

В.А.Барт, П.К.Черняев

Индивидуальные задания по
математическому анализу

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

В.А.Барт, П.К.Черняев

Индивидуальные задания по
математическому анализу

ЭФ СПбГУ
Санкт-Петербург
2012

УДК 519
ББК 65.9(2)
Б 24

Рецензент д-р физ.-мат. наук,
заслуженный работник Высшей школы,
профессор (Санкт-Петербургский университет) Ю.В. Чурин

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
экономического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета*

Б24 Барт В.А., Черняев П.К. Индивидуальные задания по математическому анализу:
Учеб. пособие – СПб.: ЭФ СПбГУ, 2012.- 32 с.

Настоящее пособие адресовано в первую очередь студентам, обучающимся по направлению «Экономика». Индивидуальные задания могут использоваться для домашних, самостоятельных и контрольных работ.

Предназначено для студентов социально-экономических направлений, а также преподавателей университетов.

Без объявл.

ББК 65.9(2)

© В.А.Барт, П.К.Черняев, 2012
© ЭФ СПбГУ, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости.	
Задание № 1.....	4
Задание № 2.....	4
Задание № 3.....	4
Задание № 4.....	5
Задание № 5.....	5
Тема 2. Множества и функции.	
Задание № 6.....	5
Задание № 7.....	6
Задание № 8.....	6
Задание № 9.....	7
Задание № 10.....	7
Задание № 11.....	8
Тема 3. Пределы и непрерывность.	
Задание № 12.....	9
Задание № 13.....	13
Тема 4. Производная и исследование функций.	
Задание № 14.....	16
Задание № 15.....	17
Тема 5. Интегрирование.	
Задание № 16.....	19
Задание № 17.....	20
Задание № 18.....	21
Задание № 19.....	22
Тема 6. Числовые и степенные ряды.	
Задание № 20.....	23
Задание № 21.....	25
Задание № 22.....	25
Задание № 23.....	26
Тема 7. Функции нескольких переменных.	
Задание № 24.....	27
Задание № 25.....	29
Тема 8. Двойные интегралы.	
Задание № 26.....	32

Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости.

Задание № 1. Для треугольника ABC найти уравнение высоты CE и длину высоты BD . Координаты вершин находятся в таблице:

№ варианта	Координаты вершин
1	$A(1; -3), B(-3; 5), C(7; 11)$.
2	$A(4; -2), B(8; 16), C(-2; 0)$.
3	$A(2; 6), B(4; -2), C(8; 10)$.
4	$A(1; 3), B(5; 1), C(-3; -1)$.
5	$A(1; 3), B(7; 1), C(0; -2)$.
6	$A(0; 3), B(4; 2), C(-1; 1)$.
7	$A(-3; 2), B(-1; 8), C(3; 0)$.
8	$A(-3; 3), B(-1; 9), C(3; 5)$.
9	$A(8; 0), B(0; 6), C(3; 10)$.
10	$A(0; 0), B(8; 6), C(5; 10)$.
11	$A(2; -1), B(-2; 7), C(8; 13)$.
12	$A(5; 0), B(9; 18), C(-1; 2)$.
13	$A(3; 8), B(5; 0), C(9; 12)$.
14	$A(2; 5), B(6; 3), C(-2; 1)$.
15	$A(2; 5), B(8; 3), C(1; 0)$.

№ варианта	Координаты вершин
16	$A(1; 5), B(5; 4), C(0; 3)$.
17	$A(-2; 4), B(0; 10), C(4; 2)$.
18	$A(-2; 5), B(0; 11), C(4; 7)$.
19	$A(9; 2), B(1; 8), C(4; 12)$.
20	$A(1; 2), B(9; 8), C(6; 12)$.
21	$A(4; -3), B(0; 5), C(10; 11)$.
22	$A(7; -2), B(11; 16), C(1; 0)$.
23	$A(5; 6), B(7; -2), C(11; 10)$.
24	$A(4; 3), B(8; 1), C(0; -1)$.
25	$A(4; 3), B(10; 1), C(3; -2)$.
26	$A(3; 3), B(7; 2), C(2; 1)$.
27	$A(0; 2), B(2; 8), C(6; 0)$.
28	$A(0; 3), B(2; 9), C(6; 5)$.
29	$A(11; 0), B(3; 6), C(6; 10)$.
30	$A(3; 0), B(11; 6), C(8; 10)$.

Задание № 2. Найти площадь ромба с известными вершинами A, B и диагональю, заданной уравнением:

№ варианта	Координаты вершин	Уравнение диагонали
1	$A(-2; -1), B(1; 8)$	$x + y = 9$.
2	$A(-3; -1), B(2; 4)$	$2x + y = 8$.
3	$A(-4; -1), B(1; 4)$	$3x + y = 7$.
4	$A(-2; -3), B(1; 2)$	$4x + y = 6$.
5	$A(-3; -6), B(5; -20)$	$5x + y = 5$.
6	$A(-4; -9), B(1; -2)$	$6x + y = 4$.
7	$A(-7; 2), B(1; -4)$	$7x + y = 3$.
8	$A(-8; 1), B(1; -6)$	$8x + y = 2$.
9	$A(18; 3), B(1; -8)$	$9x + y = 1$.
10	$A(11; -9), B(-2; 20)$	$10x + y = 0$.
11	$A(-2; 2), B(1; 11)$	$x + y = 12$.
12	$A(-3; 2), B(2; 7)$	$2x + y = 11$.
13	$A(-4; 2), B(1; 7)$	$3x + y = 10$.
14	$A(-2; 6), B(1; 5)$	$4x + y = 9$.
15	$A(-3; -3), B(5; -17)$	$5x + y = 8$.

№ варианта	Координаты вершин	Уравнение диагонали
16	$A(-4; -6), B(1; 1)$	$6x + y = 7$.
17	$A(-7; 5), B(1; -1)$	$7x + y = 6$.
18	$A(-8; 4), B(1; -3)$	$8x + y = 5$.
19	$A(18; 6), B(1; -5)$	$9x + y = 4$.
20	$A(11; -6), B(-2; 23)$	$10x + y = 3$.
21	$A(3; -1), B(6; 8)$	$x + y = 14$.
22	$A(2; -1), B(7; 4)$	$2x + y = 18$.
23	$A(1; -1), B(6; 4)$	$3x + y = 22$.
24	$A(3; 3), B(6; 2)$	$4x + y = 26$.
25	$A(2; -6), B(10; -20)$	$5x + y = 30$.
26	$A(1; -9), B(6; -2)$	$6x + y = 34$.
27	$A(-2; 2), B(6; -4)$	$7x + y = 38$.
28	$A(-3; 1), B(6; -6)$	$8x + y = 42$.
29	$A(23; 3), B(6; -8)$	$9x + y = 46$.
30	$A(16; -9), B(3; 20)$	$10x + y = 50$.

Задание № 3. Вывести неравенство для множества точек плоскости, расстояние от которых до точки P больше расстояния до точки Q . Полученное множество изобразить.

№ варианта	Координаты точек P и Q
1	$P(-9; 2), Q(-3; 5)$
2	$P(-10; 3), Q(-4; 6)$
3	$P(-5; 2), Q(4; 5)$
4	$P(-4; -1), Q(3; 2)$
5	$P(-5; 1), Q(7; -2)$
6	$P(-3; 4), Q(9; 1)$
7	$P(-6; 1), Q(4; -1)$
8	$P(-3; 3), Q(7; 1)$
9	$P(6; 4), Q(-3; 1)$
10	$P(-1; 6), Q(2; -9)$

№ варианта	Координаты точек P и Q
11	$P(-4; 1), Q(2; 4)$
12	$P(-5; 2), Q(1; 5)$
13	$P(0; 1), Q(9; 4)$
14	$P(1; -2), Q(8; 1)$
15	$P(0; 0), Q(12; -3)$
16	$P(2; 3), Q(14; 0)$
17	$P(-1; 0), Q(9; -2)$
18	$P(2; 2), Q(12; 0)$
19	$P(11; 3), Q(2; 0)$
20	$P(4; 5), Q(7; -10)$

№ варианта	Координаты точек P и Q
21	$P(-7; -3), Q(-1; 2)$
22	$P(-8; 0), Q(-2; 3)$
23	$P(-35; -1), Q(6; 2)$
24	$P(-24; -4), Q(5; -1)$
25	$P(-3; -2), Q(9; -5)$
26	$P(-1; 1), Q(11; -2)$
27	$P(-4; -2), Q(6; -4)$
28	$P(-1; 0), Q(9; -2)$
29	$P(8; 1), Q(-1; -2)$
30	$P(1; 3), Q(4; -12)$

Задание № 4. Составить уравнение множества точек плоскости, расстояние от которых до точки P в два раза больше расстояния до точки Q . Полученное множество изобразить.

№ варианта	Координаты точек P и Q
1	$P(-9; 2), Q(-3; 5)$
2	$P(-10; 3), Q(-4; 6)$
3	$P(-5; 2), Q(4; 5)$
4	$P(-4; -1), Q(3; 2)$
5	$P(-5; 1), Q(7; -2)$
6	$P(-3; 4), Q(9; 1)$
7	$P(-6; 1), Q(4; -1)$
8	$P(-3; 3), Q(7; 1)$
9	$P(6; 4), Q(-3; 1)$
10	$P(-1; 6), Q(2; -9)$

№ варианта	Координаты точек P и Q
11	$P(-4; 1), Q(2; 4)$
12	$P(-5; 2), Q(1; 5)$
13	$P(0; 1), Q(9; 4)$
14	$P(1; -2), Q(8; 1)$
15	$P(0; 0), Q(12; -3)$
16	$P(2; 3), Q(14; 0)$
17	$P(-1; 0), Q(9; -2)$
18	$P(2; 2), Q(12; 0)$
19	$P(11; 3), Q(2; 0)$
20	$P(4; 5), Q(7; -10)$

№ варианта	Координаты точек P и Q
21	$P(-7; -3), Q(-1; 2)$
22	$P(-8; 0), Q(-2; 3)$
23	$P(-35; -1), Q(6; 2)$
24	$P(-24; -4), Q(5; -1)$
25	$P(-3; -2), Q(9; -5)$
26	$P(-1; 1), Q(11; -2)$
27	$P(-4; -2), Q(6; -4)$
28	$P(-1; 0), Q(9; -2)$
29	$P(8; 1), Q(-1; -2)$
30	$P(1; 3), Q(4; -12)$

Задание № 5. Составить уравнение множества точек плоскости, равноудаленных от точки F и от данной прямой. Полученное множество изобразить.

