

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. А. КУДРЯВЦЕВ, А. В. РАДИОНОВ

ВВЕДЕНИЕ В КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ
РИСК-МЕНЕДЖМЕНТ

Учебник



ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 338.054.23+519.21

ББК 65.050+22.172

К89

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. *В. П. Чернов* (С.-Петербург. гос. экон. ун-т), д-р физ.-мат. наук, проф. *Н. В. Хованов* (С.-Петербург. гос. ун-т)

*Рекомендовано к печати
Учебно-методической комиссией экономического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Кудрявцев А. А., Радионов А. В.

К89 Введение в количественный риск-менеджмент: учебник. — СПб.:

Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2016. — 192 с.

ISBN 978-5-288-05651-2

Настоящий учебник содержит материал по изучению количественных методов, применяемых в области управления рисками. Основное внимание уделяется вопросам оценки вероятностных распределений ущерба — как индивидуального, так и совокупного, для портфеля рисков в целом. В этом контексте подробно рассматриваются такие аспекты, как анализ стохастических зависимостей и эффекты, вызываемые неоднородностями статистических выборок, а также поведение максимумов и минимумов случайных величин. Необходимость учета подобных аспектов при решении практических проблем экономики и бизнеса часто затрудняют применение стандартных статистических методов. Кроме того, в книге дается введение в теорию количественной оценки риска, являющейся основой экономико-математического моделирования в области управления рисками.

Для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в вопросах управления рисками или в области экономико-математического моделирования, а также для всех интересующихся указанными проблемами.

ББК 65.050+22.172

ISBN 978-5-288-05651-2

© Санкт-Петербургский
государственный
университет, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----------|
| Введение | 3 |
| Глава 1. Распределение ущерба | 5 |
| 1.1. Моделирование рисков | 6 |
| 1.1.1. Роль и место математических моделей при управлении рисками | — |
| 1.1.2. Этапы построения моделей рискованных ситуаций | 7 |
| 1.1.3. Риски моделирования | — |
| 1.2. Распределение ущерба как модель | 9 |
| 1.2.1. Простейшее представление о распределении ущерба | — |
| 1.2.2. Учет информации об отсутствии ущерба | 11 |
| 1.3. Краткий обзор распределений, подходящих для моделирования ущерба | 13 |
| 1.3.1. Типичные распределения размера ущерба | 14 |
| 1.3.2. Преобразование распределений ущерба | 16 |
| 1.3.3. Экспоненциальный класс распределений | 18 |
| 1.4. Статистическое оценивание параметров распределения ущерба | 22 |
| 1.4.1. Общая характеристика процедур статистического оценивания параметров распределения | — |
| 1.4.2. Метод наименьших квадратов | 23 |
| 1.4.3. Метод максимального правдоподобия | 24 |
| 1.4.4. Методы, основанные на численных характеристиках распределений | 25 |
| 1.4.5. Особенности статистического оценивания скачка в нулевой точке | — |
| 1.5. Типовые задачи по распределениям ущерба | 26 |
| 1.6. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки | 32 |
| Глава 2. Меры риска | 34 |
| 2.1. Постановка задачи измерения риска | 35 |
| 2.1.1. Необходимость использования численных характеристик риска | — |
| 2.1.2. Субъективный и объективный подходы к измерению риска | — |
| 2.2. Субъективный подход к измерению риска | 37 |
| 2.2.1. Общая характеристика субъективного подхода к измерению риска | — |
| 2.2.2. Теория ожидаемой полезности | 38 |
| 2.2.3. Теория ожидаемой полезности и портфельная теория Марковица | 39 |
| 2.3. Объективный подход к измерению риска | 41 |
| 2.3.1. Общая характеристика объективного подхода к измерению риска | — |
| 2.3.2. Измерение риска в портфельных теориях | 42 |
| 2.3.3. Подходы к измерению риска по портфелю рисков в целом | 44 |
| 2.3.4. Построение меры риска в зависимости от требуемых свойств | 47 |
| 2.4. Аксиоматический подход к выбору меры риска | — |
| 2.4.1. Общий обзор возможных свойств меры риска | — |
| 2.4.2. Формальное обоснование использования когерентных мер риска | 50 |
| 2.4.3. Примеры когерентных мер риска | 52 |
| 2.4.4. Когерентные меры риска как супремум математических ожиданий | 53 |

