\Psi_1(z)} = \Psi_1(\bar{z}) = \Psi_1(-\bar{z}). \quad (2.3)$$

Приняв во внимание (2.3), из (2.1) получаем

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) + 2x\Phi'(z) + \Psi_1(z).$$

Отсюда

$$\sigma_{yy} = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) + x \left[\Phi'(z) + \Phi'(-\bar{z}) \right] + \frac{1}{2} \left[\Psi_1(z) + \Psi_1(\bar{z}) \right], \quad (2.4)$$

$$\sigma_{xy} = -xi \left[\Phi'(z) - \Phi'(\bar{z}) \right] - \frac{i}{2} \left[\Psi_1(z) - \Psi_1(\bar{z}) \right]. \quad (2.5)$$

3. Первая задача. Пусть решетка содержит бесконечно много разрезов ($m \rightarrow \infty$). Тогда напряжения $\sigma_{xx}(z), \sigma_{yy}(z), \sigma_{xy}(z)$ будут периодическими функциями с минимальным периодом il , причем на «основном» разрезе a_0b_0 имеем

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) = 0, \quad \sigma_{xy}^{\pm}(x) = 0 \quad (-a \leq x \leq a).$$

Здесь и ниже индексами $+$ и $-$ обозначены соответственно верхние и нижние берега разреза. Отсюда на основании выражений (2.3), (2.4) и (2.5) находим

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) + \Phi^-(x) + x \left[\Phi'^+(x) + \Phi'^+(-x) \right] + \frac{\Psi_1^+(x) + \Psi_1^-(x)}{2} &= 0, \\ \Phi^-(x) + \Phi^+(x) + x \left[\Phi'^-(x) + \Phi'^-(-x) \right] + \frac{\Psi_1^-(x) + \Psi_1^+(x)}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

и

$$\begin{aligned} x \left[\Phi'^+(x) - \Phi'^-(x) \right] + \frac{\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x)}{2} &= 0, \\ x \left[\Phi'^-(x) - \Phi'^+(x) \right] + \frac{\Psi_1^-(x) - \Psi_1^+(x)}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Складывая и вычитая равенства (3.1), получим

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \frac{1}{2} \left[\Psi_1^+(x) + \Psi_1^-(x) \right] = 0. \quad (3.3)$$

Выполнив аналогичные операции в (3.2), устанавливаем

$$\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x) = 0. \quad (3.4)$$

Решение задачи (3.4) очевидно:

$$\Psi_1(z) = \text{const},$$

где $z \in S$, включая бесконечно удаленную точку, в окрестности которой имеем $\lim_{x \rightarrow \infty} x\Phi'(z) = 0$ [6]. Следовательно, в силу нижнего уравнения (2.1) и оговоренных ранее условий на бесконечности получаем

$$\Psi_1(z) = \frac{\sigma_{yy}^{\infty} - \sigma_{xx}^{\infty}}{2} = \frac{p - q}{2}. \quad (3.5)$$

Внеся (3.5) в соотношение (3.3), запишем его в форме краевого условия задачи Гильберта—Привалова для функции $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{q - p}{2}.$$

Согласно [7, с. 398], ее решение таково:

$$\Phi(z) = \frac{q - p}{2} \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} X_m(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{X_m(x)}{x - z} dx, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned}
 X_m(z) &= \sqrt{(z-a)(z+a) \prod_{k=1}^m (z-a-ikl)(z-a+ikl)(z+a-ikl)(z+a+ikl)} = \\
 &= (m!)^2 l^{2m} \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{(z-a)\pi}{l} \prod_{k=1}^m \left[1 + \frac{(z-a)^2}{k^2 l^2}\right] \frac{(z+a)\pi}{l} \prod_{k=1}^m \left[1 + \frac{(z+a)^2}{k^2 l^2}\right]}.
 \end{aligned}$$

Имея в виду формулу [8, с. 438]

$$\operatorname{sh} z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right),$$