№ вар.	Координаты точек	Уравнение прямой
1	$F(1; 8)$	$x - 2y = -5.$
2	$F(2; 7)$	$x - 2y = -2.$
3	$F(3; 6)$	$x - 2y = 1.$
4	$F(4; 5)$	$x - 2y = 4.$
5	$F(5; 4)$	$x - 2y = 7.$
6	$F(6; 3)$	$x - 2y = 10.$
7	$F(7; 2)$	$x - 2y = 13.$
8	$F(8; 1)$	$x - 2y = 16.$
9	$F(9; 0)$	$x - 2y = 19.$
10	$F(0; 9)$	$x - 2y = -8.$

№ вар.	Координаты точек	Уравнение прямой
11	$F(1; 9)$	$x - 2y = -7.$
12	$F(2; 8)$	$x - 2y = -4.$
13	$F(3; 7)$	$x - 2y = -1.$
14	$F(4; 6)$	$x - 2y = 2.$
15	$F(5; 5)$	$x - 2y = 5.$
16	$F(6; 4)$	$x - 2y = 8.$
17	$F(7; 3)$	$x - 2y = 11.$
18	$F(8; 2)$	$x - 2y = 14.$
19	$F(9; 1)$	$x - 2y = 17.$
20	$F(0; 10)$	$x - 2y = -10.$

№ вар.	Координаты точек	Уравнение прямой
21	$F(1; 6)$	$x - 2y = -1.$
22	$F(2; 5)$	$x - 2y = 2.$
23	$F(3; 4)$	$x - 2y = 5.$
24	$F(4; 3)$	$x - 2y = 8.$
25	$F(5; 2)$	$x - 2y = 11.$
26	$F(6; 1)$	$x - 2y = 14.$
27	$F(7; 0)$	$x - 2y = 17.$
28	$F(8; -1)$	$x - 2y = 20.$
29	$F(9; -2)$	$x - 2y = 23.$
30	$F(0; 7)$	$x - 2y = -4.$

Тема 2. Множества и функции.

Задание № 6. Доказать равенство:

- $(A \cup B) \cap C' = (A \cap C) \cup (B \cap C).$
- $(A \cup B) \setminus C = (A \cap C') \cup (B \cap C').$
- $(A \cap B) \cup C' = (A \cup C') \cap (B \cup C').$
- $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \cap C').$
- $(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus (B \cap A)) \cup (B \cap C).$
- $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$
- $(A \cup B') \cap C = (A \cap C) \cup (C \setminus B).$
- $(A \cup B') \setminus C = (B \cup C)' \cup (A \setminus C).$
- $(A \cap B') \cup C = (A \cup C) \cap (B \setminus C)'$
- $(A \cap B') \setminus C = (A \setminus C) \setminus B.$
- $(A \setminus B') \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$
- $(A \setminus B') \cap C = (A \cap B) \setminus C'.$
- $(A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C').$
- $(A \cap B) \setminus C' = (B \cap C) \setminus A'.$
- $(A \setminus B) \cup C' = (C \setminus A') \setminus (A \cap B \cap C).$
- $A \cup (B \cap C') = (B \cup A) \cap (C \setminus A)'$
- $A \cap (B \cup C') = (B \cap A) \cup (A \setminus C).$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$
- $A \cup (B' \cap C) = (C \cup A) \cap (B \setminus A)'$
- $A \cap (B' \cup C) = (A \cap C) \cup (A \setminus B).$
- $A \setminus (B' \cup C) = (B \cap A) \setminus C.$
- $A \setminus (B' \cap C) = (A \setminus C) \cup (A \cap B).$
- $A \cup (B \setminus C') = (B \cup A) \cap (C \cup A).$
- $A \cap (B \setminus C') = (B \cap A) \setminus C.$

Задание № 7. Выполнить указанные действия и записать число в алгебраической форме:

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\frac{(1-2i)^3}{2+i} + 1-i;$ | 11. $\frac{(1+2i)^3}{2-i} + 2+i;$ | 21. $\frac{(3+i)^3}{1-2i} + 9-i;$ |
| 2. $\frac{(1+2i)^4}{2-i} + 2-i;$ | 12. $\frac{(1-2i)^4}{2+i} + 2+2i;$ | 22. $\frac{(3-i)^4}{1+2i} + 2+i;$ |
| 3. $\frac{(2-i)^3}{1+2i} + 3-i;$ | 13. $\frac{(1-3i)^3}{2+i} + 1-i;$ | 23. $\frac{(1+3i)^3}{2-i} + 2+i;$ |
| 4. $\frac{(2+i)^4}{1-2i} + 4-i;$ | 14. $\frac{(1+3i)^4}{2-i} + 2-i;$ | 24. $\frac{(1-3i)^4}{2+i} + 2+2i;$ |
| 5. $\frac{(-1+2i)^3}{2+i} + 5-i;$ | 15. $\frac{(3-i)^3}{1+2i} + 3-i;$ | 25. $\frac{(1-4i)^3}{2+i} + 1-i;$ |
| 6. $\frac{(-2+i)^4}{1-2i} + 6-i;$ | 16. $\frac{(3+i)^4}{1-2i} + 4-i;$ | 26. $\frac{(1+4i)^4}{2-i} + 2-i;$ |
| 7. $\frac{(-2+i)^3}{1-2i} + 7-i;$ | 17. $\frac{(-1+3i)^3}{2+i} + 5-i;$ | 27. $\frac{(4-i)^3}{1+2i} + 3-i;$ |
| 8. $\frac{(-1+2i)^4}{2+i} + 8-i;$ | 18. $\frac{(-3+i)^4}{1-2i} + 6-i;$ | 28. $\frac{(4+i)^4}{1-2i} + 4-i;$ |
| 9. $\frac{(2+i)^3}{1-2i} + 9-i;$ | 19. $\frac{(-3+i)^3}{1-2i} + 7-i;$ | 29. $\frac{(-1+4i)^3}{2+i} + 5-i;$ |
| 10. $\frac{(2-i)^4}{1+2i} + 2+i;$ | 20. $\frac{(-1+3i)^4}{2+i} + 8-i;$ | 30. $\frac{(-4+i)^4}{1-2i} + 6-i.$ |

Задание № 8. Решить уравнение:

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $x^2 - (8+2i)x - 10 + 8i = 0.$ | 2. $x^2 - (7+i)x - 6 + 17i = 0.$ |
| 3. $x^2 - (6+i)x - 1 + 23i = 0.$ | 4. $x^2 - (5+i)x + 6 + 27i = 0.$ |
| 5. $x^2 - (4+i)x + 15 + 29i = 0.$ | 6. $x^2 - (3+i)x + 26 + 29i = 0.$ |
| 7. $x^2 - (2+i)x + 39 + 27i = 0.$ | 8. $x^2 - (1+i)x + 54 + 23i = 0.$ |
| 9. $x^2 - (-2+i)x + 73 - i = 0.$ | 10. $x^2 - (2+7i)x + 9 + 7i = 0.$ |
| 11. $x^2 - (-1+8i)x - 9 + 5i = 0.$ | 12. $x^2 - (-2+8i)x - 15 = 0.$ |
| 13. $x^2 - (-3+8i)x - 19 - 7i = 0.$ | 14. $x^2 - (-4+8i)x - 21 - 16i = 0.$ |
| 15. $x^2 - (-5+8i)x - 21 - 27i = 0.$ | 16. $x^2 - (-6+8i)x - 19 - 40i = 0.$ |
| 17. $x^2 - (-7+8i)x - 15 - 55i = 0.$ | 18. $x^2 - (-8+6i)x + 7 - 74i = 0.$ |
| 19. $x^2 - (9+12i)x - 19 + 75i = 0.$ | 20. $x^2 - (9+3i)x + 18 + i = 0.$ |
| 21. $x^2 - (8+6i)x + 7 + 16i = 0.$ | 22. $x^2 - (7+8i)x - 2 + 22i = 0.$ |
| 23. $x^2 - (6+10i)x - 13 + 26i = 0.$ | 24. $x^2 - (5+12i)x - 26 + 28i = 0.$ |
| 25. $x^2 - (4+14i)x - 41 + 28i = 0.$ | 26. $x^2 - (1-i)x + 40 - 20i = 0.$ |
| 27. $x^2 - (-7+i)x + 24 - 75i = 0.$ | 28. $x^2 - (-1+3i)x + 34 - 34i = 0.$ |
| 29. $x^2 - (-2+5i)x + 28 - 44i = 0.$ | 30. $x^2 - (-2-4i)x - 18 - 4i = 0.$ |

Задание № 9. Выполнить указанные действия и записать число в алгебраической форме:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{(1-i)^4};$ | 2. $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{(2+2i)^4};$ | 3. $\frac{(-1-\sqrt{3}i)^3}{(2-2i)^6};$ |
| 4. $\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{(1-i)^8};$ | 5. $\frac{(1+i)^4}{(2-\sqrt{12}i)^6};$ | 6. $\frac{(-1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^6};$ |
| 7. $\frac{(-1-i)^4}{(\sqrt{3}+i)^{12}};$ | 8. $\frac{(1-i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^9};$ | 9. $\frac{(\sqrt{3}+i)^6}{(2-2i)^4};$ |
| 10. $\frac{(-\sqrt{3}+i)^6}{(1+i)^{10}};$ | 11. $\frac{(-\sqrt{3}-i)^6}{(1-i)^8};$ | 12. $\frac{(\sqrt{3}-i)^6}{(2+2i)^8};$ |
| 13. $\frac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^6};$ | 14. $\frac{(-1+i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^6};$ | 15. $\frac{(-1-i)^8}{(\sqrt{3}-i)^6};$ |
| 16. $\frac{(1-i)^8}{(1+\sqrt{3}i)^9};$ | 17. $\frac{(1+\sqrt{3}i)^9}{(2-2i)^6};$ | 18. $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^9}{(1+i)^{12}};$ |
| 19. $\frac{(-1-\sqrt{3}i)^9}{(-2+2i)^8};$ | 20. $\frac{(1-\sqrt{3}i)^9}{(2+2i)^6};$ | 21. $\frac{(1+i)^{12}}{(\sqrt{3}-i)^9};$ |
| 22. $\frac{(-1+i)^{12}}{(\sqrt{3}+i)^9};$ | 23. $\frac{(-1-i)^{12}}{(-\sqrt{3}+i)^6};$ | 24. $\frac{(1-i)^{12}}{(-\sqrt{3}-i)^6};$ |
| 25. $\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(-1-i)^8};$ | 26. $\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(-2+2i)^7};$ | 27. $\frac{(-\sqrt{3}-i)^{12}}{(2-2i)^5};$ |
| 28. $\frac{(\sqrt{3}-i)^{12}}{(2+2i)^6};$ | 29. $\frac{(1+i)^{16}}{(1-\sqrt{3}i)^6};$ | 30. $\frac{(-1+i)^{16}}{(\sqrt{3}+i)^7};$ |

