Н. А. Волкова
В. Ю. Сахаров

Абитуриенту–2000.
Тренировочные варианты

Санкт-Петербург 2000

Н. А. Волкова, В. Ю. Сахаров

Абитуриенту–2000.
Тренировочные варианты

Учебное пособие

НИИ химии СПбГУ

Санкт-Петербург

2000

УДК 373.167.1:51+51(076.2)
В67

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф М. А. Нарбут (С.-Петерб. гос. ун-т)
канд. физ.-мат. наук, доц. Г. В. Тимофеева (С.-Петерб. гос. ин-т точн. мех и опт.)

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики Санкт-Петербургского государственного университета

Волкова Н. А., Сахаров В. Ю.
В67 Абитуриенту–2000. Тренировочные варианты — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2000. — 38 с.

Данная книга содержит специальные тренировочные варианты для абитуриентов, главная цель которых проверить знание основных понятий теории функций в рамках средней школы и владение основными навыками алгебраических преобразований элементарных функций.

Особое внимание уделено построению графиков элементарных функций с помощью линейных преобразований, графическому методу решений уравнений и неравенств. Метод координат используется также при постановке и решении геометрических задач. Авторы старались составить сбалансированные по сложности и по охвату материала варианты, которые позволили бы абитуриенту проверить и упрочить знания в основных разделах школьной математики, сосредоточив внимание на базовых навыках для усвоения курса высшей математики в техническом вузе. Текстовые задачи проверяют знание основных математических соотношений между величинами: процентные, арифметические, соотношения между членами прогрессий и т.п. Для удобства читателя приведены решения типовых вариантов, к остальным даны ответы. Авторы искренне надеются, что данная книга будет полезна абитуриентам при самостоятельной подготовке к школьным и вступительным экзаменам.

УДК 373.167.1:51+51(076.2)

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ.

Вариант 1

1. Фермер-зверовод за сезон сдал на меховую фабрику 600 норковых шкурок белого, серого и черного покраса. Белые шкурки составили 150% от числа серых, которых было на 20% больше, чем черных шкурок. Сколько шкурок каждого цвета сдал фермер?

2. Решить систему уравнений: $$\begin{cases} 2^{x+3y}\cdot 4^{-y}\cdot 3^{-(x+y+2)}=\dfrac{\left(2^3\right)^2\cdot 2}{3^9}. \\ \log_7 x-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}} y^2=\dfrac{\log_3 10}{\log_3 7} \end{cases}$$

3. Найти множество значений функции: $y=16\cos x+15\sin^2 x$.

4. Построить график функции:

$$y=\sin\left(6\operatorname{arctg}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-x\right)\frac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}+\sin(\pi-x)\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)$$

5. Вершина A параллелограмма ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y-4)^2=5$, которая проходит также через вершины B и D(2;2). Диагональ AC параллельна прямой l: $y=-x+2$. Найти площадь параллелограмма. Построить чертеж.

Вариант 2

1. По первоначальному проекту два одинаковых квадратных окна в строящемся цехе должны быть заложены квадратными стеклокирпичами, при этом на каждое окно пошло целое число кирпичей. Но из-за того, что по стене должны были пройти дополнительные кабели, одно из окон пришлось сузить, при этом площадь окна уменьшилась на $16^2/_3$%. Какие размеры (по количеству кирпичей) получились у обоих окон, если по ширине второе окно уменьшилось на 2 кирпича?

2. Решить систему уравнений: $$\begin{cases} 3^{3x+y}\cdot 9^{-x}\cdot 7^{-(x+y-1)}=\dfrac{\left(3^3\right)^2\cdot 9}{7^7}. \\ \log_2 y+\dfrac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}} x^{-4}=\dfrac{\log_7 15}{\log_7 2} \end{cases}$$

3. Найти множество значений функции: $y=3\cos^2 x+6\sin x+6$.

4. Построить график функции:

$$y=\cos\left(10\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x)-x\right)\cos\frac{25\pi}{6}-\cos(\pi-x)\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}.$$

5. Вершина B ромба ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y+1)^2=8$, которая касается диагонали AC, параллельной прямой l: $y=-x-3$, а вершина A лежит на оси Ox. Найти площадь ромба. Построить чертеж.

Вариант 3

1. Два соседа-огородника купили вместе 190 м сетки для ограды своих участков прямоугольной формы, которые граничили по одной из сторон этих прямоугольников. Сетки как раз хватило, чтобы оградить оба участка и установить границу между ними. Каковы площади этих участков, если один их них квадратный, и его площадь на 50% больше площади другого?
2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{y-2x}\cdot 27^{x}\cdot 4^{-(x+y-2)}=\dfrac{\left(3^2\right)^3\cdot 27}{4^7}.\\ \dfrac{1}{6}\log_5 x^6-\log_{\frac{1}{5}} y=\dfrac{\log_9 14}{\log_9 5}\end{cases}$$

3. Найти множество значений функции: $y=2\sin^2 x-2\cos x+1$.
4. Построить график функции:

$$y=\sin\left(14\operatorname{arctg}\left(\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)-x\right)\cdot\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x\cdot\cos\frac{17\pi}{4}+\sin(\pi-x)\cos\frac{\pi}{4}.$$

5. Вершина A прямоугольника ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-7)^2+y^2=10$, которая проходит через центр прямоугольника. Диагональ AC параллельна прямой l: $y=-x/3+1/3$. Вершины B и C лежат в первой четверти, а абсцисса вершины B равна 3. Найти площадь прямоугольника. Построить чертеж.

Вариант 4

1. В пригородном тепличном хозяйстве три теплицы общей площадью 1,4 га. Площадь первой теплицы на 25% больше площади второй и составляет 187,5% от площади, занимаемой третьей теплицей. Каковы площади каждой из трех теплиц?

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2^{x-2y}\cdot 8^{y}\cdot 5^{-(x+y-2)}=\dfrac{\left(2^2\right)^2\cdot 8}{5^5} \\ \dfrac{1}{8}\log_{\frac{1}{3}} y^{-8}+\log_3 x=\dfrac{\log_5 12}{\log_5 3} \end{cases}$.

3. Найти множество значений функции: $y=6-\sin x-12\cos^2 x$.

4. Построить график функции:

$$y=\frac{1}{2}\left(\cos\left(18\operatorname{arctg}\left(\cos 2x+2\sin^2 x\right)-x\right)+\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x\cdot\cos(\pi-x)\right).$$

5. Вершина D прямоугольной трапеции ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y-1)^2=4$, которая проходит также через вершины A(1;1) и C, касаясь стороны AB. Диагональ BD параллельна прямой $l_1 : y=-3x/2+1$. Найти площадь трапеции. Построить чертеж.

Вариант 5

1. Для ремонта участка дороги завезли различные стройматериалы: цемент, гравий и песок. Количество гравия составило 150% от песка, которого было на 100% больше, чем цемента. Сколько тонн цемента, гравия и песка завезли, если гравия было на 8 тонн больше, чем цемента?

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 5^{y-x}\cdot 25^{x}\cdot 3^{-(x+y-2)}=\dfrac{\left(5^2\right)^4\cdot 5}{3^7} \\ \log_5 y+\dfrac{1}{6}\log_{\frac{1}{5}} x^{-6}=\dfrac{\log_7 18}{\log_7 5} \end{cases}$.

3. Найти множество значений функции: $y=21\sin x+10\cos^2 x$.

4. Построить график функции:

$$y=\sin\left(12\operatorname{arcctg}\left(2\cos^2\frac{\pi}{4}\right)-x\right)\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{tg}x$$

5. Вершина D трапеции ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-4)^2+(y-4)^2=10$, которая проходит через вершины A(7;5) и C. Боковая сторона CD параллельна прямой l: $y=3x$. Диагональ BD параллельна оси Oy. Найти площадь трапеции. Построить чертеж.

Вариант 6

1. Улов рыбацкого сейнера состоял из сельди, салаки и лосося. Лосося было на 40% меньше, чем сельди и его улов составлял 75% от улова салаки. Сколько было выловлено центнеров каждого сорта рыбы, если сельди выловили на 20 центнеров больше, чем салаки?

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 7^{x-y} \cdot 49^{y} \cdot 2^{-(x+y+1)} = \dfrac{\left(7^2\right)^2 \cdot 49}{2^7} \\ \dfrac{1}{8}\log_9 x^8 - \log_{\frac{1}{9}} y = \dfrac{\log_{11} 8}{\log_{11} 9} \end{cases}$

3. Найти множество значений функции: $y = 21\sin x - 14\cos^2 x$.

4. Построить график функции:

$$y = \cos\left(20\operatorname{arcctg}\left(2\sin^2\frac{\pi}{4}\right) - x\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\cos^2\frac{17\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}\right)\cdot \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x.$$

5. Вершина D квадрата ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-8)^2+(y-6)^2=20$. Точка K, точка пересечения стороны AD с окружностью, имеет координаты (6;2), а вершина C лежит на прямой l: $y = x/2+8$. Найти площадь квадрата. Построить чертёж.

Вариант 7

1. К килограммовому куску сплава золота с серебром добавили 500 г золота, после чего его содержание возросло на $16^2/_3$%. Сколько серебра содержалось в слитке?

2. Изобразить на плоскости $(x;y)$ множество точек, лежащих в первой четверти и удовлетворяющих системе $\begin{cases} \left(\sqrt[4]{81}\right)^{x-5} \cdot 243^{\frac{y}{5}+1} < 81 \\ 9^y - \left(2^{\frac{3}{x}}\right)^{\log_2 9} < 0 \end{cases}$.

3. Найти множество значений функции

$$y = \frac{6\log_{(x-1)^6}(3-x)}{\log_{1-x} 2} + \frac{\log_{x+3}(x+5)}{\log_{x+3} 2}.$$

4. Построить график функции

$$y = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right|}\left(\sin(20\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x) - x)\cdot\cos\frac{13\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\sin\left(13\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

5. Вершина D трапеции ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-5)^2+(y-3)^2=17$, которая проходит через вершины A(9;4) и C. Боковая сторона CD параллельна прямой l: $y=4x+4$. Диагональ BD параллельна оси Ox. Найти площадь трапеции. Построить чертеж.

Вариант 8

1. К слитку из сплава золота с серебром добавили 600 г золота, после чего его содержание возросло с 40% до 60%. Сколько после этого стал весить слиток?
2. Изобразить на плоскости $(x;y)$ множество точек, лежащих в первой четверти и удовлетворяющих системе $\begin{cases} \left(\sqrt[3]{216}\right)^{x+2} \cdot 36^{\frac{y}{2}-1} > 216 \\ \left(6^{\frac{2}{x}}\right)^{\log_6 3} - 3^y > 0 \end{cases}$.
3. Найти множество значений функции
$$y = \frac{7\log_{(1-x)^7}(2-x)}{\log_{1-x} 3} + \frac{\log_{x+3}(x+6)}{\log_{x+3} 3}.$$
4. Построить график функции
$$y = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|}\left(\cos\left(28\,\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x) - x\right) \cdot \sin\frac{11\pi}{4} + \right.$$
$$\left. + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(17\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$
5. Вершина D квадрата ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-2)^2+y^2=13$. Точка K — точка пересечения стороны AD с окружностью, имеет координаты (5;2), а вершина C лежит на прямой l: $y = -x/4-9/2$. Найти площадь квадрата. Построить чертёж.

Вариант 9

1. К полукилограммовому куску сплава золота с серебром добавили 300 г серебра, после чего содержание золота понизилось на 15%. Сколько граммов золота содержалось в слитке?
2. Изобразить на плоскости $(x;y)$ множество точек, лежащих в первой четверти и удовлетворяющих системе $\begin{cases} \left(\sqrt[3]{343}\right)^{x-4} \cdot 49^{\frac{y}{2}+2} < 7^7 \\ 5^y - \left(7^{\frac{10}{x}}\right)^{\log_7 5} > 0 \end{cases}$.
3. Найти множество значений функции
$$y = \frac{8\log_{(x+4)^8}(x+7)}{\log_{x+4} 5} + \frac{\log_{(-x)}(3-x)}{\log_{(-x)} 5}.$$
4. Построить график функции

$$y=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|}\left(\sin(2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x)-x)\cdot\sin\frac{13\pi}{3}+\sin(\pi-x)\cdot\sin\left(13\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

5. В параллелограмм ABCD вписана окружность, заданная уравнением $(x\text{-}6)^2+(y\text{–}4)^2=10$. Сторона BC параллельна прямой l: $y=x/3$, а вершина C имеет координаты (4;0). Найти площадь параллелограмма. Построить чертеж.

Вариант 10

1. К слитку из сплава золота с серебром добавили 500 г золота, после чего содержание серебра упало с 30% до 20%. Сколько граммов серебра было в сплаве?
2. Изобразить на плоскости $(x;y)$ множество точек, лежащих в первой четверти и удовлетворяющих системе $\begin{cases}\left(\sqrt[5]{32}\right)^{x-4}\cdot 16^{\frac{y}{4}+1}>64\\ \left(6^{\frac{8}{x}}\right)^{\log_6 7}-7^y<0\end{cases}$.
3. Найти множество значений функции
$$y=\frac{9\log_{(x+4)^9}(2-x)}{\log_{x+4}5}+\frac{\log_{(-2-x)}(x+8)}{\log_{(-2-x)}5}.$$
4. Построить график функции
$$y=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|}\left(\cos\left(x-10\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x\right)\right)\cdot\cos\frac{25\pi}{6}+\right.$$
$$\left.+\sin(\pi-x)\cdot\cos\left(7\arccos\frac{1}{2}\right)\right).$$
5. Вершина A прямоугольника ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x\text{–}4)^2+(y\text{–}3)^2=20$, которая проходит через центр прямоугольника. Диагональ AC параллельна прямой l: $y=2x\text{–}2$. Вершины B и C лежат в третьей четверти, а абсцисса вершины B равна (–2). Найти площадь прямоугольника. Построить чертеж.

