

Санкт-Петербургский государственный университет

В. И. Богатко, Е. А. Потехина

**О ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА
В СВЕРХЗВУКОВОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2020 г.

Рекомендовано учебно-методической комиссией
математико-механического факультета

Рецензенты: кандидат физ.-мат. наук, доцент Ю.Н. Ворошилова
(Санкт-Петербургский государственный университет),
д-р. физ.-мат. наук, профессор О.А. Аксенова
(Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ ВМА)

Богатко В.И., Потехина Е.А.

О поверхностях разрыва в сверхзвуковой газодинамике: Учеб. пособие / В.И. Богатко, Е.А. Потехина — СПб.: СПбГУ. 2020. 75 с. Библ. 7 назв.

В настоящем пособии излагаются математические основы теоретической газовой динамики в той части, которая касается возникновения в потоке газа поверхностей разрыва. Рассматриваются различные типы поверхностей разрыва. Подробно показано, как получаются условия, которым должны удовлетворять параметры течения газа при переходе через поверхности разрыва, скорость перемещения и скорость распространения поверхности разрыва, ударная адиабата, гипотеза сильных разрывов и ее свойства, а также неравенства, характеризующие ударные переходы.

Представленное пособие может быть использовано при подготовке бакалавров по направлению «Механика и математическое моделирование», а также специалистов по направлениям «Механика», «Фундаментальная математика и механика». Пособие предназначено для студентов старших курсов бакалавриата и специалитета механических отделений университетов и технических вузов с соответствующей математической подготовкой.

© В.И. Богатко, Е.А.Потехина
© Санкт-Петербургский
государственный университет

Предисловие

Газовая динамика это один из важнейших разделов гидромеханики *сжимаемой* жидкости. Одной из специфических особенностей газовой динамики является возможность появления в потоке газа особых поверхностей, при переходе через которые резко меняются газодинамические величины.

Эти поверхности, а точнее говоря, узкие слои, в которых происходят резкие изменения параметров газа, называют **поверхностями разрыва** или *скачками уплотнения*. Толщина этих слоёв несоизмерима мала по сравнению с характерными размерами явлений, изучаемых в газовой динамике. Поэтому такой подход, когда тонкий слой с большими градиентами параметров газа заменяется геометрической поверхностью нулевой толщины, оправдан.

Эти узкие слои или зоны больших градиентов моделируются бесконечно тонкими поверхностями разрыва гидродинамических параметров среды.

Отсюда следует, что в рассматриваемой модели течения газа становится важным анализ на непрерывность гидродинамических переменных, характеризующих состояние газового потока, и возникает необходимость следить за справедливостью уравнений и соотношений в различных областях течения.

При этом по обе стороны от поверхностей разрыва справедливы дифференциальные уравнения, а на самих поверхностях (при переходе через них) решение этих уравнений должно удовлетворять специальным соотношениям (условиям динамической совместности), вытекающим из основных законов сохранения механики.

В настоящем пособии излагаются математические основы теоретической газовой динамики в той части, которая касается возникновения в потоке газа поверхностей разрыва. Рассматриваются различные типы поверхностей разрыва.

Подробно показано, как из основных законов механики могут быть получены условия, которым должны удовлетворять параметры течения газа при переходе через поверхности разрыва. Приведен подробный вывод формул для определения скорости перемещения и скорости распространения поверхности разрыва, ударной адиабаты и гипоцисоиды сильных разрывов и ее свойства, отдельно выделены неравенства, характеризующие ударные переходы.

Целью настоящего учебного пособия является не только ознакомление студентов старших курсов с этим разделом газовой динамики, но и обучение навыкам аналитических исследований сложных физических явлений.

Материал, содержащийся в пособии, в течение 10 лет используется при чтении лекций по спецкурсу «Газовая динамика», для студентов специалитета и бакалавриата математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Пособие предназначено для студентов старших курсов бакалавриата и специалитета механических отделений университетов и технических вузов с соответствующей математической подготовкой.¹

¹ Сведения об авторах:

Богатко Всеволод Иванович — кандидат физ.-мат. наук, доцент Санкт-Петербургского государственного университета,
Потехина Елена Александровна — кандидат физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник Санкт-Петербургского государственного университета.

О ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА В СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА

Так как газовая динамика изучает движения сжимаемой жидкости, то необходимо учитывать явления, связанные с переменностью плотности.

Газовая динамика изучает как стационарные движения сжимаемой среды, так и нестационарные.

Иногда говорят, что стационарная газовая динамика – это гидродинамика больших скоростей и малой пространственной протяженности изучаемых явлений.

Наличие больших скоростей порождает совершенно специфическое явление, резко отличающее газовую динамику от иных областей применения механики сжимаемой жидкости, а именно образование поверхностей, при переходе через которые давление, а также и другие гидродинамические элементы потока претерпевают разрыв непрерывности.

Эти поверхности разрыва могут как перемещаться вместе с частицами движущейся среды, так и распространяться в пространстве, перемещаясь от одних частиц к другим.

1. Скорость распространения поверхности разрыва.

В газовой динамике различают две категории поверхностей разрыва:

1. поверхности, при переходе через которые **претерпевают разрыв непрерывности** изучаемые нами функции, то есть гидродинамические параметры потока: давление p , плотность ρ , температура T и скорость частиц газа v , называются поверхностями **сильного разрыва**.

Например, баллистическая волна на носу снаряда, или как часто говорят, головная ударная волна. Другим примером может служить ударная волна, которая возникает при взрыве различной природы (технической, бытовой или военной).

Очевидно, что поверхность сильного разрыва в действительности не является геометрической поверхностью. На самом деле – это узкий слой газа с резкими изменениями гидродинамических параметров среды.

Эта зона изменения функций имеет ширину порядка длины свободного пробега молекулы. Так что в задачах газовой динамики толщина этих слоёв несоизмеримо мала по сравнению с характерными размерами явлений и поэтому такая схематизация оправдана;

2. поверхности, при переходе через которые **претерпевают** разрыв непрерывности какие-нибудь производные от гидродинамических величин, называются поверхностями **слабого разрыва**.

Например, фронт звуковой волны.

Будем считать, что поверхность разрыва существует и она только одна, то есть она не расслаивается.

Пусть существует поверхность разрыва $\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0$, которая делит пространство на две части.

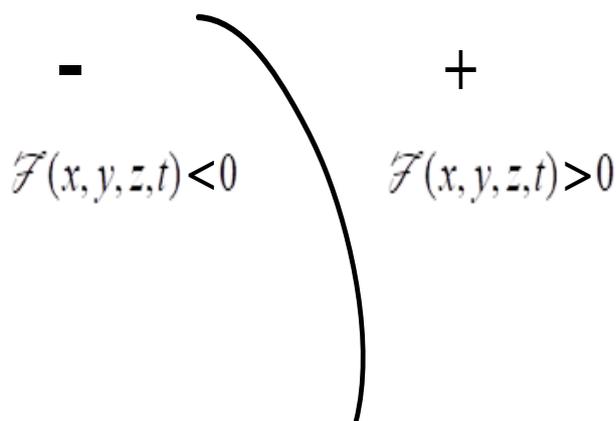


Рис. 1

Ту часть, где $\mathcal{F} < 0$, назовём отрицательной областью, а ту часть пространства, где $\mathcal{F} > 0$ назовём положительной. Очевидно, что такое обозначение будет весьма условным, так как при умножении уравнения поверхности на (-1) поверхность не изменится, а названия областей поменяются местами.

Обозначим эту поверхность через $\Sigma(t)$, так как она перемещается в пространстве и при этом, естественно, может деформироваться и изменять свою форму.

Рассмотрим некоторую величину $b = b(x, y, z, t)$. Предельное значение этой функции четырёх переменных при подходе к нашей поверхности $\Sigma(t)$ со стороны отрицательной области обозначим через b_- , а значение, к которому стремится эта функция, если приближаться к поверхности $\Sigma(t)$, оставаясь всё время в положительной области, обозначим через b_+ .

Разность этих значений обозначают обычно следующим образом:

$$b_+ - b_- = [b]$$

и называют **разрывом** или *скачком* функции b на поверхности Σ .