подставим выражения $X_m(z)$ и $X_m(x)$ в зависимость (3.6). Тогда после взаимного сокращения множителей $\lim_{m \rightarrow \infty} (m!)^2 (l/\pi) l^{2m}$ и выполнения предельных переходов найдем

$$\Phi(z) = \frac{q-p}{2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{z\pi}{l} - \operatorname{sh}^2 \frac{a\pi}{l}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{x\pi}{l} - \operatorname{sh}^2 \frac{a\pi}{l}}}{x-z} dx.$$

Отсюда получаем

$$\Phi(z) = \frac{q-p}{4} + \frac{p}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2(a\pi/l)}{\operatorname{sh}^2(z\pi/l)}}}. \quad (3.7)$$

Учитывая (3.5), разделим в комплексных уравнениях (2.1) вещественные и мнимые части. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2\operatorname{Re}\Phi(z) - 2x\operatorname{Re}\Phi'(z) - \frac{p-q}{2}, \\
 \sigma_{yy} &= 2\operatorname{Re}\Phi(z) + 2x\operatorname{Re}\Phi'(z) + \frac{p-q}{2}, \\
 \sigma_{xy} &= 2x\operatorname{Im}\Phi'(z).
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Одноосное растяжение плоскости в направлении перпендикулярном разрезам. Полагая в формулах (3.7) и (3.8) параметр q равным нулю, припишем комплексной переменной z значения $x + ikl$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $|x| > a$. Выполним затем соответствующие выкладки и преобразования, из зависимостей (3.8) определим распределение напряжений *перед* вершинами разрезов:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(x) &= p \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2(a\pi/l)}{\operatorname{sh}^2(x\pi/l)}}} \left(1 + \frac{x\pi}{l} \frac{\operatorname{cth}(x\pi/l)\operatorname{sh}^2(a\pi/l)}{[\operatorname{sh}^2(x\pi/l) - \operatorname{sh}^2(a\pi/l)]}\right) - 1 \right], \\
 \sigma_{yy}(x) &= p \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2(a\pi/l)}{\operatorname{sh}^2(x\pi/l)}}} \left(1 - \frac{x\pi}{l} \frac{\operatorname{cth}(x\pi/l)\operatorname{sh}^2(a\pi/l)}{[\operatorname{sh}^2(x\pi/l) - \operatorname{sh}^2(a\pi/l)]}\right) \right], \\
 \sigma_{xy}(x) &= 0.
 \end{aligned}$$

На рис. 2 и 3 представлены (в безразмерной форме) величины напряжений $\sigma_{yy}^0 = \sigma_{yy}(x)/p$ и $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{xx}(x)/p$, где кривым 1, 2, 3 соответствуют отношения $a/l = 1, 2, 5$.

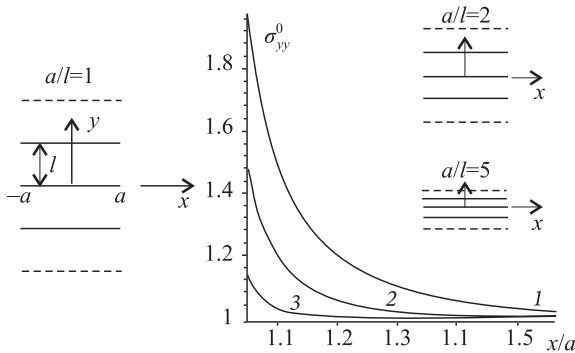


Рис. 2. Распределение напряжений σ_{yy}^0 на линиях $z = x + ik$.

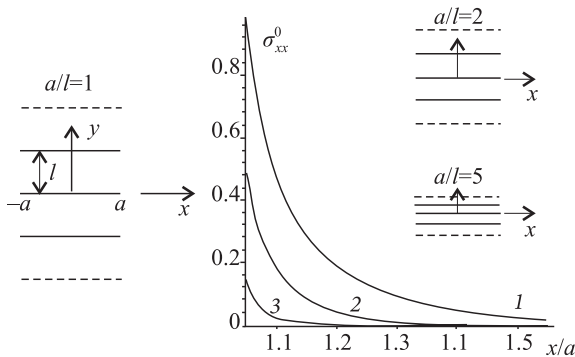


Рис. 3. Графики напряжений σ_{xx}^0 на линиях $z = x + ik$.