Вариант 11

1. Слиток из сплава золота с серебром массой 1 кг сплавили с 200 г золота, после чего процентное содержание золота увеличилось на 10%. Сколько граммов золота и серебра было в слитке первоначально?

2. Изобразить на плоскости $(x;y)$ множество точек, лежащих в первой четверти и удовлетворяющих системе $\begin{cases} \left(\sqrt[4]{16}\right)^{x+2} \cdot 4^{\frac{y}{2}-1} \le 256 \\ 3^{y} - \left(4^{\frac{7}{x}}\right)^{\log_4 3} \ge 0 \end{cases}$.

3. Найти множество значений функции

$$y = \frac{2\log_{x^2}(x+1)}{\log_x 2} + \frac{\log_{4-x}(5-x)}{\log_{4-x} 2}.$$

4. Построить график функции

$$y = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|}\left(\sin\left(14\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x\right) - x\right)\cdot \sin\frac{9\pi}{4} + \right.$$

$$\left. + \sin(\pi - x)\cdot\cos\left(9\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

5. Вершина A параллелограмма ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x+2)^2+(y-3)^2=13$, которая проходит также через вершины B и D(-4;0). Диагональ AC параллельна прямой l: $y = -x+4$. Найти площадь параллелограмма. Построить чертеж.

Вариант 12

1. К слитку из сплава золота с серебром добавили 500 г серебра, после чего содержание золота уменьшилось с 60% до 20%. Какова была изначальная масса слитка?

2. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{\log_{x+4}(5-x) - 1}}$.

3. Найти множество значений функции заданной на множестве: E=[-2;1]

$$y = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{324}\cdot 3^{x-2} - \frac{9^{x+\frac{1}{2}}}{27^{\frac{1}{3}}}.$$

4. Найти нули функции

$$y = \cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{\sin^4\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot(\cos 2x - 1)}{\cos(4\pi - x)}.$$

5. Вершина B ромба ABCD является центром окружности, заданной уравнением $x^2+(y-5)^2=20$, которая касается диагонали AC, лежащей целиком в первой четверти и параллельной прямой l: $y=-2x+2$. Абсцисса вершины A равна 5. Найти площадь ромба. Построить чертеж.

Вариант 13

1. К слитку из сплава золота с серебром массой 1 кг добавили 600 г серебра, после чего содержание золота уменьшилось на 7,5%. Сколько золота было в слитке первоначально?
2. Найти область определения функции $y=\sqrt{\log_{x-5}(x+1)-1}$.
3. Найти множество значений функции, заданной на множестве E=[0;2]:

$$y=\sqrt[3]{216}+9^{x+\frac{1}{2}}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}-3^{x+1}\cdot\sqrt[6]{64}$$

4. Найти нули функции

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\cos^4\frac{3\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\cdot(\cos 2x+1)}{\sin(x+8\pi)}.$$

5. Вершина A прямоугольника ABCD является центром окружности, заданной уравнением $(x-6)^2+(y-1)^2=10$, которая проходит через центр прямоугольника. Диагональ AC параллельна прямой l: $y=-3x+3$. Вершины B и C лежат в первой четверти, а абсцисса вершины B равна 8. Найти площадь прямоугольника. Построить чертеж.

Вариант 14

1. К слитку из сплава золота с серебром добавили 250 г серебра, после чего содержание серебра увеличилось с 40% до 60%. Какова была первоначальная масса слитка?
2. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\log_{4-x}(x+3)}}$.
3. Найти множество значений функции, заданной на множестве E=[-1;2]:

$$y=\frac{2^{x+1}}{8^{-\frac{1}{3}}}-4^{x-2}\cdot\sqrt{256}-\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 9^{\frac{3}{2}}.$$

4. Найти нули функции

$$y=\frac{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\cdot(1-\cos 2x)\cdot\sin^4\frac{5\pi}{4}}{\cos(x-10\pi)}+\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

5. Вершина D прямоугольной трапеции ABCD является центром окружности,

заданной уравнением $(x-5)^2+y^2=20$, которая проходит также через вершины A(1;2) и C, касаясь стороны AB. Диагональ BD параллельна прямой l_1: $y = -8x+20$. Найти площадь трапеции. Построить чертеж.

Вариант 15

1. Три положительных числа A, B, C являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если B уменьшить на 40%, то полученное число вместе с остальными числами, расставленными в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию. Определить числа A, B, C, если знаменатель геометрической прогрессии составляет 75% от разности арифметической прогрессии.
2. Найти множество значений функции $y = 4^{\sin^2 x} - 4^{-\cos 2x}$.
3. Найти множество значений аргумента x, при которых график функции

$$y = \frac{\log_2\left(\frac{x^2}{16}\right)}{\log_x 2} - 6$$ лежит ниже оси абсцисс.
4. Построить график функции

$$y = \frac{\log_2(x-\pi)}{\left|\log_2(x-\pi)\right|}\left(\sin(x+16\arccos 0)+\sin(x-5\arcsin(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x))\right)$$
5. Найти площадь четырехугольника ABCD, единственная ось симметрии которого — прямая l_1: $y=-x+9$. Диагональ AC лежит на прямой l_2: $y=4$, а вершина B является центром окружности $(x-5)^2+(y-6)^2=29$, причем эта окружность проходит через точку C, которая не является симметричной к точке B. Построить чертеж.

Вариант 16

1. Три положительных числа X, Y, Z являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если Y увеличить на 25%, то полученное число составит с остальными, расставленными в том же порядке, арифметическую прогрессию. Определить числа X, Y, Z, если разность арифметической прогрессии составляет 150% от знаменателя геометрической прогрессии.
2. Найти множество значений функции $y = -2\cdot 9^{\cos^2 x} + 3\cdot 9^{\cos 2x}$.
3. Найти множество значений аргумента x, при которых график функции

$$y = \frac{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)^3}{\log_{x^2} 9} + 6$$ лежит выше оси абсцисс.
4. Построить график функции

$$y=\frac{\log_3(2-x)}{\left|\log_3(2-x)\right|}\cdot\left(\cos(x+28\arccos 0)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(x-6\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)\right)\right)$$

5. Найти площадь четырехугольника ABCD, единственная ось симметрии которого — прямая l_1: $y=3x-10$, диагональ AC лежит на прямой l_2: $y=-x/3+10$. Сторона CD является диаметром окружности $(x-6)^2+(y-3)^2=25$, а абсцисса вершины B равна 7. Построить чертеж.

Вариант 17

1. Три положительных числа X, Y, Z являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если Y увеличить на 160%, то полученное число вместе с остальными числами, расставленными в том же порядке, образуют арифметическую прогрессию. Определить числа X, Y, Z, если разность арифметической прогрессии составляет 240% от знаменателя геометрической прогрессии.
2. Найти область определения функции $y=\sqrt{1-\log_{2-x}(x+2)}$.
3. Найти множество значений функции, заданной на множестве: E=[0;3]:

$$y=\frac{4^{x-\frac{3}{2}}}{2^{-3}}+\sqrt{121}-2^{x+1}\cdot\sqrt[3]{8^2}.$$

4. Найти нули функции

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+\frac{\cos^4\frac{7\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\cdot(\cos 2x+1)}{\sin(x+12\pi)}.$$

5. Найти площадь четырехугольника ABCD, единственная ось симметрии которого прямая l_1: $y=x+4$, диагональ AC параллельна прямой l_2: $y=-4x/3+6$. Вершина B является центром окружности $(x-2)^2+(y-4)^2=100$, причем эта окружность проходит через точку D. Построить чертеж.

Вариант 18

1. Три положительных числа A, B, C являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если B уменьшить на 40%, то полученное число составит с остальными, расставленными в том же порядке, геометрическую прогрессию. Определить числа A, B, C, если знаменатель геометрической прогрессии составляет 75% от разности арифметической прогрессии.
2. Найти область определения функции $y=\sqrt{1-\log_{x-2}(x+2)}$.
3. Найти множество значений функции , заданной на множестве: E=[1;3]:

$$y=\frac{4^{x-\frac{1}{2}}}{2^{-1}}+\sqrt{289}-2^{x+1}\cdot\sqrt[3]{64}\,.$$

4. Найти нули функции

$$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\cos^4\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\cdot(1+\cos 2x)}{\sin(x-8\pi)}\,.$$

5. Найти площадь четырехугольника ABCD, единственная ось симметрии которого — прямая l_1: $y=-2x+15$, диагональ AC лежит на прямой l_2: $y=x/2+5/2$. Сторона CD является диаметром окружности $(x-5)^2+y^2=25$, а абсцисса вершины В равна 4. Построить чертеж.

Вариант 19

1. Три положительных числа А, В, С являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если В уменьшить на 40%, то полученное число вместе с остальными числами, расставленными в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию. Определить числа А, В, С, если сумма знаменателя геометрической прогрессии и разности арифметической прогрессии равна $(-11^2/_3)$.
2. Изобразить на плоскости $(x;y)$ множество точек, заданное системой

$$\begin{cases} 5^{x+3y}\cdot 25^{-y}\cdot 7^{1-x-y}=\dfrac{\left(5^2\right)^4\cdot\sqrt{25}}{7^8} \\ \log_{\frac{1}{3}} y^{-1}+\dfrac{1}{9}\log_3 x^9\le\dfrac{\log_7 20}{\log_7 3} \end{cases}$$

3. Найти множество значений функции $y=10\cos x-3\cos 2x-7$.
4. Построить график функции $y=\left(\sin(2\operatorname{arctg}1-x)\cdot\sin\dfrac{13\pi}{3}+\right.$

$$\left.+\sin(\pi-x)\cdot\sin\left(13\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cdot\frac{\log_7\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\left|\log_7\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|}\,.$$

5. Найти площадь четырехугольника ABCD, центр симметрии которого совпадает с центром окружности $(x-4)^2+(y+3)^2=25$, для которой диагональ BD — диаметр, а сторона AB, параллельная прямой l_1: $y=-4x/3$, — касательная, сторона BC перпендикулярна прямой l_2: $y=-x/2+2$. Построить чертеж.

Вариант 20

1. Три положительных числа А, В, С являются последовательными чле-

нами арифметической прогрессии. Если B заменить на число, которое составляет 80% от B, то полученные числа будут членами геометрической прогрессии. Определить числа A, B, C, если разность арифметической прогрессии на 200 % больше, чем знаменатель геометрической прогрессии.

2. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{\log_{5-x}(x-1)-1}}$.

3. Найти множество значений функции заданной на множестве E=[0;2]:

$$y = 3^{x-1} \cdot \sqrt{324 - 9^{x+1} \cdot 27^{-\frac{2}{3}}} - \sqrt[3]{125}$$

4. Найти нули функции

$$y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sin^4\frac{7\pi}{4} \cdot (\cos 2x - 1) \cdot \mathrm{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos(x + 14\pi)}.$$

5. Найти площадь четырехугольника ABCD, в который вписана окружность $(x-3)^2+y^2=5$, и имеющего ось и центр симметрии, Сторона AB, лежащая в первой четверти параллельна прямой l_1: $y = -2x-2$, а сторона BC перпендикулярна прямой l_2: $y = -x/2+2$. Построить чертеж.

Вариант 21

1. Для приготовления фирменного блюда владелец летнего кафе ежедневно закупал мяса на общую сумму 4 тысячи рублей в день. Из-за сезонного подорожания на 25% он вынужден был сократить закупки мяса на 10 кг, укладываясь в эту же сумму, но чтобы возместить убытки, находчивый хозяин кафе придумал новое блюдо, в которое шло мяса меньше на 45 граммов, поэтому вышло на 100 порций больше, чем прежде. Сколько мяса шло на приготовление нового блюда?
2. Изобразить на плоскости $(x;y)$ множество точек, заданное системой

$$\begin{cases} 3^{y-2x^2} \cdot 27^x \cdot 4^{-(x+y-2)} = \dfrac{\left(3^2\right)^3 \cdot 27}{4^7}. \\ \dfrac{1}{6}\log_5 x^6 - \log_{\frac{1}{5}} y \geq \dfrac{\log_9 14}{\log_9 5} \end{cases}$$

3. Найти множество значений функции $y = \dfrac{25^{x^2} \cdot 125^{4|x|}}{5^{-10}}$.

4. Построить график функции

$$y = \frac{\arcsin(x-3)}{|\arcsin(x-3)|} \cdot \left(\sin\left(x \cdot 6\arcsin\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{25\pi}{6} + \sin\left(x \cdot 3\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

5. Найти площадь четырехугольника ABCD, центр симметрии, которого совпада-

ет с центром окружности $(x-6)^2+(y-2)^2=25$, для которой диагональ BD — диаметр, а сторона AB, параллельная прямой l_1: $y = -4x/3+4/3$, — касательная, причем AB лежит в первой четверти. Сторона BC перпендикулярна прямой l_2: $y = -x/2+3/2$. Построить чертеж.

