

## МЕХАНИКА

УДК 534.1:517.927.25

**УСТОЙЧИВОСТЬ ШПАНГОУТА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ***М. Л. Боярская, С. Б. Филиппов*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Исследована устойчивость под действием равномерного внутреннего давления тонкой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением. В качестве модели шпангоута используется кольцевая пластинка, подкрепленная по внешнему краю круговым стержнем. Классическая модель шпангоута — стержень с Т-образным поперечным сечением в данной задаче не годится, так как при потере устойчивости деформации локализуются на поверхности шпангоута. Стержневая модель не позволяет найти критическое давление, соответствующее такой потере устойчивости.

В первом приближении задача о потере устойчивости кольцевой пластины, сопряженной с оболочкой, сводится к решению краевой задачи на собственные значения для уравнения изгиба кольцевой пластины. В предположении, что ширина пластины много меньше ее внутреннего радиуса, получены приближенные формулы для определения критического давления. Результаты, найденные методом Рэлея и методом прогонки, мало отличаются друг от друга. Показано, что критическое давление для шпангоутов с прямоугольным поперечным сечением больше, чем для шпангоутов с тавровым поперечным сечением. Библиогр. 9 назв. Ил. 3. Табл. 2.

*Ключевые слова:* устойчивость, цилиндрическая оболочка, шпангоут с тавровым поперечным сечением, асимптотический метод.

**1. Введение.** Почти во всех многочисленных исследованиях подкрепленных оболочек, ссылки на которые имеются в работах [1–3], шпангоуты рассматривались как круговые стержни. Стержневая модель дает удовлетворительные результаты для узких шпангоутов, ширина и толщина которых — величины одного порядка. В частности, при потере устойчивости под действием внешнего давления цилиндрической оболочки, подкрепленной узкими шпангоутами, на ее поверхности, как и у гладкой оболочки, образуются вмятины, вытянутые в направлении образующей цилиндра. Такую потерю устойчивости будем называть потерей устойчивости первого типа.

С увеличением ширины шпангоутов потеря устойчивости первого типа сменяется потерей устойчивости второго типа, при которой деформируются только шпангоуты, в то время как форма оболочки практически не изменяется. Для того чтобы найти

критическое давление, соответствующее второму типу потери устойчивости, необходимо рассматривать шпангоут как кольцевую пластинку. Если шпангоут имеет прямоугольное поперечное сечение, его моделью может служить кольцевая пластинка постоянной толщины. Потеря устойчивости такой пластинки исследована, в частности, в работах [4, 5].

Наряду со шпангоутами с прямоугольным поперечным сечением в реальных тонкостенных конструкциях используются шпангоуты с тавровым поперечным сечением. В работе [6] показано, что при действии на оболочку внешнего давления шпангоуты с тавровым сечением оказываются более эффективными, чем шпангоуты с прямоугольным сечением. Установлено, в частности, что для цилиндрической оболочки, подкреплённой шпангоутами с тавровым сечением, критическое внешнее давление больше, чем для оболочки, подкреплённой шпангоутами с прямоугольным сечением, имеющей такой же вес. В работе [6] для широких шпангоутов с тавровым поперечным сечением в качестве механической модели использована кольцевая пластинка, подкреплённая по внешнему краю круговым стержнем.

В данной работе исследована потеря устойчивости кольцевой пластинки, сопряжённой с цилиндрической оболочкой и подкреплённой круговым стержнем, для случая действия на оболочку внутреннего давления  $p$ . На рис. 1 изображено сечение оболочки плоскостью, параллельной плоскости кольцевой пластинки.

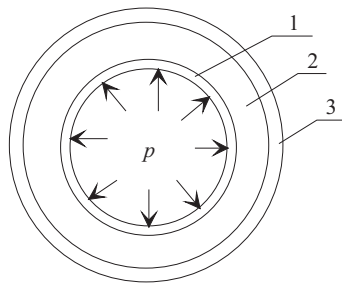


Рис. 1. Подкреплённая цилиндрическая оболочка; 1 — оболочка, 2 — пластинка, 3 — стержень.

При действии на оболочку внутреннего давления потеря устойчивости первого типа не происходит, так как в оболочке не возникает сжимающих напряжений, поэтому достаточно рассмотреть потерю устойчивости второго типа.