Считая, что $z = x + il(2k + 1)/2$, где $|x| \geq 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, аналогичным образом находим поле напряжений *между* разрезами:

$$\sigma_{xx} \left(x \pm \frac{il(2k \pm 1)}{2} \right) = p \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\text{sh}^2(a\pi/l)}{\text{ch}^2(x\pi/l)}}} \left(1 + \frac{x\pi}{l} \frac{\text{th}(x\pi/l)\text{sh}^2(a\pi/l)}{[\text{ch}^2(x\pi/l) + \text{sh}^2(a\pi/l)]} \right) - 1 \right],$$

$$\sigma_{yy} \left(x \pm \frac{il(2k \pm 1)}{2} \right) = p \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\text{sh}^2(a\pi/l)}{\text{ch}^2(x\pi/l)}}} \left(1 - \frac{x\pi}{l} \frac{\text{th}(x\pi/l)\text{sh}^2(a\pi/l)}{[\text{ch}^2(x\pi/l) + \text{sh}^2(a\pi/l)]} \right) \right],$$

$$\sigma_{xy} \left(x \pm \frac{il(2k \pm 1)}{2} \right) = 0.$$

Величины напряжений $\sigma_{xx}(z)$ и $\sigma_{yy}(z)$ на линиях $z = x + il(2k + 1)/2$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, представлены в безразмерном виде графиками на рис. 4 и 5.

Пусть теперь комплексная переменная z принимает значения $iy + ilk$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда из выражений (3.7) и (3.8) выводим следующие зависимости для напряжений на оси y *между* разрезами:

$$\sigma_{xx}(iy) = p \frac{\sin \frac{y\pi}{l}}{\sqrt{\sin^2 \frac{y\pi}{l} + \text{sh}^2 \frac{a\pi}{l}}} - p, \quad \sigma_{yy}(iy) = p \frac{\sin \frac{y\pi}{l}}{\sqrt{\sin^2 \frac{y\pi}{l} + \text{sh}^2 \frac{a\pi}{l}}}, \quad \sigma_{xy}(iy) = 0.$$

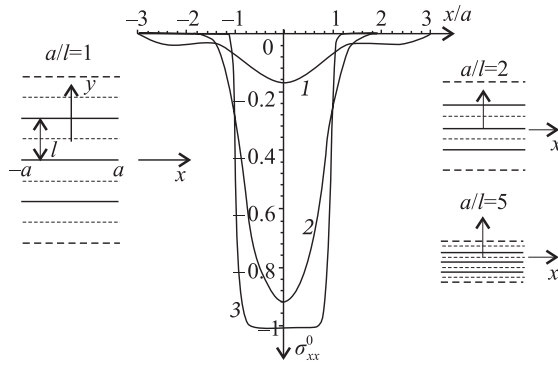


Рис. 4. Графики напряжений σ_{xx}^0 на линиях $z = x + il(2k + 1)/2$.

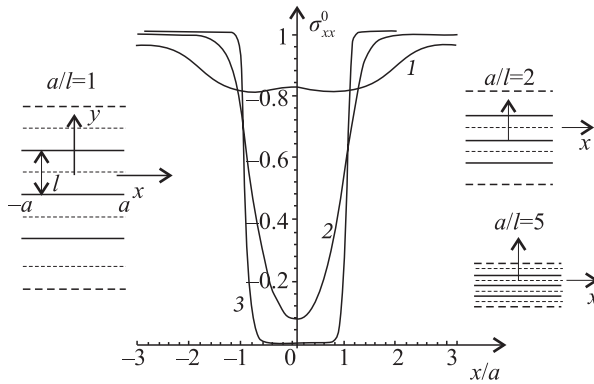


Рис. 5. Распределение напряжений σ_{yy}^0 на линиях $z = x + il(2k + 1)/2$.