Вариант 22

1. Чтобы придать лоск своему кафе, его владелец решил обновить интерьер в небольшом банкетном зале. Он решил заменить пол из обычных квадратных половых плиток на пол из прямоугольных мраморных. Ширина мраморной плитки была на 25% меньше стороны квадратной, которая в свою очередь была на 20 см меньше длины мраморной плитки. Какова площадь мраморной плитки, если количество старых плиток было в 1,5 раза больше, чем новых мраморных?

2. Изобразить на плоскости $(x;y)$ множество точек, заданное системой

$$\begin{cases} 2^{x-2y} \cdot 8^{y} \cdot 5^{-(x+y-2)} \geq \dfrac{\left(2^2\right)^2 \cdot 8}{5^5} \\ \dfrac{1}{8}\log_{\frac{1}{3}} y^{-8} + \log_3 x = \dfrac{\log_5 12}{\log_5 3} \end{cases}.$$

3. Найти множество значений функции $y = \dfrac{256}{16^{x^2} \cdot 4^{2|x|}}$.

4. Построить график функции

$$y = \frac{\arcsin(4-x)}{|\arcsin(4-x)|} \cdot \left(\cos\left(x \cdot 6 \arcsin\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos\frac{13\pi}{3} - \right.$$
$$\left. -\cos\left(\frac{13\pi}{6} - x \cdot 2\arccos 0\right) \cdot \cos\frac{41\pi}{6} \right).$$

5. Найти площадь четырехугольника ABCD, имеющего ось и центр симметрии, если окружность $(x-2)^2+(y-4)^2=20$ — вписанная. Сторона AB, лежащая в первой четверти, параллельна прямой l_1: $y = -x/2+2$, сторона BC перпендикулярна прямой l_2: $y = -2x+8$. Построить чертеж.

ОТВЕТЫ.

	Задание 1	Задание2	Задание3	Задание4	Задание5
1.	270 шкурок белого, 180 серого и 150 черного	$\{(2;5);(5;2); ((7+\sqrt{89})/2; (7-\sqrt{89})/2)\}$	$[-16;19^4/_{15}]$	$y=\sin(x-\pi/4)$; $x\neq\pi k/2$, $k\in Z$	S=3 кв.ед. A(3;4), B(5;4), C(4;3), D(2;2)

2.	12×12 и 10×10 кирпичей	$\{(4-\sqrt{31};4+\sqrt{31});(3;5);(5;3)\}$	$[0;12]$	$y=\sin(x+\pi/6)$; $x\neq \pi k/2,\ k\in Z$	S=8 кв.ед. A(5;0), B(3;-1), C(4;2), D(7;3)
3.	900 м^2 и 600 м^2	$\{((9-\sqrt{137})/2;(9+\sqrt{137})/2);(2;7);(7;2)\}$	$[-1;3½]$	$y=\sin(x-\pi/4)$; $x\neq \pi k/2,\ k\in Z$	S=16 кв.ед. A(7;0), B(3;4), C(1;2), D(5;-2)
4.	0,6; 0,48 и 0,32 га	$\{(3;4);(4;3);((7+\sqrt{97})/2;(7-\sqrt{97})/2)\}$	$[-6^1/_{48};7]$	$y=\sin(x-\pi/3)$; $x\neq \pi k/2,\ k\in Z$	S=5 кв.ед. A(1;1), B(1;4), C(3;3), D(3;1)
5.	4 тонны цемента, 12 гравия и 8 песка	$\{((9-3\sqrt{17})/2;(9+3\sqrt{17})/2);(3;6);(6;3)\}$	$[-21;21]$	$y=\sin(x+\pi/6)$; $x\neq \pi k/2,\ k\in Z$	S=16 кв.ед. A(7;5), B(12;4), C(3;1), D(4;4)
6.	100 центнеров салаки, 80 сельди, 60 лосося	$\{(2;4);(4;2);(3-\sqrt{17};3+\sqrt{17})\}$	$[-21^7/_8;21]$	$y=\sin(x-\pi/4)$; $x\neq \pi k/2,\ k\in Z$	S=45 кв.ед. A(5;0), B(-1;3), C(2;9), D(8;6)
7.	500 г	$y\in(0;4-x)$ при $x\in(0;1]\cup[3;4)$; $y\in(0;3/x)$ при $x\in(1;3)$	$(2+\log_2 3;\log_2 15)\cup(\log_2 15;4]$	$y=\|\sin(x+\pi/6)\|$; $x\neq \pi k/2$, $x\neq -\pi/3+\pi n$, $k,n\in Z$	S=37½ кв.ед. A(9;4), B(20;3), C(4;-1), D(5;3)
8.	1800 г	$y\in(3-x;2/x)$ при $x\in(0;1)\cup(2;3)$, $y\in(0;2/x)$ при $x\in[3;+\infty)$	$(\log_3 7;\log_3 12)\cup(\log_3 12;4\log_3 2)$	$y=\|\sin(x-\pi/4)\|$; $x\neq \pi k/2$, $x\neq \pi/4+\pi n,\ k,n\in Z$	S=52 кв.ед. A(8;4), B(12;-2), C(6;-6), D(2;0)
9.	200 г	$y\in(10/x,7-x)$ при $x\in(2;5)$	$(\log_5 21;\log_5 24)\cup(\log_5 24;2]$	$y=\|\sin(x+\pi/3)\|$; $x\neq \pi k/2$, $x\neq -\pi/3+\pi n$, $k,n\in Z$	S=40 кв.ед. A(8;8), B(10;2), C(4;0), D(2;6)
10.	300 г	$y\in(8/x;+\infty)$ при $x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$, $y\in(6-x;+\infty)$ при $x\in(2;4)$	$(\log_5 24;2)$	$y=\|\sin(x-\pi/6)\|$; $x\neq \pi k/2$, $x\neq \pi/6+\pi n,\ k,n\in Z$	S=40 кв.ед. A(4;3), B(-2;1), C(0;-5),

11.	400 г золота и 600 г серебра	$y=7$ при $x=1$, $y\in(7/x;8-x)$ при $x\in(1;7)$, $y=1$ при $x=7$	$(\log_2 5;3)\cup$ $\cup(3;2\log_2 3]$	$y=\lvert\sin(x-\pi/4)\rvert$; $x\neq\pi k/2$, $x\neq\pi/4+\pi n$, $k,n\in Z$	S=5 кв.ед. A(-2;3), B(1;5), C(-1;2), D(-4;0)
12.	250 г	(-3;½)	[-1;3]	$\pi/6+\pi k/2$, $k\in Z$	S=20 кв.ед. A(5;5), B(0;3), C(3;9), D(8;9)
13.	200 г	$(6;+\infty)$	[-3;33]	$\pi/6+\pi k/2$, $k\in Z$	S=16 кв.ед. A(6;1), B(8;3), C(4;7), D(2;5)
14.	500 г	$(-3;½)\cup(3;4)$	[-1;3]	$-\pi/6+\pi k/2$, $k\in Z$	S=25 кв.ед. A(1;2), B(4;8), C(7;4), D(5;0)
15.	1, 5, 9	[0;1]	$(½;1)\cup(1;8)$	$x\neq\pi k/2$, где $k\in Z$. $y=\sqrt{2}\cdot z\cdot\sin(x-{}^{\pi}/_{4})$, где $z=1$, если $x>\pi+1$ и $z=-1$, если $\pi<x<\pi+1$.	S=24½ кв.ед. A(3;4), B(5;6), C(10;4), D(5;-1)
16.	2, 4, 8	[-3;9]	$(0;1)\cup$ $\cup(1;3)\cup$ $\cup(9;+\infty)$	$y={}^{2}/_{\sqrt{3}}\, z\cdot\sin(x+{}^{\pi}/_{3})$, где $x<2$, $x\neq k/2$, $k\in Z$.,а $z=1$, если $x<1$ и $z=-1$, если $1<x<2$	S=40 кв.ед. A(4;9), B(7;11), C(9;7), D(3;-1)
17.	1, 5, 25	$(-2;0]\cup(1;2)$	[-5;11]	$\pi/6+\pi k/2$, $k\in Z$	S=14 кв.ед. A(0;6), B(2;4), C(6;-2), D(-6;10)
18.	1, 5, 9	(2;3)	[1;17]	$-\pi/6+\pi k/2$, $k\in Z$	S=50 кв.ед. A(9;7), B(4;7), C(1;3), D(9;-3)
19.	27, 15, 3	$y=9-x$, при $x\in(0;4]\cup[5;9)$	$[-20;{}^{1}/_{6}]$	$y=-\sin(x+\pi/3)$, при $x\in(-\pi/3+2\pi k;$ $\pi/6+2\pi k)\cup$	S=50 кв.ед. А и С имеют координаты(6;4) и

				20.$\cup(\pi/6+2\pi k;$ $2\pi/3+2\pi k)$, $k\in Z$	(4;-10),а B и D — (9;0), (1;-6)
20.	4, 10, 16	(3;4)	[-32;4]	$-\pi/6+\pi k/2$, $k\in Z$	S=50 кв.ед. A(7;9), B(10;5), C(5;-5), D(2;-1)
21.	80 г	$y=9-x$, при $x\in[2;3)\cup(3;4]$	$[510;+\infty)$	$y=-\lvert\sin \pi x\rvert$, при $x\in[2;3)\cup(3;4]$	S=50 кв.ед. A(7;9), B(10;5), C(5;-5), D(2;-1)
22.	0,06 м^2	$y=-12/x$, при $x\in(0;3]\cup$ $\cup[4;(7+\sqrt{97})/2)$, $y=\pm 12/x$, при $x\in[3;4]$.	(0;256]	$y=\cos \pi x$ при $x\in[3;4)$, $y=-\cos \pi x$, при $x\in(4;5]$	S=100 кв.ед. A и B имеют координаты(12;4) и (2;9),а C и D — (-8;4), (2;-1)

РЕШЕНИЯ

Решения приведены только для некоторых вариантов, для остальных, содержащих однотипные по структуре задачи, даны только ответы.

Вариант 1

1. Обозначим x, y и z – количества сданных шкурок белого, серого и черного покраса соответственно. Из условия имеем:

$$\begin{cases} x+y+z=600 \\ x=1{,}5y \\ y=1{,}2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5\cdot 1{,}2z+1{,}2z+z=600 \\ x=1{,}5\cdot 1{,}2z \\ y=1{,}2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z=600 \\ x=1{,}8z \\ y=1{,}2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=150 \\ x=270 \\ y=180 \end{cases}$$

Ответ: 270 шкурок белого, 180 серого и 150 черного покраса.

2.

О.Д.З.: $\begin{cases} x>0 \\ y\neq 0 \end{cases}$. Решение: $\begin{cases} \dfrac{2^{x+3y-2y}}{3^{x+y+2}}=\dfrac{2^7}{3^9} \\ \log_7 x+\log_7 |y|=\log_7 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+y}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^7 \\ \log_7(x|y|)=\log_7 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ x|y|=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x|7-x|=10 \end{cases}$$

. Если $0<x<7$, то

$7x-x^2-10=0 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0$, $D=49-40=9$, $x_1=2$, $x_2=5$, $y_1=5$, $y_2=2$. Если $x>7$, то $x^2-7x-10=0$, $D=49+40=89$, $x_{3,4}=\dfrac{7\pm\sqrt{89}}{2}$, но $\dfrac{7-\sqrt{89}}{2}<0$ и не удовлетворяет О.Д.З. Поэтому $x_4=\dfrac{7+\sqrt{89}}{2}$, $y_4=7-\dfrac{7+\sqrt{89}}{2}=\dfrac{7-\sqrt{89}}{2}$.

Ответ: $\left\{(2;5);(5;2);\left(\dfrac{7+\sqrt{89}}{2};\dfrac{7-\sqrt{89}}{2}\right)\right\}$

3. Запишем $y=16\cos x+15(1-\cos^2 x)$. Сделаем замену $t=\cos x$, $t\in[-1;1]$, $y=-15t^2+16t+15$. График функции $y=y(t)$ — парабола, ветви которой направлены вниз. Координаты вершины: $t_0={}^{8}/_{15}\in[-1;1]$, $y_0=19^{4}/_{15}$. При $t=-1$ $y=-16$, при $t=1$ $y=16$. Ответ: множество значений функции: $[-16;19^{4}/_{15}]$.

4. О.Д.З.: $x\neq\pi k/2$, $k\in Z$. После преобразований получим функцию:
$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\pi-x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: график показан на рис. 1.

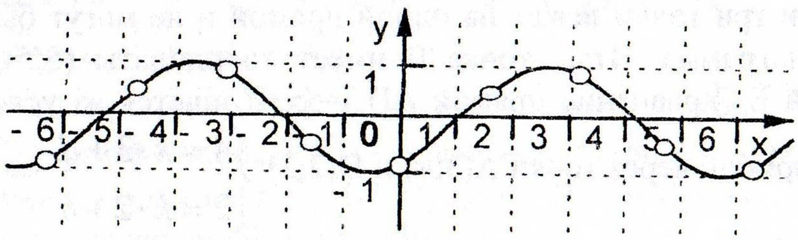

Рис. 1.