| | |
|--|-----------|
| 2.5. Рисковый капитал | 53 |
| 2.5.1. Место рискового капитала в современном риск-менеджменте | — |
| 2.5.2. Рисковый капитал для нормально распределенных случайных величин ... | 54 |
| 2.5.3. Параметры рискового капитала | — |
| 2.5.4. Свойства рискового капитала | 55 |
| 2.5.5. Рисковый капитал и субаддитивность | — |
| 2.5.6. Рисковый капитал в актуарных приложениях | 57 |
| 2.5.7. Недостатки рискового капитала | — |
| 2.5.8. Использование рискового капитала для определения требований к капиталу | 58 |
| 2.6. Статистическое оценивание рискового капитала | 59 |
| 2.6.1. Метод исторической имитации | — |
| 2.6.2. Метод оценки рискового капитала на основе априорных распределений ... | 60 |
| 2.6.3. Метод параметрического оценивания рискового капитала | — |
| 2.6.4. Оценка рискового капитала с помощью метода Монте-Карло | — |
| 2.7. Условный рисковый капитал | 61 |
| 2.7.1. Понятие рискового капитала | — |
| 2.7.2. Когерентность рискового капитала | 62 |
| 2.7.3. Условный рисковый капитал для нормального распределения | 63 |
| 2.7.4. Другие примеры условного рискового капитала | 65 |
| 2.8. Типовые задачи по измерению риска | 66 |
| 2.9. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки | 68 |
| Глава 3. Портфель рисков | 69 |
| 3.1. Портфель рисков как объект моделирования | 70 |
| 3.1.1. Необходимость управления портфелем рисков | — |
| 3.1.2. Изменение рисков во времени | 71 |
| 3.2. Многомерные случайные величины | 72 |
| 3.2.1. Понятие многомерной случайной величины | — |
| 3.2.2. Характеризация многомерной случайной величины | 73 |
| 3.2.3. Моменты многомерного распределения | 75 |
| 3.3. Стохастическая зависимость | 76 |
| 3.3.1. Понятия независимости и зависимости | — |
| 3.3.2. Положительная зависимость на квадранте и её обобщения | 77 |
| 3.3.3. Зависимости в терминах поведения условных распределений | 79 |
| 3.4. Измерение зависимости | 80 |
| 3.4.1. Общая характеристика измерения зависимости | — |
| 3.4.2. Измерение зависимости на основе ковариации | 81 |
| 3.4.3. Ранговая корреляция | 84 |
| 3.4.4. Оценка зависимости на хвосте | 85 |
| 3.5. Типовые задачи по оценке зависимости | 86 |
| 3.6. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки | 87 |
| Глава 4. Неоднородность рисков и факторы риска | 88 |
| 4.1. Общая характеристика неоднородных портфелей рисков | 89 |
| 4.1.1. Неоднородность портфеля рисков | — |
| 4.1.2. Перекрестное субсидирование и неблагоприятный отбор рисков | 90 |
| 4.2. Смесь распределений как модель ущерба по неоднородной группе рисков | 91 |
| 4.2.1. Понятие смеси распределений | — |
| 4.2.2. Формула Байеса | 92 |
| 4.2.3. Смеси распределений для моделирования неоднородности | 93 |
| 4.3. Факторы риска | 98 |
| 4.3.1. Понятие факторов риска | — |
| 4.3.2. Основные этапы анализа факторов риска | 99 |
| 4.3.3. Подготовительный этап | 100 |
| 4.3.4. Отбор ковариат | 102 |
| 4.3.5. Согласование результатов анализа с политикой управления рисками | 103 |
| 4.3.6. Использование полученных оценок для принятия управленческих решений | 105 |

| | |
|--|------------|
| 4.4. Общая характеристика статистических процедур анализа факторов риска | 105 |
| 4.4.1. Многомерная классификация при исследовании факторов риска | — |
| 4.4.2. Анализ зависимости при исследовании факторов риска | 107 |
| 4.5. Типовые задачи | 110 |
| 4.5.1. Типовые задачи по неоднородности рисков | — |
| 4.5.2. Типовые задачи по факторам риска | 116 |
| 4.6. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки | 120 |
| Глава 5. Совокупный ущерб | 122 |
| 5.1. Модель индивидуального риска | 123 |
| 5.1.1. Постановка модели и оценка распределения совокупного ущерба | — |
| 5.1.2. Моменты распределений случайных величин для случая однородных рисков | 126 |
| 5.1.3. Особенности модели индивидуального риска для неоднородных портфелей | — |
| 5.2. Модель коллективного риска | 128 |
| 5.2.1. Постановка модели и моменты совокупного ущерба | — |
| 5.2.2. Распределение числа неблагоприятных событий | 130 |
| 5.2.3. Связь с моделью индивидуального риска | 132 |
| 5.3. Неоднородность в модели коллективного риска | 133 |
| 5.3.1. Число неблагоприятных событий в модели коллективного риска для неоднородных портфелей | — |
| 5.3.2. Переход к однородному портфелю | 135 |
| 5.3.3. Сложно-пуассоновская аппроксимация модели индивидуального риска | 137 |
| 5.4. Типовые задачи по распределениям ущерба | 138 |
| 5.4.1. Задачи по модели индивидуального риска | — |
| 5.4.2. Задачи по модели коллективного риска | 146 |
| 5.5. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки | 151 |
| 5.5.1. Упражнения по модели индивидуального риска | — |
| 5.5.2. Упражнения по модели коллективного риска | — |
| Глава 6. Распределения многомерных случайных величин ущерба | 153 |
| 6.1. Многомерное нормальное распределение | 154 |
| 6.1.1. Особенности применения многомерного нормального распределения | — |
| 6.1.2. Общие сведения о многомерном нормальном распределении | — |
| 6.2. Иные типы многомерных распределений | 157 |
| 6.2.1. Сложности построения многомерных распределений, отличных от многомерного нормального | — |
| 6.2.2. Распределения, порождаемые многомерным нормальным распределением | 161 |
| 6.2.3. Класс эллиптических распределений | 162 |
| 6.3. Копулы | 163 |
| 6.4. Типовые задачи по многомерным распределениям ущерба | 167 |
| 6.5. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки | 171 |
| Глава 7. Теория экстремальных значений | 172 |
| 7.1. Постановка задачи оценки экстремальных ущербов | 173 |
| 7.1.1. Причины необходимости отдельного изучения экстремальных ущербов | — |
| 7.1.2. Краткая характеристика методов работы с экстремальными значениями | 174 |
| 7.2. Метод анализа распределения максимального ущерба за период | 175 |
| 7.2.1. Формальное описание метода анализа максимального ущерба | — |
| 7.2.2. Теоретическое применение теоремы Фишера—Типпета | 176 |
| 7.2.3. Классификация распределений по тяжести хвоста | — |
| 7.2.4. Достоинства и недостатки метода анализа максимального ущерба | 178 |
| 7.2.5. Распределение максимума из случайного числа случайных величин | — |
| 7.3. Метод анализа распределения превышения заданного порога | 179 |
| 7.3.1. Формальное описание метода | — |
| 7.3.2. Теоретическое применение теоремы о предельном поведении превышения порога | 180 |