В работе [7] асимптотическим методом было получено решение краевой задачи на собственные значения для кольцевой пластинки, сопряжённой с цилиндрической оболочкой. Решение системы уравнений цилиндрической оболочки было представлено в виде суммы основного состояния и краевого эффекта. Подстановка этого решения в условия сопряжения оболочки и пластинки привела в первом приближении к краевой задаче для кольцевой пластинки с граничными условиями на ее внутреннем контуре, зависящими от отношения толщин пластинки и оболочки. Сравнение асимптотического приближения с результатами численных расчетов показало высокую точность асимптотических результатов. Принимая во внимание результаты, полученные в статьях [6] и [7], в данной работе решается задача о потере устойчивости кольцевой пластинки под действием сжимающего напряжения  $\sigma_0$  на ее внутреннем крае, которое возникает в результате внутреннего давления  $p$  в цилиндрической оболочке.

**2. Основные уравнения.** После разделения переменных систему уравнений устойчивости кольцевой пластинки можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 Q_1' + \frac{1}{r}Q_1 + \frac{m}{r}Q_2 &= T_1w'' + T_2\left(\frac{w'}{r} - \frac{m^2}{r^2}w\right), & Q_1 &= M_1' + \frac{1}{r}(M_1 - M_2) + 2\frac{m}{r}H, \\
 M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), & M_2 &= D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), & H &= D(1 - \nu)\kappa_{12}, & D &= \frac{Eh_p^3}{12(1 - \nu^2)}, \\
 \kappa_1 &= -w'', & \kappa_2 &= \frac{m^2}{r^2}w - \frac{w'}{r}, & \kappa_{12} &= \left(\frac{m}{r}w\right)',
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где (') обозначает дифференцирование по радиальной координате на срединной плоскости пластинки  $r \in [r_0, r_1]$ ,  $r_0$  и  $r_1$  — радиусы внутреннего и внешнего краев пластинки,  $m$  — число волн в окружном направлении,  $w$  — прогиб,  $Q_1, Q_2$  — перерезывающие усилия,  $M_1, M_2, H$  — моменты,  $T_1$  и  $T_2$  — начальные усилия,  $E$  — модуль Юнга,  $h_p$  — толщина пластинки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$  — изменения кривизн.

Предположим, что  $h_p \leq h_s$ , где  $h_s$  — толщина оболочки. В этом случае, как показано в работе [7], условия сопряжения пластинки с оболочкой в первом приближении можно заменить условиями жесткой заделки

$$w = w' = 0, \quad r = r_0. \tag{2}$$

Граничные условия на крае пластинки  $r = r_1$ , являющемся линией сопряжения пластинки и стержня (рис. 2), записываются в виде

$$M_1 = \frac{EJ}{r_0^2}w', \quad Q_1 = T_1w', \quad r = r_1, \tag{3}$$

где  $J$  — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, принадлежащей срединной плоскости пластинки.

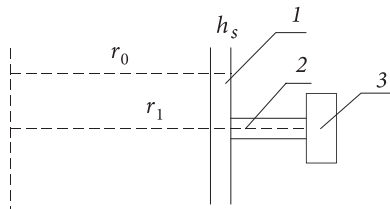


Рис. 2. Поперечное сечение пластинки, подкрепленной стержнем; 1 — оболочка, 2 — пластинка, 3 — стержень.

Система (1) может быть сведена к одному дифференциальному уравнению относительно прогиба  $w$ :

$$\frac{d^4w}{ds^4} + \frac{2}{s} \frac{d^3w}{ds^3} - \frac{2m^2 + 1 - \beta t_1}{s^2} \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{2m^2 + 1 + \beta t_2}{s^3} \frac{dw}{ds} + \frac{m^2(m^2 - 4 - \beta t_2)}{s^4} w = 0, \tag{4}$$

где  $\beta = h_p\sigma_0r_0^2/D$  — безразмерный параметр нагрузки,  $\sigma_0$  — напряжение на внутреннем крае пластинки,

$$s = \frac{r}{r_0}, \quad t_k = \frac{r^2T_k}{h_p\sigma_0r_0^2}, \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

**3. Начальные усилия.** Для определения начальных усилий  $T_1$  и  $T_2$  используем уравнения, описывающие осесимметричную деформацию кольцевой пластинки в ее плоскости:

$$T_1' + \frac{1}{r}(T_1 - T_2) = 0, \quad T_1 = B \left( u' + \nu \frac{u}{r} \right), \quad T_2 = B \left( \frac{u}{r} + \nu u' \right), \quad (6)$$