Задание № 10. Найти все значения указанного корня и изобразить их на комплексной плоскости:

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\sqrt[3]{2i-2};$ | 2. $\sqrt[6]{-27};$ | 3. $\sqrt[4]{i};$ |
| 4. $\sqrt[6]{1};$ | 5. $\sqrt[3]{-8};$ | 6. $\sqrt[6]{-i};$ |
| 7. $\sqrt[4]{-4};$ | 8. $\sqrt[8]{16};$ | 9. $\sqrt[3]{-i};$ |
| 10. $\sqrt[6]{-64};$ | 11. $\sqrt[4]{-i};$ | 12. $\sqrt[6]{-1};$ |
| 13. $\sqrt[3]{1};$ | 14. $\sqrt[6]{i};$ | 15. $\sqrt[4]{1};$ |
| 16. $\sqrt[8]{-1};$ | 17. $\sqrt[5]{-4-4i};$ | 18. $\sqrt[3]{-27};$ |
| 19. $\sqrt[4]{16i};$ | 20. $\sqrt[6]{64};$ | 21. $\sqrt[5]{-8};$ |
| 22. $\sqrt[6]{-64i};$ | 23. $\sqrt[6]{-64};$ | 24. $\sqrt[8]{256};$ |
| 25. $\sqrt[7]{8-8i};$ | 26. $\sqrt[4]{-2-\sqrt{12}i};$ | 27. $\sqrt[5]{2-\sqrt{12}i};$ |
| 28. $\sqrt[5]{-1};$ | 29. $\sqrt[5]{1};$ | 30. $\sqrt[6]{64i};$ |

Задание № 11. Найти область определения и исследовать на четность, нечетность и периодичность следующие функции:

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}; g(x) = \log_x \frac{9 - x^2}{x}; h(x) = \sin^2 x.$$

$$2. f(x) = \frac{x}{x-2}; g(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}; h(x) = \arcsin \frac{2}{x+3}.$$

$$3. f(x) = \sqrt{6 + 5x - x^2}; g(x) = 5^x + 5^{-x}; h(x) = \ln \cos x.$$

$$4. f(x) = \frac{x}{x+3}; g(x) = \frac{4^x - 1}{2^x}; h(x) = \sin \lg x.$$

$$5. f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}; g(x) = \log_x \frac{1 - x^2}{x}; h(x) = \sin^3 x.$$

$$6. f(x) = \frac{x}{x+4}; g(x) = \lg \frac{2-x}{2+x}; h(x) = \arcsin \frac{3}{x-2}.$$

$$7. f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}; g(x) = 2^x + 2^{-x}; h(x) = \ln \sin x.$$

$$8. f(x) = \frac{x}{x-5}; g(x) = \frac{25^x - 1}{5^x}; h(x) = \cos \ln x.$$

$$9. f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}; g(x) = \log_x \frac{16 - x^2}{x}; h(x) = \sin^4 x.$$

$$10. f(x) = \frac{x}{x+6}; g(x) = \lg \frac{3-x}{3+x}; h(x) = \arcsin \frac{4}{x-1}.$$

$$11. f(x) = \sqrt{6 - 5x - x^2}; g(x) = 4^x + 4^{-x}; h(x) = \ln \cos^2 x.$$

$$12. f(x) = \frac{x}{x-7}; g(x) = \frac{16^x - 1}{4^x}; h(x) = \sin \lg^2 x.$$

$$13. f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 7}; g(x) = \log_x(1 - x^2); h(x) = \cos^2 x.$$

$$14. f(x) = \frac{x^2}{x-1}; g(x) = x \ln \frac{4-x}{4+x}; h(x) = \arccos \frac{1}{x+4}.$$

$$15. f(x) = \sqrt{7 - 6x - x^2}; g(x) = 5^x - 5^{-x}; h(x) = \ln \operatorname{tg} x.$$

$$16. f(x) = \frac{x^3}{x+2}; g(x) = \frac{4^x + 1}{2^x}; h(x) = \cos \ln^2 x.$$

$$17. f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}; g(x) = \log_x(2 - x^2); h(x) = \cos^3 x.$$

$$18. f(x) = \frac{x^2}{x-3}; g(x) = x \ln \frac{5-x}{5+x}; h(x) = \arccos \frac{2}{x+5}.$$

$$19. f(x) = \sqrt{8 - 2x - x^2}; g(x) = 3^x - 3^{-x}; h(x) = \ln \operatorname{ctg} x.$$

$$20. f(x) = \frac{x^3}{x-4}; g(x) = \frac{16^x + 1}{4^x}; h(x) = \cos \lg x.$$

$$21. f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}; g(x) = \log_{x^2}(3 - x^2); h(x) = \cos^2(x-1).$$

$$22. f(x) = \frac{x^2}{x+4}; g(x) = x \ln \frac{6-x}{6+x}; h(x) = \arccos \frac{5}{x-2}.$$

$$23. f(x) = \sqrt{7 + 6x - x^2}; g(x) = 4^x - 4^{-x}; h(x) = \ln \operatorname{tg}^2 x.$$

$$24. f(x) = \frac{x^3}{x+5}; g(x) = \frac{25^x + 1}{5^x}; h(x) = \sin \ln^5 x.$$

$$25. f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}; \quad g(x) = \log_{x^2}(4 - x^2); \quad h(x) = \cos^2(x - 3).$$

$$26. f(x) = \frac{x^2}{x-5}; \quad g(x) = x \ln \frac{7-x}{7+x}; \quad h(x) = \arccos \frac{4}{x+3}.$$

$$27. f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}; \quad g(x) = 2^x - 2^{-x}; \quad h(x) = \ln \operatorname{ctg}^2 x.$$

$$28. f(x) = \frac{x^3}{x-6}; \quad g(x) = \frac{36^x + 1}{6^x}; \quad h(x) = \cos \ln^2(x-2).$$

$$29. f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}; \quad g(x) = \log_{x^2}(5 - x^2); \quad h(x) = \cos^3(x - 4).$$

$$30. f(x) = \frac{x^2}{x+7}; \quad g(x) = x \ln \frac{8-x}{8+x}; \quad h(x) = \arccos \frac{3}{x-4}.$$

Тема 3. Пределы и непрерывность.

Задание № 12. Вычислить пределы:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 2 \arcsin x)}{(1 + \sin x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 8x} - 1}{\ln(1 - x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{3x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} (x + x^3)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{9}{1 + 3^{1/x}}.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^4 - 256}{x^2 - 4x - 32}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 - x^3 + 5} - \sqrt{x^6 + 7x^3 - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 8 \operatorname{tg} x)}{(1 + 7 \arcsin x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{\ln(1 + 2x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{2x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} (x^8 + x^9)^{\frac{3}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2}{1 + 3^{1/x}}.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 243}{x^2 - 4x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 7 \operatorname{arctg} x)}{(1 + 8 \sin x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} 2x} - 1}{\ln(1 - 3x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-5} \right)^{4x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{\frac{7}{2}} + x^9 \right)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{3}{2 + 4^{1/x}}.$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 - 64}{x^2 - 4x - 12}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 2 \operatorname{tg} x)}{(1 + 3 \operatorname{arctg} x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} 7x} - 1}{\ln(1 + 4x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{5x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{2/3} + x^3 \right)^{\frac{3}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{18}{2 + 9^{1/x}}.$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4x - 12}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 3 \arcsin x)}{(1 + 2 \sin x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 7x} - 1}{\ln(1 + x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{3x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 + x^3)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{8}{2 + 9^{1/x}}.$$

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x^2 - 4x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 3x^3 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 7 \operatorname{tg} x)}{(1 + 6 \arcsin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 2x} - 1}{\ln(1 - 2x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-5} \right)^{2x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^7 + x^9)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{3}{1 + 4^{1/x}}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^5 - 1024}{x^2 - 4x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 9x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 7 \operatorname{arctg} x)}{(1 + 6 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} 3x} - 1}{\ln(1 + 3x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{4x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{6/5} + x^7)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{4}{3 + 5^{1/x}}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^2 - 4x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 3 \operatorname{tg} x)}{(1 + 4 \operatorname{arctg} x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} 6x} - 1}{\ln(1 - 4x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^{5x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^4 + x^{3/2})^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{17}{3 + 8^{1/x}}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 4 \arcsin x)}{(1 + 3 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 6x} - 1}{\ln(1 - x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^{3x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^4 + x^3)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{7}{3 + 8^{1/x}}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 256}{x^2 - 4x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 - x^3 + 5} - \sqrt{x^6 - 9x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 6 \operatorname{tg} x)}{(1 + 5 \arcsin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 3x} - 1}{\ln(1 + 2x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{2x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^6 + x^7)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{4}{2 + 5^{1/x}}$.
11. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^5 + 243}{x^2 - 4x - 21}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 8x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 6 \operatorname{arctg} x)}{(1 + 5 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} 4x} - 1}{\ln(1 - 3x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{4x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{5/2} + x^7)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{5}{4 + 6^{1/x}}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x^2 - 4x + 4}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + \operatorname{tg} x)}{(1 + 2 \operatorname{arctg} x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} 5x} - 1}{\ln(1 + 4x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{5x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{4/3} + x^7)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{16}{2 + 7^{1/x}}$.