| | |
|--|-----|
| 7.3.3. Достоинства и недостатки метода анализа превышения заданного порога . | 181 |
| 7.3.4. Анализ распределения числа превышений заданного порога..... | — |
| 7.4. Статистическое оценивание обобщенных распределений экстремальных значений и обобщенных распределений Парето | 182 |
| 7.4.1. Статистическое оценивание обобщенных распределений экстремальных значений | — |
| 7.4.2. Статистическое оценивание обобщенных распределений Парето | 183 |
| 7.4.3. Оценка параметра ξ методом Хилла..... | 184 |
| 7.5. Типовые задачи по теории экстремальных значений | — |
| 7.6. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки..... | 185 |
| Литература..... | 186 |

ВВЕДЕНИЕ

Управление рисками — быстро развивающаяся область экономики и менеджмента. Это связано как с осознанием важности учета риска и неопределенности при принятии управленческих решений, так и с быстрым расширением арсенала инструментов, позволяющих обосновывать подобные решения. Методы управления рисками проникают во всё новые и новые области. Более конкурентоспособными и востребованными становятся те нововведения, технологии и продукты, которые обеспечивают меньшую степень риска. В последние годы появляется всё больше и больше методов, приемов и подходов к исследованию в этой сфере.

Центральное место в таком наборе инструментов управления рисками занимает анализ механизма возникновения неблагоприятных событий и порождаемый ими ущерб. Тот факт, что ущерб иногда связан с возможностью получения доходов, не отменяет необходимости анализа финансовых и иных потерь. При этом природа ущерба и отраслевая принадлежность носителя риска (банки, страховые компании, промышленные предприятия и т. д.) часто представляют собой лишь уточняющие факторы. Такая точка зрения позволяет создавать универсальный инструментарий управления рисками.

Особую роль в управлении рисками играют методы экономико-математического моделирования, которые позволяют сопоставлять различные гипотетические ситуации, отражающие последствия реализации различных сочетаний рисков. Практическое применение данных моделей требует развития подходящих (в ряде случаев довольно специальных) статистических методов. Подобное представление служит важной основой для обоснования соответствующих управленческих решений. С учетом этого можно говорить о необходимости разработки специального направления в рамках управления рисками, которое должно заниматься экономико-математическим инструментарием поддержки принятия решений. Такое направление принято называть количественным риск-менеджментом.

Значительное внимание в настоящем учебнике уделяется таким ключевым вопросам, как анализ зависимостей и измерение рисков, а также поведение максимумов и минимумов случайных величин. Эти вопросы в смежных областях экономико-математического моделирования рассматриваются не так подробно и считаются особым предметом количественного риск-менеджмента. За последние 10–15 лет в указанных областях достигнут значительный прогресс, а управление рисками становится всё более математизированной дисциплиной, что обуславливает актуальность появления такого учебника. В его основу положена дисциплина, которая читается авторами магистрантам второго курса программы «Математические и инструментальные методы экономики» в Санкт-Петербургском государственном университе-

те. Хотя представленный материал является введением в данную сферу и отражает основные направления развития количественного риск-менеджмента, авторы постарались включить в него новые научные результаты. Данная дисциплина (и настоящий учебник) в целом соответствует содержанию подобных дисциплин, читаемых в ведущих университетах мира.