Сама поверхность Σ называется **поверхностью разрыва**. Если величина $b(x, y, z, t)$ непрерывна при переходе через поверхность Σ , то

$$[b] = 0.$$

Поверхность $\Sigma(t)$, перемещаясь в пространстве, в разные моменты времени будет занимать различные положения. При этом скорость её перемещения в пространстве будет существенно зависеть от направления, в котором мы будем её определять. В общем случае естественно характеризовать такое движение поверхности в пространстве её скоростью перемещения в направлении нормали в каждой точке (x, y, z, t) .

Вычислим скорость, с которой рассматриваемая поверхность $\Sigma(t)$ в некоторой своей точке с координатами (x, y, z) в момент времени t будет удаляться в направлении нормали к поверхности от своего положения в момент времени t .

Для этого возьмём в пространстве произвольную точку $M(x, y, z)$, которая в момент времени t находится на поверхности Σ . Проведём в $(\cdot) M$ нормаль к поверхности $\Sigma(t)$ в сторону положительной области.

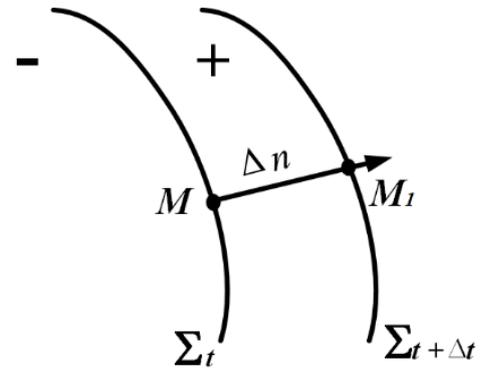


Рис. 2

Через время Δt наша поверхность займет другое положение в пространстве $\Sigma(t + \Delta t)$.

Нормаль, проведённая из точки $M(x, y, z)$ к поверхности $\Sigma(t)$, пересечёт поверхность $\Sigma(t + \Delta t)$ в некоторой точке $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Это расстояние MM_1 , которое поверхность за время Δt прошла вдоль нормали, проведённой из точки M , обозначим через Δn .

Определение 1. Будем называть $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} \equiv D$ скоростью перемещения поверхности разрыва.

Вычислим величину скорости перемещения поверхности разрыва в зависимости от её формы.

Так как $(\cdot) M_1$ в момент времени $(t + \Delta t)$ находится на поверхности разрыва, то $\mathcal{F}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) = 0$.

Разложим это выражение в ряд Тейлора в окрестности точки $M(x, y, z)$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) = \\ & = \mathcal{F}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \Delta t + \\ & + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta z^2) + O(\Delta t^2) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $(\cdot)M$ и $(\cdot)M_1$ находятся на поверхности разрыва в моменты времени t и $t + \Delta t$ соответственно, отсюда получим

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \Delta t + \quad (1)$$

$$+ O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta z^2) + O(\Delta t^2) = 0$$

Из простых геометрических соображений следует, что

$$\Delta x = \Delta n \cos(n, \wedge x)$$

$$\Delta y = \Delta n \cos(n, \wedge y) \quad (2)$$

$$\Delta z = \Delta n \cos(n, \wedge z)$$

С помощью формул (2) выражение (1) можно преобразовать следующим образом (подставим (2) и вынесем за скобки величину Δn):

$$\Delta n \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \cos(n, \wedge x) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \cos(n, \wedge y) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \cos(n, \wedge z) \right\} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \Delta t + O(\Delta n^2)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что направляющие косинусы нормали к поверхности $\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0$ следующим образом выражаются через её форму

$$\cos(n, \wedge x) = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}}$$

$$\cos(n, \wedge y) = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}}$$

$$\cos(n, \wedge z) = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}}$$

Используя эти выражения, после несложных преобразований получим

$$\frac{\Delta n}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}} \{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2\} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \Delta t + O(\Delta n^2).$$

Теперь, исходя из определения **скорости перемещения** поверхности разрыва, получим, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$D = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}} = -\frac{\mathcal{F}_t}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}}. \quad (3)$$

Следует отметить, что D — величина чисто геометрическая и никак не связана со свойствами и движением среды, в которой распространяется поверхность разрыва.

Но поскольку речь идёт о перемещении поверхности в движущейся среде, то представляет интерес и другая величина: та скорость, с которой поверхность разрыва $\Sigma(t)$ перемещается от одной жидкой частицы к другой.