5. Точка А имеет координаты (3;4), как центр окружности $(x-3)^2+(y-4)^2=5$. Прямая AC параллельна $y=-x+2$, следовательно, она имеет одинаковый с ней угловой коэффициент: $y=-x+a$. Так как эта прямая проходит через точку A(3;4), то эти координаты удовлетворяют уравнению прямой AC: $4=-3+a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a=7$. Поэтому уравнение прямой AC: $y=7-x$. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку D, назовем ее DK, имеет угловой коэффициент 1, так как произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно (-1), а угловой коэффициент прямой AC есть (-1). То есть уравнение прямой DK есть $y=x+b$. Параметр b найдем из условия прохождения прямой DK через точку D(2;2): $2=2+b \Leftrightarrow b=0$. Итак уравнение прямой DK: $y=x$. Найдем точку K, пересечения прямых AC и DK, и длину отрезка DK: $\begin{cases}y=7-x\\ y=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3{,}5\\ y=3{,}5\end{cases}$, $DK=\sqrt{(3{,}5-2)^2+(3{,}5-2)^2}=1{,}5\sqrt{2}$. В силу того, что параллелограмм ABCD состоит из двух одинаковых треугольников ABC и ADC, высота DL в ΔADC имеет такую же длину, что и соответствующая высота в ΔABC, т. е. отрезок BK. Поэтому точка B находится на прямой, параллельной AC и отстоящей от нее на $1{,}5\sqrt{2}$ единицы. Найдем уравнение этой прямой. В силу параллельности прямой AC, она

имеет угловой коэффициент (-1), т. е. такой же как у прямой AC, и ее уравнение $y=-x+c$. Чтобы найти параметр c, найдем точку E, конец отрезка DE, серединой которого является точка K. Координаты точки K являются средними арифметическими координат точек D и E. Если координаты точки E обозначить $(x_E;y_E)$, то $\begin{cases} 3{,}5=\dfrac{2+x_E}{2} \\ 3{,}5=\dfrac{2+y_E}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E=5 \\ y_E=5 \end{cases}$. Теперь найдем параметр c:

$5=-5+c \Leftrightarrow c=10$. Итак уравнение прямой, содержащей точку B: $y=-x+10$. Точку B найдем как пересечение этой прямой и окружности:

$$\begin{cases} y=-x+10 \\ (x-3)^2+(y-4)^2=5 \end{cases} \Rightarrow (x-3)^2+(-x+10-4)^2=5 \Leftrightarrow 2x^2-18x+40=0 \Leftrightarrow x_1=4,\ x_2=5.$$

Соответственно $y_1=6$, $y_2=5$. Точка (4;6) не может быть точкой B, так как эта точка лежит на продолжении отрезка AD. В этом проще всего убедиться, вычислив координаты середины отрезка AD: $x'=(4+2)/2=3$, $y'=(6+2)/2$. Точка $(x';y')$ совпадает с центром окружности. Это доказывает, что точка A является серединой отрезка, соединяющего точки (2;2) и (4;6), и следовательно, все эти три точки лежат на одной прямой и не могут быть вершинами параллелограмма. Итак, точка B имеет координаты (5;5), т. е. совпадает с точкой E. Уравнение прямой AD $y=kx+d$ ищется из условий прохождения этой прямой через точки A(3;4) и D(2;2): $\begin{cases} 4=k\cdot 3+d \\ 2=k\cdot 2+b \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ b=-2 \end{cases}$. Таким образом, уравнение прямой AD: $y=2x-2$. Так как ABCD — параллелограмм, то прямая BC параллельна AD. Поэтому у этих прямых одинаковые угловые коэффициенты, т. е. прямая BC имеет уравнение $y=2x+e$. Коэффициент e находится из условия прохождения прямой BC через точку B(5;5): $5=2\cdot 5+e \Leftrightarrow e=-5$.

Итак уравнение прямой BC: $y=2x-5$. Найдем точку C как пересечение прямых AC и BC: $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$. Длина диагонали $AC=\sqrt{(4-3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$. Площадь параллелограмма $S_{ABCD}=2S_{ACD}=$ $=2\cdot{}^1/_2\cdot AC\cdot DK=\sqrt{2}\cdot 1{,}5\sqrt{2}=3$.

Ответ: $S_{ABCD}=3$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 2. Отметим, что точка L впадает с точкой K, а параллелограмм является ромбом.

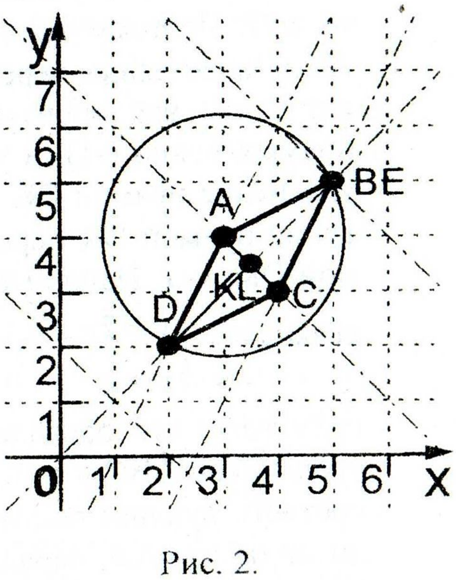

Рис. 2.

Вариант 2

1. Пусть $x>0$ — размер первого окна (по количеству кирпичей). Тогда x и $(x-2)$ — размеры второго окна, x^2 — площадь первого окна (или второго, но по первоначальному проекту), $x(x-2)$ — площадь второго окна. По условию $x(x-2)=x\cdot x\cdot {}^1/_{100}\cdot 16{}^2/_3 \Leftrightarrow x=12$.

Ответ: первое окно 12×12 кирпичей, второе — 12×10.

2. О.Д.З.: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y>0 \end{cases}$. Решение: $\begin{cases} \dfrac{3^{3x+y-2x}}{7^{x+y-1}}=\dfrac{3^8}{7^7} \\ \log_2 y-(-\log_2|x|)=\log_2 15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3}{7}\right)^{x+y}=\left(\dfrac{3}{7}\right)^8 \\ \log_2(y|x|)=\log_2 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ y|x|=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-y \\ y|8-y|=15 \end{cases}.$

Если $0<x<8$, то $-y^2+8y-15=0$, $D/4=16-15=1$, $y_1=3$, $y_2=5$, $x_1=5$, $x_2=3$. Если $y>8$, то $y^2-8y-15=0$, $D/4=16+15=31$, $y_{3,4}=4\pm\sqrt{31}$, но $4-\sqrt{31}<0$ и не удовлетворяет О.Д.З. Поэтому $y_4=4+\sqrt{31}$, $x_4=8-(4+\sqrt{31})=4-\sqrt{31}$.

Ответ: $\{(4-\sqrt{31};4+\sqrt{31});(3;5);(5;3)\}$.

3. Запишем $y=3(1-\sin^2 x)+6\sin x+6$. Сделаем замену $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$, $y=-3t^2+6t+9$. График функции $y=y(t)$ — парабола, ветви которой направлены вниз. Координаты вершины: $t_0=1\in[-1;1]$, $y_0=12$. При $t=-1$ $y=0$.

Ответ: множество значений функции: $[0;12]$.

4. О.Д.З.: $x\neq\pi k/2$, $k\in Z$. После преобразований получим функцию: $y=\cos(5\pi/2-x)\cos\pi/6+\cos x\sin\pi/6=\sin x\cos\pi/6+\cos x\sin\pi/6=\sin(x+\pi/6)$.

Ответ: график показан на рис. 3.

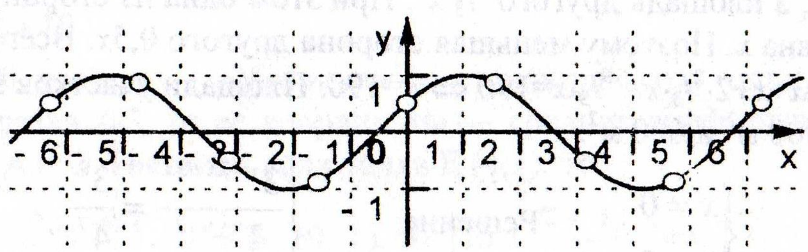

Рис. 3.

5. Вершина B имеет координаты (3;1) как центр окружности $(x-3)^2+(y+1)^2=8$. Так как диагональ AC параллельна прямой l и диагонали ромба перпендикулярны, то диагональ BD перпендикулярна прямой l. А так как произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно (-1), то угловой коэффициент диагонали BD есть 1, а ее уравнение имеет вид $y=x+a$. Параметр a находится из условия прохождения диагонали BD через точку B(3;1): $-1=3+a \Leftrightarrow a=-4$. Итак, уравнение диагонали BD: $y=x-4$. Найдем точку пересечения диагонали BD и окружности:

$$\begin{cases} y = x-4 \\ (x-3)^2+(y+1)^2=8 \end{cases} \Rightarrow (x-3)^2+(x-3)^2=8 \Leftrightarrow x-3=\pm 2 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=5,\ y_1=-3,$$

$y_2=1$. Так как диагональ BD проходит через центр окружности, то точка пересечения диагонали BD и окружности является точкой касания диагонали AC. А так как эта точка E — точка пересечения диагоналей, то она является серединой отрезка AC. Если считать, что ее координаты (1;-3), то это не будет удовлетворять условию нахождения диагонали AC в первой четверти. Следовательно, точка E имеет координаты (5;1). Диагональ AC параллельна прямой l. Поэтому она имеет угловой коэффициент как и у прямой l, т. е. равный (-1). Уравнение диагонали AC запишем в виде: $y=-x+b$. Параметр b найдем из условия прохождения прямой AC через точку E(5;1): $-1=-5+b \Leftrightarrow x=6$. Итак, уравнение прямой AC есть $y=-x+6$. Точка A лежит на оси Ox, следовательно, ее ордината равна 0. Абсциссу вершины A найдем из уравнения $0=-x+6 \Leftrightarrow x=6$. Теперь найдем длины половин диагоналей ромба: $BE=\sqrt{8}$, как радиус окружности, $AE=\sqrt{(5-6)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$. Площадь ромба $S_{ABCD}=2\cdot BE\cdot AE==2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=8$.

Ответ: $S_{ABCD}=8$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 4.

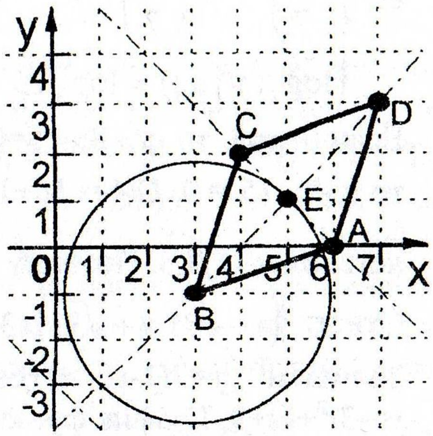

Рис. 4.

Вариант 3

1. Пусть $x>0$ — сторона квадратного участка (в метрах). Тогда его площадь равна x^2, а площадь другого ${}^2/_3\cdot x^2$. При этом одна из сторон другого участка тоже равна x. Поэтому меньшая сторона другого $0{,}5x$. Всего сетки потребовалось $4x+x+2\cdot{}^2/_3\cdot x={}^{19}/_3\cdot x=190 \Leftrightarrow x=190$. Площади участков 900 и 600.
Ответ: 900 м^2 и 600 м^2.

О.Д.З.: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y>0 \end{cases}$. Решение: $\begin{cases} \dfrac{3^{y-2x+3x}}{4^{x+y-2}}=\dfrac{3^9}{4^7} \\ \log_5|x|+\log_5 y=\log_5 14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+y}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^9 \\ \log_5(|x|\,y)=\log_5 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ |x|\,y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ y|9-y|=14 \end{cases}.$$

Если $0<x<9$, то $-y^2+9y-14=0$, $D=81-56=25$, $y_1=2$, $y_2=7$, $x_1=7$, $x_2=2$. Если $y>9$, то $y^2-9y-14=0$, $D=81+56=137$, $y_{3,4}=\dfrac{9\pm\sqrt{137}}{2}$, но $\dfrac{9-\sqrt{137}}{2}<0$ и не удовлетворяет О.Д.З. Поэтому $y_4=\frac{9+\sqrt{137}}{2}$, $x_4=9-\frac{9+\sqrt{137}}{2}=\frac{9-\sqrt{137}}{2}$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{9-\sqrt{137}}{2};\frac{9+\sqrt{137}}{2}\right);(2;7);(7;2)\right\}$.

3. Запишем $y=2(1-\cos^2 x)-2\cos x+1$. Сделаем замену $t=\cos x$, $t\in[-1;1]$, $y=-2t^2-2t+3$. График функции $y=y(t)$ — парабола, ветви которой направлены вниз. Координаты вершины: $t_0=-{}^1/_2\in[-1;1]$, $y_0=3{}^1/_2$. При $t=-1$ $y=3$, при $t=1$ $y=-1$.
Ответ: множество значений функции: $[-1;3{}^1/_2]$.

4. О.Д.З.: $x\neq\pi k/2$, $k\in Z$. После преобразований получим функцию:
$y=\sin(7\pi/2-x)\cos\pi/4+\cos x\sin\pi/4=\sin x\cos\pi/4-\cos x\sin\pi/4=\sin(x-\pi/4)$.
Ответ: график показан на рис. 1.