На основе учебника можно организовать чтение дисциплин разной длительности за счет изменения состава предлагаемого материала и степени подробности его изложения. Последовательность изложения рекомендуется менять в ограниченных пределах. Каждая глава снабжена разделом, содержащим решения типовых задач, которые можно использовать как для практических занятий по дисциплине, так и для самостоятельной работы по теме. Для закрепления материала следует использовать упражнения, расположенные после каждой главы.

Для полного понимания проблем, изложенных в учебнике, нужно иметь представление об управленческих аспектах риск-менеджмента, а также о теории вероятностей и математической статистики. При этом в качестве желательного, но не обязательного условия освоения материала можно указать опыт применения экономико-математических моделей и статистических методов.

Главы 1, 3, 4, 5 и 6 написаны А. А. Кудрявцевым, главы 2 и 7 — А. В. Радионым.

Глава 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УЩЕРБА

Моделирование рискованных ситуаций основано на возможности вероятностного описания процесса возникновения ущерба, это «сердце» любого количественного описания риска. Сложность такого описания может быть разной. Одни модели являются детализированными, формализованно представляющими механизм возникновения ущерба и воспроизводящими структуру такого механизма. Другие модели могут быть достаточно агрегированными, отражающими только функциональную связь между отдельными факторами и размером ущерба. Наиболее распространенный вариант моделей последнего типа — вероятностное распределение ущерба. Популярность таких моделей связана с их относительной простотой и относительной легкостью статистического оценивания.

Цель данной главы состоит в изложении особенностей моделирования индивидуального ущерба с помощью вероятностных распределений. В связи с этим подробно рассмотрены типичные распределения ущерба, а также методы конструирования дополнительных типов распределений. Кроме того, даются статистические основы подгонки распределений ущерба.

После изучения материала вы узнаете:

- в чем сущность количественного риск-менеджмента;
- что такое модель рискованной ситуации;
- какие риски возникают в процессе моделирования;
- каковы особенности построения моделей рискованных ситуаций;
- что такое распределение ущерба;
- чем отличается распределение чистых рисков от распределения спекулятивных рисков;
- какие особенности имеет распределение ущерба;
- как в распределении ущерба учитывается информация об отсутствии ущерба;
- какие типы распределений чаще всего используются для моделирования размера индивидуального ущерба;
- как конструировать дополнительные типы распределения ущерба;
- что такое экспоненциальный класс распределений;
- каковы особенности статистической оценки распределений ущерба;
- какие методы для этого применяются.

Ключевые слова: количественный риск-менеджмент, модель рискованной ситуации, распределение ущерба, спекулятивные риски, чистые риски, распределение ущерба, нормальное распределение, логнормальное распределение, экспоненциальное распределение, гамма-распределение, распределение Вейбулла, распределение Парето, бета-распределение, экспоненциальный класс распределений.

1.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКОВ

1.1.1. Роль и место математических моделей при управлении рисками

При управлении рисками часто необходимо сравнивать реальные ситуации с гипотетическими (что было бы, если бы всё пошло по-другому). Это резко усложняет анализ рискованных ситуаций, так как требует основы для изучения и измерения того, чего не было. В настоящее время для описания таких гипотетических ситуаций нет иного пути, кроме использования математических моделей, называемых *моделями рискованных ситуаций*. Это представляет собой основу для *количественного риск-менеджмента*. Его сущность состоит в применении экономико-математических моделей для прогнозирования ситуаций, характеризующихся риском и неопределенностью, и обоснования соответствующих управленческих решений.

Модель — упрощенное описание реального объекта или процесса, которое сосредоточивается на важных для исследователя свойствах и игнорирует те аспекты, которые представляются исследователю несущественными. Основная сложность моделирования состоит именно в том, чтобы выяснить, какие свойства считать важными, а какие — нет. Верное описание важных свойств обеспечивает адекватность модели, а правильный выбор второстепенных, игнорируемых свойств помогает в достаточной степени упростить подобное представление. Модель должна служить инструментом принятия решений, т. е. должна прояснять для лица, принимающего решение, как может развиваться процесс, какие исходы будут иметь место, и подсказывать различные действия (например, по предотвращению ущерба).

Наиболее важным классом моделей, используемых в управлении риском, являются математические модели. Они позволяют описывать существенные стороны изучаемого процесса или явления в виде математических соотношений, а затем анализировать их с помощью соответствующего математического аппарата. Особенно важно применение математических моделей для прогнозирования альтернатив будущего развития. Именно это позволяет менеджеру численно оценить будущие последствия принимаемых решений.

Математические модели, используемые в управлении риском, отличаются большим разнообразием и различными возможностями. Такого понятия, как универсальная модель, не существует. Множественность типов рисков и разнообразие механизмов их возникновения делает это невозможным. В разных ситуациях мы будем использовать специфические инструменты (в данном случае — модели), ибо каждая модель по-своему уникальна, так как при ее построении следует отталкиваться от свойств самого объекта моделирования. Однако схожие ситуации позволяют нам применять аналогичные (если не одинаковые) инструменты: существуют некоторые общие подходы к моделированию (например, использование стохастических дифференциальных уравнений или другого математического аппарата). Если можно применить более или менее стандартный подход, то процесс моделирования будет проще (известны подходы к построению модели и получению решения).