График функции $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{xx}(iy)/p$ представлен в безразмерном виде на рис. 6, где кривые 1, 2, 3 соответствуют отношениям $2a/l = 4, 1, 0.2$.

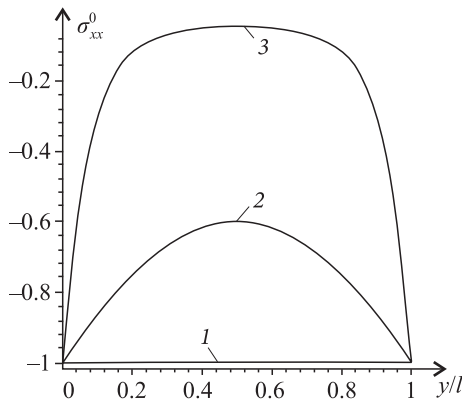


Рис. 6. Распределение напряжений σ_{xx}^0 на оси y между разрезами.

Одноосное растяжение плоскости в направлении параллельном разреза́м. Приняв в формулах (3.5) и (3.7) параметр $p = 0$, имеем $\Psi_1(z) = -q/2$, $\Phi(z) = q/4$. Согласно (3.8), находим $\sigma_{xx}(z) = q$, $\sigma_{yy}(z) = \sigma_{xy}(z) = 0$. Как видим, напряженное состояние является однородным во всей плоскости.

4. Вторая задача. Пусть упругая плоскость S содержит бесконечную вертикальную решетку прямолинейных разрезов $a_k b_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, причем все разрезы имеют длину $2a$, параллельны оси x и равноудалены друг от друга на расстояние l . Разрез $a_0 b_0$ находится на оси x , начало координат — в его середине. В точках $(0, ikl)$ берега разрезов загружены сосредоточенными силами P (рис. 7); напряжения на бесконечности отсутствуют ($\sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xx}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$).

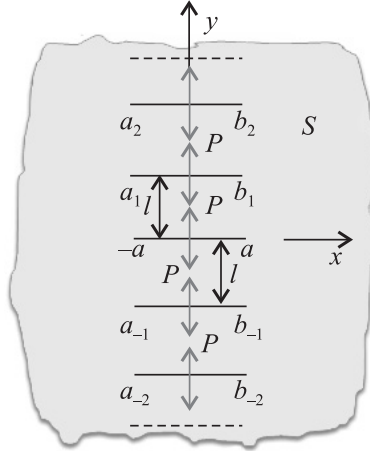


Рис. 7. Плоскость с бесконечной решеткой нагруженных разрезов.

На основании (2.1) и (2.3) устанавливаем

$$\sigma_{yy} = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) + x [\Phi'(z) + \Phi'(-\bar{z})] + \frac{1}{2} [\Psi_1(z) + \Psi_1(\bar{z})], \quad (4.1)$$

$$\sigma_{xy} = -xi [\Phi'(z) - \Phi'(\bar{z})] - \frac{i}{2} [\Psi_1(z) - \Psi_1(\bar{z})]. \quad (4.2)$$

В силу периодичности задачи функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ можно определить из краевых условий на «основном» разрезе $a_0 b_0$ ($y = 0, -a \leq x \leq a$):

$$\sigma_{yy}^\pm(x) = -Pf[\delta_\infty(x)], \quad \sigma_{xy}^\pm(x) = 0, \quad (4.3)$$

где $f[\delta_\infty(x)]$ — бесконечный ряд функций Дирака

$$f[\delta_\infty(x)] = \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x \pm ikl). \quad (4.4)$$

Внеся выражения (4.1), (4.2) и (4.4) в равенства (4.3), после соответствующих выкладок и преобразований, аналогичных (3.1)–(3.7), будем иметь

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \frac{1}{2} [\Psi_1^+(x) + \Psi_1^-(x)] = -P \left[\delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x \pm ikl) \right], \quad (4.5)$$

$$\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x) = 0. \quad (4.6)$$

Так как на бесконечности напряжения отсутствуют, из равенства (4.6) заключаем

$$\Psi_1(z) = 0, \quad (4.7)$$

что позволяет представить соотношение (4.5) в виде задачи Гильберта–Привалова для функции $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = -P \left[\delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x \pm ikl) \right].$$

