САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА. Часть 1.

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
2007

Утверждено на заседании
кафедры общей математики и информатики
в качестве методических указаний
для студентов естественных факультетов

Авторы: Т.Н.Андрианова, А.К.Пономаренко, П.К.Черняев
Рецензент: Н.М.Салтыкова

СОДЕРЖАНИЕ

1. *УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА.*

Уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат точки $M(x, y)$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

(A, B, C, D, E, F — вещественные числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), которое определяет некоторую кривую второго порядка, требуется с помощью преобразования координат привести к каноническому виду.

Повернем оси координат на угол α вокруг начала координат – точки O. Обозначим x', y' координаты точки M в "новой" системе координат $O(x', y')$. "Старые" координаты x, y будут связаны с x', y' соотношениями

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y & = & x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{array}\right. \tag{2}$$

После подстановки этих выражений в исходное уравнение (1) и несложных преобразований получим

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\begin{array}{lcl} A' & = & A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha, \\ B' & = & (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ C' & = & A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha, \\ D' & = & D\cos\alpha + E\sin\alpha, \\ E' & = & -D\sin\alpha + E\cos\alpha. \end{array} \tag{3}$$

В канонических уравнениях эллипса, гиперболы, параболы нет слагаемого, содержащего произведение координат. Приравняем B' нулю. После деления обеих частей полученного уравнения на $\cos^2\alpha$ получаем

$$Btg^2\,\alpha - (C - A)tg\,\alpha - B = 0.$$

Это уравнение относительно $tg\,\alpha$. Его решения

$$tg\,\alpha = \frac{C - A \pm \sqrt{(C - A)^2 + 4B^2}}{2B}$$

определяют два взаимно перпендикулярные направления. Возьмем для определенности положительное решение. Если, например, $B > 0$, то это

$$tg\,\alpha = \frac{C - A + \sqrt{(C - A)^2 + 4B^2}}{2B}.$$

Рассматриваемое уравнение относительно α имеет счетное множество решений. Для наших целей достаточно лишь одно из них:

$$\alpha = arctg\frac{C - A + \sqrt{(C - A)^2 + 4B^2}}{2B}.$$

Вычислим теперь $cos\,\alpha = \left(\sqrt{1 + tg^2\,\alpha}\right)^{-1}$, $\sin\,\alpha = tg\,\alpha \cdot \cos\,\alpha$, затем по формулам (3) — A', C', D', E'. Уравнение (1.1) примет вид

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0. \tag{1.2}$$

При этом может оказаться, что оба коэффициента A' и C' отличны от нуля или один из них вместе с B' обратится в нуль. Поэтому будем рассматривать соответственно два случая.

1-й случай. Пусть $A' \cdot C' \neq 0$.

Если хоть один из коэффициентов D' или E' не равен нулю, сделаем параллельный перенос повернутой системы $0x'y'$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \overline{x} + a, \\ y' & = & \overline{y} + b. \end{array} \right. \tag{4}$$

Подставим выражения (4) в уравнение (1.2), получим

$$A'\overline{x}^2 + C'\overline{y}^2 + 2(A'a + D')\overline{x} + 2(C'b + E')\overline{y} + \overline{F} = 0, \tag{1.3}$$

где

$$\overline{F} = A'a^2 + C'b^2 + 2D'a + 2E'b + F. \tag{5}$$

Положим

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A'a + D' & = & 0, \\ C'b + E' & = & 0, \end{array} \right. , \quad \text{откуда} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & -\frac{D'}{A'}, \\ b & = & -\frac{E'}{C'}. \end{array} \right.$$

При таком выборе a и b уравнение (1.3) запишется в виде

$$A'\overline{x}^2 + C'\overline{y}^2 = -\overline{F}. \tag{1.4}$$

В этом уравнении A' и C' могут быть одного или разных знаков.

Пусть A' и C' одного знака.
Если $\overline{F} = 0$, то уравнение (1.4) определяет только одну точку $\overline{O}(0,0)$ в системе кординат $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$. [1] Если $\overline{F} \neq 0$ и его знак противоположен знаку A' и C', то уравнению (1.4) соответствует эллипс

$$\frac{\overline{x}^2}{\overline{a}^2} + \frac{\overline{y}^2}{\overline{b}^2} = 1 \quad \text{с полуосями } \overline{a} = \sqrt{-\frac{\overline{F}}{A'}},\ \overline{b} = \sqrt{-\frac{\overline{F}}{C'}}.$$

Если знаки $\overline{F}$, A' и C' совпадают, то уравнение (1.4) определяет пустое множество.

Пусть A' и C' разных знаков.
Если $\overline{F} = 0$, то уравнение (1.4) определяет пару пересекающихся в точке $\overline{O}$ прямых.

Действительно, при $\begin{cases} A' & > & 0, \\ C' & < & 0 \end{cases}$ уравнение (1.4) принимает вид

$$\left(\sqrt{A'}\,\overline{x}\right)^2 - \left(\sqrt{-C'}\,\overline{y}\right)^2 = 0,$$

т.е.

$$\left(\sqrt{A'}\,\overline{x} - \sqrt{-C'}\,\overline{y}\right) \cdot \left(\sqrt{A'}\,\overline{x} + \sqrt{-C'}\,\overline{y}\right) = 0,$$

или

$$\left[\begin{array}{lcl} \sqrt{A'}\,\overline{x} + \sqrt{-C'}\,\overline{y} & = & 0, \\ \sqrt{A'}\,\overline{x} - \sqrt{-C'}\,\overline{y} & = & 0. \end{array}\right.$$

При $\begin{cases} A' & < & 0, \\ C' & > & 0 \end{cases}$ имеем аналогично

$$\left[\begin{array}{lcl} \sqrt{-A'}\,\overline{x} + \sqrt{C'}\,\overline{y} & = & 0, \\ \sqrt{-A'}\,\overline{x} - \sqrt{C'}\,\overline{y} & = & 0. \end{array}\right.$$

2-й случай. Пусть $A' \cdot C' = 0$.
Если $C' = 0$, $A' \neq 0$, уравнение (1.2) записывается в виде

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0. \tag{6}$$

Пусть $E' \neq 0$.

[1] Координаты точки $\overline{O}$ в исходной системе Oxy можно найти, используя равенства (4) и (2).

Сделаем снова параллельный перенос (4). Придем к уравнению

$$A'\overline{x}^2 + 2(A'a + D')\overline{x} + 2(C'b + E')\overline{y} + \overline{F} = 0, \qquad (1.5)$$

где $\overline{F}$ определено равенством (5), причем $C' = 0$.

Положим $\begin{cases} A'a + D' & = & 0, \\ \overline{F} & = & 0 \end{cases}$, т.е.

$$\begin{cases} A'a + D' & = & 0, \\ A'a^2 + 2D'a + 2E'b + F & = & 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a & = & -\frac{D'}{A'}, \\ \\ b & = & -\frac{A'a^2 + 2D'a + F}{2E'}. \end{cases}$$

При таком выборе a и b уравнение (1.5) примет вид

$$\overline{x}^2 = -2\frac{C'}{A'}\overline{y},$$

которое определяет параболу, симметричную относительно оси $\overline{O}\,\overline{y}$, вершина которой совпадает с точкой $\overline{O}$.

Если $E' = 0$, то уравнение (1.2) запишется в виде

$$A'x'^2 + 2D'x' + F = 0,$$

или

$$\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2 - F' = 0, \quad F' = \left(\frac{D'}{A'}\right)^2 - \frac{F}{A'}.$$

Если $F' < 0$, то это уравнение определяет пустое множество; если $F' > 0$, — пару параллельных прямых
$x' + \frac{D'}{A'} + \sqrt{F'} = 0$ и $x' + \frac{D'}{A'} - \sqrt{F'} = 0$;
если $F' = 0$, — пару слившихся прямых $x' + \frac{D'}{A'} = 0$.

Аналогично рассматривается случай $\begin{cases} A' & = & 0, \\ C' & \neq & 0 \end{cases}$

В этом случае при $D' \neq 0$ с помощью параллельного переноса (4), где $\begin{cases} b & = & -\frac{E'}{C'}, \\ \\ a & = & -\frac{C'b^2 + 2E'b + F}{2D'} \end{cases}$, получаем параболу

$$\overline{y}^2 = -2\frac{D'}{C'}\overline{x}.$$

Если $D' = 0$, имеем:
при $F' < 0$ $\left(F' = \left(\frac{E'}{C'}\right)^2 - \frac{F}{C'}\right)$ пустое множество;
при $F' > 0$ — пару параллельных прямых
$y' + \frac{E'}{C'} + \sqrt{F'} = 0$ и $y' + \frac{E'}{C'} - \sqrt{F'} = 0$;
при $F' = 0$, — пару слившихся прямых $y' + \frac{E'}{C'} = 0$.

Приведем примеры преобразования уравнений.

ПРИМЕР 1.
Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0,$$

указать тип кривой, им определяемой, найти координаты вершин, фокусов и уравнения директрис в исходной системе координат, сделать чертеж кривой в этой системе.

Исходное уравнение — уравнение вида (1), где
$A = 5$, $B = 2$, $C = 8$, $D = -16$, $E = -28$, $F = 80$.