В области количественного риск-менеджмента наиболее распространены теоретико-вероятностные и статистические модели.

Для некоторых типов рисков широкое использование математических моделей является стандартным, для других — пока еще нет. Тем не менее происходит интенсивная наработка различных приемов моделирования, использующих особенности управления риском. Количественный риск-менеджмент становится отдельной «ветвью» управления рисками.

1.1.2. Этапы построения моделей рискованных ситуаций

Сам процесс моделирования часто осуществляется поэтапно. Это означает, что модель в процессе построения постоянно модифицируется в соответствии с требованиями того или иного этапа, среди которых можно назвать:

1. *Построение модели риска или процесса риска.* Данный этап предполагает построение базовой модели, отражающей механизм возникновения неблагоприятных ситуаций и/или прогнозирующей количество неблагоприятных событий и размер убытков, связанных с каждым из них. Это наиболее сложный этап в силу объема работы, которую предстоит проделать. Но подобная модель еще не может быть использована для целей управления риском, так как она дает только общее описание.

2. *Выделение численной оценки риска.* Далее в построенной модели риска следует выделить некоторый показатель, называемый *мерой риска*, который позволит численно оценивать риск в модели. Конкретное содержание этого показателя, правильный выбор которого будет определять эффективность результатов моделирования в целом, зависит от типа модели и особенностей ее построения.

3. *Моделирование инструментов управления риском.* Следующей модификацией модели является введение в нее разных вариантов противодействия неблагоприятным событиям, т. е. методов, или инструментов, управления риском. На основе сравнения мер риска для таких вариантов можно найти наиболее эффективный подход к управлению риском.

Конечно, предложенная схема во многом условна. Например, иногда мера риска и инструменты управления риском изначально встраиваются в исходную модель. Тем не менее выделение этих этапов полезно как логический алгоритм построения модели, пригодной для формирования рекомендаций по управлению риском.

1.1.3. Риски моделирования

Математические модели, используемые для целей управления риском, должны удовлетворять ряду требований. Это связано с тем, что модель используется как инструмент принятия решений в сфере бизнеса, т. е. на основе модели принимаются решения относительно финансовых средств, иногда достаточно больших. Естественно ожидать, что ошибочные решения в подобной ситуации должны быть по возможности исключены.

Такие требования, в частности, приводят к особой заботе об адекватности модели, что подразумевает исключение нескольких типов ошибок (рисков принятия решений). К ним можно отнести:

- *модельный риск* (неправильный тип модели, пропуск важных факторов риска и неверная формализация). Этого риска можно избежать за счет большого числа качественных и количественных исследований механизма возникнове-

ния неблагоприятных событий. Такие исследования приводят к пониманию особенностей упомянутого механизма, степени существенности тех или иных его свойств, типа и характера взаимосвязей, а затем к построению моделей, позволяющей получить наиболее точный прогноз возможного будущего развития (иногда в форме возможных альтернатив). Понятно, что модельный риск особенно опасен для относительно новых областей, когда информации, подтверждающей обоснованность применения данного типа модели, еще недостаточно. Тем не менее указанные исследования не снижают данный риск до нуля — возможны математические ошибки при получении решения или игнорирование важных факторов риска. Кроме того, могут иметь место и проблемы с использованием модели, в частности, при расчетах на компьютере (особенно при имитационном моделировании);

- *риск информационного обеспечения* (называемый также *статистическим*). Он включает в себя возникновение проблем информационного обеспечения, в первую очередь недостаточный объем наблюдений и/или низкий уровень доверия к используемым данным. Существенной проблемой может быть изменение экономических тенденций, снижающих ценность прошлой или аналогичной статистики. Данные, на которые опирается модель, являются не менее важным аспектом всего процесса моделирования, чем сама модель. Иногда проблемы информационного обеспечения приводят к изменению дизайна (математической формулировки) модели;
- *риск неправильной оценки параметров*. Какой бы точной и адекватной ни была модель, она даст неверные результаты, если параметры будут оценены неверно. При этом достаточно хорошее информационное обеспечение не дает гарантий того, что параметры будут определены верно, так как возможны ошибки оценивания — это проблемы калибровки модели. Среди примеров такого риска можно назвать: неправильные поправки, учитывающие изменение будущих тенденций (скажем, замедление или ускорение инфляции), неправильная интерпретация статистических выбросов (экстремальных значений), несогласованность оценок разных параметров и т. п.;
- *риск интерпретации результатов*, т. е. неверное понимание лицом, принимающим решения, результатов моделирования. Это связано с тем, что менеджеры часто не искушены в сложном математическом аппарате, используемом при построении моделей, так что они не всегда осознают точность и ограничение применения предлагаемых им рекомендаций. Более того, сам факт использования компьютеров может создавать у них иллюзии гарантированной обоснованности предлагаемого решения. Для исключения такого положения дел результаты моделирования должны быть адаптированы или приведены к единообразной точке зрения на риск, принятой в данной компании.