где  $u$  — радиальное перемещение,  $B = Eh_p/(1 - \nu^2)$ . Общее решение системы (6)

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad T_{1,2} = B \left( \gamma C_1 \mp \delta \frac{C_2}{r^2} \right), \quad \gamma = 1 + \nu, \quad \delta = 1 - \nu \quad (7)$$

содержит произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , которые находятся путем подстановки решения (7) в граничные условия

$$T_1(r_0) = h_p \sigma_0, \quad T_1(r_1) = -\frac{ES}{r_1^2} u(r_1). \quad (8)$$

Здесь  $S$  — площадь поперечного сечения кругового стержня. Система линейных алгебраических уравнений для определения  $C_1$  и  $C_2$

$$(\gamma + \delta S_0)C_1 - \frac{\delta(1 - S_0)}{r_1^2} C_2 = 0, \quad \gamma C_1 - \frac{\delta}{r_0^2} C_2 = \frac{(1 - \nu^2)\sigma_0}{E}, \quad (9)$$

где  $S_0 = (1 + \nu)S/(h_p r_1)$ , имеет решение

$$C_1 = \frac{(1 - S_0)(1 - \nu^2)\sigma_0}{dr_1^2 E}, \quad C_2 = \frac{(\gamma + \delta S_0)(1 - \nu^2)\sigma_0}{d\delta E}, \quad d = \frac{(1 - S_0)\gamma}{r_1^2} - \frac{\gamma + \delta S_0}{r_0^2}.$$

Принимая во внимание формулы (7), получаем

$$T_{1,2} = \frac{h_p \sigma_0 r_0^2}{r^2} \left( \frac{r^2(1 - S_0)\gamma \mp r_1^2(\gamma + \delta S_0)}{r_0^2(1 - S_0)\gamma - r_1^2(\gamma + \delta S_0)} \right). \quad (10)$$

Если  $S_0 = 1$ , имеем

$$T_{1,2} = \pm \frac{h_p \sigma_0 r_0^2}{r^2}. \quad (11)$$

Аналитическое решение уравнений (1) для начальных усилий (11) найдено в работе [8], однако условие  $S_0 = 1$  не выполняется в реальных конструкциях.

Полагая  $S_0 = 0$  в формуле (10), получим начальные усилия для пластинки без стержня, которые соответствуют шпангоуту с прямоугольным поперечным сечением.

**4. Узкая пластинка.** Предположим, что пластинка является узкой, т. е. ее безразмерная ширина равна

$$\varepsilon = \frac{r_1}{r_0} - 1 \ll 1.$$

Обычно это условие выполняется для подкрепляющих оболочку шпангоутов.

Пусть для числа волн в окружном направлении имеем  $m \sim 1$ . Тогда после замены переменной

$$s = 1 + \varepsilon x \quad (12)$$

в уравнении (4) и отбрасывания малых членов получим приближенное уравнение

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta \varepsilon^2 t_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta \varepsilon^3 t_2 \frac{dw}{dx} = 0. \quad (13)$$

Замена переменной (12) в (2) и (3) дает следующие приближенные граничные условия:

$$\begin{aligned} w = w' = 0, \quad x = 0, \\ w'' + cw' = 0, \quad w''' + \beta \varepsilon^2 t_1 w' = 0, \quad x = 1, \end{aligned} \quad (14)$$

где штрихом обозначена производная по  $x$ ,

$$c = \frac{12\varepsilon(1 - \nu^2)J}{r_0 h_p^3}.$$

Краевая задача нулевого приближения (13), (14) не зависит от числа волн  $m$ . Это означает, что при малом  $\varepsilon$  собственные значения исходной задачи (1)–(3) при  $m = 0, 1, 2, \dots$  мало отличаются друг от друга, если  $m \ll 1/\varepsilon$ . Численные расчеты, проведенные для конкретных значений параметров, показали, что наименьшему собственному значению краевой задачи (1)–(3) соответствует  $m = 0$ , т. е. форма потери устойчивости является осесимметричной.