После поворота осей координат на угол α (см. формулы (2)) приходим, как указано выше, к уравнению вида (4)

$$2tg^2\,\alpha - 3tg\,\alpha - 2 = 0, \text{ относительно } tg\alpha,$$

корни которого $tg\,\alpha = 2$ и $tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$.
Возьмем $tg\,\alpha = 2$, $\alpha = arctg2$. Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
Используя равенства (3), находим

$$\begin{array}{lcllcl}
A' & = & 5\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha & = & 9, \\
C' & = & 5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha & = & 4, \\
D' & = & -16\cos\alpha - 28\sin\alpha & = & -\frac{72}{\sqrt{5}}, \\
E' & = & 16\sin\alpha - 28\cos\alpha & = & \frac{4}{\sqrt{5}}.
\end{array}$$

Исходное уравнение примет вид (1.2):

$$9x'^2 + 4y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Выполним параллельный перенос (4):

$$\begin{cases} x' &= \overline{x} + a, \\ y' &= \overline{y} + b. \end{cases}$$

Будем иметь:

$$9'\overline{x}^2 + 4\overline{y}^2 - 18(a - \frac{8}{\sqrt{5}})\overline{x} + 8(b + \frac{1}{\sqrt{5}})\overline{y} + \overline{F}_1 = 0,$$

где $\overline{F}_1 = 5a^2 + 4b^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}a + \frac{8}{\sqrt{5}}b' + 80 = 0$. Приравняем нулю коэффициенты при $\overline{x}$, $\overline{y}$, получим

$$\begin{cases} a &= \frac{8}{\sqrt{5}}, \\ b &= -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Последнее уравнение примет вид

$$9'\overline{x}^2 + 4\overline{y}^2 - 36 = 0, \text{ или } \frac{\overline{x}^2}{4} + \frac{\overline{y}^2}{9} = 1. \qquad (7)$$

Таким образом мы выяснили,что исходная кривая — эллипс с большой полуосью $a = 3$ и малой $b = 2$. Фокусы эллипса лежат на оси $\overline{O}\,\overline{y}$. Для того, чтобы нарисовать эллипс в исходной системе координат, выразим, используя формулы (2) и (4), "старые" координаты x, y через "новые" $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$\begin{cases} x &= (\overline{x} + \frac{8}{\sqrt{5}})\frac{1}{\sqrt{5}} - (\overline{y} - \frac{1}{\sqrt{5}})\frac{2}{\sqrt{5}}, \\ y &= (\overline{x} + \frac{8}{\sqrt{5}})\frac{2}{\sqrt{5}} + (\overline{y} - \frac{1}{\sqrt{5}})\frac{1}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x &= \frac{\overline{x} - 2\overline{y}}{\sqrt{5}} + 2, \\ y &= \frac{2\overline{x} + \overline{y}}{\sqrt{5}} + 3. \end{cases} \qquad (8)$$

Отсюда вытекает, что точка $\overline{O}$ в системе Oxy имеет координаты 2 и 3. Для того, чтобы начертить эллипс, определенный уравнением (7), нарисуем вначале оси координат $\overline{O}\,\overline{x}$ и $\overline{O}\,\overline{y}$: повернем оси Ox и Oy вокруг точки O(0,0) на угол $\alpha = arctg2$, получим оси $O'x'$ и $O'y'$, через точку $\overline{O}(2,3)$ проведем оси $\overline{O}\,\overline{x}$ и $\overline{O}\,\overline{y}$ параллельно $O'x'$ и $O'y'$, в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ нарисуем эллипс с полуосями 2 и 3. (См. Рис. 1). [2]

---

[2] Отметим, что эллипс пересекает ось Oy в точках с ординатами 2 и 5.

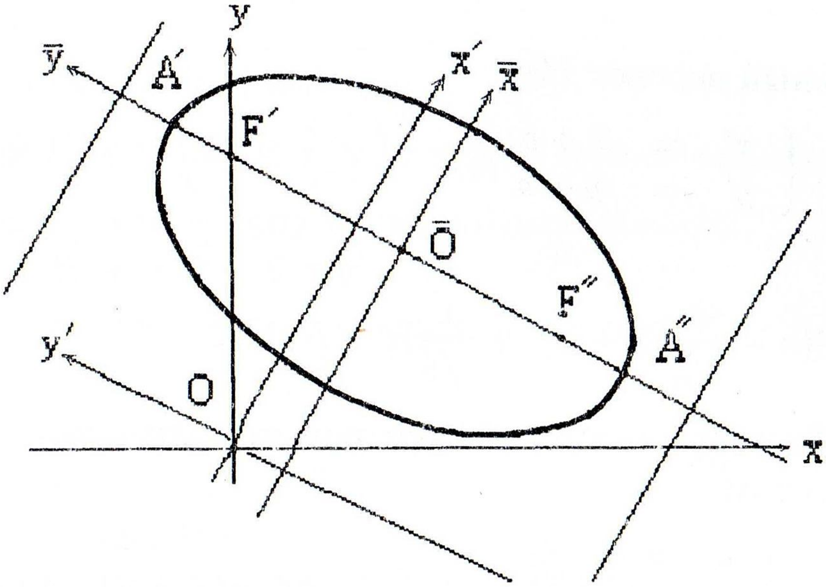


Рис. 1.

Вершины эллипса – точки A', A'' в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ имеют координаты $A'(0,3)$, $A''(0,-3)$. Их координаты в системе Oxy находим по формулам (8):

$$\begin{cases} x = \frac{0-2\cdot(\pm 3)}{\sqrt{5}} + 2, \\ y = \frac{2\cdot 0+(\pm 3)}{\sqrt{5}} + 3, \end{cases}$$

т.е.

$A'(2-\frac{6}{\sqrt{5}}, 3+\frac{3}{\sqrt{5}})$,

$A''(2+\frac{6}{\sqrt{5}}, 3-\frac{3}{\sqrt{5}})$.

Точно так же получаем координаты фокусов F' и F'':
$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, $F'(0,\sqrt{5})$, $F''(0,-\sqrt{5})$ в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$, $F'(0,4)$, $F''(4,2)$ — в системе Oxy.

Уравнения директрис в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ имеют вид: $\overline{y} = \pm\frac{a}{\epsilon}$, т.е. $\overline{y} = \pm\frac{a}{\frac{c}{a}}$, или $\overline{y} = \frac{a^2}{c}$, т.е. $\overline{y} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.Чтобы записать уравнения директрис в системе Oxy, выразим $\overline{y}$ через x, y из равенств (8). Получим $\overline{y} = \frac{-2x+y+1}{\sqrt{5}}$, и уравнения директрис запишутся в следующем виде: $\frac{-2x+y+1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$, т.е. $2x-y+8=0$ и $2x-y-10=0$.

ПРИМЕР 2.
Уравнение

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

привести к каноническому виду, найти координаты вершины, фокуса, написать уравнеие директрисы, сделать чертеж кривой в исходной системе координат

Повернув оси координат на угол α (см. формулы (2)) и приравняв нулю коэффициент B' при произведении координат $x'y'$, приходим к уравнению

$$tg^2\,\alpha = 1$$

Выберем решение $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Используя равенства (3), приходим к уравнению

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0.$$

Выполним параллельный перенос

$$\begin{cases} x' &= \overline{x} + a, \\ y' &= \overline{y} + b, \end{cases}$$

получим

$$2\overline{y}^2 - 8\sqrt{2}\overline{x} + 2\sqrt{2}(\sqrt{2}b + 1)\overline{y} + 2b^2 - 8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b + 25 = 0.$$

Приравняем нулю коэффициент при $\overline{y}$ и свободный член уравнения:

$$\begin{cases} \sqrt{2}b + 1 &= 0, \\ 2b^2 - 8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b + 25 &= 0, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} b &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ a &= \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

При таком выборе a и b последнее уравнение записывается в виде

$$\overline{y}^2 = 4\sqrt{2}\overline{x},$$

определяет параболу с осью симметрии $\overline{O}\,\overline{x}$ и параметром $p = 2\sqrt{2}$. Как и выше, используя формулы (2) и (4), устанавливаем связь между координатами x, y и $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$\begin{cases} x &= (\overline{x} + a)\cos\alpha - (\overline{y} + b)\sin\alpha, \\ y &= (\overline{x} + a)\sin\alpha + (\overline{y} + b)\cos\alpha, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x &= \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{2}} + 2, \\ y &= \frac{\overline{x} + \overline{y}}{\sqrt{2}} + 1. \end{cases} \tag{9}$$

Начало координат новой системы — точка $\overline{O}(2, 1)$ в системе Oxy. Выполним чертеж аналогично тому, как это было сделано в примере 1 (См. Рис. 2.). Отметим попутно, что рассматриваемая парабола касается оси Ox в точке $(0, 5)$, т.к. исходное уравнение при $y = 0$ принимает форму $x^2 - 10x + 25 = 0$ и имеет два одинаковых корня $x = 5$. При $y = 0$ данное в условии уравнение имеет вид $y^2 - 6y + 25 = 0$, не имеет вещественных решений и, следовательно, парабола не пересекает ось Oy.

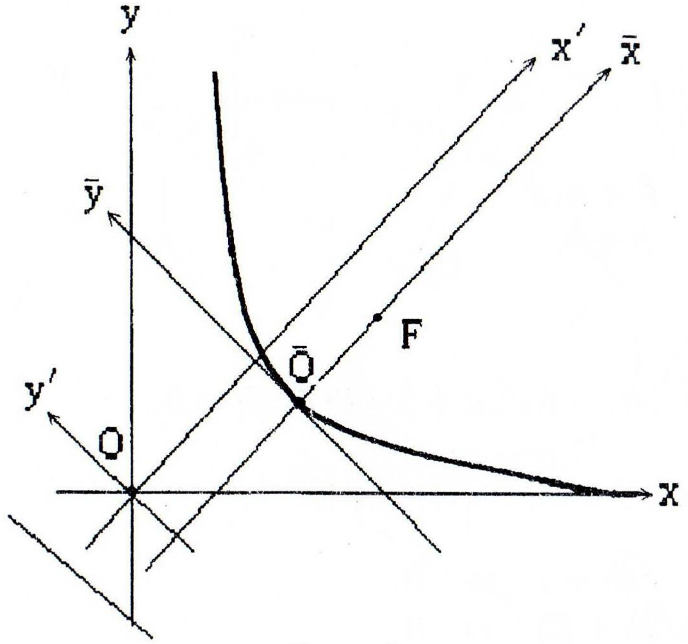


Рис. 2.