5. Вершина A имеет координаты (7;0) как центр окружности $(x-7)^2+y^2=10$. Диагональ AC параллельна прямой l и, следовательно, имеет одинаковый с ней угловой коэффициент, т.е. уравнение прямой AC имеет вид: $y=-{}^1/_3\cdot x+a$. Параметр a находится из условия прохождения диагонали AC через точку A(7;0): $0=-{}^1/_3\cdot 7+a$ $\Leftrightarrow$ $a={}^7/_3$. Итак уравнение прямой AC: $y=-{}^1/_3\cdot x+{}^7/_3$. Точка E — середина прямоугольника ABCD лежит на диагонали - AC, ее можно найти как пересечение диагонали AC и окружности:

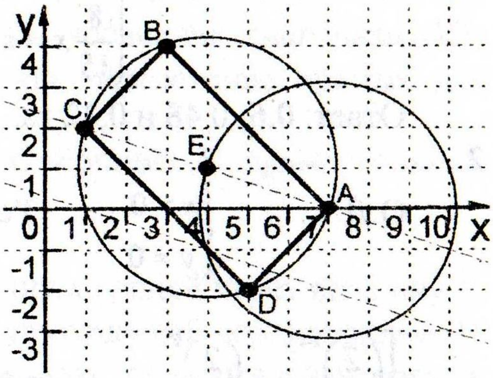

Рис. 5.

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}\cdot x+\frac{7}{3} \\ (x-7)^2+y^2=10 \end{cases} \Rightarrow x^2-14x+49+{}^1/_9\cdot x^2-{}^{14}/_9\cdot x+{}^{49}/_9-10=0 \Leftrightarrow x^2-14x+40=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1=4$, $x_2=10$, $y_1=1$, $y_2=-1$. Обозначим $(x_C;y_C)$ координаты точки C. Так как E середина отрезка AC, то ее координаты — средние арифметические координат точек A и C. Поэтому, если точка E (4;1), то

$\begin{cases} 4=\frac{7+x_C}{2} \\ 1=\frac{0+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=1 \\ y_C=2 \end{cases}$, или E (10;-1), то $\begin{cases} 10=\frac{7+x_C}{2} \\ -1=\frac{0+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=13 \\ y_C=-2 \end{cases}$.

Вариант (13;-2) не подходит условию нахождения точки C в первой четверти. Поэтому вершина C имеет координаты (1;2), а точка E — центр прямоугольника — координаты (4;1). Окружность описанная около прямоугольника имеет центр: E(4;1) и радиус $AE=\sqrt{10}$. Следовательно, ее уравнение $(x-4)^2+(y-1)^2=10$. Точка B лежит на этой окружности и имеет абсциссу равную 3. Найдем ее ординату: $(3-4)^2+(y-1)^2=10 \Leftrightarrow y=1\pm3 \Leftrightarrow y_1=-2$, $y_2=4$. Вариант $y_1=-2$ не подходит условию, так как по условию вершина B лежит в первой четверти. Итак точка B имеет координаты (3;4). Найдем длины сто-

первой четверти. Итак точка B имеет координаты (3;4). Найдем длины сторон прямоугольника $AB=\sqrt{(3-7)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$.
Площадь прямоугольника $S_{ABCD}=AB\cdot BC==4\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=16$.
Ответ: $S_{ABCD}=16$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 5.

Вариант 4

1. Обозначим x, y и z — площади первой, второй и третьей теплиц в га соответственно. Из условия имеем:

$$\begin{cases} x+y+z=1{,}4 \\ x=1{,}25y \\ x=1{,}875z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{4}{5}x+\frac{8}{15}x=1{,}4 \\ \frac{4}{5}x=y \\ \frac{8}{15}x=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0{,}6 \\ y=0{,}48 \\ z=0{,}32 \end{cases}$$

Ответ: 0,6; 0,48 и 0,32 га.

2.
О.Д.З.: $\begin{cases} x>0 \\ y\neq 0 \end{cases}$. Решение: $\begin{cases} \dfrac{2^{x-2y+3y}}{5^{x+y-2}}=\dfrac{2^7}{5^5} \\ \log_3|y|+\log_3 x=\log_3 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^{x+y}=\left(\frac{2}{5}\right)^7 \\ \log_3(|y|x)=\log_3 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ |y|x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x|7-x|=12 \end{cases}$$

. Если $0<x<7$, то $-x^2+7x-12=0$, $D=49-48=1$, $x_1=3$, $x_2=4$, $y_1=4$, $y_2=3$. Если $x>7$, то $x^2-7x-12=0$, $D=49+48=97$, $x_{3,4}=\dfrac{7\pm\sqrt{97}}{2}$, но $\dfrac{7-\sqrt{97}}{2}<0$ и не удовлетворяет О.Д.З.

Поэтому $x_4=\dfrac{7+\sqrt{97}}{2}$, $y_4=7-\dfrac{7+\sqrt{97}}{2}=\dfrac{7-\sqrt{97}}{2}$.

Ответ: $\left\{(3;4);(4;3);\left(\dfrac{7+\sqrt{97}}{2};\dfrac{7-\sqrt{97}}{2}\right)\right\}$.

3. Запишем $y=6-\sin x-12(1-\sin^2 x)$. Сделаем замену $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$, $y=12t^2-t-6$. График функции $y=y(t)$ — парабола, ветви которой направлены вверх. Координаты вершины: $t_0=1/24\in[-1;1]$, $y_0=-6\frac{1}{48}$. При $t=-1$ $y=7$, при $t=1$ $y=5$.
Ответ: множество значений функции: $[-6\frac{1}{48};7]$.

4. О.Д.З.: $x\neq\pi k/2$, $k\in Z$. После преобразований получим функцию:

$$y=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)+\sqrt{3}\cos(\pi-x)\right)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: график показан на рис. 6.

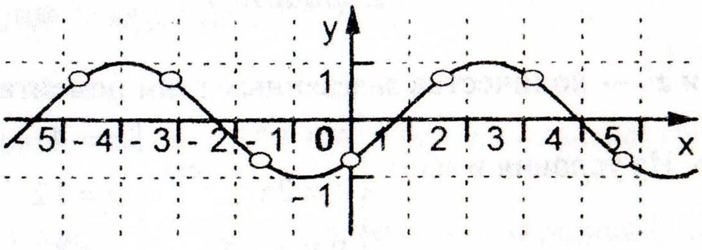

Рис. 6.

5. Вершина D имеет координаты (3;1), как центр окружности $(x-3)^2+(y-1)^2=4$. Так как окружность касается стороны AB и проходит через вершину A, то A — точка касания AB и окружности. Так как A(1;1) — крайняя левая точка окружности, то касательная AB, проходящая через эту точку вертикальна и ее уравнение $x=1$. Диагональ BD параллельна прямой l и поэтому имеет одинаковый с ней угловой коэффициент, следовательно, ее уравнение $y=-{}^3/_2\cdot x+a$. Параметр a находится из условия прохождения диагонали BD через точку D(3;1): $1=-{}^3/_2\cdot 3+a \Leftrightarrow a={}^{11}/_2$. Итак, уравнение диагонали BD: $y=-{}^3/_2\cdot x+{}^{11}/_2$. Точка B может быть найдена как пересечение прямых AB и BD: $\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$. Четвертая вершина C прямоугольной трапеции может находиться либо на прямой, проходящей через вершину B и параллельной стороне AD, либо на прямой, проходящей через вершину D и параллельной стороне AB. В первом случае это горизонтальная прямая $y=4$, во втором — вертикальная $x=3$. Найдем точки пересечения обеих этих прямых с окружностью, поскольку по условию вершина C лежит на окружности: $\begin{cases} y=4 \\ (x-3)^2+(y-1)^2=4 \end{cases} \Rightarrow (x-3)^2=-5$ решений нет;

$\begin{cases} x=3 \\ (x-3)^2+(y-1)^2=4 \end{cases} \Rightarrow y-1=\pm 2 \Rightarrow y_1=-1\ y_2=3.$

Если считать, что координаты точки C(3;-1), то точки B и C находясь на вертикальных прямых, проходящих через точки A и D, имеют вертикальные координаты 4 и (-1), из чего следует, что одна из них находится выше прямой $y=1$ (на которой лежит сторона AD), а другая ниже. Поэтому в этом случае фигура ABCD не четырехугольник. Итак, вершина C имеет координаты (3;3). Длины оснований: AB= =|4-1|=3, CD=|1-3|=2. Длина высоты, совпадающей со стороной AD=|3-1|=2. Площадь трапеции $S_{ABCD}={}^1/_2\cdot(3+2)\cdot 2=5$.

Ответ: $S_{ABCD}=5$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 7.

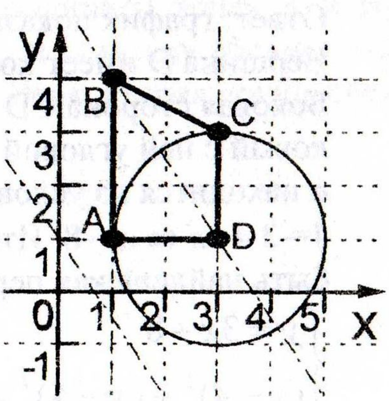

Рис. 7.

Вариант 5

1. Пусть x, y и z — количества завезенных тонн цемента, гравия и песка соответственно. Из условия имеем: $\begin{cases} y = 1{,}5z \\ z = 2x \\ y = x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 12 \\ z = 8 \end{cases}$.

Ответ: 4 тонны цемента, 12 — гравия и 8 — песка.

2. О.Д.З.: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Решение: $\begin{cases} \dfrac{5^{y-x+2x}}{3^{x+y-2}} = \dfrac{5^9}{3^7} \\ \log_5 y + \log_5 |x| = \log_5 18 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{5}{3}\right)^{x+y} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^9 \\ \log_5(y\,|x|) = \log_5 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ y\,|x| = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - y \\ y\,|9 - y| = 18 \end{cases}.$$

Если $0<y<9$, то $-y^2+9y-18=0$, $D=81-72=9$, $y_1=3$, $y_2=6$, $x_1=6$, $x_2=3$. Если $y>9$, то $y^2-9y-18=0$, $D=81+72=153$, $y_{3,4} = \dfrac{9 \pm 3\sqrt{17}}{2}$, но $\dfrac{9-3\sqrt{17}}{2} < 0$ и не удовлетворяет О.Д.З. Поэтому $y_4 = \dfrac{9+3\sqrt{17}}{2}$, $x_4 = 9 - \dfrac{9+3\sqrt{17}}{2} = \dfrac{9-3\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{9-3\sqrt{17}}{2}; \dfrac{9+3\sqrt{17}}{2}\right); (3;6); (6;3)\right\}$.

3. Запишем $y=21\sin x+10(1-\sin^2 x)$. Сделаем замену $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$, $y = -10t^2+21t+10$. График функции $y=y(t)$ — парабола. Координата вершины: $t_0=21/20\notin[-1;1]$, поэтому функция $y=y(t)$ достигнет своих наименьшего и наибольшего значений на концах промежутка $[-1;1]$. При $t=-1$ $y=-21$, при $t=1$ $y=21$.

Ответ: множество значений функции: $[-21;21]$.

4. О.Д.З.: $x\neq \pi k/2$, $k\in Z$. После преобразований получим функцию: $y=\sin(3\pi-x)\cdot\cos{}^{\pi}/_6+\cos x\cdot \sin{}^{\pi}/_6=\sin(x+{}^{\pi}/_6)$

Ответ: график показан на рис. 3.

5. Вершина D имеет координаты (4;4), как центр окружности $(x-4)^2+(y-4)^2=10$. Боковая сторона CD параллельна прямой l, и следовательно, имеет одинаковый с ней угловой коэффициент. То есть ее уравнение $y=3x+a$. Параметр a находится из условия прохождения стороны CD через точку D(4;4): $4=-3\cdot 4+a \Leftrightarrow a=-8$. Итак, уравнение стороны CD: $y=3x+8$. Точка C может быть найдена как пересечение прямой CD и окружности:

$\begin{cases} y = 3x + 8 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 7 \end{cases}$. Полученные точки обозначим $C_1(3;1)$ и $C_2(5;7)$. Пусть уравнение прямой AD: $y=bx+c$. Параметры b

и c можно найти, зная координаты точек A(7;5) и D(4;4): $\begin{cases} 5 = b\cdot 7 + c \\ 4 = b\cdot 4 + c \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b = 1/3 \\ c = 8/3 \end{cases}$. Итак, уравнение стороны AD: $y={}^1/_3\cdot x+{}^8/_3$. Рассмотрим первую логическую возможность т.е. будем считать, что вершина C совпадает с точкой $C_1(3;1)$. Так как ABCD — трапеция, причем AD и BC — основания, то прямые AD и BC параллельны и, следовательно, имеют одинаковые угловые коэффициенты, т.е. уравнение прямой BC имеет вид $y={}^1/_3\cdot x+d$. Параметр d находится из условия прохождения прямой BC через точку C(3;1): $1={}^1/_3\cdot 3+d \Leftrightarrow d=0$. Итак, уравнение стороны BC: $y={}^1/_3\cdot x$. Так как диагональ BD параллельна оси Ox и проходит через точку D(3;-1), то ее уравнение $y=4$. Точку B можно найти как пересечение стороны BC и диагонали BD:

$\begin{cases} y = x/3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow$ B(12;4). Пусть диагональ AC имеет уравнение $y=gx+h$. Параметры g и h находятся из условия прохождения этой прямой через точки A(7;5) и C(3;1): $\begin{cases} 5 = 7g + h \\ 1 = 3g + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 1 \\ h = -2 \end{cases}$. Угловой коэффициент этой прямой равен 1. Это означает, что единице равен тангенс угла наклона этой прямой к горизонтальной оси и, следовательно, сам угол равен $\pi/4$. Другими словами, угол между диагоналями трапеции $\alpha=\pi/4$. Вычислим длины диагоналей: $AC = \sqrt{(3-7)^2+(1-5)^2} = 4\sqrt{2}$, BD=|4-12|=8; $S_{ABCD} =$
$={}^1/_2\cdot AC\cdot BD\cdot \sin\alpha = {}^1/_2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 8\cdot \sin{}^{\pi}/_4=16$.