Возможность перечисленных типов ошибок означает, что построение моделей представляет собой довольно трудную задачу. Особенно много внимания уделяют модельному риску. Однако и другие типы риска не менее важны. Ключевой проблемой моделирования является то, что даже относительно длительный период успешного функционирования модели не гарантирует её адекватности в будущем, когда какой-нибудь вступивший в действие фактор не изменит характера её поведения.

1.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УЩЕРБА КАК МОДЕЛЬ

1.2.1. Простейшее представление о распределении ущерба

Под *распределением ущерба* понимают вероятностное распределение, увязывающее частоту возникновения и размер ущерба. Это наиболее простая модель, позволяющая количественно исследовать неопределенность величины ущерба в контексте управления рисками.

Анализ распределения ущерба удобно начать с упрощенной ситуации, когда во внимание принимается только та информация, которая касается уже возникшего ущерба. Такая постановка вопроса не учитывает следующее:

- данные по объектам — носителям риска, по которым ущерб не возникал;
- возможности неполноты сведений о возникновении ущерба;
- особенности механизма возникновения неблагоприятных событий, сопровождающихся ущербом;
- специфику изменения размера и структуры портфеля рисков.

По мере включения в анализ перечисленных факторов предлагаемая модель ущерба, представляющая собой случайную величину со специфическим вероятностным распределением, будет усложняться и пересматриваться. Однако для более глубокого понимания сложных моделей и соответственно «продвинутых» методов количественного риск-менеджмента необходимо начать с такой простейшей постановки.

Обсуждение экономико-математических моделей, используемых в контексте управления рисками, удобно начать с представления ущерба по отдельному риску как случайной величины. При этом очевидно, что характеристики ее распределения будут тесно связаны с особенностями механизма возникновения ущерба и исследование данных о размере ущерба будет ключевым фактором анализа рисков на данном этапе. Если имеется достаточно обширная статистика по совокупности однородных независимых рисков, то оценка распределения ущерба не выходит за рамки стандартных задач математической статистики¹.

Статистические данные о размере ущерба для оценки такого распределения могут быть достаточно легко получены специалистом по количественной оценке риска из соответствующих подразделений компаний — носителей риска. Для простейшего представления о распределении ущерба достаточно воспользоваться рутинными методами статистического оценивания параметров распределения, которые кратко охарактеризованы далее в п. 1.4. Иными словами, специфика процедуры оценивания заключается не в применяемых статистических методах, а в учете особенности данных. Поэтому важным является обсуждение видов распределений ущерба, встречающихся на практике, краткий обзор которых приведен в п. 1.3.

Как и в любой области моделирования, при построении модели ущерба необходимо опираться на особенности объекта моделирования. Соответственно тип распределения выбирается в зависимости от специфики проявления ущерба. Это означает, что для разных ситуаций будут предложены различные распределения ущерба.

¹Под стандартными задачами математической статистики здесь и далее понимается набор математических моделей, обычно излагаемых в университетских курсах статистики. Для моделей рискованных ситуаций часто требуются более продвинутые статистические подходы.

Если рассматриваемые риски — *спекулятивные*, т. е. такие, что могут генерироваться как ущерб, так и дополнительный доход, то распределение, очевидно, должно быть сосредоточено на всей числовой оси, или, по крайней мере, его носитель должен включать в себя положительные и отрицательные значения. При этом дополнительный доход интерпретируется как отрицательный ущерб. Это не означает, что подобное распределение должно быть симметричным, потому что дополнительный доход и ущерб могут вести себя по-разному.

Тем не менее при достаточно массовом процессе и не очень сильных зависимостях можно ожидать выполнения условий закона больших чисел и центральной предельной теоремы, приводящих к нормальному распределению. Иными словами, в количественном риск-менеджменте и финансовом моделировании оно, в большинстве случаев, встречается как предельное.

В частности, соответствующие условия близки тем, что имеют место на финансовых рынках при обеспечении их достаточной открытости, невысоких барьеров для выхода на подобные рынки и малого объема (в идеале — отсутствия) инсайдерской торговли. Именно по этой причине многие теоретические модели для финансовых рынков опираются на нормальное распределение или распределения, основанные на нем.

Если рассматриваемые риски являются *чистыми*, т. е. генерируют только ущерб, а дополнительный доход невозможен, то соответствующие распределения, очевидно, должны быть сосредоточены на положительной полуоси. Требование неотрицательности довольно сильно влияет на выбор распределений (в частности, нормальное распределение не подходит по этой причине для моделирования индивидуального ущерба).

Иногда для некоторых приложений важно подчеркнуть, что ущерб — отрицательная величина, которая «изымается» у носителя риска. В таком случае используют случайную величину $-Y$, где Y — размер ущерба (неотрицательная случайная величина). Соответственно функция распределения $F_{-Y}(y)$, $y < 0$, представляет собой зеркально отраженную функцию дожития $1 - F_Y(-y)$. Иными словами, распределение, сосредоточенное на положительной полуоси, является базовым и для такого подхода.