В случае  $S_0 = 1$  из равенств (5) и (11) вытекает, что  $t_{1,2} = \pm 1$ . Следовательно, в первом приближении уравнение (13) и граничные условия (14) можно записать так:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta_0^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \beta_0^2 = \beta \varepsilon^2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} w = w' = 0, \quad x = 0, \\ w'' + cw' = 0, \quad w''' + \beta_0^2 w' = 0, \quad x = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя общее решение уравнения (15)

$$w(x) = C_1 \sin \beta_0 x + C_2 \cos \beta_0 x + C_3 x + C_4$$

в граничные условия (16), получим, что краевая задача (15), (16) имеет нетривиальное решение, если

$$\beta_0 \cos \beta_0 + c \sin \beta_0 = 0. \quad (17)$$

Критический параметр нагрузки  $\beta_c$  находится по формуле

$$\beta_c = \beta_0^2 / \varepsilon^2, \quad (18)$$

где  $\beta_0$  — наименьший положительный корень уравнения (17).

В случае произвольного значения  $S_0$ , принимая во внимание формулы (5), (10) и (12), получаем следующие приближенные выражения для начальных напряжений в узкой пластинке:

$$t_1(x) = 1 - \frac{\varepsilon x}{\varepsilon + S_n}, \quad t_2 = \frac{\nu S_n - 1}{\varepsilon + S_n}, \quad S_n = \frac{S_0}{1 + \nu}. \quad (19)$$

Уравнение (13) и граничные условия (14) принимают вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta_0^2 t_1(x) \frac{d^2 w}{dx^2} + \varepsilon \beta_0^2 t_2 \frac{dw}{dx} = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} w = w' = 0, \quad x = 0, \\ w'' + cw' = 0, \quad w''' + \beta_0^2 t_1(1)w' = 0, \quad x = 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Краевая задача (20), (21) не имеет аналитического решения. Для определения приближенного значения  $\beta_c$  используем вариационный метод. Умножив уравнение (20) на  $w$  и проинтегрировав по частям полученное равенство на интервале  $[0, 1]$ , получим

$$[w'''w - w''w']_0^1 + \int_0^1 (w'')^2 dx + \beta_0^2 \int_0^1 t_1 w'' w dx + \varepsilon \beta_0^2 t_2 \int_0^1 w' w dx = 0. \quad (22)$$

Принимая во внимание граничные условия (21), из уравнения (22) находим

$$\beta_0^2 = \frac{G_1 + I_1}{G_2 + I_2 + I_3}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 = c[w'(1)]^2, \quad G_2 = t_1(1)w'(1)w(1), \quad I_1 = \int_0^1 (w'')^2 dx, \\ I_2 = -\varepsilon t_2 \int_0^1 w' w dx, \quad I_3 = - \int_0^1 t_1 w'' w dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка в формулы (23), (24) вместо  $w(x)$  произвольной функции  $W(x)$ , удовлетворяющей граничным условиям  $W(0) = W'(0) = 0$ , даст приближенное значение  $\beta_0$ , причем точность приближения будет тем выше, чем ближе  $W(x)$  к точному решению  $w(x)$  краевой задачи (20), (21).

Для выбора функции  $W(x)$  воспользуемся решениями краевой задачи (15), (16). При  $c = 0$  из уравнения (17) следует, что его наименьший положительный корень равен  $\beta_0 = \pi/2$ . Соответствующая  $\beta_0 = \pi/2$  форма потери устойчивости имеет вид  $W_1(x) = 1 - \cos(\pi x/2)$ . Если  $c = \infty$ , имеем  $\beta_0 = \pi$ , а форма потери устойчивости такова:  $W_2(x) = 1 - \cos(\pi x)$ . При произвольном значении  $c$  в качестве приближенной формы потери устойчивости можно взять

$$W(x) = 1 - \cos kx, \quad (25)$$

где функция  $k(c)$  такова, что  $k(0) = \pi/2$ ,  $k(\infty) = \pi$ . Выберем  $k = \pi(c + 1)/(c + 2)$ .

Формула (23) для краевой задачи (15), (16) после подстановки в соотношения (24) функции (25) и отбрасывания малых членов принимает вид

$$\beta_0^2 = \frac{4ck \sin k + k^2(2k + \sin 2k)}{2k - \sin 2k}. \quad (26)$$

Результаты расчетов по формуле (26) практически совпадают с результатами численного решения уравнения (17). Полученные по формуле (26) приближенные значения  $\beta_0$  приведены во втором столбце табл. 1, а результаты численных расчетов — в третьем столбце.