Решение последней выглядит следующим образом:

$$\Phi(z) = -\frac{P}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{z\pi}{l} - \operatorname{sh}^2 \frac{a\pi}{l}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{x\pi}{l} - \operatorname{sh}^2 \frac{a\pi}{l}} \left[\delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x \pm ikl) \right]}{x - z} dx.$$

Отсюда, вычислив интеграл, получим

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -P \frac{\sqrt{-\operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{l}}}{2\pi i \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{l} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{l}}} \left[-\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ikl - z} + \frac{1}{-ikl - z} \right) \right] = \\ &= P \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{l}}{2\pi \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{l} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{l}}} \left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2 l^2} \right]. \end{aligned}$$

Но, как известно [8, с. 431],

$$\operatorname{cth} z = \left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2 \pi^2} \right],$$

поэтому окончательно

$$\Phi(z) = \frac{P}{2l} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{l}}{\operatorname{th} \frac{\pi z}{l} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{l} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{l}}}. \quad (4.8)$$

В случае одного разреза ($y = 0, -a \leq x \leq +a$) следует положить в (4.8) параметр $l \rightarrow \infty$ и разложить гиперболические функции в степенные ряды (с точностью до малых первого порядка). Тогда

$$\Phi(z) = \frac{Pa}{2\pi z \sqrt{z^2 - a^2}}$$

и, если $|z| \ll a$, последнее равенство преобразуется в известную формулу

$$\Phi(z) = \frac{P}{2\pi i z},$$

которая, вкупе с (4.7), является решением задачи об упругой полуплоскости, загруженной на границе сосредоточенной силой [9].

5. Растяжение плоскости с конечным числом коллинеарных разрезов.

Если решетка содержит конечное число разрезов, функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ могут быть

найлены на основе соответствующих формул, приведенных выше. Например, решения первой задачи для решетки с разрезами $a_k b_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$ (рис. 1) выглядят так:

$$\begin{aligned}
 k = 0: \quad \Psi_1(z) &= \frac{p-q}{2}, \quad \Phi(z) = \frac{q-p}{4} + \frac{p}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}; \\
 k = 0, \pm 1: \quad \Psi_1(z) &= \frac{p-q}{2}, \quad \Phi(z) = \frac{q-p}{4} + \frac{p}{2} \frac{(z^3 + z l^2)}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - a_1^2)(z^2 - b_1^2)}}; \\
 k = 0, \pm 1, \pm 2: \quad \Psi_1(z) &= \frac{p-q}{2}, \\
 \Phi(z) &= \frac{q-p}{4} + \frac{p}{2} \frac{z^5 + 5z^3 l^2 + 4z l^4}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - a_1^2)(z^2 - b_1^2)(z^2 - a_2^2)(z^2 - b_2^2)}}.
 \end{aligned}$$

На рис. 8 представлены графики напряжений $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{xx}(iy)/p$ на мнимой оси между смежными разрезами. Непрерывные кривые 1, 2, 3 соответствуют решетке с тремя разрезами и отношениями $2a/l = 4.0, 1.0, 0.2$. Пунктирные линии воспроизводят аналогичные графики для решетки с бесконечным числом коллинеарных разрезов.

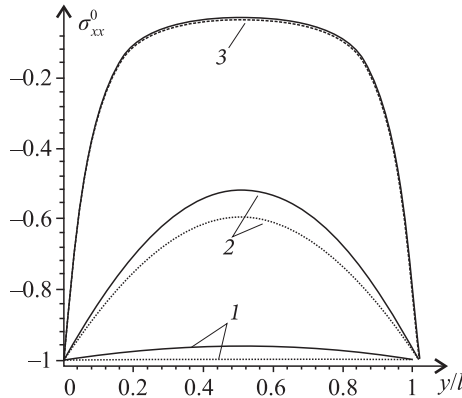


Рис. 8. Напряжение σ_{xx}^0 на мнимой оси решетки с тремя разрезами.