13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4x + 4}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 2 \arcsin x)}{(1 + \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 5x} - 1}{\ln(1 + x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{3x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^4 + x^7)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{6}{2 + 7^{1/x}}$.
14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 81}{x^2 - 4x - 21}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 - 9x^3 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 5 \operatorname{tg} x)}{(1 + 4 \arcsin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 4x} - 1}{\ln(1 - 2x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^5 + x^7)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{5}{3 + 6^{1/x}}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 8}{x^2 - 4x + 4}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 8x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 3 \operatorname{arctg} x)}{(1 + 2 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} 5x} - 1}{\ln(1 + 3x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{4x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{\frac{4}{3}} + x^7\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{6}{3 + 7^{1/x}}$.
16. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^6 - 729}{x^2 - 4x - 21}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 4 \operatorname{tg} x)}{(1 + 5 \operatorname{arctg} x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} 4x} - 1}{\ln(1 - 4x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{5x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{5/2} + x^7)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{15}{3 + 6^{1/x}}$.
17. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 4x - 21}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 9x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 5 \arcsin x)}{(1 + 4 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 4x} - 1}{\ln(1 - x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{3x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^5 + x^7)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{5}{3 + 6^{1/x}}$.
18. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4x + 4}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 - 7x^3 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 2 \operatorname{tg} x)}{(1 + \arcsin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 5x} - 1}{\ln(1 + 2x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^4 + x^7)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{6}{2 + 7^{1/x}}$.
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^2 - 4x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 5 \operatorname{arctg} x)}{(1 + 4 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x e e 6x} - 1}{\ln(1 - 3x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-3}\right)^{4x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^4 + x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{7}{4 + 8^{1/x}}$.

20. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 4x - 5}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 5} - \sqrt{x^6 - 9x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 5tg x)}{(1 + 6 \arctg x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{xg 3x} - 1}{\ln(1 + 4x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{5x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{6/5} + x^7)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{14}{2 + 5^{1/x}}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 4x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} - \sqrt{x^2 - 9x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 6 \arcsin x)}{(1 + 5 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 3x} - 1}{\ln(1 + x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{3x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^6 + x^7)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{4}{2 + 5^{1/x}}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 4x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 - 5x^3 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 4tgx)}{(1 + 3 \arcsin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 6x} - 1}{\ln(1 - 2x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^{2x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^4 + x^3)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{7}{3 + 8^{1/x}}$.
23. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x^2 - 4x - 12}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 4 \arctg x)}{(1 + 3 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{xg 7x} - 1}{\ln(1 + 3x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{4x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{2/3} + x^3)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{8}{3 + 9^{1/x}}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^6 - 729}{x^2 - 4x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 6tgx)}{(1 + 7 \arctg x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{xg 2x} - 1}{\ln(1 - 4x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-5}\right)^{5x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{7/2} + x^9)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{13}{1 + 4^{1/x}}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 4x + 3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 7 \arcsin x)}{(1 + 6 \sin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 2x} - 1}{\ln(1 - x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-5}\right)^{3x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^7 + x^9)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{3}{1 + 4^{1/x}}$.
26. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4x - 12}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + x^3 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 3tgx)}{(1 + 2 \arcsin x)^{3/2} - 1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 7x} - 1}{\ln(1 + 2x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +0} (x^2 + x^3)^{\frac{3}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{8}{2 + 9^{1/x}}$.

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^2 - 4x - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 3 \arctg x)}{(1 + 2 \sin x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \lg 8x} - 1}{\ln(1 - 3x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^{4x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt{x} + x^3)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{9}{1 + 3^{1/x}}.$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 125}{x^2 - 4x - 45}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 + 5} - \sqrt{x^6 + 7x^3 - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 8 \tg x)}{(1 + 9 \arctg x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \lg x} - 1}{\ln(1 + 4x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-6}{x+3} \right)^{5x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} (x^{8/3} + x^9)^{\frac{3}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{1 + 3^{1/x}}.$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x^2 - 4x - 32}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} - \sqrt{x^2 + 7x - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 8 \arcsin x)}{(1 + 7 \sin x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{\ln(1 + x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{3x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} (x^8 + x^9)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2}{1 + 3^{1/x}}.$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 4x - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 - x^3 + 5} - \sqrt{x^6 - 3x^3 - 2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 2 \tg x)}{(1 + \arcsin x)^{3/2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 8x} - 1}{\ln(1 - 2x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{2x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} (x + x^3)^{\frac{3}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{9}{1 + 3^{1/x}}.$$

Задание № 13. Исследовать на непрерывность, то есть найти область непрерывности и вид точек разрыва, и построить графики функций $f(x)$:

$$1. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \ln(1-x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$2. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \sin(1-x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$3. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x < 0, \\ \cos(x^2 - x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}.$$

$$4. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \tg(1-x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$5. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \ctg\left(\frac{\pi - \pi x}{2}\right), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = e^{\frac{1}{x-4}}.$$

$$\begin{aligned}
6. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \arcsin(1-x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = 3^{\frac{1}{x-5}}. \\
7. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \arccos(1-x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x-6}}. \\
8. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \operatorname{arctg}(1-x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = e^{\frac{1}{x-7}}. \\
9. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4}, \text{ если } x < 0, \\ \operatorname{arctg}(1-x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = 3^{\frac{1}{x-8}}. \\
10. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \ln(2-x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x}}. \\
11. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \sin(-x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = e^{1-x}. \\
12. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x+1, \text{ если } x < 0, \\ \cos(\pi - \frac{\pi}{2}x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = 3^{2-x}. \\
13. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \operatorname{tg}(-x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}. \\
14. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = e^{\frac{1}{4-x}}. \\
15. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \arcsin(-x), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = 3^{\frac{1}{5-x}}. \\
16. \quad \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x, \text{ если } x < 0, \\ \arccos(\frac{1+x}{2}), \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, \text{ если } x \geq 1; \end{cases} & \text{б)} \quad f(x) = 2^{\frac{1}{6-x}}.
\end{aligned}$$

17. a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \arctg(-x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{\frac{1}{7-x}}$.
18. a) $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4}, & \text{если } x < 0, \\ \operatorname{arccctg}(1-x) - \frac{\pi}{2}, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 3^{\frac{1}{8-x}}$.
19. a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \ln(1+x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 2^{\frac{1}{x+9}}$.
20. a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \sin(\pi + 1 - x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$.
21. a) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{если } x < 0, \\ \cos(x^2 + x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+2}}$.
22. a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \operatorname{tg}(x-1), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 2^{\frac{1}{x+3}}$.
23. a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x - \pi}{2}\right), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{\frac{1}{x+4}}$.
24. a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \arcsin(x-1), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+5}}$.
25. a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \arccos\left(\frac{2-x}{2}\right), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 2^{\frac{1}{x+6}}$.
26. a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \arctg(x-1), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{\frac{1}{x+7}}$.

$$27. \quad \text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4}, & \text{если } x < 0, \\ \arctg\left(\frac{2-x}{2}\right), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 3^{\frac{1}{x+8}}.$$

$$28. \quad \text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \ln\left(\frac{1+x}{2}\right), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\left|\frac{1}{x+9}\right|}.$$

$$29. \quad \text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ \sin(x^2 - 2x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = e^{\left|\frac{1}{x-1}\right|}.$$

$$30. \quad \text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x < 0, \\ \cos(1-x) - 1, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 3^{\left|\frac{1}{x-9}\right|}.$$

Тема 4. Производная и исследование функций.

Задание № 14. Найти производную функции $f(x)$:

$$1. \quad \text{a) } f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{2} + \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}; \quad \text{б) } f(x) = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+2}) - \sqrt{x+2}; \quad \text{в) } f(x) = (\arctg x)^{\ln \arctg x}.$$

$$2. \quad \text{a) } f(x) = \cos\sqrt{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 2x}{\sin 4x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln(x + \sqrt{5+x^2}); \quad \text{в) } f(x) = (\arcsin \sqrt{x})^{\ln \arcsin \sqrt{x}}.$$

$$3. \quad \text{a) } f(x) = \operatorname{ctg}\sqrt{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}; \quad \text{б) } f(x) = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x}); \quad \text{в) } f(x) = (\sin x)^{5e^x}.$$

$$4. \quad \text{a) } f(x) = \sin\sqrt{5} - \frac{1}{4} \frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+3x^4}}; \quad \text{в) } f(x) = (\arcsin x)^{e^x}.$$

$$5. \quad \text{a) } f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{5} + \frac{1}{5} \frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}); \quad \text{в) } f(x) = (\ln x)^{3^x}.$$

$$6. \quad \text{a) } f(x) = \cos\sqrt{6} - \frac{1}{6} \frac{\cos^2 6x}{\sin 12x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \frac{9+x^2}{9-x^2}; \quad \text{в) } f(x) = (1-x^2)^{\arcsin x}.$$

$$7. \quad \text{a) } f(x) = \operatorname{ctg}\sqrt{7} + \frac{1}{7} \frac{\sin^2 7x}{\cos 14x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln^2(x + \cos x); \quad \text{в) } f(x) = (\operatorname{ctg} 3x)^{e^{\sqrt{x}}}.$$

$$8. \quad \text{a) } f(x) = \sin\sqrt{8} - \frac{1}{8} \frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln^3(1 + \cos x); \quad \text{в) } f(x) = x^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

$$9. \quad \text{a) } f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{3} + \frac{1}{9} \frac{\sin^2 9x}{\cos 18x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^2}; \quad \text{в) } f(x) = (\cos 2x)^{4e^x}.$$

$$10. \quad \text{a) } f(x) = \cos\sqrt{5} - \frac{1}{10} \frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right); \quad \text{в) } f(x) = (\operatorname{tg} 5x)^{e^{\sqrt{x}}}.$$

$$11. \quad \text{a) } f(x) = \operatorname{ctg}\sqrt{7} + \frac{1}{11} \frac{\sin^2 11x}{\cos 22x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln^4 \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}; \quad \text{в) } f(x) = (x \sin x)^{2 \ln(x \sin x)}.$$

$$12. \quad \text{a) } f(x) = \sin\sqrt{2} - \frac{1}{12} \frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}; \quad \text{б) } f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right); \quad \text{в) } f(x) = (x-5)^{(e^x + e^{-x})/2}.$$