Таблица 1. Зависимость  $\beta_0$  от  $c$

c	Значения $\beta_0$	
	Формула (26)	Работа [4]
0	1.57	1.57
2.52	2.39	2.38
4.48	2.61	2.61
7.00	2.76	2.76
10.08	2.86	2.86

Используем функцию (25) и для вычисления собственного значения краевой задачи (20), (21). Подставив (25) вместо  $w(x)$  в формулы (24), получим

$$\begin{aligned}
 G_1 &= c(k \sin k)^2, & G_2 &= \frac{S_n k \sin k (1 - \cos k)}{S_n + \varepsilon}, \\
 I_1 &= \frac{k^3}{4}(2k + \sin 2k), & I_2 &= \varepsilon \frac{1 - \nu S_n}{2(S_n + \varepsilon)}(1 - \cos k)^2, \\
 I_3 &= \frac{2k^2(2S_n + \varepsilon) - 2kS_n(4 \sin k - \sin 2k) - \varepsilon(7 - 8 \cos k + \cos 2k)}{8(S_n + \varepsilon)}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Формула (23) с коэффициентами (27) дает приближенное выражение для наименьшего положительного собственного значения краевой задачи (20), (21). Параметр критической нагрузки  $\beta_c$  находим по формуле (18).

**5. Пример расчета.** Рассмотрим кольцевую пластинку с параметрами  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $h_n = h_p/r_0 = 0.01$ , сопряженную с круговым стержнем, имеющим прямоугольное поперечное сечение шириной  $a = a_n r_0$  и высотой  $b = b_n r_0$  (см. рис. 2). Тогда  $S_n = a_n b_n / h_n$ ,  $J = a^3 b / 12$ . Значения безразмерной жесткости  $c$ , величины  $S_n$ , коэффициентов  $I_1$ ,  $G_2$  и параметра критической нагрузки  $\beta_c$  для различных  $a_n$  и  $b_n$  приведены в табл. 2.

Таблица 2. Зависимость величин  $c$ ,  $S_n$ ,  $I_1$ ,  $G_2$  и  $\beta_c$  от размеров поперечного сечения стержня

$a_n$	$b_n$	c	$S_n$	$I_1$	$G_2$	Значения $\beta_c$	
						Формула (23)	Прогонка
0	0.0	0	0.0	3.04	0.0	830	784
0.01	0.01	0.001	0.01	3.05	0.15	685	663
0.04	0.01	0.058	0.04	3.31	0.48	520	515
0.05	0.02	0.227	0.10	4.08	0.99	448	447
0.06	0.03	0.590	0.18	5.74	1.57	469	468
0.07	0.04	1.248	0.28	8.78	2.07	542	541
0.08	0.05	2.330	0.40	13.5	2.24	640	639
0.10	0.07	6.370	0.70	25.7	1.71	816	816
0.12	0.09	14.15	1.08	35.3	1.03	915	915

В последнем столбце табл. 2 содержатся значения  $\beta_c$ , полученные численным интегрированием краевой задачи (20), (21) методом прогонки. Сравнение численных результатов с результатами расчетов по приближенной формуле (23) из предпоследнего столбца табл. 2 показывает, что для рассматриваемого примера погрешность формулы (23) не превосходит 6%.

При увеличении размеров поперечного сечения стержня параметр критической нагрузки  $\beta_c$  сначала убывает, а затем начинает возрастать. Основное влияние на изменение  $\beta_c$  оказывают величины коэффициентов  $I_1$  и  $G_2$ . С увеличением  $a_n$  и  $b_n$  зависящий от относительной жесткости стержня с коэффициент  $I_1$  монотонно возрастает, однако при малых  $a_n$  и  $b_n$  его величина меняется мало. В то же время в области малых  $a_n$  и  $b_n$  с возрастанием размеров поперечного сечения увеличивается значение коэффициента  $G_2$ , пропорционального докритическому усилию  $t_1$  на внешнем крае пластинки. Это и вызывает убывание параметра  $\beta_c$ . Быстрое возрастание коэффициента  $I_1$  с увеличением жесткости  $s$  при  $a_n > 0.06$ ,  $b_n > 0.03$  приводит к росту параметра  $\beta_c$ . Следовательно, убывание критической нагрузки с ростом размеров поперечного сечения стержня связано с увеличением докритического усилия  $t_1$  на внешнем крае пластинки, а ее возрастание — с увеличением жесткости стержня  $s$ .