Если бы среда покоилась, то это была бы уже рассмотренная нами *скорость* D . Но в движущейся среде это не так.

Поэтому введём **скорость распространения** поверхности разрыва. Чтобы найти эту скорость в каждой точке M поверхности Σ достаточно вычесть из скорости перемещения поверхности нормальную составляющую вектора скорости частиц жидкости в этой точке.

Определение 2. Величина $\theta = D - v_n$ называется скоростью распространения поверхности разрыва.

Речь идёт о распространении поверхности от одних частиц к другим.

Здесь v_n — проекция вектора скорости частиц газа на нормаль к поверхности разрыва

$$v_n = \bar{v} \cdot \bar{n} = v_x \cos(n, \wedge x) + v_y \cos(n, \wedge y) + v_z \cos(n, \wedge z) =$$

$$= \frac{v_x \frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}} + \frac{v_y \frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}} + \frac{v_z \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}}.$$

Тогда для скорости распространения поверхности разрыва нетрудно получить формулу

$$\theta = - \frac{\frac{dF}{dt}}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2 + \mathcal{F}_z^2}} \quad (4)$$

Из определения скорости распространения поверхности разрыва следует, что она может претерпевать разрыв на поверхности, то есть

$$\theta_+ \neq \theta_-.$$

Из той же формулы для скорости распространения поверхности разрыва имеем

$$D = \theta + v_n. \quad (5)$$

Таким образом, (вспоминая теоретическую механику) приходим к известному правилу: абсолютная скорость **перемещения** поверхности D (в пространстве) складывается из относительной скорости θ (скорости **распространения** поверхности по частицам) и переносной скорости v_n (нормальной к поверхности компоненты скорости частиц газа).

Поверхность разрыва, для которой $\theta = 0$, называется **стационарной**.

Такая поверхность не распространяется по частицам и отделяет всегда одну массу газа от другой.

Из формулы (5) следует, что на стационарной поверхности разрыва величина v_n не терпит разрыва, она непрерывна $\rightarrow [v_n] = 0$.

На таких поверхностях может претерпевать разрыв непрерывности касательная составляющая вектора скорости частиц газа.

Примером таких поверхностей могут служить:

- а) *фронтальная поверхность* в метеорологии, разделяющая области теплого и холодного воздуха;
- б) *свободная поверхность струи* (из водопроводного крана или из сопла ракетного двигателя);
- в) поверхность реки.

В этих случаях поверхность перемещается вместе с частицами движущейся среды $D = v_n$ (она не распространяется по частицам газа).

В нестационарной газовой динамике стационарные поверхности разрыва иногда называются **контактными**, так как они располагаются на одних и тех же частицах.

На контактной поверхности сильного разрыва могут претерпевать разрыв непрерывности *плотность, температура* и *касательная к поверхности разрыва составляющая* вектора скорости частиц среды. На ней $v_n = D$, а так как D не рвётся, ибо это чисто геометрическая характеристика поверхности, то и $[v_n] = 0$.

Примером контактной поверхности сильного разрыва может служить поверхность, отделяющая при взрыве продукты детонации (продукты, образовавшиеся при разложения взрывчатого вещества) от окружающей среды.

2. Уравнения гидродинамики в интегральной форме

В газовой динамике приходится учитывать появление особых поверхностей, при переходе через которые резко меняются гидродинамические величины.

Эти поверхности, а точнее говоря узкие слои, в которых происходят резкие изменения параметров газа, называют поверхностями разрыва гидродинамических параметров или скачками уплотнения. Толщина этих слоёв несоизмеримо мала по сравнению с характерными размерами явлений, изучаемых в газовой

динамике, и поэтом такую схематизацию, при которой этот узкий слой рассматривается как геометрическая поверхность, можно считать оправданной.

При такой схематизации важен анализ на непрерывность гидродинамических величин, характеризующих состояние газового потока, и необходимо следить за справедливостью тех или иных уравнений и соотношений в различных областях течения.

Наличие таких поверхностей разрыва в изучаемой сжимаемой среде заставляет осторожнее подойти к выводу уравнений гидродинамики в дифференциальной форме, так как обычно при этом предполагается, что гидродинамические элементы непрерывны.