13. $a) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{3} + \frac{1}{13} \frac{\sin^2 13x}{\cos 26x}; \bar{o}) f(x) = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}; \theta) f(x) = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}$.
14. $a) f(x) = \cos \sqrt{8} - \frac{1}{14} \frac{\cos^2 14x}{\sin 28x}; \bar{o}) f(x) = \log_{16} \log_3 \operatorname{tg} x; \theta) f(x) = x^{\sin x^3}$.
15. $a) f(x) = \operatorname{ctg} \sqrt{5} - \frac{1}{15} \frac{\sin^2 15x}{\cos 30x}; \bar{o}) f(x) = \log_4 \log_2 \operatorname{ctg} x; \theta) f(x) = (x^2 - 1)^{(e^x - e^{-x})/2}$.
16. $a) f(x) = \sin \sqrt{6} - \frac{1}{16} \frac{\cos^2 16x}{\sin 32x}; \bar{o}) f(x) = x(\cos \ln x + \sin \ln x)/2; \theta) f(x) = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}$.
17. $a) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{7} + \frac{1}{17} \frac{\sin^2 17x}{\cos 34x}; \bar{o}) f(x) = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}; \theta) f(x) = (\sin x)^{5^x}$.
18. $a) f(x) = \cos \sqrt{8} - \frac{1}{18} \frac{\cos^2 18x}{\sin 36x}; \bar{o}) f(x) = \lg \ln \operatorname{ctg} x; \theta) f(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$.
19. $a) f(x) = \operatorname{ctg} \sqrt{8} + \frac{1}{19} \frac{\sin^2 19x}{\cos 38x}; \bar{o}) f(x) = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}; \theta) f(x) = (9x)^{x^9}$.
20. $a) f(x) = \sin \sqrt{5} - \frac{1}{20} \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}; \bar{o}) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1+2 \operatorname{tg}^2 x}); \theta) f(x) = (\ln x)^{3^x}$.
21. $a) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{2} + \frac{1}{21} \frac{\sin^2 21x}{\cos 42x}; \bar{o}) f(x) = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}; \theta) f(x) = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}}$.
22. $a) f(x) = \cos \sqrt{2} - \frac{1}{22} \frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}; \bar{o}) f(x) = \ln \arccos \sqrt{1-e^{4x}}; \theta) f(x) = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$.
23. $a) f(x) = \operatorname{ctg} \sqrt{3} + \frac{1}{23} \frac{\sin^2 23x}{\cos 46x}; \bar{o}) f(x) = \ln(3x + \sqrt{4+9x^2}); \theta) f(x) = x^{e^{\cos x}}$.
24. $a) f(x) = \sin \sqrt{8} - \frac{1}{24} \frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}; \bar{o}) f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}; \theta) f(x) = (5x)^{2^x}$.
25. $a) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{5} + \frac{1}{25} \frac{\sin^2 25x}{\cos 50x}; \bar{o}) f(x) = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}; \theta) f(x) = x^{e^{\sin x}}$.
26. $a) f(x) = \cos \sqrt{6} - \frac{1}{26} \frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}; \bar{o}) f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}); \theta) f(x) = (2x)^{5^x}$.
27. $a) f(x) = \operatorname{ctg} \sqrt{7} + \frac{1}{27} \frac{\sin^2 27x}{\cos 54x}; \bar{o}) f(x) = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}; \theta) f(x) = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$.
28. $a) f(x) = \sin \sqrt{6} - \frac{1}{28} \frac{\cos^2 28x}{\sin 56x}; \bar{o}) f(x) = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}; \theta) f(x) = (x^8 + 1)^{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$.
29. $a) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{7} + \frac{1}{29} \frac{\sin^2 29x}{\cos 58x}; \bar{o}) f(x) = \ln \ln \sin(1 + 1/x); \theta) f(x) = (9x)^{2^x}$.
30. $a) f(x) = \cos \sqrt{5} - \frac{1}{30} \frac{\cos^2 30x}{\sin 60x}; \bar{o}) f(x) = \ln \ln^3 \ln^2 x; \theta) f(x) = (\cos 2x)^{(\ln \cos 2x)/4}$.

Задание № 15. Исследовать функции и построить их графики:

1. $y = \frac{4-x^3}{x^2}; y = \sqrt[3]{(x+4)(x+1)^2}; y = e^{\sqrt{2} \sin x}$.

2. $y = \frac{1}{x^2 - 2x}; y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-5)^2}; y = \operatorname{arctg} \cos x$.

3. $y = \frac{-16x}{x^2 + 4}$; $y = \sqrt[3]{(x+2)(x+8)^2}$; $y = \ln(\sin x - \cos x)$.
4. $y = \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^2$; $y = \sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x+4)^2}$; $y = e^{\sin x + \cos x}$.
5. $y = \frac{3-3x^2}{x^2+3}$; $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}$; $y = \sqrt[3]{-\sin x}$.
6. $y = \frac{x^2+2x+5}{x+1}$; $y = \sqrt[3]{(4-x)(x^2-8x+13)}$; $y = \frac{1}{\cos x - \sin x}$.
7. $y = \frac{4+x^3}{x^2}$; $y = \sqrt[3]{(x+4)(x-2)^2}$; $y = e^{\sin x - \cos x}$.
8. $y = \frac{4}{3-x^2-2x}$; $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-4)^2}$; $y = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.
9. $y = \frac{24x}{x^2+9}$; $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2}$; $y = \ln(-\sqrt{2} \sin x)$.
10. $y = -\left(\frac{x}{x-2}\right)^2$; $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$; $y = e^{\sqrt{2} \cos x}$.
11. $y = \frac{24-6x^2}{x^2+3}$; $y = \sqrt[3]{(x-8)(x-2)^2}$; $y = \sqrt{-\cos x}$.
12. $y = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$; $y = \sqrt[3]{(5-x)(x^2-10x+22)}$; $y = \frac{-1}{(\cos x + \sin x)^2}$.
13. $y = \frac{1+2x^3}{x^2}$; $y = \sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$; $y = e^{-\cos x - \sin x}$.
14. $y = \frac{4}{x^2+4x}$; $y = \sqrt[3]{(x-3)^2(x-7)^2}$; $y = -\operatorname{arctg} \sin x$.
15. $y = \frac{-16x}{x^2+16}$; $y = \sqrt[3]{(x-2)(x+4)^2}$; $y = \ln(\sin x + \cos x)$.
16. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$; $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$; $y = e^{\cos x - \sin x}$.
17. $y = \frac{9-x^2}{x^2+3}$; $y = \sqrt[3]{(x-4)(x-1)^2}$; $y = \sqrt[3]{\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}}$.
18. $y = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$; $y = \sqrt[3]{(6-x)(x^2-12x+33)}$; $y = \frac{-1}{\cos x + \sin x}$.
19. $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$; $y = \sqrt[3]{(x+8)(x+2)^2}$; $y = e^{-\sqrt{2} \cos x}$.
20. $y = \frac{1}{x^2+4x+3}$; $y = \sqrt[3]{(x+1)^2(x+3)^2}$; $y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$.
21. $y = \frac{8(x+1)}{(x+3)^2}$; $y = \sqrt[3]{(x+1)(x+4)^2}$; $y = \ln(-\sin x + \cos x)$.
22. $y = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2$; $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$; $y = e^{-\sqrt{2} \sin x}$.
23. $y = \frac{36-4x^2}{x^2+12}$; $y = \sqrt[3]{(x-2)(x-8)^2}$; $y = \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}}$.

$$24. \quad y = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}; \quad y = -\sqrt[3]{(4+x)(x^2 + 8x + 13)}; \quad y = \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}.$$

$$25. \quad y = \frac{25 - x^3}{x^2}; \quad y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}; \quad y = \sqrt[3]{\cos x}.$$

$$26. \quad y = \frac{4}{4x - x^2}; \quad y = \sqrt[3]{(x+2)^2(x+6)^2}; \quad y = \operatorname{arctg} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}.$$

$$27. \quad y = \frac{4(x+1)}{(x+2)^2}; \quad y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}; \quad y = \ln(-\sin x - \cos x).$$

$$28. \quad y = \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2; \quad y = \sqrt[3]{(x-3)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}; \quad y = \frac{1}{\sin x - \cos x}.$$

$$29. \quad y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 3}; \quad y = \sqrt[3]{(x+3)^2(x+5)^2}; \quad y = \sqrt[3]{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}.$$

$$30. \quad y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 2}; \quad y = -\sqrt[3]{(x+5)(x^2 + 10x + 22)}; \quad y = \frac{1}{\cos x + \sin x}.$$

Тема 5. Интегрирование.

Задание № 16. Найти неопределенные интегралы:

$$1. \text{ а) } \int \frac{\sin x \cdot dx}{1 + \cos^2 x}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 2x + 5}. \quad 2. \text{ а) } \int \frac{(1 - \cos x) \cdot dx}{(x - \sin x)^2}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

$$3. \text{ а) } \int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot dx}{x^2}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 6x + 25}. \quad 4. \text{ а) } \int (x + 1/2)e^{x^2+x} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 8x + 41}.$$

$$5. \text{ а) } \int \frac{\cos x \cdot dx}{1 + \sin x}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + x + 1}. \quad 6. \text{ а) } \int \frac{\ln x \cdot dx}{x \cdot \cos^2(1 + \ln^2 x)}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 - 2x + 6}.$$

$$7. \text{ а) } \int \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x \cdot dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 - 4x + 20}. \quad 8. \text{ а) } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 - 6x + 18}.$$

$$9. \text{ а) } \int \frac{\sin x \cdot dx}{\sqrt[3]{1 + \cos x}}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 - 8x + 20}. \quad 10. \text{ а) } \int \frac{(\sin x - \cos x) \cdot dx}{(\cos x + \sin x)^5}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 - x + 1}.$$

$$11. \text{ а) } \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \cdot \sin x)^2} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 - 3x + 5}. \quad 12. \text{ а) } \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 10x + 34}.$$

$$13. \text{ а) } \int \frac{1 + \ln x}{x} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 2x + 40}. \quad 14. \text{ а) } \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 4x + 42}.$$

$$15. \text{ а) } \int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 6x + 43}. \quad 16. \text{ а) } \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2 + 8x + 44}.$$

$$\begin{aligned}
17. \text{ a) } & \int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+10x+45}. & 18. \text{ a) } & \int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+12x+46}. \\
19. \text{ a) } & \int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+14x+57}. & 20. \text{ a) } & \int \frac{(x^2+1) \cdot dx}{(x^3+3x+1)^5}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+16x+68}. \\
21. \text{ a) } & \int \frac{4\operatorname{arctg}x-x}{1+x^2}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+18x+89}. & 22. \text{ a) } & \int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+2x+50}. \\
23. \text{ a) } & \int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+2x+51}. & 24. \text{ a) } & \int \frac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+4x+52}. \\
25. \text{ a) } & \int \frac{(2\sqrt{x})^{-1}+1}{(x+\sqrt{x})^2} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+6x+53}. & 26. \text{ a) } & \int \frac{x \cdot dx}{x^4+1}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+8x+54}. \\
27. \text{ a) } & \int \frac{x-(\operatorname{arctg}x)^4}{1+x^2} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+10x+55}. & 28. \text{ a) } & \int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2+12x+56}. \\
29. \text{ a) } & \int \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2-2x+30}. & 30. \text{ a) } & \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg}^2 x+3}}; \text{ б) } \int \frac{x \cdot dx}{x^2-8x+46}.
\end{aligned}$$