Вершина параболы – точка $\overline{O}(2,1)$ в системе Oxy. Фокус $F(\sqrt{2},0)$ в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ и $F(3,2)$ – в системе Oxy. Уравнение директрисы: $\overline{x} = -\frac{p}{2}$, т.е. $\overline{x} = -\sqrt{2}$ в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$. Из равенств (9) находим $\overline{x} = \frac{x+y-3}{\sqrt{2}}$, и, следовательно, уравнение директрисы в системе Oxy имеет вид $\frac{x+y-3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$, т.е.

$$x + y - 1 = 0.$$

З А Д А Н И Е 1.

Привести к каноническому виду данные ниже уравнения, указать типы кривых, ими определяемых, найти координаты вершин, фокусов и написать уравнения директрис (а для гиперболы – и асимптот), сделать чертежи кривых в исходной системе координат.

№ варианта	Уравнения кривых
1.	$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 14x - 2y - 13 = 0,$ $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$
2.	$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0,$ $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$
3.	$3x^2 + 4xy + 12x + 16y - 36 = 0,$ $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$
4.	$21x^2 + 24xy + 14y^2 + 18x - 4y - 139 = 0$ $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
5.	$4x^2 + 20xy - 11y^2 + 8x + 20y - 1 = 0,$ $x^2 + 2xy + y^2 - 16x + 16y + 32 = 0$
6.	$36x^2 - 24xy + 29y^2 - 96x + 82y - 91 = 0,$ $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$
7.	$11x^2 + 24xy + 4y^2 + 42x + 64y + 51 = 0,$ $x^2 + 2xy + y^2 + 16x - 16y - 32 = 0$
8.	$5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x - 4y - 4 = 0,$ $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$
9.	$25x^2 - 14xy + 25y^2 - 128x + 128y - 32 = 0,$ $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$

10.	$25x^2+14xy+25y^2-64x-64y-224=0,$ $9x^2-24xy+16y^2+2x-86y+39=0$
11.	$5x^2-6xy+5y^2-16x+16y+8=0,$ $x^2+4xy+4y^2+6x-3y+15=0$
12.	$x^2-xy+y^2-2x-2y-2=0,$ $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$
13.	$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ $16x^2+24xy+9y^2-7x+26y-34=0$
14.	$25x^2-14xy+25y^2-64x+64y-224=0,$ $16x^2-24xy+9y^2+110x-20y-50=0$
15.	$4xy+3y^2+16x+12y-36=0,$ $x^2+2xy+y^2-10x+6y+25=0$
16.	$14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0,$ $x^2-2xy+y^2+4x-8y+7=0$
17.	$3x^2-10xy+3y^2-16x+16y+24=0,$ $4x^2+4xy+y^2-2x-6y-5=0$
18.	$29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0,$ $x^2-2xy+y^2+10x-2y+13=0$
19.	$4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0,$ $x^2+2xy+y^2-8x-12=0$
20.	$41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0,$ $x^2+2xy+y^2+10x+2y+13=0$
21.	$3x^2+10xy+3y^2+2x+14y-13=0,$ $9x^2+24xy+16y^2+46x-22y-19=0$
22.	$25x^2-14xy+25y^2-64x+64y-224=0,$ $9x^2+24xy+16y^2+70x+10y-75=0$
23.	$4xy+3y^2-16x-12y-36=0,$ $x^2+2xy+y^2-8x+8y-16=0$
24.	$14x^2+24xy+21y^2+4x-18y-139=0,$ $x^2+2xy+y^2-6x+2y-11=0$
25.	$9x^2+24xy+41y^2+18x+24y-36=0,$ $x^2-2xy+y^2-8y+4=0$

2. *ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ.*[3]

Введем вначале понятие "неопределенность". Говорят, что выражение $\frac{u(x)}{v(x)}$ при $x \to b$ ($b \in \mathbf{R}$, $b=+\infty$, $b=-\infty$) представляет собою неопределенность вида "$\frac{0}{0}$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x)=0$, "$\frac{\infty}{\infty}$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x)=\infty$.

[3]Гийом де Лопиталь (1661–1704)-французский математик, член Парижской АН.

Аналогично определяются остальные пять типов неопределенностей: "$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "1^∞", "0^0", "∞^0" (соответственно, $u(x)\cdot v(x)$ есть неопределенность вида "$0\cdot\infty$" при $x\to b$, если $\lim\limits_{x\to b} u(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x)=\infty$;
$u(x)-v(x)$ — неопределенность "$\infty-\infty$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to b} u(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x)=-\infty$;
$u(x)^{v(x)}$ — неопределенность "1^∞", если $\lim\limits_{x\to b} u(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x)=\infty$; "$0^0$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x)=0$; "$\infty^0$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x)=0$.) [4]

Правило Лопиталя непосредственно применяется для раскрытия неопределенностей вида "$\frac{0}{0}$" и "$\frac{\infty}{\infty}$":
$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$, если $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ существует и функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют некоторым условиям (См., например, [3–6]).

ПРИМЕР 1. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, $\quad n,\, m\in\mathbf{N}$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{(\sin mx)'}{(\sin nx)'}=\frac{m}{n}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos mx}{\cos nx}=\frac{m}{n}\frac{\cos m\pi}{\cos n\pi}=\frac{m}{n}(-1)^{m+n}.$$ [5]

ПРИМЕР 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{a^x}$, $\quad \mu,\ a\in\mathbf{R}_+,\ a>1$.

Пусть $n-1<\mu\le n$, $n\in\mathbf{N}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^\mu)'}{(a^x)'}=\frac{\mu}{\ln a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu-1}}{a^x}\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}$$
$$\frac{\mu}{\ln a}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^{\mu-1})'}{(a^x)'}=\frac{\mu(\mu-1)}{\ln^2 a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu-2}}{a^x}\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}\ldots=$$
$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{\ln^n a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu-n}}{a^x}=0.$$

Для раскрытия неопределенностей других типов следует предварительно преобразовать их к виду "$\frac{0}{0}$" или "$\frac{\infty}{\infty}$". Например, пусть $u(x)\cdot v(x)$ есть неопределенность вида "$0\cdot\infty$" при $x\to b$. Запишем

---

[4] Точно так же определяются эти неопределенности при $x\to b-0$, $x\to b+0$, $b\in\mathbf{R}$.

[5] Знак равенства перед пределом отношения производных можно написать лишь после того, как будет установлено, что этот предел существует.

$u(x) \cdot v(x)$ в виде $u(x) \cdot v(x) = \dfrac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$. Имеем при $x \to b$ неопределенность $"\frac{0}{0}"$.

Для неопределенностей $"1^{\infty}"$, $"0^{0}"$, $"\infty^{0}"$ выражение $u(x)^{v(x)}$ преобразуется к виду $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) ln\, u(x)} = e^{\frac{ln\, u(x)}{v^{-1}(x)}}$. В силу непрерывности показательной функции имеем $\lim\limits_{x \to b} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x \to b} \frac{ln\, u(x)}{v^{-1}(x)}}$.

ПРИМЕР 3. Найти $\lim\limits_{x \to +0} (sin\, 2x)^{ln^{-1} x}$.

Имеем $\lim\limits_{x \to +0} (sin\, 2x)^{ln^{-1} x} \overset{"0^0"}{=} e^{\lim\limits_{x \to +0} \frac{ln\, sin\, 2x}{ln\, x}} = e$,

т.к. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{ln\, sin\, 2x}{ln\, x} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{(ln\, sin\, 2x)'}{(ln\, x)'} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\frac{2cos\, 2x}{sin\, 2x}}{\frac{1}{x}} =$

$2 \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{x}{tg\, 2x} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} 2 \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{(x)'}{(tg\, 2x)'} = 2 \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{\frac{2}{cos^2 2x}} = 1.$

З А Д А Н И Е 2. (Часть 1.)

Используя правило Лопиталя, найти пределы

№ вар-та	Пределы
1.	1). $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{sin\, x - arctg(\pi - x)}{(x - \pi)^3}$, 2). $\lim\limits_{x \to 1} (ln\, x)^{sin\, \pi x}$.
2.	1). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin\, 2x - 2x}{x^3}$, 2). $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (ln\, 2x)^{tg\,(1 - 2x)}$.
3.	1). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\, 2x - 2x}{x^3}$, 2). $\lim\limits_{x \to +0} (ctg\, x)^{-ln^{-1} x}$.
4.	1). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin\, 2x - 2arcsin\, x}{x^3}$, 2). $\lim\limits_{x \to 1} \left(tg \dfrac{\pi x}{4}\right)^{ctg\, \pi(1 - x)}$.
5.	1). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, 2x - 2arcsin\, x}{x^3}$, 2). $\lim\limits_{x \to +0} (ctg\, x)^{\frac{2}{ln\, x + 1}}$.
6.	1). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsin\, 2x - 2arcsin\, x}{x^3}$, 2). $\lim\limits_{x \to 1} \left(ctg \dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg \frac{\pi x}{2}}$.