Рассмотрим вторую логическую возможность, т.е. будем считать, что вершина C совпадает с точкой $C_2(5;7)$. Уравнение B_2C_2 как и в первом случае имеет вид $y={}^1/_3\cdot x+d$. Причем так как точка $C_2(5;7)$ принадлежит этой прямой, то $7={}^1/_3\cdot 5+d \Leftrightarrow d={}^{16}/_3$. Итак, уравнение B_2C_2: $y={}^1/_3\cdot x+{}^{16}/_3$.

Точка B_2 ищется из системы: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{16}{3} \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow B_2(-4;4)$. При таких координатах фигура AB_2C_2D не четырехугольник, так как ординаты точек A и B_2 находятся между ординатами C_2 и D, а абсциссы C_2 и D между абсциссами A и B_2 и поэтому отрезки AB_2 и C_2D пересекаются. Итак, вторая логическая возможность не дала решения.

Ответ: S_{ABCD}=16 кв.ед. Чертеж приведен на рис. 8.

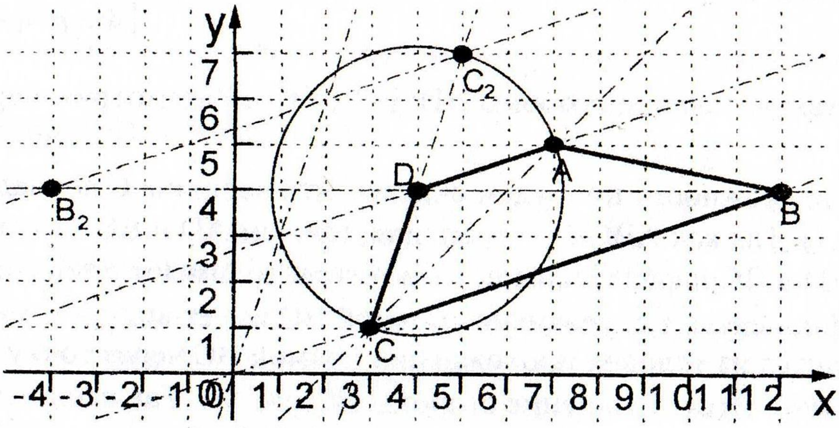

Рис. 8.

Вариант 6

1. Пусть x, y и z — уловы сельди, салаки и лосося (в центнерах) соответственно. Из условия имеем: $\begin{cases} z=0{,}6x \\ z=0{,}75y \\ y+20=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=100 \\ y=80 \\ z=60 \end{cases}$.

Ответ: улов сельди 100 центнеров, салаки — 80 и лосося 60.

2. О.Д.З.: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y>0 \end{cases}$. Решение: $\begin{cases} \dfrac{7^{x-y+2y}}{2^{x+y+1}} = \dfrac{7^6}{2^7} \\ \log_9|x|+\log_9 y=\log_9 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{7}{2}\right)^{x+y} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^6 \\ \log_9(|x|\,y)=\log_9 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ |x|\,y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y \\ |6-y|\,y=8 \end{cases}$. Если $0<y<6$, то $-y^2+6y-8=0$, $D/4=9-8=1$, $y_1=2$, $y_2=4$, $x_1=4$, $x_2=2$. Если $y>6$, то $y^2-6y-8=0$, $D/4=9+8=17$, $y_{3,4}=3-\sqrt{17}$, но $3-\sqrt{17}<0$ и не удовлетворяет О.Д.З. Поэтому $y_4=3+\sqrt{17}$, $x_4=6-(3-\sqrt{17})=3-\sqrt{17}$.

Ответ: $\{(3-\sqrt{17};\ 3+\sqrt{17});(2;4);(4;2)\}$.

3. Запишем $y=21\sin x-14(1-\sin^2 x)$. Сделаем замену $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$, $y=14t^2+21t-14$. График функции $y=y(t)$ — парабола, ветви которой направлены вверх. Координаты вершины: $t_0=-3/4\in[-1;1]$, $y_0=-21^7/_8$. При $t=-1$ $y=-21$, при $t=1$ $y=21$.

Ответ: множество значений функции: $[-21^7/_8;21]$.

4. О.Д.З.: $x\neq \pi k/2$, $k\in Z$. После преобразований получим функцию: $y=\cos(5\pi-x)\cdot 1/\sqrt{2}+\sin x\ 1/\sqrt{2}=1/\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=\sin(x-{}^{\pi}/_4)$.

Ответ: график показан на рис. 1.

5. Вершина D имеет координаты (8;6), как центр окружности $(x-8)^2+(y-6)^2=20$.

Найдем уравнение прямой DK из условия прохождения через точки D(8;6) и K(6;2). Подставим эти координаты в уравнение прямой $y=ax+b$: $\begin{cases} 6 = a\cdot 8 + b \\ 2 = a\cdot 6 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -10 \end{cases}$. Итак, уравнение прямой DK имеет вид: $y=2x-10$.

Так как K — точка на прямой AD описывается тем же уравнением $y=2x-10$. Найдем уравнение прямой CD. Эта прямая перпендикулярна прямой AD и проходит через точку D. Произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно (-1), следовательно, угловой коэффициент прямой CD равен $(-{}^1/_2)$, а уравнение имеет вид $y=-{}^1/_2\cdot x+c$. Параметр c находится из условия прохождения этой прямой через точку D(8;6): $6 = -{}^1/_2\cdot 8+c \Leftrightarrow c=10$. Итак, уравнение стороны CD: $y = -{}^1/_2\cdot x+10$. Точка C ищется как пересечение прямых CD и l: $\begin{cases} y = -x/3+10 \\ y = x/2+8 \end{cases} \Rightarrow$ C(2;9). Длина стороны квадрата: $CD=\sqrt{(8-2)^2+(6-9)^2} = \sqrt{45}$. Площадь квадрата $S_{ABCD}=CD^2=(\sqrt{45})^2$.

Ответ: S_{ABCD}= 45 кв.ед. Чертеж приведен на рис. 9.

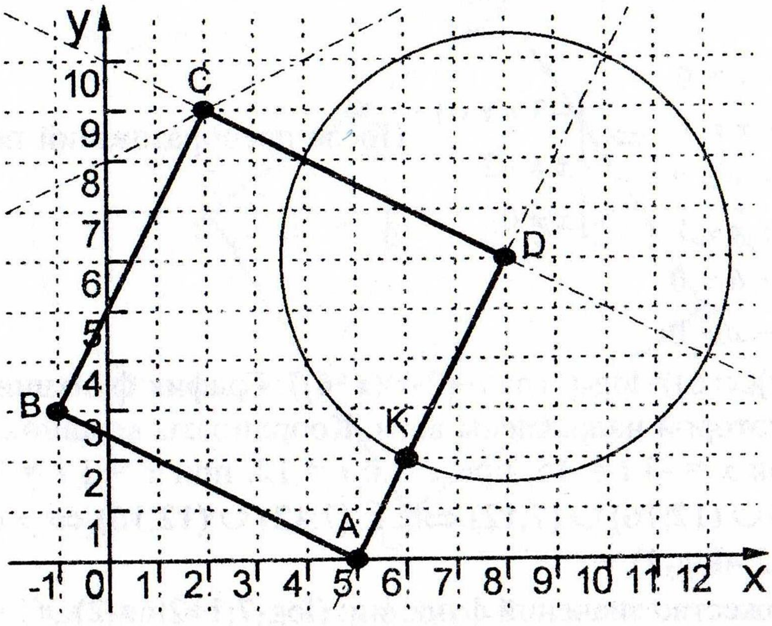

Рис. 9.

Вариант 8

1. Пусть x и y — количества грамм золота и серебра соответственно в первоначальном слитке. По условию:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y}\cdot 100=40 \\ \dfrac{x+600}{x+y+600}\cdot 100=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2(x+y) \\ 5(x+600) = 3(x+y+600) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ 2x+3000=3y+1800 \end{cases} \Rightarrow$$

x-1200=-$y \Leftrightarrow x+y$=1200. Новый вес слитка $(x+y)$+600=1200+600=1800.

Ответ: слиток стал весить 1800 г.

2.

По условию: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$. Решение: $\begin{cases} 6^{x+2+y-2}>6^3 \\ 3^{2/x}>3^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>3 \\ 2/x>y \end{cases}$

Найдем точки пересечения прямой: y=3-x и гиперболы y=2/x:

2/x=3-$x \Leftrightarrow$ x^2-3x+2=0 $\Leftrightarrow$

x_1=1, x_2=2.

Ответ: см. рис. 10.

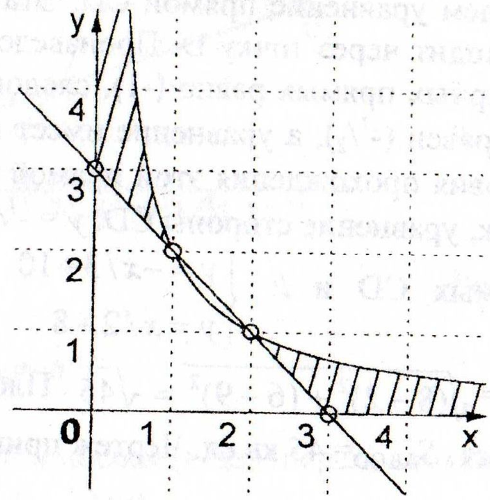

Рис 10.

3.

О.Д.З. $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1-x\neq 1 \\ 3+x>0 \\ 3+x\neq 1 \\ x+6>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<1 \\ x\neq -2 \\ x\neq 0 \end{cases}$. После преобразований получим функцию:

$y=\log_3((2-x)(x+6))=\log_3 t$, где $t=(2-x)(x+6)$). График функции $t=t(x)$ — парабола, ветви которой направлены вниз. Координаты вершины: x_0 = (2-6)/2 = -2, t_0 = 16. При x = -3 t = 15, при x = 0 t = 12, при x = 1 t = 7. Следовательно, $t \in (15;16) \cup (12;16) \cup (7;12) \Leftrightarrow t \in (7;12) \cup (12;16) \Leftrightarrow y \in (\log_3 7;1+2\log_3 2) \cup (1+2\log_3 2;4\log_3 2)$.

Ответ: множество значений функции: $(\log_3 7;1+2\log_3 2)\cup(1+2\log_3 2;4\log_3 2)$.

4. О.Д.З.: $x \neq \pi k/2$, $k \in Z$ и $x \neq \pi n+\pi/4$, $n\in Z$. После преобразований получим функцию: $y = \sin(x - \pi/4)\,(\cos(7\pi - x)\sin(3\pi/4) + \sin x\cdot\cos\pi/4) - x)/|\sin(x-\pi/4)|=$ $=\sin(x - \pi/4)(\cos x\cdot\sin\pi/4 + \sin x\cdot\cos\pi/4)/|\sin(x-\pi/4)| = \sin^2(x - \pi/4))/|\sin(x-\pi/4)|=$ $=|\sin(x-\pi/4)|$. Ответ: график показан на рис. 11.

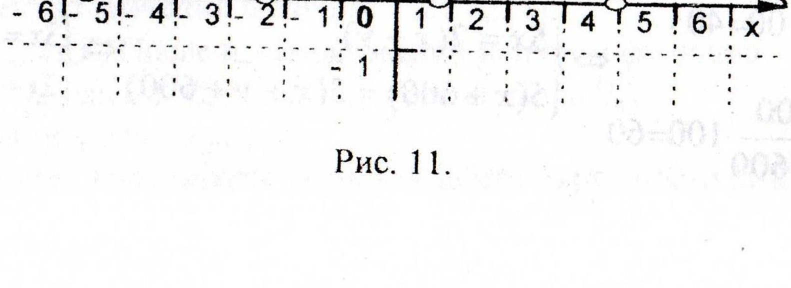

Рис. 11.

5. Вершина D имеет координаты (2;0), как центр окружности $(x-2)^2+y=13$. Прямая DK имеет уравнение $y=ax+b$, параметры которого можно определить из условия прохождения этой прямой через точки D(2;0) и K(5;2): $\begin{cases} 0 = a\cdot 2+b \\ 2 = a\cdot 5+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2/3 \\ b = -4/3 \end{cases}$. Сторона CD перпендикулярна прямой DK, так как точка K лежит на стороне AD. Произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно (-1), вследствие чего угловой коэффициент прямой CD равен (-3/2), а ее уравнение имеет вид: $y=-{}^3/_2{\cdot}x+c$. Параметр c можно найти из условия прохождения прямой CD через точку D(2;0): $0=-{}^3/_2{\cdot}2+c \Leftrightarrow c=3$. Итак, уравнение стороны CD: $y = -{}^3/_2{\cdot}x+3$. Точка C ищется как пересечение прямых CD и l: $\begin{cases} y = -3x/2+3 \\ y = -x/4-9/2 \end{cases} \Leftrightarrow$ C(6;-6). Длина стороны квадрата: CD$=\sqrt{(2-6)^2+(0-(-6))^2} = \sqrt{52}$, а площадь S_{ABCD}=CD^2=$(\sqrt{52})^2$.