Приближенная формула связи между параметром  $\beta_c$  и безразмерной величиной  $\lambda_c = (1 - \nu^2)r_0 p_c / (E h_s)$ , где  $p_c$  — критическое внешнее давление, действующее на цилиндрическую оболочку, получена в работе [6]. При выводе этой формулы использовано приближенное представление осесимметричного напряженно-деформированного состояния оболочки в виде суммы безмоментного состояния и краевого эффекта [9], зависящей от четырех произвольных постоянных. Еще две произвольные постоянные входят в общее решение (7) уравнений (6), описывающих осесимметричную деформацию кольцевой пластинки в ее плоскости. Подстановка суммы безмоментного состояния и краевого эффекта и решения (7) в шесть условий сопряжения пластины и оболочки дала систему линейных алгебраических уравнений, из которой были найдены произвольные постоянные. Это позволило, в частности, найти зависимость начального усилия  $T_1$  от величины действующего на оболочку внешнего давления  $p$ . После этого связь между безразмерным давлением  $\lambda$  и безразмерным напряжением  $\beta$  на внутреннем контуре пластины была найдена из граничного условия на этом контуре.

Для случая внутреннего давления, поменяв знак величины давления  $p_c$  в формуле из работы [6], получим

$$\lambda_c = \frac{h_n^2}{12} (L_1 + L_2) \beta_c. \quad (28)$$

Здесь

$$L_1 = \frac{\gamma \delta (K + r_1^2)}{\delta r_1^2 - \gamma K}, \quad L_2 = \frac{q h_n}{h \mu}, \quad K = \frac{\delta (1 - \gamma S_n)}{\gamma (1 + \delta S_n)}, \quad q = \frac{(\gamma \delta)^{1/4}}{2\sqrt{2}}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12}, \quad h = \frac{h_s}{r_0}.$$

Слагаемое  $L_1$  в формуле (28) представляет собой вклад безмоментного состояния, а слагаемое  $L_2$  связано с учетом краевых эффектов.

При увеличении размеров поперечного сечения стержня безразмерное критическое давление  $\lambda_c$ , как и параметр  $\beta_c$ , сначала убывает, а затем начинает возрастать. На рис. 3 для кольцевой пластинки с параметрами  $h_n = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\nu = 0.3$ , сопряженной с цилиндрической оболочкой толщиной  $h = 0.01$  и круговым стержнем, имеющим квадратное поперечное сечение, представлены графики зависимости величин  $\Lambda = 10^2 \lambda_c$  и  $\beta_0 = \varepsilon^2 \beta_c$  от размера поперечного сечения  $a_n = b_n$ .

С увеличением  $a_n$  возрастание безразмерного критического давления  $\lambda_c$  происходит медленнее, чем возрастание величины  $\beta_c$ . При  $a_n = 0.1$  значение  $\lambda_c = 0.054$  оказывается более чем в два раза меньше критического давления  $\lambda_c = 0.119$  при



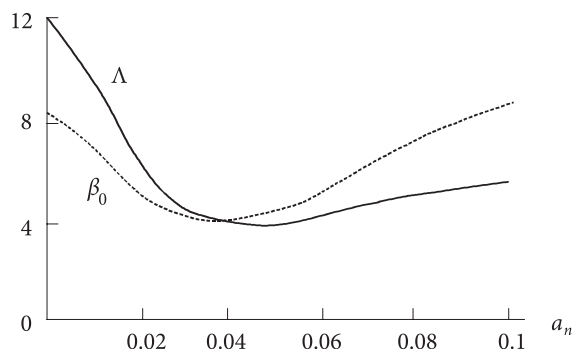


Рис. 3. Зависимости параметров  $\Lambda = 10^2 \lambda_c$  и  $\beta_0 = \varepsilon^2 \beta_c$  от размера поперечного сечения стержня  $a_n$ .

$a_n = 0$ , т. е. критического давления для пластинки, не подкрепленной стержнем. Этот эффект связан с заметным уменьшением коэффициента  $L_1$  в формуле (28) при увеличении размеров поперечного сечения стержня. Если  $S_n = 0$ , имеем  $L_1 = 1/\varepsilon$ , а при  $S_n \sim 1$ , пренебрегая величинами порядка  $\varepsilon$ , получаем  $L_1 = 1/S_n$ .