Поэтом сначала запишем уравнения газовой динамики в форме интегралов.

Рассмотрим некоторый произвольный жидкий объём (τ) , ограниченный поверхностью S . Пусть \bar{n} внешняя нормаль к поверхности S . Выберем два произвольных момента времени t_1 и t_2 .

Запишем **три** закона сохранения: массы, количества движения и энергии.

1) Закон сохранения массы

$$\left(\int_{(\tau)} \rho d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} \rho d\tau \right)_{t=t_1} = 0.$$

Это условие того, что масса жидких частиц, заполняющих данный объём, остается неизменным с течением времени.

2) Закон сохранения количества движения

$$\left(\int_{(\tau)} \rho \bar{v} d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} \rho \bar{v} d\tau \right)_{t=t_1} = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{(S)} p \bar{n} ds \right) dt.$$

В формуле отсутствуют массовые силы, так как по сформулированным выше допущениям их действием пренебрегаем.

Здесь

$$\int_{(S)} p \bar{n} ds \text{ — внешние силы, действующие на объём } (\tau),$$

$$\left(\int_{(S)} p \bar{n} ds \right) dt \text{ — импульс этой силы в единицу времени.}$$

Изменение количества движения жидкой частицы за промежуток времени $t_2 - t_1$ равно импульсу внешних сил, действующих за это время на частицу.

3) Закон сохранения энергии

Изменение кинетической и внутренней энергии жидкой частицы равно работе внешних сил, приложенных к частице.

$$\begin{aligned} & \left(\int_{(\tau)} \rho \frac{v^2}{2} d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} \rho \frac{v^2}{2} d\tau \right)_{t=t_1} + \frac{1}{A} \left\{ \left(\int_{(\tau)} \rho U d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} \rho U d\tau \right)_{t=t_1} \right\} \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{(S)} p \bar{v} \cdot \bar{n} ds \right) dt \end{aligned}$$

Здесь U — внутренняя энергия единицы массы газа, $\frac{1}{A} = 427$ кгм/ккал,

A — термический эквивалент работы, позволяющий получить выражение

в фигурной скобке $\left\{ \left(\int_{(\tau)} \rho U d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} \rho U d\tau \right)_{t=t_1} \right\}$ в килограммометрах.

Эти соотношения между параметрами изучаемой среды для конечных объёмов, полученные из законов сохранения массы, импульса и энергии, справедливы для произвольного объёма, занятого газом, и допускают существование разрывов в распределении параметров газа.

Такая запись законов сохранения справедлива для функций любого класса, как непрерывных, так и разрывных, поэтому ими удобно пользоваться в случае, когда в среде есть прерывистое распределение гидродинамических параметров.

Если изучаемая среда представляет собой совершенный газ, находящийся в состоянии термодинамического равновесия, то справедливо уравнение Клапейрона $p = \rho RT$.

Тогда $U = c_v T$ и $c_p - c_v = AR$, где c_p и c_v теплоёмкость при постоянном давлении и постоянном объёме соответственно.

Эти три соотношения, выражающие основные законы сохранения, можно объединить следующим образом:

$$\left(\int_{(\tau)} a d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} a d\tau \right)_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{(S)} c_n ds \right) dt. \quad (6)$$

где следует положить:

- 1) $a = \rho$, $c_n = 0$ и мы получим закон сохранения массы
- 2) $a = \rho \bar{v}$, $c_n = -\rho \bar{v}$ и мы получим закон сохранения количества движения
- 3) $a = \rho \frac{v^2}{2} + \frac{1}{A} \rho U$, $c_n = -\rho v_n$ и мы получим закон сохранения энергии.

Если функции, которые входят в эти уравнения непрерывны и имеют непрерывные производные в интервале от t_1 до t_2 и во всех точках объёмов, занимаемых жидкой частицей (τ) при движении её от t_1 до t_2 , то мы можем получить из (6) обычные дифференциальные уравнения движения газа в форме Эйлера. Производные от искомым функций могут при этом претерпевать разрыв при переходе через отдельные поверхности.

3. Уравнения газовой динамики в дифференциальной форме

Пусть все гидродинамические функции и их производные непрерывны.