Ответ: S_{ABCD}=52 кв.ед. Чертеж приведен на рис. 12.

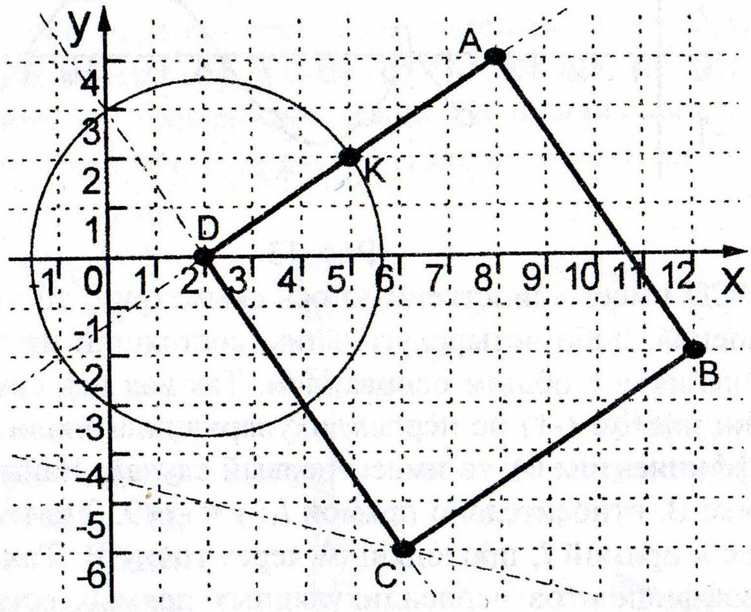

Рис. 12.

Вариант 15

1. По условию, если q – знаменатель геометрической прогрессии:

$$\begin{cases} B = (A+C)/2 \\ 0{,}6B = Aq \\ C = Aq^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 5Aq/3=(A+Aq^2)/2 \quad \Leftrightarrow \quad 3q^2-10q+3=0 \quad \Rightarrow \quad q_1=1/3, \quad q_2=3.$$

В первом случае $d_1=4q_1/3=4/(3{\cdot}3)=4/9$, $A/3=3(A+4/9)/5 \Leftrightarrow A = -1<0$, что не подходит условию положительности A. Во втором случае $d_2=4q_2/3=4{\cdot}3/3=4$, $A{\cdot}3=3(A+4)/5 \Leftrightarrow A=1$. Следовательно, $B=5Aq/3=5$, $C=Aq^2=9$.

Ответ: $A=1$, $B=5$, $C=9$.

2. Запишем $y = 4^{\sin^2 x} - 4^{2\sin^2 x - 1}$. Сделаем замену $t = 4^{\sin^2 x} \in [1;4]$, $y=-t^2/4+t$. График функции $y=y(t)$ — парабола, ветви которой направлены вниз. Координаты вершины: $t_0=2\in[1;4]$, $y_0=1$. При $t=1$ $y=3/4$, при $t=4$ $y=0$. Ответ: множество значений функции: [0;1].

3. Решим неравенство. $\dfrac{\log_2(x^2/16)}{\log_x 2} - 6 < 0 \Leftrightarrow (2\log_2 x-4)\cdot\log_2 x-6<0.$

Обозначим $t=\log_2 x \Rightarrow 2t^2-4t-6<0$. Корни соответствующего неравенству квадратного уравнения $t_1=-1$, $t_2=3$. Поэтому $-1<t<3 \Leftrightarrow -1<\log_2 x<3 \Leftrightarrow ½<x<8$. Ответ: график лежит ниже оси абсцисс при $x\in(½;8)$.

4. О.Д.З.: $x>\pi$ и $x\neq\pi+1$ и $x\neq\pi n/2$, $n\in$N. После преобразований получим функцию: $y=z(\sin x+\sin(x-5\pi/4))=z(\sin x-\cos x)=\sqrt{2}\cdot z\cdot\sin(x-\pi/4)$, где $z=1$, если $x>\pi+1$ и $z=-1$, если $\pi<x<\pi+1$. Ответ: график показан на рис. 13.

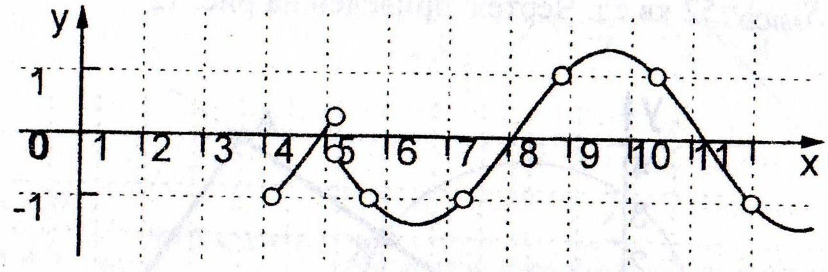

Рис. 13.

5. Так как ABCD имеет единственную ось симметрии, то это либо равнобедренная трапеция, либо четырехугольник, состоящий из двух равнобедренных треугольников с общим основанием. Так как ось симметрии l_1 с угловым коэффициентом (-1) не перпендикулярна диагонали AC (прямой с угловым коэффициентом 0), то имеем первый случай. Найдем точку, симметричную точке B, относительно прямой l_1: $y = -x+9$. Эта точка лежит на перпендикуляре к прямой l, проходящим через точку B. Так как произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых есть (-1), то угловой коэффициент искомой прямой равен 1, а уравнение имеет вид $y=x+a$. Параметр a находится из условия прохождения этой прямой через точку B(5;6): $6=5+a \Leftrightarrow a=1$. Найдем точку пересечения этих прямых: $\begin{cases} y = 9-x \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$. Точка (4;5) является серединой отрезка, соединяющего точку B и симметричную ей точку $(x';y')$. Поэтому ее координаты — средние арифметические координат симметричных точек: $\begin{cases} 4 = (x'+5)/2 \\ 5 = (y'+6)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 4 \end{cases}$. Вершина B имеет координаты (5;6) как центр окружности $(x-5)^2+(y-6)^2=29$. Вершина C является точкой пересечением диагонали AC и окружности:

$$\begin{cases} y=4 \\ (x-5)^2+(y-6)^2=29 \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ или } x=10.$$ Ни одна из найденных точек не совпадает с точкой $(x';y')$, поэтому точка (3;4) является точкой A.

Рассмотрим первый вариант, когда точка $C_1(0;4)$ является вершиной C. Найдем симметричную ей точку D_1, способом, описанным выше. Перпендикулярная к оси симметрии прямая описывается уравнением $y=x+b$, причем $4=0+b \Leftrightarrow b=4$. Координаты середины отрезка C_1D_1 находятся из системы $\begin{cases} y=9-x \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13/2 \\ y=5/2 \end{cases}$.

Координаты точки D_1 обозначим$(x'';y'')$: $\begin{cases} 5/2=(x''+0)/2 \\ 13/2=(y''+4)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''=5 \\ y''=9 \end{cases}$.

Точки A и C_1 лежат ниже оси симметрии, так как 4<-3+9 и 4<-0+9 и, следовательно, B и D_1 — выше. Поэтому во-первых отрезки AD_1 и BC_1 пересекаются с осью симметрии и, во-вторых, симметричны. В силу этого они имеют общую точку и фигура ABC_1D — не четырехугольник, так как стороны этой фигуры пересекаются. Следовательно точка (0;4) не может быть точкой C и координаты вершины C(10;4). Точка D, симметричная точке C, находится способом, описанным выше. Перпендикуляр к оси симметрии задается уравнением $y=x+c$, причем $4=10+c \Leftrightarrow c=-6$. Координаты вершины D обозначим $(x_D;y_D)$:

$$\begin{cases} 15/2=(10+x_D)/2 \\ 3/2=(4+y_D)/2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ D(5;1). Заметим, что абсциссы точек B и D совпадают. Это означает, что диагональ BD вертикальная. Аналогично устанавливается, что диагональ AC горизонтальная. Поэтому угол α между ними $\pi/2$, а длины BD=|6-(-1)|=7, AC=|10-3|=7. Площадь $S_{ABCD}=½\cdot AC\cdot BD \sin\alpha = ½\cdot 7\cdot 7\ 1=24{,}5$.

Ответ: S_{ABCD}=24,5кв.ед.

Чертеж приведен на рис. 14.

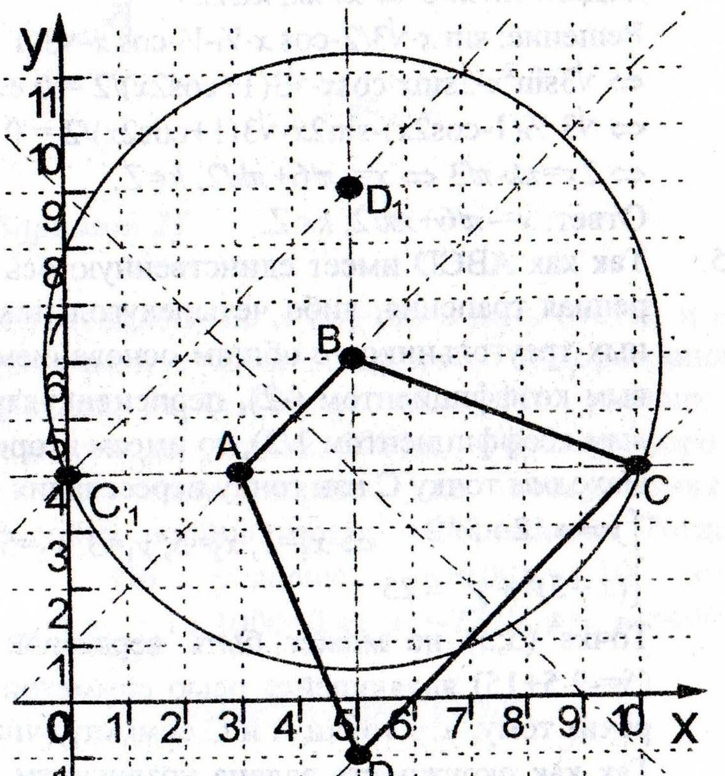

Рис. 14.

Вариант 18

1. По условию

$$\begin{cases} B=(A+C)/2 \\ 0{,}6B=\sqrt{AC} \\ 0{,}75(B-A)=0{,}6B/A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=(A+C)/2 \\ 0{,}6B=\sqrt{AC} \\ 0{,}75(B-A)=B/A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A/B=1{,}8 \\ C/B=0{,}2 \\ B-A=0{,}8B/A \end{cases} \text{ - не имеет решения}$$

$$\begin{cases} A/B=0{,}2 \\ C/B=1{,}8 \\ B-A=0{,}8B/A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=5 \\ C=9 \end{cases}$$

Ответ: $A=1$, $B=5$, $C=9$.

2. Учитывая ограничения на область определения логарифмической функции и квадратного корня имеем: $x+2>0$, и $x-2>0$, и $x\neq3$, и $1-\log_{x-2}(x+2)\geq0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_{x-2}(x+2)\leq\log_{x-2}(x-2)$, при $x-2>1$, откуда $x+2\leq x-2$, что невозможно, или при $0<x-2<1$ должно выполняться $x+2\geq x-2$, что всегда верно при $2<x<3$.
Ответ: О.Д.З.: (2;3).

3. Запишем $y=2^{2x}+17-8\cdot2^x$, $x\in[1;3]$. Сделаем замену $t=2^x$, $t\in[2;8]$, $y=t^2-8t+17$. График функции $y=y(t)$ — парабола, ветви которой направлены вверх. Координата вершины: $t_0=4\in[2;8]$, $y_0=1$. При $t=2$ $y=5$, при $t=8$ $y=17$. Поэтому $y\in[1;17]$.
Ответ: множество значений функции: [1;17].

4. О.Д.З.: $\sin x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\pi k$, $k\in Z$.
Решение: $\sin x\cdot\sqrt{3}/2-\cos x\cdot½-½\cdot\cos x-\sqrt{3}(1+\cos2x)/(4\sin x)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^2x-2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}(1+\cos2x)/2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,½(1-\cos2x)-\sin2x-\sqrt{3}(1+\cos2x)/2=0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos2x-\sin2x=0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}2x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x=\pi k-\pi/3 \Leftrightarrow x=-\pi/6+\pi k/2$, $k\in Z$.
Ответ: $x=-\pi/6+\pi k/2$, $k\in Z$.