**6. Заключение.** Результаты расчетов свидетельствуют о том, что в задаче о потере устойчивости подкрепленной оболочки под действием внутреннего давления шпангоуты с прямоугольным поперечным сечением оказываются более эффективными по сравнению со шпангоутами с тавровым поперечным сечением. В работе [6] показано, что при действии на подкрепленную оболочку внешнего давления более эффективными являются шпангоуты с тавровым сечением.

## Литература

1. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Tian J., Wang C. M., Swaddiwudhipong S. Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via the Ritz method // Thin Walled Structures, 1999. Vol. 35. P. 1–24.
3. Teng J. G., Rotter J. M. Buckling of Thin Metal Shells. CRC Press, 2003. 520 p.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Пустовой Н. В., Матвеев К. А., Мозовнев Д. В. Устойчивость кольцевых ортотропных пластин // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 2. С. 166–170.
6. Боярская М. Л., Филиппов С. Б. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2015. Т. 2(60), вып. 3. С. 431–442.
7. Filippov S. B. Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach // Technische Mechanik. 2004. Band 24, Heft 3–4. P. 221–230.
8. Mansfield E. H. On the buckling of an annular plate // Quart. J. Mech. and Applied Math. 1960. Vol. 13. P. 16–23.
9. Tovstik P. E., Smirnov A. L. Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific Publishing Co Ltd., 2001. 347 p.

Статья поступила в редакцию 5 ноября 2015 г.

## Сведения об авторах

Боярская Мария Леонидовна — аспирант; marusya1904@mail.ru

Филиппов Сергей Борисович — доктор физико-математических наук, профессор;  
s\_b\_filipov@mail.ru

# BUCKLING OF A RING JOINT WITH THE CYLINDRICAL SHELL UNDER INTERNAL PRESSURE IN THE SHELL

Maria L. Boyarskaya, Sergey B. Filippov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; marusya1904@mail.ru, s\_b\_filippov@mail.ru

Buckling under the uniform internal pressure of a thin circular cylindrical shell supported by the rings with T-shaped cross-section is studied. As a model of the ring the annular plate supported on outer edge by a circular beam is used. The classical model of a ring — a beam with T-shaped cross-section does not allow to solve the given problem, because the buckling deformations are localized on the surface of the ring. It is impossible to find the critical pressure corresponding to such loss of stability by means of the beam model.

In the first approximation the buckling problem for the annular plate joint with the cylindrical shell is reduced to the solution of an eigenvalue problem for the bending equation of the annular plate. In the assumption, that the width of the plate is much less than its internal radius the approximate formulas for calculation of the critical pressure are obtained. The results found by Rayleigh—Ritz method and shooting procedure differ a little from each other. It is shown, that the critical pressure for the rings with the rectangular cross-section is greater, than for the rings with T-shaped cross-section. Refs 9. Figs 3. Tables 2.

*Keywords:* buckling, cylindrical shell, ring of T-shaped cross-section, asymptotic methods.

## References

1. Andrianov I. V., Lesnichaya V. A., Manevich L. I., *Averaging in statics and dynamics of ring-stiffened shells* (Nauka, Moscow, 1985) [in Russian].
2. Tian J., Wang C. M., Swaddiwudhipohg S., “Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via the Ritz method”, *Thin Walled Structures* **35**, 1–24 (1999).
3. Teng J. G., Rotter J. M., *Buckling of Thin Metal Shells* (CRC Press, 2003).
4. Volmir A. S., *Stability of deformable systems* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
5. Pustovoi N. V., Matveev K. A., Mokhovnev D. V., “Buckling of annular orthotropic plates”, *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* **41**, 166–170 (2000) [in Russian].
6. Boyarskaya M. L., Filippov S. B., “Buckling of cylindrical shell stiffened by rings with T-shaped cross-section”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Series 1* **2(60)**, Issue 3, 431–442 (2015) [in Russian].
7. Filippov S. B., “Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach”, *Technische Mechanik* **24**(3–4), 221–230 (2004).
8. Mansfield E. H., “On the buckling of an annular plate”, *Quart. J. Mech. and Applied Math.* **13**, 16–23 (1960).
9. Tovstik P. E., Smirnov A. L., *Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells* (World Scientific Publishing Co Ltd., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001).