При этом предположении выведем уравнения, описывающие движение газа, в дифференциальной форме. Воспользуемся полученной интегральной формой записи основных законов сохранения и начнём с *закона сохранения количества движения*

$$\left(\int_{(\tau)} \rho \bar{v} d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} \rho \bar{v} d\tau \right)_{t=t_1} = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{(S)} p \bar{n} ds \right) dt.$$

Чтобы перейти от интегральной формы записи этого закона к дифференциальной положим $t_1 = t$, $t_2 = t + \Delta t$. Разделим обе части данного выражения на Δt и рассмотрим предел при $t \rightarrow 0$. Слева получим производную от интеграла по объёму, а справа применим *теорему о среднем значении* интеграла. Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{(\tau)} \rho \bar{v} d\tau \right) = - \int_{(S)} p \bar{n} ds.$$

Объём τ зависит от времени, поэтому для вычисления левой части выполним некоторые преобразования. Заметим, что $\rho d\tau = dm$ – элемент массы. Переходя к интегрированию по массе (M – вся масса, заключенная объёме τ , и сохраняющаяся в нем), получим в левой части уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{(\tau)} \rho \bar{v} d\tau \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{(M)} \bar{v} dm \right) = \int_{(M)} \frac{d\bar{v}}{dt} dm ,$$

и вернёмся к интегрированию по объёму, заменяя dm на $\rho d\tau$.

Тогда будем иметь для левой части $\frac{d}{dt} \left(\int_{(\tau)} \rho \bar{v} d\tau \right) = \int_{(\tau)} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau$.

Целиком наше выражение для закона сохранения количества движения примет вид

$$\int_{(\tau)} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau = - \int_{(S)} p \bar{n} ds.$$

Правую часть преобразуем по формуле Остроградского (при этом появится градиент давления), а затем перенесём всё в левую часть уравнения

$$\int_{(\tau)} \left(\rho \frac{d\bar{v}}{dt} + \nabla p \right) d\tau = 0.$$

В силу произвольности объёма τ и непрерывности подынтегральной функции окончательно имеем

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} + \nabla p = 0 \text{ или } \boxed{\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p}. \quad (7)$$

Уравнение (7) есть уравнение Эйлера при условии, что массовые силы пренебрежимо малы.

Уравнение неразрывности в дифференциальной форме получим из закона сохранения массы в интегральной форме

$$\left(\int_{(\tau)} \rho d\tau \right)_{t+\Delta t} - \left(\int_{(\tau)} \rho d\tau \right)_t = 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, как и в предыдущем случае получим

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{(\tau)} \rho d\tau \right) = 0.$$

Используя формулу дифференцирования объёмного интеграла, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{(\tau)} \rho d\tau \right) = \int_{(\tau)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} \right) d\tau = 0.$$

В силу произвольности объёма τ и непрерывности подынтегральной функции имеем

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0}. \quad (8)$$

Обратимся теперь к уравнению энергии. Запишем закон сохранения энергии для совершенного газа сначала в интегральной форме

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{(\tau)} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \frac{c_v T}{A} \right) d\tau \right\}_{t+\Delta t} - \left\{ \int_{(\tau)} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \frac{c_v T}{A} \right) d\tau \right\}_t = \\ & - \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{(S)} p \bar{v} \cdot \bar{n} ds \right) dt. \end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегаем работой массовых сил, не учитываем потерь и притока тепла, так как считаем процесс адиабатическим. Так же, как и в первом случае, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, в левой части получим производную по времени. В правой части сначала используем теорему о среднем значении определённого интеграла

$$\int_t^{t+\Delta t} \Phi dt = \Delta t \cdot \Phi_{\text{cp}}.$$

В нашем случае подынтегральная функция Φ представляет собой интеграл по поверхности $S(t)$, которая перемещается в пространстве и при этом деформируется с течением времени. Поэтому

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{(S)} p \bar{v} \cdot \bar{n} ds \right) dt = \Delta t \cdot \int_{(S_{\text{cp}})} p \bar{v} \cdot \bar{n} ds,$$

где $S_{cp} = S(t_{cp})$ – некоторое среднее положение поверхности S в интервале времени от t до $t + \Delta t$. Очевидно, что при $\Delta t \rightarrow 0$ поверхность $S_{cp} = S(t_{cp})$ будет стремиться к $S = S(t)$.