Задание № 17. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{aligned}
1. & \int_0^1 \frac{dx}{1+2e^x}; \int_1^2 x^3 \cdot \ln x \cdot dx. & 2. & \int_0^1 \frac{(x^2+1) \cdot dx}{\sqrt{1+x+x^3/3}}; \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \cdot dx. \\
3. & \int_0^{\pi/4} \frac{(1-2\sin x)dx}{\cos^2 x}; \int_0^1 \ln(x+1) \cdot dx. & 4. & \int_0^{\pi} (1+2\cos x)^3 dx; \int_1^e \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx. \\
5. & \int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}; \int_0^1 x^2 \cdot e^{3x} \cdot dx. & 6. & \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}; \int_0^{2\pi} x^2 \cos x \cdot dx. \\
7. & \int_0^1 \frac{dx}{x^2-6x+8}; \int_0^1 x \cdot 2^{-x} \cdot dx. & 8. & \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{(1+\sin 2x)dx}{\sin^2 x}; \int_1^e (x \cdot \ln x)^2 \cdot dx. \\
9. & \int_2^3 \frac{dx}{x^2+8x+15}; \int_0^{\ln 2} x \cdot e^{-x} \cdot dx. & 10. & \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx; \int_{-2}^0 (x^2-4) \cos 3x \cdot dx.
\end{aligned}$$

$$11. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx; \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx. \quad 12. \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx; \int_1^2 x^2 \cdot e^x \cdot dx.$$

$$13. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx; \int_{-1}^0 (x^2 + 3) \cos x dx. \quad 14. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}; \int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x \cdot dx.$$

$$15. \int_1^4 \frac{(2\sqrt{x})^{-1} + 1}{(x + \sqrt{x})^2} dx; \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x \cdot dx. \quad 16. \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}; \int_0^{\pi/2} (1 + 3x^2) \sin 2x \cdot dx.$$

$$17. \int_0^1 \frac{x \cdot dx}{x^4 + 1}; \int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x \cdot dx. \quad 18. \int_0^1 \frac{x^5 + x^2}{x^6 + 1} dx; \int_0^{\pi/2} (1 - 5x^2) \sin x \cdot dx.$$

$$19. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx; \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x \cdot dx. \quad 20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx; \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x \cdot dx.$$

$$21. \int_0^1 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}; \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x \cdot dx. \quad 22. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x \cdot dx; \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x \cdot dx.$$

$$23. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \int_{-1}^0 (x + 1)^2 \sin 3x dx. \quad 24. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx; \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x \cdot dx.$$

$$25. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \cdot dx}{\sqrt{2} \sqrt{x^4 - x^2 - 1}}; \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x \cdot dx. \quad 26. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{1 + x^4} dx; \int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x \cdot dx.$$

$$27. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx; \int_1^2 x \cdot \ln^2 x \cdot dx. \quad 28. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx; \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$$

$$29. \int_0^5 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x + 1}}; \int_1^2 (1 - 5x^2) \ln x \cdot dx. \quad 30. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx; \int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$$

Задание № 18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями:

1. $y = 2x - x^2, y + x = 0.$

2. $y = 2x - x^2, y + 2x = 0.$

3. $y = 4x^2, y = x^2/9, y = 2.$

4. $y = 2x + 3, y = x^2.$

5. $y = x^2 + 1, x + y = 3.$

6. $y = -1, y = x^2/2, x = 3, x = 6.$

7. $y = e^x, y = e^{-x}, y = 0, x = 1, x = -1$
(наименьшую из всех возможных).

8. $y = x^3, y = x, y = 2x.$

9. $y = \ln x, y = \ln^2 x$.
 11. $y = 2^x, y = 2, x = 0$.
 13. $y = 4x^2, y = \frac{x^2}{9}, y = 2$.
 15. $y = x^2 - 3x, y + 3x - 4 = 0$.
 17. $y = \arccos x, y = 0, x = 0$.
 19. $y = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2$.
 21. $x = 4 - (y - 1)^2, x = y^2 - 4y + 3$.
 23. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$.
 25. $y = (x - 1)^2, y^2 = x - 1$.
 27. $y = \frac{1}{1 + \cos x}, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$.
 29. $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, y = 0, x = 1$.
10. $xy = 6, x + y = 7$.
 12. $x = -2y^2, x = 1 - 3y^2$.
 14. $y = 2^x, y = 2x - x^2, x = 0, x = 2$.
 16. $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8$.
 18. $x = (y - 2)^3, x = 4y - 8$.
 20. $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$.
 22. $y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0; (0 \leq x \leq 3)$.
 24. $y = \sin x \cdot \cos^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$.
 26. $y = 1, y = e^3, x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, x = 0$.
 28. $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y$.
 30. $y = x \cdot \arctg x, y = 0, x = \sqrt{3}$.

Задание № 19. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx; \int_{-1}^2 (x^2 + 1) \ln^2(2 - x) dx$.
 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \arctg^2 x}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}} dx; \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x - 1}} dx$.
 3. $\int_{-\infty}^1 x \cos x dx; \int_0^2 \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \cdot e^x}{(x - 1)^2} dx$.
 4. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^2 + 1} dx; \int_{-1}^2 \ln^2(2 - x) dx$.
 5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 3} dx; \int_1^2 \frac{xe^x}{\sqrt{x - 1}} dx$.
 6. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x \arctg x}{\sqrt{x^6 - 2}} dx; \int_0^2 \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x - 1)^2} dx$.
 7. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx; \int_{-1}^2 \frac{e^x}{x^2 - 5x + 6} dx$.
 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2 - 2x + 3} dx; \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.
 9. $\int_{-\infty}^1 xe^x dx; \int_0^2 \frac{x \arcsin(x - 1)}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} dx$.
 10. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx; \int_{-1}^2 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$.
 11. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx; \int_1^2 \frac{e^x}{x \ln x} dx$.
 12. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{xe^x}{x^2 + 1} dx; \int_0^2 \frac{x}{\sqrt[5]{(x^2 - 1)^3}} dx$.
 13. $\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx; \int_{-1}^2 \frac{x \ln(x^2 + 2)}{\sqrt{2 - x}} dx$.
 14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{1 + x^2} dx; \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.
 15. $\int_{-\infty}^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx; \int_0^2 \frac{e^x}{x^2 - 2x + 1} dx$.
 16. $\int_1^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{x^2 + 1} dx; \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{2 - x}} dx$.
 17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x^2}} dx; \int_1^2 \frac{e^x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$.
 18. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x \ln(2 + x^2)}{x^2 + 1} dx; \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}$.

$$\begin{array}{ll}
19. \int \frac{\ln x}{x} dx; \int \frac{e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (x^2+1)}{(x-2)^2} dx. & 20. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(e^x+1)}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx; \int_1^2 x \ln(x-1) dx. \\
21. \int_{-\infty}^1 x e^{x^2} dx; \int_0^2 \frac{\ln(x^2-2x+3)}{x^2-5x+4} dx. & 22. \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx; \int_{-1}^2 \frac{e^{x-2}}{(x-2)^2} dx. \\
23. \int_{-\infty}^{+\infty} x \sin x dx; \int_1^2 x e^x \ln(x-1) dx. & 24. \int_{-\infty}^{-1} \frac{x e^{x^2}}{\arctg x} dx; \int_0^2 \frac{dx}{x^2-5x+4}. \\
25. \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx; \int_{-1}^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx. & 26. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt{(x^2+3)^3}} dx; \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}. \\
27. \int_{-\infty}^1 \frac{x}{(x-2)^3} dx; \int_0^2 \frac{x e^x}{\sqrt[5]{(x-1)^2}} dx. & 28. \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2(x^3+1)} dx; \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}. \\
29. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}} dx; \int_1^2 \frac{e^x}{x \sqrt{\ln x}} dx. & 30. \int_{-\infty}^1 \frac{x e^x}{(x-2)^3} dx; \int_0^2 \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx.
\end{array}$$

Тема 6. Числовые и степенные ряды.

Задание № 20. Исследовать ряды на сходимость:

$$\begin{array}{l}
1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+5}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n-1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2n-3}. \\
2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n}-1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot 2n}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-3)}. \\
3. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n^2}\right)^n; \quad \text{г) } \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}. \\
4. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n+2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{5n-2}\right)^{n/2}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2-6}. \\
5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}); \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}. \\
6. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3-4)}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{3n!}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n}. \\
7. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{n-5}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \sqrt{\ln n}}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2-1}. \\
8. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3n+1)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{5n}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}. \\
9. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3-3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{7n+1}\right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}. \\
10. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n+1}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}.
\end{array}$$

11. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{(3n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+4} \right)^{n-2}$; г) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

12. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n10^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4-2}}$; г) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{3n+2}$.

13. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^{n/2}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+4}$.

14. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \sqrt{n}}$.

15. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4n-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2+1}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{n+1}}$.

16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{3n}$.

17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n(1+n^2)}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{7n-8}$.

18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)^2 \sqrt{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^{n+1} n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{2n-1}$.

19. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^3-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{n}{n^2+1}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

20. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^2+1} \sin \frac{1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n-2} \right)^{2n}$; г) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{5^n}$.

21. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{5n+2} \right)^{n^2}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n+1}}$.

22. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+10}$.

23. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{4n+1} \right)^n$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$.

24. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{3n-1} \right)^{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2+n}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n^3} n}{n^4+1}$.

25. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{3^n}}$; г) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{2n+1} \right)^{2n}$.

26. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{3n}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$.

27. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{2n^3-1}}$.

28. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n(3n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}$.

29. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n}{7n+1} \right)^{n/2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$; г) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n+1}$.

$$30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^4 + 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n-1)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n-1} \right)^{2n+1}; \quad \text{г) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n}{7n+5}.$$

Задание № 21. Найти интервал сходимости ряда:

$$\begin{array}{ll}
 1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{10^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (3x+1)^n. \\
 2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n-1}}{n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}. \\
 3. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3n-2}. \\
 4. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}. \\
 5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2x)^n}{n+1}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (\arcsin x)^n. \\
 6. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{5^n \sqrt{n}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{2n}}{n(n+1)^3}. \\
 7. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)3^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n\sqrt{n}}. \\
 8. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+1)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sqrt{\frac{2n}{n+1}}. \\
 9. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{5^n (n+1)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sqrt{n}}{n^2 + 1}. \\
 10. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^{2n}}{n+1}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{\sqrt{n+1}}. \\
 11. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n9^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(\sqrt{n}-1)\sqrt{2}^n}. \\
 12. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n-1}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n. \\
 13. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \\
 14. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)3^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}. \\
 15. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{n-1}}{n^2 \sqrt{3}^n}. \\
 16. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n. \\
 17. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+3}. \\
 18. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n (n^3+1)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}. \\
 19. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{10}} x^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n^4}. \\
 20. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n (2n+1)}. \\
 21. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n (n+3)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^{2n+1}. \\
 22. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 6^n}{\sqrt{n}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}. \\
 23. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+4)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{\sqrt[3]{n}} x^n. \\
 24. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (10x)^{2n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{\sqrt{n+1}}. \\
 25. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{3^n (n^2+1)}. \\
 26. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)^2} x^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{n3^n}. \\
 27. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\sqrt{n}} x^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3n-2}. \\
 28. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n(n+1)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sqrt{\frac{3n}{n+1}}. \\
 29. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{4^n (n+1)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sqrt{n+1}}{n^2+5}. \\
 30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n+1}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{\sqrt{n+2}}.
 \end{array}$$

Задание № 22. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$ и указать интервал сходимости:

$$1. f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{3}.$$

$$2. f(x) = x\sqrt{1+x}.$$

3. $f(x) = \ln(1+2x)$.
4. $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
5. $f(x) = x \cos 3x$.
6. $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$.
7. $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$.
8. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
9. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.
10. $f(x) = 2^x$.
11. $f(x) = 2x \sin^2 \frac{x}{2} - x$.
12. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$.
13. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $f(x) = \ln(1-x-6x^2)$.
15. $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$.
16. $f(x) = 3^x$.
17. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.
18. $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$.
19. $f(x) = \cos \sqrt{x}$.
20. $f(x) = \frac{x}{2-x}$.
21. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.
22. $f(x) = \frac{\cos x^2 - 1}{x^4}$.
23. $f(x) = xe^{-x^2}$.
24. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.
25. $f(x) = 5^x$.
26. $f(x) = x^{10} \sin 2x$.
27. $f(x) = \frac{9}{20-x-x^2}$.
28. $f(x) = \ln(1+2x-8x^2)$.
29. $f(x) = \cos^2 x$.
30. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$.

Задание № 23. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$.
2. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.
3. $\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx$.
4. $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx$.
5. $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$.
6. $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x} dx$.
7. $\int_0^{1,5} \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}} dx$.
8. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$.
9. $\int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$.
10. $\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$.
11. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{16+x^2}} dx$.
12. $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$.
13. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{64+x^2}} dx$.
14. $\int_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} dx$.
15. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$.
16. $\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$.
17. $\int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx$.
18. $\int_0^{1,5} \frac{1}{\sqrt[4]{81+x^4}} dx$.

$$\begin{array}{lll}
19. & \int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx. & 20. & \int_0^{0,1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} dx. & 21. & \int_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt[3]{125 + x^3}} dx. \\
22. & \int_0^{0,4} e^{\frac{3x^2}{4}} dx. & 23. & \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx. & 24. & \int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx. \\
25. & \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[4]{256 + x^4}} dx. & 26. & \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^3}} dx. & 27. & \int_0^{0,7} \frac{\arctg x^2}{x} dx. \\
28. & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{8 + x^3}} dx. & 29. & \int_0^{0,5} e^{\frac{3x^2}{25}} dx. & 30. & \int_{0,1}^1 \frac{1}{xe^x} dx.
\end{array}$$

Тема 7. Функции нескольких переменных.

Задание № 24. Для каждого варианта: а) найти область определения функции $f(x, y)$ и изобразить ее на координатной плоскости;

б) найти частные производные 1-го и 2-го порядков функции $g(x, y)$, написать выражения полных дифференциалов тех же порядков;

в) найти частные производные h'_u и h'_v , где $h = h(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$;

г) найти частные производные z'_x и z'_y , если функция $z(x, y)$ неявно задана указанным уравнением, и написать $\text{grad } z$ в точке $(1; 1)$, учитывая, что $z(1; 1) = 1$:

1. а) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}$; б) $g(x, y) = \ln(x^3 + y)$;

в) $h(x, y) = (x + 1)^y$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u + v)$; г) $z^3xy + z(x - y) + x + 2y - 4 = 0$.

2. а) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x + y}$; б) $g(x, y) = x^y$;

в) $h(x, y) = \sin(y^2 - x)$, $x(u, v) = \ln(u + v)$, $y(u, v) = e^{uv}$; г) $z^3xy + z^2(x - y) + 2x + 3y - 6 = 0$.

3. а) $f(x, y) = \log_2(xy + 1)$; б) $g(x, y) = \sin(x + y^2)$;

в) $h(x, y) = e^{x^2y}$, $x(u, v) = \cos(u - v)$, $y(u, v) = \sin(uv)$; г) $z^3xy + z(x - y) + 3x + 4y - 8 = 0$.

4. а) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x - y}$; б) $g(x, y) = e^{xy^2}$;

в) $h(x, y) = \cos(y^3 - x)$, $x(u, v) = \ln(u - v)$, $y(u, v) = e^{u/v}$; г) $z^3xy + z^2(x - y) + 4x + 5y - 10 = 0$.

5. а) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}$; б) $g(x, y) = \cos(x^3 - y)$;

в) $h(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$, $x(u, v) = \cos\left(\frac{u}{v}\right)$, $y(u, v) = \sin(u - v)$; г) $z^3xy + z(x - y) + 5x - 6y = 0$.

6. а) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x + y}$; б) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$;

в) $h(x, y) = \arctg \frac{y}{x + 1}$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u + v)$; г) $z^3xy + z^2(x - y) + 6x + 7 - 14 = 0$.

7. а) $f(x, y) = \log_2(xy + 1)$; б) $g(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$;

в) $h(x, y) = \frac{x^3}{y} + x$, $x(u, v) = \cos(u + v)$, $y(u, v) = \sin\left(\frac{u}{v}\right)$; г) $z^3xy + z(x - y) + 7x + 8y - 16 = 0$.

8. а) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x - y}$; б) $g(x, y) = \frac{x^2}{y} + y^3$;

- B) $h(x, y) = \ln(x^2 + y)$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u + v)$; $\Gamma) z^3xy + z^2(x - y) - 8x + 9y - 2 = 0$.
9. a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \ln(x - y^3)$;
 B) $h(x, y) = y^{x^2}$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u + v)$; $\Gamma) z^3xy + 2z(x - y) + x + 2y - 4 = 0$.
10. a) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x + y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = x^{y^2}$;
 B) $h(x, y) = \sin(y - x^2)$, $x(u, v) = \ln(u + v)$, $y(u, v) = e^{uv}$; $\Gamma) z^3xy + 2z^2(x - y) + 2x + 3y - 6 = 0$.
11. a) $f(x, y) = \log_2(xy + 1)$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \sin(x^2 - y)$;
 B) $h(x, y) = e^{x^3y}$, $x(u, v) = \cos(u - v)$, $y(u, v) = \sin(uv)$; $\Gamma) z^3xy + 2z(x - y) + 3x + 4y - 8 = 0$.
12. a) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x - y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = e^{xy^3}$;
 B) $h(x, y) = \cos(y - x^2)$, $x(u, v) = \ln(u - v)$, $y(u, v) = e^{u/v}$; $\Gamma) z^3xy + 2z^2(x - y) + 4x + 5y - 10 = 0$.
13. a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \cos(x + y^3)$;
 B) $h(x, y) = \sqrt{x + y^2}$, $x(u, v) = \cos\left(\frac{u}{v}\right)$, $y(u, v) = \sin(u - v)$; $\Gamma) z^3xy + 2z(x - y) + 5x - 6y = 0$.
14. a) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x + y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \sqrt{x - y^2}$;
 B) $h(x, y) = \text{arctg} \frac{y-1}{x}$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u + v)$; $\Gamma) z^3xy + 2z^2(x - y) + 6x - 3y - 4 = 0$
15. a) $f(x, y) = \log_2(xy + 1)$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \text{arctg} \frac{y+1}{x}$;
 B) $h(x, y) = \frac{x}{y^3} - y$, $x(u, v) = \cos(u + v)$, $y(u, v) = \sin\left(\frac{u}{v}\right)$; $\Gamma) z^3xy + 2z(x - y) + 7x + 8y - 16 = 0$.
16. a) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x - y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \frac{x}{y^2} - x^2$;
 B) $h(x, y) = \ln(x - y^2)$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u + v)$; $\Gamma) z^3xy + 2z^2(x - y) - 8x + 9y - 2 = 0$.
17. a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \ln(x^2 + y)$;
 B) $h(x, y) = x^y$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u + v)$; $\Gamma) z^3xy + 3z(x - y) + x + 2y - 4 = 0$.
18. a) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x + y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = (x + 1)^y$;
 B) $h(x, y) = \sin(y^2 + x)$, $x(u, v) = \ln(u + v)$, $y(u, v) = e^{uv}$; $\Gamma) z^3xy + 3z^2(x - y) + 2x + 3y - 6 = 0$.
19. a) $f(x, y) = \log_2(xy + 1)$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \sin(y^2 - x)$;
 B) $h(x, y) = e^{xy^2}$, $x(u, v) = \cos(u - v)$, $y(u, v) = \sin(uv)$; $\Gamma) z^3xy + 3z(x - y) + 3x + 4y - 8 = 0$.
20. a) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x - y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = e^{x^2y}$;
 B) $h(x, y) = \cos(x^3 - y)$, $x(u, v) = \ln(u - v)$, $y(u, v) = e^{u/v}$; $\Gamma) z^3xy + 3z^2(x - y) + 4x + 5y - 10 = 0$.
21. a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}$; $\bar{\text{O}}) g(x, y) = \cos(y^3 - x)$;
 B) $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$, $x(u, v) = \cos\left(\frac{u}{v}\right)$, $y(u, v) = \sin(u - v)$; $\Gamma) z^3xy + 3z(x - y) + 5x - 6y = 0$.