7.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x - arctg\,3x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to +0}(ctg\,2x)^{\frac{3}{ln\,x+2}}$.
8.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x - 2arcsin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(ctg\,x)^{tg\,2x}$.
9.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x - 2sin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{ln^{-1}(sin\,x)}$.
10.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,2x - 2sin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{cos\frac{\pi x}{2}}$.
11.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x - 2sin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to +0}(sin\,x)^{ln\,tg(\frac{\pi}{4}-x)}$.
12.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,x - arcsin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to +0}(sin\,x)^{\frac{3}{ln\,x+2}}$.
13.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x - arcsin\,2x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(cos\,x)^{ln(sin\,x)}$.
14.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 + 2ln(cos\,x)}{x^4}$,	2). $\lim\limits_{x\to +0}(-ln\,x)^{x}$.
15.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - ln\left(\dfrac{sin\,x}{x}\right)^2}{x^2}$,	2). $\lim\limits_{x\to +0}\left(ln\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{3}{ln\,x}}$.
16.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,3x - 3sin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to 2}\left(tg\dfrac{\pi}{2x}\right)^{tg\frac{\pi x}{4}}$.
17.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x - 3tg\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctg\,x\right)^{x}$.
18.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x - 3arcsin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{sin\,x}{x}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$.
19.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,3x - 3tg\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{arcsin\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

20.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x-3sin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tg\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
21.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,x-arctg\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{arctg\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
22.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,sin\,x+2ln(cos\,x)}{x^4}$,	2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.
23.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x-tg\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to +0}\left(e^{2x}-1\right)^{\frac{2}{ln\,x}}$.
24.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,2x-2arctg\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\,arccos\,x\right)^{\frac{1}{x}}$.
25.	1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,3x-3arcsin\,x}{x^3}$,	2). $\lim\limits_{x\to 0}(cos\,x)^{ctg\,2x}$.

3. *ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ.*

Для исследования функции и построения ее графика можно рекомедовать предлагаемую ниже схему:

1. Найти область определения D_f функции (если она не задана).[6]

2. Проверить, является ли функция четной, нечетной, перидической или не обладает этими свойствами.[7] В силу симметрии достаточно исследовать четную и нечетную функции только для неотрицательных значений аргумента из ее области определения, периодическую — только на каком–либо промежутке значений аргумента длиной в один период. Если удается выяснить, что график имеет какую–либо другую симметрию, то это надо использовать для уменьшения объема исследований.

3. Выяснить поведение функции на границе множества значений

[6] В качестве области определения функции находим ее область естественного определения, т.е. множество всех вещественных значений аргумента, для которых функция имеет вещественные значения.

[7] Графики четной и нечетной функций симметричны относительно оси ординат и начала координат соответственно, график периодической функции состоит из периодически повторяющейся его части.

аргумента, на котором исследуется функция (это множество найдено в пункте 2.). В частности, найти асимптоты, если они имеются.

4. Найти нули и интервалы постоянства знака функции, вычислить ординату точки пересечения ее графика с осью ординат.

5. Используя производную первого порядка функции, найти интервалы монотонности функции и ее экстремумы.

6. С помощью производной второго порядка найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

Далее, нанести на координатной плоскости асимптоты и все полученные выше характерные точки (нули, точки экстремума и т.д.) [8] вместе с элементами графика (для уточнения отдельных частей графика желательно построить, кроме характерных, найденные дополнительно точки), все эти точки соединить линией (линиями, если график состоит из нескольких частей), учитывая характер изменения функции (возрастание, убывание, выпуклость, вогнутость).

Приведем примеры построения графиков.

ПРИМЕР 1.

Исследовать функцию $y = \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ и построить ее график.

1. Данная функция определена всюду, кроме точки $x = -2$, следовательно, $D_y = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, непериодическая. Исследуем ее на всей D_y.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. Будем искать уравнение прямолинейной асимптоты в виде $y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+3)^3}{x(x+2)^2} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+23x+27}{x^2+4x+4} = 5$.
Итак, при $x \to +\infty$ график функции имеет асимптоту $y = x + 5$. Точно так же проверятся, что при $x \to -\infty$ график функции имеет ту же самую асимптоту.
Далее, т.к. $\lim\limits_{x\to-2\pm0} y = +\infty$, то $x = -2$ — вертикальная асимптота.

---

[8] В точках перегиба следует нанести касательные к графику, для чего предварительно вычислить соответствующие значения первой производной.

4. Функция обращается в нуль при $x = -3$. Эта точка делит область определения функции на части $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, +\infty)$. Составляем таблицу

Интервал	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
Знак y	$-$	$+$	$+$

5.

$$\text{Находим} \quad y' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}. \quad \text{Ясно, что } D_{y'} = D_y.$$

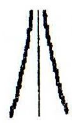
Подозрительные на экстремум точки — лишь стационарные точки, т.е. точки, в которых производная первого порядка равна нулю. Это точки $x = -3$ и $x = 0$. Они делят область определения y' на части $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$.
Составим таблицу

Интервал	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
Знак y'	$+$	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$ (возраст.)	$\nearrow$ (возраст.)	$\searrow$ (убыв.)	$\nearrow$ (возраст.)
Замечание	При $x = -3$ нет экстремума. 		При $x = 0$ $\min y$. $y_{min} = y(0) = \frac{27}{4}$. 	

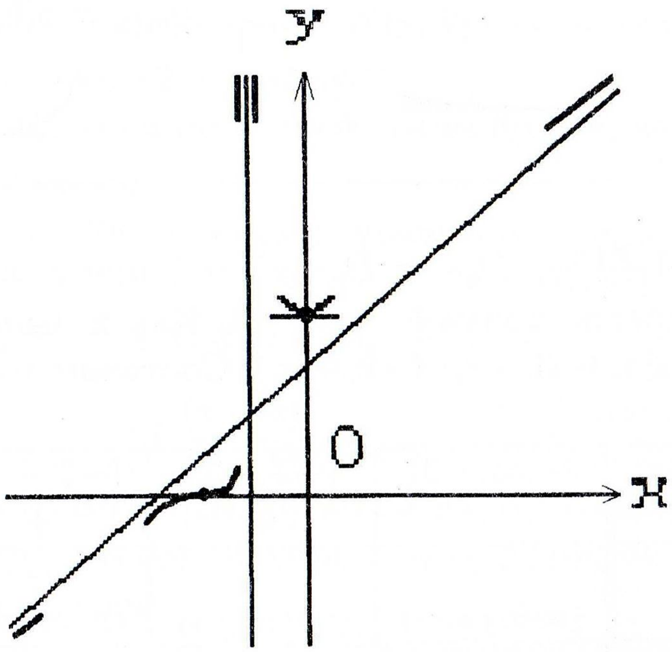
6.Далее, $y'' = 6\frac{x+3}{(x+2)^4}$, $D_{y''} = D_y$; $y'' = 0$ при $x = -3$. "Подозрительная" на перегиб точка — $x = -3$. Как и выше, получаем интервалы $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, +\infty)$. Составим таблицу

Интервал	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
Знак y''	$-$	$+$	$+$
y	$\frown$ (выпукла)	$\smile$ (вогнута)	$\smile$ (вогнута)
Замечание	При $x = -3$ перегиб. $y_{пер} = y(-3) = 0$. (См. предудущую таблицу.)		

Полученные результаты можно, удобства ради, свести в таблицу [9]

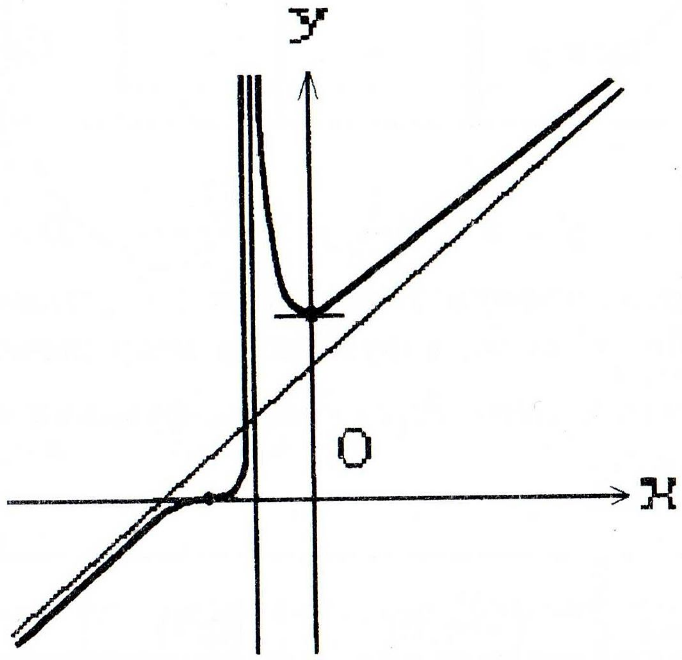
x	$-\infty$	-3	-2		0	$+\infty$
			$-2-0$	$-2+0$		
y	$-\infty$	$^-0^+$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$
y'		$^+0^+$			$^-0^+$	
y''		$^-0^+$			$+$	
Замечание	Асимптота $y=x+5$ 	Перегиб 	Разрыв 		min 	Асимптота $y=x+5$ 

Нанесем на координатной плоскости асимптоты и характерные точки вместе с соответствующими элементами графика



[9]Запись $^-O^+$ ниже означает, что слева от рассматриваемой точки функция отрицательна, а справа положительна. Аналогично и для $^+O^+$.

Соединим полученные точки плавными кривыми, учитывая характер изменения функции на каждом из интервалов $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$.



ПРИМЕР 2.