Если известна детерминированная величина максимально возможного ущерба² M , например стоимость застрахованного имущества, то распределение будет сосредоточено на отрезке $[0; M]$. Тем не менее в ряде случаев на практике все равно используется распределение, сосредоточенное на всей положительной полуоси, что может быть, в частности, связано с особыми преимуществами применения соответствующего распределения. Тогда при оценивании параметров распределения случайной величины ущерба Y возникает дополнительное требование, связанное с тем, что $P[Y > M]$ должна быть достаточно мала, чтобы не сильно исказить результаты расчетов.

Для однородных совокупностей распределение ущерба будет унимодальным (одновершинным). Кроме того, на практике оно обычно имеет положительную асимметрию, так что медиана и мода распределения сдвинуты влево относительно мате-

²В страховой практике она часто обозначается аббревиатурой MPL.

матического ожидания. Иными словами, плотность $f(x)$ будет иметь вид, соответствующий одной из форм, которые изображены на рис. 1.1.

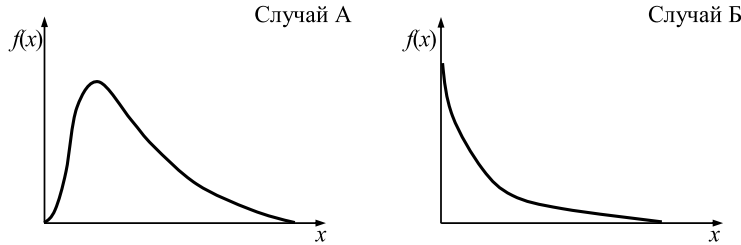


Рис. 1.1. Типичные плотности распределения ущерба.

Примечание: случай А: распределение с ненулевой модой; случай Б: распределение с нулевой модой.

На практике встречается еще одна важная особенность — «тяжелые хвосты». Этим термином обозначается ситуация, когда плотность распределения стремится к оси абсцисс медленнее, чем плотность экспоненциального распределения³. Такое поведение случайной величины объясняется возникновением ущерба «большого» размера с относительно высокой вероятностью. Поэтому для «подгонки» используются теоретические распределения специального вида, которые приведены в п. 1.3.

Альтернативным подходом к анализу подобных ситуаций является интерпретация совокупности данных как неоднородной, т. е. состоящей из ущерба «нормальной» величины и из ущерба «большого» размера. Методы учета неоднородности будут рассмотрены в главе 4.

1.2.2. Учет информации об отсутствии ущерба

Распределение ущерба, рассмотренное выше, не очень информативно для анализа рисков до возникновения неблагоприятного события, так как с его помощью моделируется размер ущерба при условии, что он заведомо будет иметь место. Поэтому такое распределение часто нельзя считать адекватной моделью ущерба с учетом того, что по значительной доле носителей риска ущерба не будет вовсе.

Риск-менеджеров в первую очередь интересует распределение ущерба и получаемые на его основе оценки до возникновения ущерба. Иными словами, их будет интересовать статистика как по тем объектам, по которым имел место ущерб, так и по тем носителям риска, по которым его не было. Поэтому долю объектов последней категории в портфеле можно рассматривать как вероятность отсутствия ущерба по одному наугад выбранному риску. Учет дополнительной информации о количестве случаев возникновения ущерба позволит использовать иную случайную величину X в качестве более адекватной модели ущерба. Она будет с ненулевой вероятностью принимать нулевое значение, отражающее событие «отсутствие ущерба».

³Иногда тяжелые хвосты определяют по отношению к нормальному распределению. В настоящем учебнике используется слабое определение, соответствующее практике оценки рисков.

Для увязки новой случайной величины с рассмотренной в предыдущем пункте необходимо ввести дополнительную индикаторную случайную величину I , равную 1, если ущерб возник, или 0 в противном случае. С ее помощью моделируется неопределенность, связанная с возникновением ущерба, которая на уровне портфеля рисков в целом сводится к неопределенности числа неблагоприятных событий. Тогда распределение случайной величины ущерба Y из п. 1.2.1 можно представить как условное распределение случайной величины X при условии $I = 1$.

Такой подход проясняет смысл новой случайной величины, которая отличается тем, что к носителю ее распределения добавлено еще одно событие. Это требует перенормировки вероятностной меры. Однако с математической точки зрения такое объяснение выглядит слишком громоздким, так как случайные величины X и I не являются независимыми: событие $\{X = 0\}$ эквивалентно событию $\{I = 0\}$.

С учетом того, что $X = 0$ с ненулевой вероятностью, распределение случайной величины ущерба X будет иметь скачок в точке 0 (рис. 1.2). Иными словами, если распределение ущерба Y является абсолютно непрерывным, то соответствующее ему «полное» распределение X будет смешанным.

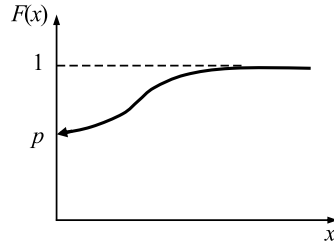


Рис. 1.2. Функция распределения ущерба со скачком в нулевой точке размером p .