5. Так как ABCD имеет единственную ось симметрии, то это либо равнобедренная трапеция, либо четырехугольник, состоящий из двух равнобедренных треугольников с общим основанием. Так как ось симметрии l_1 с угловым коэффициентом (-2), перпендикулярна диагонали АС (прямой с угловым коэффициентом 1/2), то имеем второй случай.
Находим точку С как точку пересечения окружности и прямой АС:

$$\begin{cases} y=x/2+5/2 \\ (x-5)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=5,\ y_1=3,\ y_2=5.$$

Точка (5;5) не может быть вершиной С, так как лежит на прямой l_1 ($5=-2\cdot5+15$) являющейся осью симметрии четырехугольника (это противоречит тому, что точки А и С симметричны). Итак, координаты точки С(1;3). Так как окружность задана уравнением $(x-5)^2+y^2=25$, то ее центр — точка (5;0). Поскольку CD — диаметр окружности, то ее центр является серединой отрезка CD. Поэтому координаты центра окружности являются средними арифметическими координат вершин С и D. Если координаты точки

D обозначить (x_D, y_D), то: $\begin{cases} 5 = (1 + x_D)/2 \\ 0 = (3 + y_D)/2 \end{cases} \Leftrightarrow$ D(9;-3). Точка D лежит на оси симметрии (прямой l_1: -3=-2·9+15) и симметрична сама себе. Уже упоминалось, что вершины A и C симметричны друг другу. Поэтому оставшаяся вершина B должна быть симметрична сама себе, т.е. лежать на прямой l_1 поскольку абсцисса вершины B равна 4, то ее ордината. $y = -2\cdot 4+15 = 7$.

Найдем длины отрезков $BC = \sqrt{(1-4)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{25}$,

$CD=2\cdot\sqrt{25}=10$,

$BD=\sqrt{(9-4)^2 + (-3-7)^2} = \sqrt{125}$

Обратим свое внимание на выполнение равенства $BD^2=BC^2+CD^2$. Это означает, что ΔBCD — прямоугольный с прямым углом C. Поэтому его площадь

$S_{BCD} = ½\cdot BC\cdot CD = ½\cdot 5\cdot 10 = = 25$. В силу симметрии $S_{ABCD} = 2\cdot S_{BCD} = 2\cdot 25 = 50$.

Ответ: $S_{ABCD} = 50$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 15.

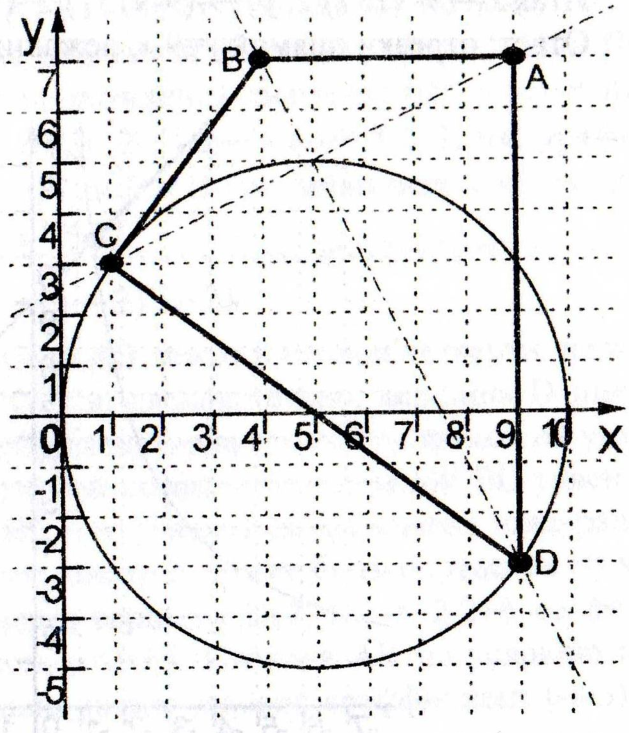

Рис. 15.

Вариант 21

1. Пусть в кафе до подорожания готовилось по n порций в день ($n\in N$), и в день до подорожания закупалось по x кг мяса Тогда после подорожания (n+100) порций стало готовиться из (x-10) кг мяса. По условию: 4000/x — цена килограмма мяса до подорожания, 5000/x — после подорожания, x/n — шло мяса на одну порцию до подорожания, y=(x/n-0,045) — идет мяса на одну порцию после подорожания. Тогда $5000(x-10)/x=4000 \Leftrightarrow x=50$. По условию $(n+100)y=x-10 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (n+100)(50-0,045n)=40n \Leftrightarrow 0,009n^2-1,1n-1000=0 \Leftrightarrow n_1=-277^7/_9\notin N$, $n_2=400$. Итак, n=400, теперь y=50/400-0,045=0,08.
   Ответ: после подорожания на одну порцию идет 80 грамм мяса.

2. О.Д.З.: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Решение: $\begin{cases} \dfrac{3^{y-2x+3x}}{4^{x+y-2}} = \dfrac{3^9}{4^7} \\ \log_5 |x| + \log_5 y \geq \log_5 14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3/4)^{x+y} = (3/4)^9 \\ \log_5(|x|y) \ge \log_5 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ |x|y \ge 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9-x \\ y \ge 14/|x| \end{cases}.$$

Найдем точки пересечения линий y=9-x и y=14/|x|. При x>0 имеем x^2-9x+14=0 $\Rightarrow$ x_1=2, x_2=7, y_1=7, y_2=2. При x<0 имеем x^2-9x-14=0 $\Leftrightarrow$ $x_{3,4}$=(9±√137)/2, но x_4=(9+√137)/2>0, что не удовлетворяет условию x<0. Итак x_3=(9-√137)/2, y_3=9-(9-√137)/2=(9+√137)/2.

Ответ: отрезки прямой y=9-x, лежащие выше гиперболы y=14/|x| (рис. 16).

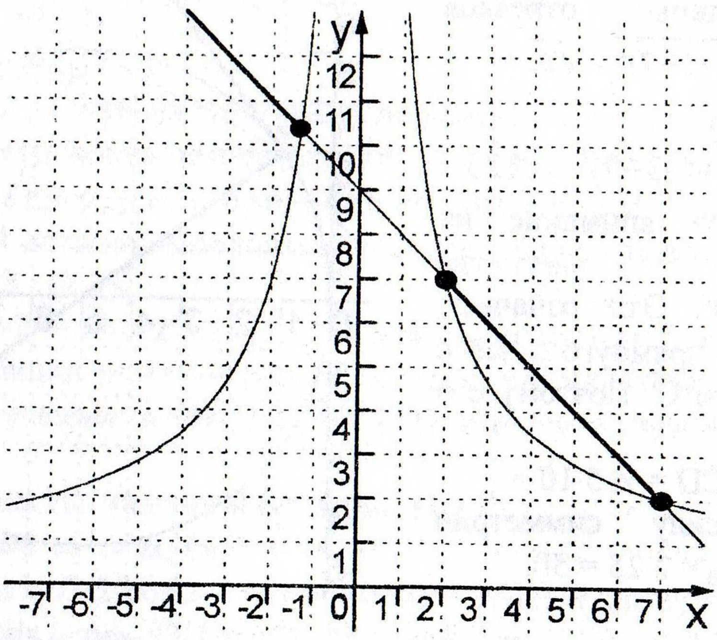

Рис. 16.

3. Запишем $y = 5^{2x^2+12|x|+10} = 25^{|x|^2+6|x|+5}$. Сделаем замену t=|x|, t∈[0;+∞), z=t^2+6t+5. График функции z=z(t) — парабола, ветви которой направлены вверх. Координата вершины: t_0=-3∉[0;+∞). При t=0 z=5. Поэтому z∈[5;+∞), следовательно y∈[25^5;+∞).

Ответ: множество значений функции: [5^{10};+∞).

4. О.Д.З.: -1≤x-3≤1 и arcsin(x-3)≠0 ⇔ 2≤x≤4 и x≠3. После преобразований получим функцию: y = z(sin($x\pi$+ π/3)sin π/6 + sin($x\pi$ + 5π/6)(-√3/2))=
=z((sinπx·cosπ/3 + cosπx·sinπ/3)·½–(sinπx·cos5π/6+ cosπx·sin5π/6)·√3/2) =
= z((sin πx·½+ +cosπx·√3/2)·½-(sin πx·(-√3/2)+ +cos πx·½)·√3/2)= z·sin πx,
где z=1, если x>3 и z=-1, если x<3, т.е. y = -|sinπx|

Ответ: график показан на рис. 17.

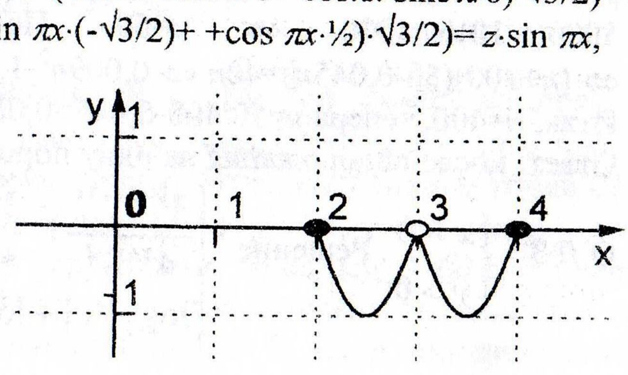

Рис. 17.

5. Центр симметрии может быть только у параллелограмма, следовательно, ABCD — параллелограмм. Так как BD — диаметр, то вершина B лежит на окружности. Кроме того сторона AB — касательная, поэтому вершина B — точка касания. Так как сторона AB и прямая l_1 параллельны, то их угловые коэффициенты совпадают. Перпендикуляр к касательной, проходящей через точку касания есть диаметр окружности, причем по условию этим диаметром оказывается диагональ BD. Произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно (-1), поэтому угловой коэффициент диагонали BD есть ¾. Итак, уравнение диагонали BD имеет вид $y=\frac{3}{4}\cdot x+a$. Параметр a можно найти из условия прохождения диаметра BD через центр окружности $(x-6)^2+(y-2)^2=25$ точку (6;2): $2=\frac{3}{4}\cdot 6+a \Leftrightarrow a=-5/2$. Итак, уравнение прямой BD: $y=\frac{3}{4}\cdot x-5/2$. Найдем точки B и D как точки пересечения прямой BD и окружности: $\begin{cases} y=3x/4-5/2 \\ (x-6)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow x^2-12x+20=0 \Rightarrow x_1=2,$

$x_2=10$, $y_1=-1$, $y_2=5$. По условию сторона AB лежит в первой четверти, поэтому вершиной B является точка (10;5) и, следовательно, вершина D имеет координаты (2;-1). Сторона BC перпендикулярна прямой l_2, имеющей угловой коэффициент (-½), поэтому угловой коэффициент прямой BC равен 2. Сторона AD параллельна стороне BC и ее угловой коэффициент тоже равен 2, а уравнение имеет вид $y=2x+b$. Параметр b может быть определен из условия прохождения прямой AD через вершину D(2;-1): $-1=2\cdot 2+b \Leftrightarrow b=-5$. Поэтому уравнение прямой AD есть $y=2x+5$. Сторона AB по условию параллельна прямой l_1 и, следовательно, имеет угловой коэффициент (-4/3), а ее уравнение $y=-4x/3+c$. Параметр c можно найти из условия прохождения прямой AB через вершину B(10;5): $5=-4/3\cdot 10+c \Leftrightarrow c=55/3$. Итак, уравнение стороны AB имеет вид $y=-4x/3+55/3$. Вершину A найдем как пересечение сторон AB и AD: $\begin{cases} y=-4x/3+55/3 \\ y=2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow$ A(7;9), откуда длины сторон $AB=\sqrt{(10-7)^2+(5-9)^2}=5$, $BD=2\cdot 5=10$. Касательная AB перпендикулярна диаметру BD, поэтому $S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BD=$ $=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=25$. В силу симметрии $S_{ABCD}=2\cdot S_{ABD}==2\cdot 25=50$.

Ответ: $S_{ABCD}=50$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 18.

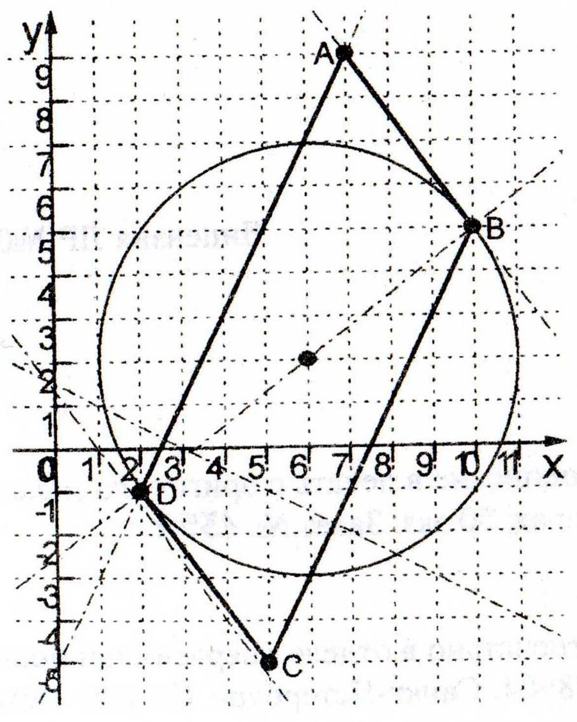

Рис. 18.

СОДЕРЖАНИЕ

Волкова Наталия Александровна
Сахаров Вадим Юрьевич
Абитуриенту–2000. Тренировочные варианты
Учебное пособие

Лицензия ЛР №040815 от 22.05.1997 г.

Подписано в печать с оригинала-макета 28.04.2000. Усл.печ .л. 1,9.
Тираж 50 экз. Заказ № 1354.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИ химии СПбГУ.
198904, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 2.