Исследовать функцию $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

1. $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2. Функция ни четная, ни нечетная, непериодическая. Исследуем ее на D_y.

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$. Будем искать уравнение прямолинейной асимптоты при $x \to +\infty$ в виде $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x}$, $k = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (y - kx) = -\infty$. Итак, при $x \to +\infty$ график функции не имеет асимптоты. Аналогичная ситуация и при $x \to -\infty$.

4. Находим нули функции: $2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} - 1.5) = 0$, откуда получаем $x = 0$ и $x = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.
Составляем таблицу

Интервал	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{27}{8})$	$(\frac{27}{8}, +\infty)$
Знак y	$-$	$-$	$+$

5. Находим $\quad y' = 2 - 2\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}, \quad D_{y'} = D_y \backslash \{0\}$. Подозрительные на экстремум точки : $x = 1$ — стационарная точка и $x = 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to \pm 0} y' = \infty$, а функция y непрерывна в точке $x = 0$. Это значит, что в точке $(0, 0)$ график функции имеет вертикальную касательную.

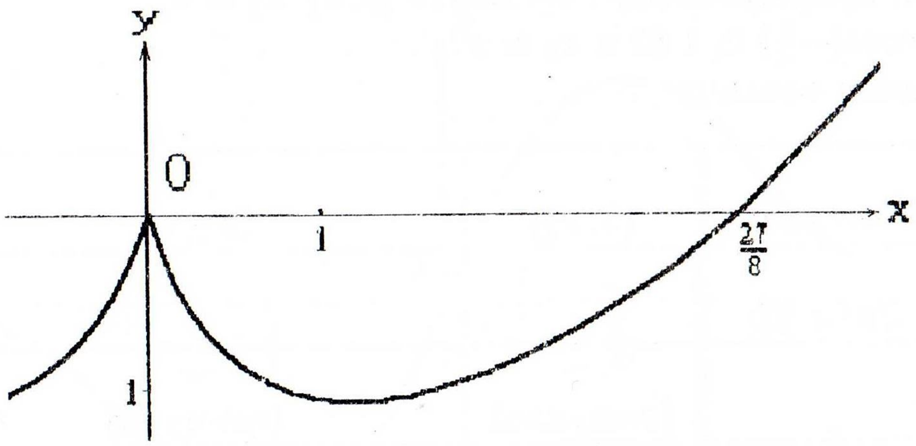
Составим таблицу

Интервал	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Знак y'	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$ (возрастает)	$\searrow$ (убывает)	$\nearrow$ (возрастает)
Замечание	При $x = 0$ $\quad max\ y$. $y_{max} = y(0) = 0$. 		При $x = 1$ $\quad min\ y$. $y_{min} = y(1) = -1$. 

6.Далее, $\quad y'' = \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}, \quad D_{y''} = D_{y'}$. Т.к. $y'' > 0$ на $D_{y''}$, то y вогнута на этом множестве.

В виду небольшого объема исследований их результаты не будем оформлять в виде таблицы, а сразу нанесем характерные точки и начертим график функции.

Замечание. Отметим, что в точке O(0,0) график имеет вертикальную касательную.



ПРИМЕР 3.

Исследовать функцию $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ и построить ее график.

1. $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2. Функция нечетная, 2π – периодическая. Поэтому достаточно исследовать ее на промежутке $[0, \pi]$.

3. $y(0) = y(\pi) = 0$.

4. $y = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcrl} x & = & k\pi, & k \in \mathbf{Z}, \\ x & = & (2l+1)\pi, & l \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$

На сегменте $[0, \pi]$ содержатся лишь нули $x = 0$ и $x = \pi$. На интервале $(0, \pi)$ $y > 0$.

5. $y' = \cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x$.

$y' = 0$ при $x = \frac{1}{3}\pi(1 + 2k)$ и $x = \pi(1 + 2l)$, $k, l \in \mathbf{Z}$. На сегменте $[0, \pi]$ содержатся только два нуля $x = \frac{1}{3}\pi$ и $x = \pi$. Имеем таблицу

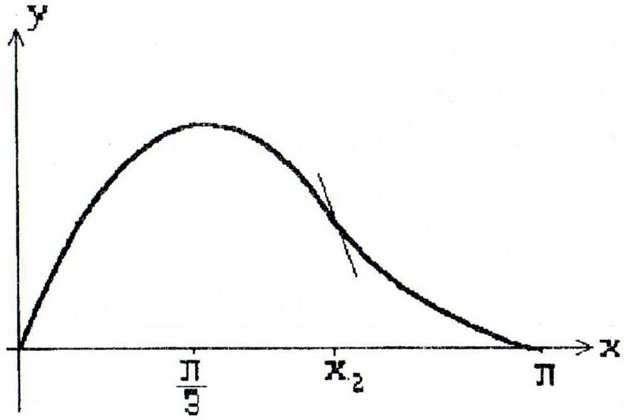
Интервал	$(-\infty, \frac{1}{3}\pi)$	$(\frac{1}{3}\pi, \pi)$
Знак y'	$+$	$-$
y	$\nearrow$ (возрастает)	$\searrow$ (убывает)
Замечание	При $x = \frac{1}{3}\pi$ $\max y$ с горизонтальной касательной. $y_{max} = y(\frac{1}{3}\pi) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cong 1.3$.	

6. $y'' = -\sin x - 2\sin 2x = -\sin x(1 + 4\cos x)$.
Нули y'', принадлежащие сегменту $[0, \pi]$: $x_1 = 0$, $x_2 = \arccos(-\frac{1}{4}) \cong 1.82$ и $x_3 = \pi$.
Составляем таблицу

Интервал	$(0, x_2)$	(x_2, π)
Знак y''	$-$	$+$
y	$\frown$ (выпукла)	$\smile$ (вогнута)
Замечание	При $x = x_2$ перегиб. $y_{пер} = y(x_2) = \sin x_2 + 0.5\sin 2x_2 \cong 0.73$ 	

$$y'_{пер} = y'(x_2) = \cos x_2 + \cos 2x_2 \cong -1.125,^{10}\ y'(0) = 2,\ y'(\pi) = 0.$$

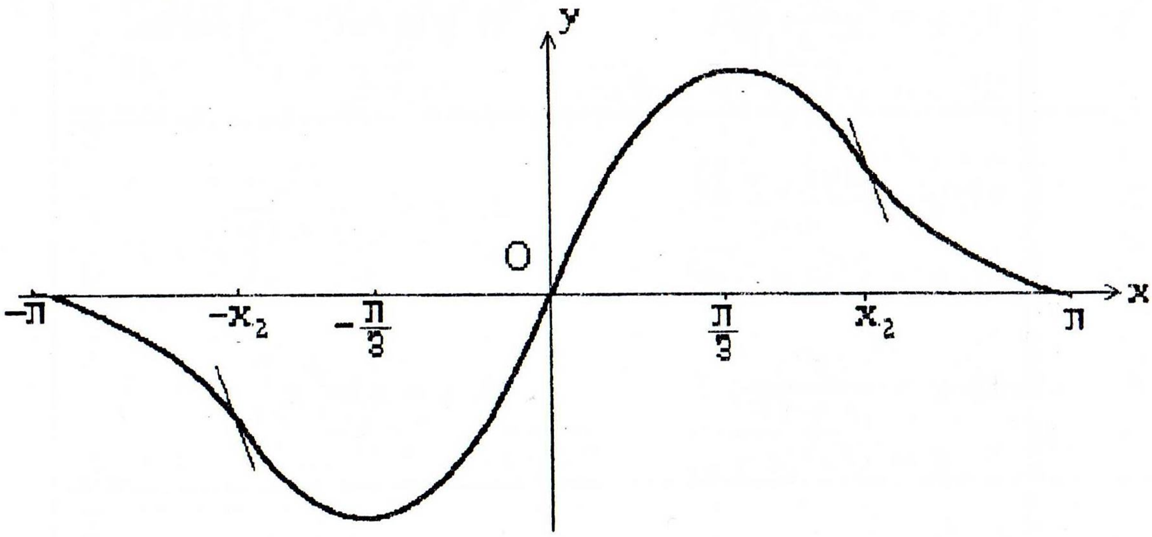
Построим график сужения исходной функции на промежуток $[0, \pi]$.



Используя нечетность функции, продолжим ее график на про-

[10] В точке перегиба $(x_2, y(x_2))$ угол наклона касательной к оси Ox равен $-arctg\, y'(x_2) \cong -0.844$ радиана.

межуток $[-\pi, 0)$:



Эта часть графика, соответствующая промежутку $[-\pi, \pi]$, продолжается далее на $(\pi, 3\pi]$, $(3\pi, 5\pi]$, $\ldots$, $[-3\pi, -\pi)$, $[-5\pi, -3\pi)$, $\ldots$.

З А Д А Н И Е 2. (Часть 2.)

№ варианта	По полной схеме исследовать функции и построить их графики.
1.	1). $y = \frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}$, 2). $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$, 3). $y = 2x + 3x^{\frac{2}{3}}$.
2.	1). $y = 5\frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}$, 2). $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$, 3). $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.
3.	1). $y = 4\frac{x-3}{(x-2)^2}$, 2). $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$, 3). $y = x^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$.
4.	1). $y = \frac{1}{x^2} + \frac{8}{(3-x)^2}$, 2). $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$, 3). $y = x + e^{-x}$.
5.	1). $y = x^2e^{2x}$, 2). $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, 3). $y = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$.