Намного проще рассматривать распределение случайной величины Y как усеченное слева распределение случайной величины X , причем усечение состоит в исключении из пространства событий события $\{X = 0\}$, которому приписывается ненулевая вероятность. Таким образом,

$$F_Y(x) = \frac{F_X(x) - F_X(0+)}{1 - F_X(0+)}, x > 0,$$

где $F_X(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} F_X(x)$ — предел функции распределения справа в точке 0, равный ее скачку размером $P[X = 0] = p$. Тогда

$$F_Y(x) = \frac{F_X(x) - P[X = 0]}{P[X > 0]} = \frac{F_X(x) - p}{1 - p}, x > 0. \quad (1.1)$$

Тем не менее введение индикаторной случайной величины I может быть полезно при построении альтернативной модели. В частности, распределение ущерба, отражающее неопределенность факта возникновения и размера ущерба, можно представить как смесь усеченного распределения (ущерб имеет место) и вырожденного

распределения нулевого ущерба (ущерб не появился):

$$X = I \cdot Y + (1 - I) \cdot 0. \quad (1.2)$$

Такое представление также полезно для рассматриваемых в главе 5 моделей распределения совокупного ущерба (для портфеля рисков).

Однако в целях упрощения эту модель можно еще раз переформулировать, воспользовавшись тем, что отсутствие ущерба моделируется вырожденным распределением с нулевым значением:

$$X = I \cdot Y. \quad (1.3)$$

С учетом свойств индикаторной случайной величины I формулы (1.2) и (1.3) эквивалентны, но в отношении последней следует изменить систему предпосылок, несколько модифицировав модель. Прежде всего, будем рассматривать I и Y как независимые случайные величины. Формально говоря, это чуть более общая модель, но она приводит к тем же самым значениям моментов распределений, а проводить расчеты для нее удобнее.

В силу того что $p = P[X = 0]$, все три подхода дают одинаковое выражение для функции распределения ущерба:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ p + (1 - p)F_Y(x), & x > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для положительных значений x можно найти плотность:

$$f_X(x) = (1 - p)f_Y(x), \quad x > 0,$$

так что условие нормировки выполняется:

$$p + (1 - p) \int_0^{\infty} f_Y(x) dx = 1.$$

Оценка величины скачка размером p в нулевой точке будет базироваться на сопоставлении статистики об общем числе носителей риска и о количестве случаев возникновения ущерба. При отсутствии общей базы данных эффективное совместное использование такой информации может быть затруднено, что делает количественный анализ рисков сложным, замедляет его проведение и резко снижает его точность.

1.3. КРАТКИЙ ОБЗОР РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ПОДХОДЯЩИХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УЩЕРБА

Разнообразие ситуаций, связанных с наличием риска и неопределённости, велико. Механизмы возникновения ущерба также сильно различаются. Всё это приводит к тому, что разным практическим ситуациям адекватны различные типы распределений.

1.3.1. Типичные распределения размера ущерба

Как уже говорилось ранее, в финансовых приложениях популярно нормальное распределение, имеющее плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Его применение, как правило, является следствием предположений о массовости финансовых спекуляций, отсутствии инсайдерской торговли и относительно невысокой степени зависимости случайных величин, описывающих различные активы.

Если хочется сохранить симметричность распределения и ряд других важных свойств нормального распределения, но обеспечить более тяжёлые хвосты, то рассматривают один из элементов класса эллиптических распределений, имеющих плотность вида

$$f(x) = a g\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где a — нормирующая константа, а $g(\cdot)$ — некоторая функция, интеграл которой конечен. Частными случаями эллиптических распределений являются нормальное распределение, распределение Стьюдента и распределение Коши.

Часто в подобных моделях исследователя интересуют не сами колебания стоимости активов, а характеристики их прироста, т. е. неопределённость выносится в показатель степени экспоненты. Таким образом, появляется необходимость применения логнормального распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0. \end{cases}$$

При нарушении указанных условий и рассмотрении случайных величин, представляющих ситуации с чистым ущербом, нужны другие распределения, например с плотностями типа тех, которые представлены на рис. 1.1. Такие ситуации характерны для страховых приложений, а также для анализа нефинансовых рисков.

Для моделирования случайных величин ущерба Y с ненулевой модой (см. случай А на рис. 1.1) наиболее часто используются логнормальное и гамма-распределения (с параметром формы $\alpha > 1$). Плотность гамма-распределения определяется формулой

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Возможно применение и других типов распределений, но предпочтение, отдаваемое на практике именно этим распределениям, связано с тем, что они хорошо согласуются с теоретико-вероятностным инструментарием (например, с регрессионными моделями). При этом выбор логнормального распределения осуществляется не из-за его связи с нормальным, а из-за тяжести хвоста. В отличие от него хвост гамма-распределения сопоставим с хвостом экспоненциального распределения, т. е.