Изложенные выше результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Краевая задача теории упругости о растяжении плоскости с бесконечной решеткой прямолинейных разрезов, решаемая на основе формул Г. В. Колосова (2.1), сводится к задаче Гильберта—Привалова для функции $\Phi(z)$.

2. Это утверждение распространяется на случаи бесконечных решеток, нагруженных самоуравновешенными нормальными сосредоточенными усилиями, а также на решетки с конечным числом разрезов.

3. Полученные решения выявили своеобразные эффекты «экранирования» растягивающих напряжений между разрезами, зависящие от геометрических параметров решетки.

4. Характерной особенностью поля напряжений «внутри» решетки является наличие областей сжимающих напряжений между разрезами.

Литература

1. Nisitani H., Murakami Y. Interaction of elasto-plastic cracks subjected to a uniform tensile stress in an infinite or a semi-infinite plate // *Mechanical behavior of materials. Proceedings of the International Conference of Mechanical behavior of materials*. Kyoto. 1972. Vol. 1. P. 346–356.
2. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. Т. 1. 448 с.
3. Даль Ю. М. О местном изгибе растянутой пластины с трещиной // *Известия АН СССР, МТТ*. 1978. № 4. С. 135–141.
4. Поляхов Н. Н. (мл.), Поляхов Н. Н. Растяжение плоскости с решеткой разрезов без выноса // *Вестник ЛГУ*. 1981. Вып. 2, № 7. С. 85–90.
5. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Л.; М., 1935. 215 с.
6. Даль Ю. М. О формулах Г. В. Колосова в плоской задаче теории упругости при наличии периодических разрезов // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1*. 2014. Т. 1(59), вып. 2. С. 228–236.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. Новозиллов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.

Статья поступила в редакцию 26 мая 2015 г.

Сведения об авторе

Даль Юрий Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; ymdahl@yandex.ru

THE STRETCH OF ELASTIC PLANE WITH THE LATTICE OF STRAIGHT CUTS

Yuriy M. Dahl

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; ymdahl@yandex.ru

The closed-form solutions of the elasticity theory for the plane with a set of straight cuts are obtained. Two basic cases are studied. The first one is as follows: both borders of cuts are free whereas the plane is stretched out by external stresses applied at the infinity. In the second case both borders of cuts are loaded by concentrated normal forces while no stress is applied at the infinity. Refs 9. Figs 8.

Keywords: plane elasticity, set of straight cuts, complex variable, Kolosov's formulas.

References

1. Nisitani H., Murakami Y., “Interaction of elasto-plastic cracks subjected to a uniform tensile stress in an infinite or a semi-infinite plate”, *Mechanical behavior of materials. Proceedings of the International Conference of Mechanical behavior of materials* **1**, 346–356 (1972).
2. *Reference book of stress intensity coefficients* **1** (Ed. Yu. Murokami, Mir, Moscow, 1990, 448 p.) [in Russian].
3. Dahl Yu. M., “About local bend of stretched plate with a crack”, *Izvestiya AN SSSR. MTT* (4), 135–141 (1978) [in Russian].
4. Polyahov N. N. (ml.), Polyahov N. N., “Tension of plane with the set of cuts without shear”, *Vestnik Leningrad. Univ.* Issue 2, N 7, 85–90 (1981) [in Russian].
5. Kolosov G. V., *Application of complex variable to theory of elasticity* (Leningrad, Moscow, 1935, 215 p.) [in Russian].
6. Dahl Yu. M., “About Kolosov's formulas in a plane problem of theory of elasticity in the presence of periodical cuts”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 1* **1(59)**, Issue 2, 228–236 (2014) [in Russian].
7. Muschelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity* (Nauka, Moscow, 1966, 707 p.) [in Russian].
8. Lavrentiev M. A., Shabat B. V., *Methods of theory of the functions complex variable* (Nauka, Moscow, 1973, 736 p.) [in Russian].
9. Novozilov V. V., *Theory of elasticity* (Sudpromgiz, Leningrad, 1958, 370 p.) [in Russian].