6.	1). $y = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, 2). $y = \sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$, 3). $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{x^2}$.
7.	1). $y = \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin x}$, 2). $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, 3). $y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}$.
8.	1). $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$, 2). $y = x\ln^2 x$, 3). $y = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$.
9.	1). $y = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$, 2). $y = \dfrac{x^3}{27}(x+5)^2$, 3). $y = 3\sqrt[3]{\cos 2x}$.
10.	1). $y = \dfrac{3(x-1)^4+1}{x^3-3x^2+3x-1}$, 2). $y = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$, 3). $y = \dfrac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$.
11.	1). $y = \dfrac{\ln x + 3}{10x^2}$, 2). $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, 3). $y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-3)^2}$.
12.	1). $y = \dfrac{x^2-10x+16}{x^2}$, 2). $y = x - \operatorname{arctg} x$, 3). $y = \sqrt[3]{(x+1)^2e^{-x}}$.
13.	1). $y = \dfrac{(x-2)^3}{(x-1)^2}$, 2). $y = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos 3x$, 3). $y = 2x + 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.
14.	1). $y = 5\dfrac{\ln x + 1}{\sqrt{x}}$, 2). $y = \dfrac{x^4}{x^3+1}$, 3). $y = \sqrt[3]{x^2e^{-x}}$.
15.	1). $y = 4\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$, 2). $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$, 3). $y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$.

16.	1). $y=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$, 2). $y=e^x-x$, 3). $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{27}{(2-x)^2}$.
17.	1). $y=10x^2e^{-2x}$, 2). $y=\sqrt[3]{x^2+6x+8)^2}$, 3). $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.
18.	1). $y=\dfrac{x^2(x+1)}{(x-1)^2}$, 2). $y=\cos x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$, 3). $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+3)^2}$.
19.	1). $y=x\,e^{-\frac{1}{x-2}}$, 2). $y=\dfrac{(x+1)^3}{2(x+2)^2}$, 3). $y=\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}$.
20.	1). $y=\dfrac{(x+1)^4}{(x+2)^3}$, 2). $y=1-x\ln^2 x$, 3). $y=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)^2}$.
21.	1). $y=(1-x)e^{-\frac{1}{x+1}}$, 2). $y=-\dfrac{x^3}{27}(x+5)^2$, 3). $y=3\sqrt[3]{(x-1)^2}-2x+2$.
22.	1). $y=\dfrac{3(x+1)^4-1}{x^3+3x^2+3x+1}$, 2). $y=\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sin x}$, 3). $y=(x+4)\sqrt[3]{(1-x)^2}$.
23.	1). $y=\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2}$, 2). $y=\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\cos x}$, 3). $y=\sqrt[3]{x^2}e^{x+1}$.
24.	1). $y=\dfrac{x^2-8x-25}{(x+1)^2}$, 2). $y=e^{\frac{1}{4-x^2}}$, 3). $y=\sqrt[3]{x^2}e^{1-x}$.
25.	1). $y=\dfrac{(x+3)^2}{x+2}$, 2). $y=\sqrt[3]{x^2}e^{2+x}$, 3). $y=\sqrt[3]{\sin x+\cos x}$.

4. *МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.*

1.*Вычисление определителей.*

Определители 2-го порядка вычисляют по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определители более высокого порядка находят, используя их основные свойства, в частности:

а) Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

б) К любой строке определителя можно прибавить любую другую строку, умноженную на какое–либо число.[11] При этом определитель сохраняет свое значение.

в) Имеет место разложение определителя по элементам i–й строки

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

j–го столбца

$$det\,A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в $det\,A$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} — дополнительный минор, соответствующий a_{ij}, — определитель порядка $n-1$, полученный из $det\,A$ вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

г) Определитель с двумя одинаковыми строками (двумя одинаковыми столбцами) равен нулю.

При практическом вычислении определителя стремятся с помощью свойства б) получить как можно больше нулей в какой–нибудь строке (или в каком–нибудь столбце), а затем разложить полученный определитель по элементам этой строки (этого столбца).

[11] Строки и столбцы определителя рассматриваются как векторы. Строки и столбцы "равноправны", т.е. если какое–нибудь свойство имеет место для строк, то оно справедливо и для столбцов и наоборот.

ПРИМЕР.

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -20 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & -2 & 15 \end{vmatrix}$.

Вынесем из последнего столбца общий множитель 5:

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко 2-му столбцу 1-й, умноженный на -2, к 3-му – 1-й. Будем иметь

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам 1-й строки:

$$\Delta = 5 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к 1-й строке 2-ю, умноженную на 2, затем ко 2-й строке прибавим 3-ю, также умноженную на 2:

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 7 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим теперь этот определитель по элементам 1-го столбца:

$$\Delta = 5(-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot (1 \cdot 7 - (-2) \cdot (-8)) = 45.$$

2. *Основные действия с матрицами.*

Основные действия с матрицами — это сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц, нахождение обратной матрицы.

При сложении матриц [12] складываются все их соответствующие элементы, т.е. элементы, находящиеся в одних и тех же строках и в одних и тех же столбцах. Пусть

---

[12] Складываемые матрицы должны иметь одинаковые размеры, т.е. у них должно быть одинаковое число строк и одинаковое число столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Краткости ради это будем в дальнейшем записывать так: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$. По определению $A + B =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

Далее, $A - B =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

При умножении матрицы на число на это число умножается каждый элемент матрицы:[13]

$$\alpha\cdot A = (\alpha\cdot a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \cdots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \cdots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & \cdots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}, \ \alpha \text{ – число.}$$

ПРИМЕР.

Даны матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $3A - B$.

$$3A - B = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 1 \ \ -0 & 3\cdot 2-(-1) & 3\cdot(-3)-2 \\ 3\cdot(-2)-3 & 3\cdot 4-2 & 3\cdot 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -11 \\ -9 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

При умножении матриц вектор–строка левого множителя умножается скалярно на вектор–столбец правого множителя:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = (c_{ij})_{m\times p},$$

[13] Не путать с умножением определителя на число: на это число умножается лишь одна строка (или лишь один столбец) определителя.

где $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, p.$ [14]

ПРИМЕР. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Обратной матрицей для квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ порядка n называется матрица A^{-1} такая, что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где $E = (\delta_{ij})_{n \times n}$ — единичная матрица, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i \end{cases}$ — символ Кронекера.[15]

Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы — ее неособенность ($det\, A \neq 0$).

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе $det\, A$.

ПРИМЕР. Найти A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$.

Используем формулу (1). Вычисляем $det\, A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -8 \end{vmatrix}$:

Прибавим ко 2-му столбцу 1-й:

$det\, A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$. Прибавим к последней строке предпо-

[14] Элемент c_{ij} матрицы-произведения равен скалярному произведению i-й строки левой матрицы-множителя и j-го столбца правого множителя.

[15] Леопольд Кронекер (1823–1891) — немецкий математик, член Берлинской АН.

следнюю, умноженную на 2: $det\,A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Затем разложим этот определитель по элементам 2-го столбца:

$$det\,A = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$ Далее,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -1, A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 1, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = 1, A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = 7, A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1, A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4, A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2.$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Замечание. Ниже для нахождения обратной матрицы будет использован метод Гаусса.[16]

3.*Собственные числа и собственные векторы матриц.*

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — квадратная матрица порядка n.

Ненулевой вектор $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ [17] называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному (характеристическому) числу λ этой матрицы, если имеет место равенство

$$AX = \lambda X \qquad (2)$$

.

Для отыскания собственых чисел и собственных векторов матрицы, соответствующих этим числам, преобразуем уравнение (2):

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda E)\,X = \overline{0}, \quad \text{где } \overline{0} = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n})^T$$

есть нулевой вектор–столбец.

[16] Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — выдающийся немецкий математик, астроном, физик и геодезист.

[17] Буквой T, помещенной справа над вектором, матрицей будем обозначать результат транспонирования. Т.о. рассматриваемый вектор X есть вектор-столбец.

Последнее уравнение в координатной форме записывается в виде однородной системы n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots & & \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0. \end{array}\right. \quad (3)$$

Как хорошо известно (например, [7-8]), однородная система линейных алгебраических уравнений, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда определитель системы равен нулю. Поэтому

$$det\,(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Левая часть равенства (4) является многочленом степени n относительно λ и называется характеристическим многочленом. Корни характеристического многочлена и являются характеристическими (собственными) числами матрицы A. Множество всех собственных чисел матрицы образует ее спектр.

При практическом отыскании собственных чисел и собственных векторов матрицы:

а)находят все решения уравнения (4), т.е. спектр матрицы;

б)для каждого собственного числа λ решают систему (3).

ПРИМЕР. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Записываем и раскрываем характеристический определитель:

$$det\,(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -6+2\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -6+2\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ 1 & -6+2\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((5-\lambda)(2-\lambda) - 6 + 2\lambda) - 6 + 2\lambda + 5 - \lambda = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) + \lambda - 1 =$$

$(\lambda-1)\left(1-(\lambda-4)^2\right)=-(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)$.
Итак, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=5$ — характеристические числа матрицы A.

Найдем теперь собственные векторы, соответствующие этим собственным числам.

1. $\lambda=\lambda_1$. Обозначим $X^{(1)}=(x_1,x_2,x_3)^T$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ_1. Запишем соответствующую систему (3) в матричном виде:
$(A-\lambda_1E)\cdot X^{(1)}=(0,0,0)^T$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda_1 & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ решение которой $x_1=x_2=x_3=c$, где c — произвольное число, не равное нулю. Итак, $X^{(1)}=c(1,1,1)^T$.