22. а) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x+y}$; б) $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$;

в) $h(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u+v)$; $\Gamma) z^3xy + 3z^2(x-y) + 6x + 7 - 14 = 0$.

23. а) $f(x, y) = \log_2(xy+1)$; б) $g(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+1}$;

в) $h(x, y) = \frac{x^2}{y} + y^3$, $x(u, v) = \cos(u+v)$, $y(u, v) = \sin\left(\frac{u}{v}\right)$; $\Gamma) z^3xy + 3z(x-y) + 7x + 8y - 16 = 0$.

24. а) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x-y}$; б) $g(x, y) = \frac{x^3}{y} + x$;

в) $h(x, y) = \ln(x^3 + y)$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u+v)$; $\Gamma) z^3xy + 3z^2(x-y) - 8x + 9y - 2 = 0$.

25. а) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}$; б) $g(x, y) = \ln(x - y^2)$;

в) $h(x, y) = x^{y^2}$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u+v)$; $\Gamma) z^3xy + 4z(x-y) + x + 2y - 4 = 0$.

26. а) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x+y}$; б) $g(x, y) = y^{x^2}$;

в) $h(x, y) = \sin(x^2 - y)$, $x(u, v) = \ln(u+v)$, $y(u, v) = e^{uv}$; $\Gamma) z^3xy + 4z^2(x-y) + 2x + 3y - 6 = 0$.

27. а) $f(x, y) = \log_2(xy+1)$; б) $g(x, y) = \sin(y - x^2)$;

в) $h(x, y) = e^{x^{y^3}}$, $x(u, v) = \cos(u-v)$, $y(u, v) = \sin(uv)$; $\Gamma) z^3xy + 4z(x-y) + 3x + 4y - 8 = 0$.

28. а) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x-y}$; б) $g(x, y) = e^{x^3y}$;

в) $h(x, y) = \cos(x + y^3)$, $x(u, v) = \ln(u-v)$, $y(u, v) = e^{u/v}$; $\Gamma) z^3xy + 4z^2(x-y) + 4x + 5y - 10 = 0$.

29. а) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + x - y}$; б) $g(x, y) = \cos(y - x^3)$;

в) $h(x, y) = \sqrt{x - y^2}$, $x(u, v) = \cos\left(\frac{u}{v}\right)$, $y(u, v) = \sin(u-v)$; $\Gamma) z^3xy + 4z(x-y) + 5x - 6y = 0$.

30. а) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x+y}$; б) $g(x, y) = \sqrt{x + y^2}$;

в) $h(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y+1}{x}$, $x(u, v) = \cos(uv)$, $y(u, v) = \sin(u+v)$; $\Gamma) z^3xy + 4z^2(x-y) + 6x + 7 - 14 = 0$.

Задание № 25. Для каждого варианта: а) исследовать функцию $z(x, y)$ на экстремум; б) найти экстремумы функции $z(x, y)$ при данном условии; в) найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x, y)$ в области D :

1. а) $z = e^{\frac{y}{2}} \cdot (x^2 + y)$

б) $z = x - y - 4$ при условии $x^2 + y^2 = 1$;

в) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $D = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$

2. а) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$;

б) $z = 3 - x - 2y$ при условии $x^2 + 2y^2 = 4$;

в) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D = \{(x; y) : -1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2\}$.

3. а) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

б) $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$;

- в) $z = x^2 + y^2 + 3xy - x + y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
4. а) $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$, $x > 0, y > 0$;
 б) $z = 2 - 2x - y$ при условии $2x^2 + 3y^2 = 3$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy - 3x - y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
5. а) $z = x^3 + 5x^2 - y^2 + 3x - 14y$;
 б) $z = 4 - 2x - 4y$ при условии $x^2 + y^2 = 3$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
6. а) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0, y > 0$;
 б) $z = 5 - 3x - 2y$ при условии $3x^2 + 2y^2 = 4$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy + 3y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
7. а) $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y$;
 б) $z = xy + 2x$ при условии $x^2 + 3y^2 = 12$;
 в) $z = xy$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.
8. а) $z = 2y\sqrt{x} - x + 8y - 3y^2 + 5$;
 б) $z = x^2 + (y - 2)^2$ при условии $x^2 - y^2 = 4$;
 в) $z = xy^2$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.
9. а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;
 б) $z = 4 - 2x - 4y$ при условии $x^2 + y^2 = 3$;
 в) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$, $D = \left\{ (x; y): 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{3\pi}{2} \right\}$.
10. а) $z = xy^2 \cdot (1 - x - y)$, $x > 0, y > 0$;
 б) $z = 5 - 2x - 3y$ при условии $2x^2 + 3y^2 = 4$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy + x + y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
11. а) $z = -x^3 - x^2 - y^2 + 5x - 18y$;
 б) $z = 3 - x - y$ при условии $x^2 + 4y^2 = 1$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy + 2x + y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
12. а) $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $x > 0, y > 0$;
 б) $z = 5 - 2x - y$ при условии $2x^2 + 3y^2 = 4$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 3\}$.
13. а) $z = y^3 + x^2 + y^2 - 14x - 33y$;
 б) $z = 4 - x - 3y$ при условии $x^2 + 4y^2 = 1$;
 в) $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 7y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
14. а) $z = y^3 + x^2 + 2y^2 - 16x - 20y$;
 б) $z = 4 - x - y$ при условии $4x^2 + y^2 = 1$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + 2y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
15. а) $z = e^{-x^2 - 4y^2} \cdot (x^2 + y^2)$;
 б) $z = 2 - 2x - y$ при условии $2x^2 + y^2 = 4$;
 в) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, $D = \{(x; y): x \leq 1; y \leq 1; x + y \geq 1\}$.

16. а) $z = y^3 - x^2 + 4y^2 - 16x + 4y$;
 б) $z = 3 - x - 3y$ при условии $2x^2 + 4y^2 = 1$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 2y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
17. а) $z = y^3 - x^2 + 5y^2 - 14x + 3y$;
 б) $z = 3 - 3x - y$ при условии $4x^2 + 2y^2 = 1$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
18. а) $z = y^3 - x^2 + 6y^2 - 12x$;
 б) $z = 3 - x - 3y$ при условии $4x^2 + 2y^2 = 1$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy - 2x - 3y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
19. а) $z = -y^3 + x^2 - 7y^2 - 10x + 5y$;
 б) $z = 3 - x - 2y$ при условии $x^2 + 2y^2 = 5$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy - 3x + 2y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
20. а) $z = -y^3 + x^2 - 8y^2 - 8x + 12y$;
 б) $z = 3 - 2x - y$ при условии $x^2 + 2y^2 = 6$;
 в) $z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
21. а) $z = -y^3 + x^2 - 9y^2 - 14x$;
 б) $z = 3 - 2x - y$ при условии $x^2 + 2y^2 = 5$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy + x + 2y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
22. а) $z = -y^3 - x^2 - 12x + 48y$;
 б) $z = 2 - x - 2y$ при условии $x^2 + 2y^2 = 5$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy - 3x + y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
23. а) $z = -y^3 - x^2 - y^2 - 18x + 5y$;
 б) $z = 4 - x - 3y$ при условии $x^2 + 2y^2 = 5$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy + x - y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
24. а) $z = -y^3 - x^2 + 2y^2 - 16x + 4y$;
 б) $z = 4 - 3x - y$ при условии $x^2 + 2y^2 = 5$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy - 4x + y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
25. а) $z = y^3 + x^2 + 3y^2 - 18x - 9y$;
 б) $z = 3 - 2x - 3y$ при условии $4x^2 + y^2 = 1$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
26. а) $z = x^3 + 6x^2 - y^2 - 12y$;
 б) $z = 5 - 2x - 3y$ при условии $2x^2 + 3y^2 = 4$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + 3y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
27. а) $z = -x^3 - 7x^2 + y^2 + 5x - 10y$;
 б) $z = 3 - 2x - 3y$ при условии $2x^2 + 3y^2 = 3$;
 в) $z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 5y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
28. а) $z = -x^3 - 8x^2 + y^2 + 12x - 8y$;
 б) $z = 5 - 2x - y$ при условии $2x^2 + 3y^2 = 4$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy - 4x - 2y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
29. а) $z = -x^3 - 9x^2 + y^2 - 14y$;

- б) $z = 3 - x - 5y$ при условии $x^2 + 2y^2 = 3$;
 в) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.
30. а) $z = (2x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2 - y^2}$;
 б) $z = 3 - 2x - 3y$ при условии $2x^2 + 3y^2 = 3$;
 в) $z = x^2 + y^2 + 3xy + 2x + y$, $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2\}$.

Тема 8. Двойные интегралы

Задание № 26. Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, в котором функция $f(x, y)$

и границы области D находится из таблицы:

№ варианта	$f(x, y)$	Границы области D
1	$x - y$	$x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.
2	$2x - y$	$x = 1, y = -x^3, y = \sqrt{x}$.
3	$3x - y$	$x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}$.
4	$4x - y$	$x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.
5	$5x - y$	$x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}$.
6	$6x - y$	$x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.
7	$7x - y$	$x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}$.
8	$8x - y$	$x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.
9	$9x - y$	$x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.
10	$x + y$	$x = 1, y = -x^3, y = \sqrt{x}$.
11	$11x - y$	$x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}$.
12	$x - 2y$	$x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.
13	$x - 3y$	$x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}$.
14	$x - 4y$	$x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.
15	$x - 5y$	$x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}$.

№ варианта	$f(x, y)$	Границы области D
16	$x - 6y$	$x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.
17	$x - 7y$	$x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.
18	$x - 8y$	$x = 1, y = -x^3, y = \sqrt{x}$.
19	$x - 9y$	$x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}$.
20	$2x + y$	$x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.
21	$2x - y$	$x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}$.
22	$2x - 2y$	$x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.
23	$2x - y$	$x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}$.
24	$2x - 4y$	$x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.
25	$2x - 5y$	$x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.
26	$2x - 6y$	$x = 1, y = -x^3, y = \sqrt{x}$.
27	$2x - 7y$	$x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}$.
28	$2x - 8y$	$x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.
29	$2x - 9y$	$x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}$.
30	$3x + y$	$x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.

Учебное пособие

Индивидуальные задания по математическому анализу

Подписано в печать 21.11.2012. Формат 60x84/16. Печать ризографическая.
Заказ № 1301. Объем 1,86 п.л. Тираж 350 экз.

Издательский центр экономического факультета СПбГУ
191123, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, д. 62.