2. $\lambda=\lambda_2$. Обозначим $X^{(2)}=(t_1,t_2,t_3)^T$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ_2. Система (3) в матричном виде для рассматриваемого случая:
$(A-\lambda_2E)\cdot X^{(2)}=(0,0,0)^T$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda_2 & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases} t_1 - 2t_2 - t_3 = 0, \\ -t_1 \qquad - t_3 = 0, \end{cases}$, решение которой имеет вид

$\begin{cases} t_2 = t_1, \\ t_3 = -t_1 \end{cases}$, где $t_1=c$, c — произвольное число, не равное нулю. Т.о., $X^{(2)}=c(1,1,-1)^T$.

3. $\lambda=\lambda_3$. Обозначим $X^{(3)}=(u_1,u_2,u_3)^T$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ_2. Система (3)

в матричном виде для рассматриваемого случая:
$(A - \lambda_3 E) \cdot X^{(3)} = (0,0,0)^T$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_3 & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda_3 & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 0, \\ u_1 - 2u_2 - 3u_3 = 0, \end{cases}$, решение которой имеет вид

$\begin{cases} u_2 = -u_1, \\ u_3 = u_1 \end{cases}$, где $u_1 = c$, c — произвольное число, не равное нулю. Т.о., $X^{(3)} = c(1,-1,1)^T$.

4.*Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.*

Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных. Пусть система содержит n неизвестных. Используя элементарные преобразования, [18] исключают одно из неизвестных из всех уравнений системы, кроме одного. В полученной системе с $n-1$ неизвестным снова исключают одно из неизвестных и т.д. В конце концов приходят к системе с треугольной (или трапециевидной) матрицей, эквивалентной исходной системе. В этом, как говорят, состоит прямой ход метода Гаусса. Обратным ходом называют решение системы, полученной в результе прямого хода.

Замечание. При решении систем линейных алгебраических уравнений вместо самой системы удобно записывать расширенную матрицу системы [19] и соответствующие элементарные преобразования выполнять со строками этой матрицы.

---

[18] Элементарные преобразования систем уравнений — это: а) умножение обеих частей какого–нибудь уравнения системы на отличное от нуля число, б) прибавление к какому–либо уравнению системы другого уравнения, умноженного на какое–нибудь число (при этом, естественно, умножаются обе части уравнения, складываются левые и правые части уравнений соответственно), в) перестановка местами каких–либо уравнений системы. Элементарные преобразования систем приводят к эквивалентным системам.

[19] Матрицей системы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1,2,\cdots,m$, $\quad x_1, x_2, \cdots, x_n$ — неиз-

ПРИМЕР 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1, \\ x - y + z = -1, \\ 2x - y - z = 2, \\ x + 2y - 2z = 5. \end{cases}$$

Расширенная матрица этой системы —

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right).$$

Переставим местами 1-ю и 2-ю строки:

$$A_p \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

1-ю строку умножим на (-2) и прибавим ко 2-й и 3-й, 1-ю строку умножим на (-1) и прибавим к последней: $\longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Последнюю строку разделим на 3 (т.е. умножим на $\frac{1}{3}$): $\longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Переставим 2-ю и последнюю строки: $\longrightarrow$

вестные, называется матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, расширенной

матрицей системы — $A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad (*) \quad \xrightarrow{\substack{\text{2-ю строку умножим на } (-5) \\ \text{и прибавим к последней,} \\ \text{2-ю строку умножим на } (-1) \\ \text{и прибавим к предпоследней:}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{Предпоследнюю строку} \\ \text{разделим на } (-2), \\ \text{последнюю — на 7:}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом пришли к системе с двумя одинаковыми уравнениями

$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ \quad\ \ y - z = 2, \\ \qquad\quad z = -1, \\ \qquad\quad z = -1. \end{cases}$$

Отбрасываем последнее уравнение и получаем систему

$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ \quad\ \ y - z = 2, \\ \qquad\quad z = -1. \end{cases}$$

. На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса. Обратный ход — решение последней системы. Значение z уже известно из последнего уравнения. Из предпоследнего находим $y = 1$, из 1-го — $x = 1$. Решение исходной системы имеет следующий вид: $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = -1. \end{cases}$

Отметим, что имеется много разновидностей метода Гаусса (без обратного хода, с выбором главного элемента по столбцу, по всей матрице, компактный метод Гаусса и др., см., например, [9,10]).

При использовании метода Гаусса без обратного хода получают нули не только под главной диагональю матриц, возникающих из расширенной матрицы системы с помощью элементарных преобразований, но и над главной диагональю.

Так в рассматриваемом примере, исходя из системы, определяемой матрицей (*), можно исключить неизвестное y не только из

3-го и 4-го уравнений, но и из 1-го, неизвестное z не только из 4-го, но и из 1-го и 2-го:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vert & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \vert & 2 \\ 0 & 1 & -3 & \vert & 4 \\ 0 & 5 & 2 & \vert & 3 \end{pmatrix}$$

2-ю строку прибавим к 1-й,
умножим на (-1)
и прибавим к предпоследней,
умножим на (-5)
и прибавим к последней:
$\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & -2 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & 7 & \vert & -7 \end{pmatrix}$$

Как и выше, получаем
$\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & -1 \end{pmatrix}$$

3-ю строку прибавим ко 2-й,
умножим на (-1)
и прибавим к последней:
$\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}.$$

Искомое решение расположено справа от вертикальной черты.

ПРИМЕР 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & \vert & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & \vert & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & \vert & 1 \end{pmatrix}$$

1-ю строку умножим на (-2)
и прибавим ко 2-й ,
умножим на (-3)
и прибавим к последней:
$\longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \underrightarrow{\text{2-ю строку умножим на } (-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c}\text{3-ю строку прибавим к 1-й,} \\ \text{2-ю строку умножим на 2} \\ \text{и прибавим к 3-й:} \\ \longrightarrow\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c}\text{3-ю строку разделим на 2:} \\ \longrightarrow\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{c}\text{Последнюю строку умножим на } -6 \\ \text{и прибавим к 1-й,} \\ \text{умножим на 3} \\ \text{и прибавим ко 2-й:} \\ \longrightarrow\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Таким образом пришли к системе $\left\{\begin{array}{lcr} x_1 & = & -2-13x_4, \\ \quad x_2 & = & \frac{3}{2}+9x_4, \\ \qquad x_3 & = & \frac{1}{2}+2x_4, \end{array}\right.$

решение которой записывается в виде $\left\{\begin{array}{lcr} x_1 & = & -2-13t, \\ x_2 & = & \frac{3}{2}+9t, \\ x_3 & = & \frac{1}{2}+2t, \\ x_4 & = & t, \end{array}\right.$ t — произвольное число.

Использование метода Гаусса для отыскания элементов обратной матрицы.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно использовать и для нахождения элементов обратной матрицы. Пусть имеется квадратная неособенная матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ порядка n. Обозначим $A^{-1} = (x_{ij})_{n\times n}$.

По определению $A \cdot A^{-1} = E$, где E— единичная матрица порядка n, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $X^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj})^T$ — j–й столбец матрицы A^{-1}, $E^{(j)} = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \cdots, \delta_{nj})^T$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Для нахождения всех элементов обратной матрицы нужно решить n систем линейных алгебраических уравнений $A \cdot X^{(j)} = E^{(j)}$, $j = 1, 2, \cdots, n$ с одной и той же матрицей системы A. Эти системы можно решать методом Гаусса параллельно, т.е. элементарные преобразования над строками производить, исходя из следующего аналога расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

В качестве примера с помощью метода Гаусса без обратного хода найдем обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$.

Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \text{Ко 2-й строке прибавим 1-ю,} \\ \text{К 3-й, умноженной на 2, прибавим} \\ \text{1-ю, умноженную на } -3\text{:} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \text{2-ю строку умножим на 2} \\ \text{и прибавим к 1-й,} \\ \text{умножим на 4 и прибавим к 3-й:} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{3-ю строку умножим на } -1 \\ \text{и прибавим к 1-й,} \\ \text{умножим на } -2 \text{ и прибавим ко 2-й:}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1-ю строку разделим на } -2, \\ \text{2-ю умножим на } -1:}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right), \text{ откуда } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Этот пример был решен выше другим способом.

З А Д А Н И Е 3.

В каждом варианте:

1). Вычислить определитель.

2). Найти $3AB-2C$. Матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ — общая для всех вариантов.

3). Для матрицы A найти обратную A^{-1} и проверить, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

4). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

5). С помощью метода Гаусса решить системы.

6). Методом Гаусса найти обратную матрицу для матрицы A пункта 3).

ВАРИАНТ 1.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -12 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+3y-2z=4, \\ x-7y+3z=-2, \\ 3x+5y+4z=-1, \\ 8x-15y+z=7. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+y+z-3u=1, \\ x-4y+3z+4u=0, \\ 3x-y+2z-u=0. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 2.

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \\ -4 & -4 & -5 & -3 \end{vmatrix}.\ 2)\ B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -15 & 2 \\ 12 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\ 4)\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5)\ \begin{cases} 3x + 7y - 4z = 10, \\ x - 5y + 3z = -7, \\ 10x - y + 2z = 0, \\ 7x + 3y + z = 7. \end{cases},\ \begin{cases} 5x + y - z + 3u = 2, \\ x + 2y + z - 7u = 1, \\ 2x - y + 4z + u = 0. \end{cases}.$$

ВАРИАНТ 3.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & -5 & 4 \end{vmatrix}.\ 2)\ B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 4 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.\ 4)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5)\ \begin{cases} 2x + 3y + 8z = 1, \\ x + 5y - 15z = 4, \\ 13x + 4y + 6z = -9, \\ 3x - 2y + 5z = -5. \end{cases},\ \begin{cases} 2x + y - 3z + u = 1, \\ x + 5y + z - 2u = 0, \\ 3x - y + 2z + 3u = -5. \end{cases}.$$

ВАРИАНТ 4.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ -2 & -3 & -3 & 4 \end{vmatrix}.\ 2)\ B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 10 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 25 & -2 \\ 7 & 13 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.\ 4)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$5)\ \begin{cases} 3x - 5y + 4z = 1, \\ x + 8y - 2z = -3, \\ 2x + 15y + 3z = 1, \\ 4x - 7y + 4z = 0. \end{cases},\ \begin{cases} 2x - y + z + 3u = 2, \\ x + 2y + z + u = 3, \\ 5x + 5y - 2z + 6u = 11. \end{cases}.$$

ВАРИАНТ 5.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 13 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 11x + 3y + 4z = 1, \\ 2x + y - 4z = -5, \\ 12x - 3y + z = 4, \\ x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + y - 3z + u = 1, \\ x - 2y + 2z - 3u = 2, \\ 4x - 3y + z - 5u = 5. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 6.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ 14 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 8x + 2y - z = 4, \\ x + 4y + z = 2, \\ 15x + 7y - 2z = 11, \\ 12x - 4y + z = -6. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + 3y - z + 2u = 5, \\ x + 2y + 3z - u = 1, \\ 5x + 9y + 8z - u = -8. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 7.

1) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ -3 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x + 8y + z = 3, \\ x - 15y - 2z = 4, \\ 3x + 7y - 4z = 10, \\ 4x + 9y + 3z = 5. \end{cases}$, $\begin{cases} x - 3y + 2z - u = 4, \\ 2x + y - z + 3u = 6, \\ 4x - 5y + 3z + u = 14. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 8.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 2 & 4 \\ 14 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 6x - 2y + 3z = -8, \\ x + 5y + z = 3, \\ 4x + y - 2z = 5, \\ 18x + y + z = -1. \end{cases}$, $\begin{cases} x + 2y - z + 3u = 2, \\ 2x - y + 3z + u = 1, \\ 5x - 5y + 10u = 7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 9.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 14 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} x + 15y + 3z = 1, \\ 4x + -11y + 11z = 3, \\ 3x + 16y + 9z = 3, \\ 5x - 7y - 12z = -22. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + y - 3z + 2u = 6, \\ x + 2y + 2z - 3u = -4, \\ 4x + 5y + z - 4u = 14. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 10.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -4 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 22 & -3 \\ 17 & -13 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x - 3y + 15z = 8, \\ 3x + y - 8z = 1, \\ 7x - 3y + 19z = 13, \\ x - 6y - 12z = 13. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - y + z + 3u = 2, \\ x + 2y + z + u = 3, \\ 5x + 5y - 2z + 6u = 11. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 11.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 17 & -14 \\ 3 & 4 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x + 8y + 5z = 1, \\ x - 9y - 4z = 7, \\ 3x + 14y + z = 8, \\ 2x - 10y - 2z = 8. \end{cases}$, $\begin{cases} x - 3y + z - 8u = 12, \\ 2x + y - 3z + u = 3, \\ 4x - 5y - z - 15u = 27. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 12.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & -19 \\ 13 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 5x + y + z = 3, \\ x - 10y + 2z = -3, \\ 3x + 14y - 3z = 9, \\ 2x - 8y - z = 4. \end{cases}$, $\begin{cases} x - 3y + 5z - u = 2, \\ 2x + y - 3z + 3u = -3, \\ 4x - 5y + 7z + 5u = 1. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 13.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -4 & -4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 14 & -17 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x - 2y + 12z = 5, \\ x + 2y - 8z = -1, \\ 4x + y + 15z = 3, \\ 8x - 7y + 4z = 15. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + y - z + 3u = 1, \\ x + 2y + 3z - u = -4, \\ 4x + 5y + 5z + u = -7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 14.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ -3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 12x - 4y - z = 7, \\ x + y + 6z = 4, \\ 2x - 3y + 12z = 18, \\ 13x + 2y + z = -3. \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2y + 3z - 3u = 15, \\ 2x + 3y - z + 4u = 5, \\ 5x - 3y + 8z - 5u = 50. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 15.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 17 & -19 \\ 13 & -2 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 7, \\ x - 13y + 2z = -4, \\ 3x - 17y - 3z = 15, \\ 5x - 13y - 4z = 22. \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2y + 3z - u = -1, \\ 2x + 3y - z + 4u = 5, \\ 4x - y + 5z + 2u = 3. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 16.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 23 & -13 \\ 14 & -7 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 4x + 2y - z = 7, \\ 13x - y - 2z = 4, \\ 17x - 3y + 3z = -15, \\ 13x - 5y + 4z = -22. \end{cases}$, $\begin{cases} x - 4y - 5z - 2u = -3, \\ 2x - y - 3z + u = 1, \\ 3x + 2y - z + 4u = 5. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 17.

1) $\begin{vmatrix} -3 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -15 & 12 \\ 11 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 5x + 2y + 7z = 3, \\ x + y + 8z = 6, \\ 3x - 2y - z = 3, \\ 15x - 3y + 2z = 8. \end{cases}$, $\begin{cases} x - y + 4z + u = 1, \\ 2x + 3y - 5z + 2u = 5, \\ 4x + y + 3z + 4u = 7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 18.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -3 \\ -2 & 17 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 5x + 7y + z = 4, \\ x + 2y - 5z = 5, \\ 15x - 6y - 3z = 3, \\ 7x + 3y + z = 0. \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2y + 8z + 3u = 4, \\ 3x + y - 2z - u = 15 \\ 5x - 3y + 14z + 5u = 23. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 19.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & -3 & -4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 25 & -2 \\ -7 & 13 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x - 2y + 5z = 8, \\ 3x + 3y - 19z = -6, \\ x - 5y + 7z = 16, \\ 5x + y - 13z = 2. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - y + 3z - 7u = -1, \\ x + 2y - 2z + 4u = 3, \\ 5x + 5y - 3z + 5u = 8. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 20.

1) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -3 & 4 \\ 5 & 31 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+ & 10y+ & z = & 9, \\ x- & 13y- & 2z = & 7, \\ 3x+ & 15y+ & 4z = & 11, \\ 7x+ & 8y+ & 20z = & 15. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 2y+ & 3z- & u = & 5, \\ 2x+ & y- & z+ & 4u = & -7, \\ 4x- & 3y+ & 5z+ & 2u = & 3. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 21.

1) $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 5 & -3 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ 13 & -21 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x+ & y+ & 4z = & 1, \\ x- & 2y- & 12z = & 2, \\ 2x- & 3y+ & z = & -16, \\ 15x+ & 8y+ & 19z = & 21. \end{cases}$, $\begin{cases} x+ & 5y+ & 2z- & 3u = & 5, \\ 2x- & y+ & 3z+ & 2u = & -15, \\ 5x+ & 4y+ & 9z- & 7u = & 0. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 22.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 & 5 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 22 & -3 \\ -4 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+ & 7y+ & 2z = & 8, \\ x- & 15y+ & 3z = & 14, \\ 13x+ & 14y- & z = & -18, \\ 3x- & 9y+ & 4z = & 17. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 5y+ & 3z- & u = & 4, \\ 2x+ & 3y- & 4z+ & 3u = & -1, \\ 4x- & 7y+ & 2z+ & u = & 7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 23.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -5 & -3 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 27 & -12 \\ -5 & 13 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x- & 15y+ & 2z= & 5, \\ x- & 7y- & 4z= & -3, \\ 2x+ & 19y+ & 7z= & 9, \\ 4x- & 9y- & 2z= & 2. \end{cases}$, $\begin{cases} 5x+ & y- & 2z+ & u= & 1, \\ 2x+ & 3y+ & z- & 2u= & 3, \\ x+ & 4y- & z- & u= & 4. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 24.

1) $\begin{vmatrix} -4 & -4 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -13 & 17 \\ -3 & 4 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x+ & 8y+ & z= & 2, \\ x- & 15y- & 3z= & 4, \\ 2x+ & 9y+ & 10z= & -8, \\ 4x- & 11y- & 7z= & 11. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+ & y- & 3z- & u= & 5, \\ x- & 2y+ & 4z- & 3u= & -4, \\ 5x- & 5y+ & 9z- & 10u= & -7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 25.

1) $\begin{vmatrix} -6 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 0 \\ -6 & -5 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -4 & 1 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 19 & -7 \\ 23 & -15 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ -3 & -8 & -7 \\ -2 & -7 & -5 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ -6 & 7 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+ & 3y+ & 4z= & 4, \\ x- & 5y- & 6z= & -3, \\ 4x- & 2y- & 3z= & 3, \\ 3x+ & 4y+ & 2z= & 9. \end{cases}$, $\begin{cases} 3x+ & y- & 2z- & 5u= & 1, \\ x- & 2y+ & 2z+ & 3u= & 3, \\ 4x- & 4y- & 3z- & 4u= & -7. \end{cases}$.

Литература

1. Привалов И.И.Аналитическая геометрия. М., Наука, 1969.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М., Наука, 1966.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.1.М., Наука, 1958.
4. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М., Наука, 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, ч.1., М., ГИТТЛ, 1955.
6. Рудин У. Основы математического анализа. М. Мир, 1976.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре.М., Наука, 1984.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1975.
9. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. СпБ, издательство СПбГУ, 1998.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., Наука, 1973.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1975.
12. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М., Наука, 1977.
13. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
14. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Физматгиз, 1963.
15. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. М., Высшая школа, 1994.