Окончательно, после предельного перехода получим

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{(\tau)} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \frac{c_v T}{A} \right) d\tau \right\} = - \int_{(S)} p(\bar{v} \cdot \bar{n}) ds.$$

Для вычисления производной по времени опять перейдём к интегрированию по массе, продифференцируем и вернёмся обратно. Правую часть (как и раньше) преобразуем по формуле Остроградского.

Тогда получим

$$\int_{(\tau)} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{c_v T}{A} \right) d\tau = - \int_{(\tau)} \text{div}(p\bar{v}) d\tau.$$

В силу произвольности объёма (τ) и предполагаемой непрерывности подынтегральной функции получим

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{c_v T}{A} \right) + \text{div}(p\bar{v}) = 0. \quad (9)$$

Это уравнение энергии в дифференциальной форме. Его можно упростить.

Умножим для этого уравнение Эйлера (I.7) скалярно на \bar{v} :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = - (\bar{v} \cdot \text{grad } p)$$

и подставим в полученное уравнение энергии

$$- (\bar{v} \cdot \text{grad } p) + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{c_v T}{A} \right) + \text{div}(p\bar{v}) = 0.$$

Преобразуем последнее слагаемое

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(p\bar{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}(pv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(pv_y) + \frac{\partial}{\partial z}(pv_z) = \\ &= p \frac{\partial v_x}{\partial x} + p \frac{\partial v_y}{\partial y} + p \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} = \\ &= p \operatorname{div}\bar{v} + \bar{v} \cdot \operatorname{grad} p. \end{aligned}$$

Теперь подставим полученное представление для выражения $\operatorname{div}(p\bar{v})$ в уравнение энергии (I.9). Тогда будем иметь

$$- (\bar{v} \cdot \operatorname{grad} p) + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{c_v T}{A} \right) + p \operatorname{div}\bar{v} + \bar{v} \cdot \operatorname{grad} p = 0.$$

Первое и последнее слагаемые исчезают и уравнение энергии упрощается

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{c_v T}{A} \right) + p \operatorname{div}\bar{v} = 0.$$

Теперь подставим сюда выражение для $\operatorname{div}\bar{v}$ из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}\bar{v} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \text{ Уравнение энергии примет вид}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{c_v T}{A} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Для идеального газа c_v считают постоянным при малых температурах, при больших – c_v зависит от температуры $c_v = f(T)$, а вообще говоря зависит ещё и от давления $c_v = f(p, T)$.

Будем считать в рамках классической газовой динамики $c_v = \text{const}$.

Тогда для уравнения энергии имеем

$$\frac{\rho c_v}{p A} \frac{dT}{dt} - \frac{d \ln \rho}{dt} = 0.$$

Теперь воспользуемся уравнением Клапейрона $p = \rho RT$ и $T = \frac{1}{R} \frac{p}{\rho}$.

$$\frac{\rho c_v}{p AR} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{d \ln \rho}{dt} = 0.$$

Учитывая, что $AR = c_p - c_v$ и $\frac{c_p}{c_v} = k$, получим

$$\frac{1}{k-1} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{p}{\rho} \right) - \frac{d \ln \rho}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) = 0} \quad (9a)$$

Это и есть уравнение энергии или условие адиабатичности в дифференциальной форме. Его можно записать иначе

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет величина $\frac{p}{\rho^k}$, но это не значит, что всюду

$$\frac{p}{\rho^k} = const.$$

Таким образом, если следить за движением частицы, то $\frac{p}{\rho^k}$ одно и то же и является фактически функцией координат Лагранжа. Величина $\frac{p}{\rho^k}$ меняется при переходе от одной частицы к другой (то есть она сохраняется в частице).

Теперь можно записать всю систему уравнений газовой динамики в дифференциальной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}\bar{v} = 0 . \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) = 0 \end{array} \right.$$

4. Условия динамической совместности

Рассмотрим перемещающуюся в пространстве поверхность сильного разрыва. Будем считать, что во всё изучаемое время она единственная. На ней терпят разрыв гидродинамические элементы потока.

Разность их значений при переходе через поверхность *сильного разрыва* будем называть **скачком** или *разрывом* соответствующей функции на поверхности.

Эти **разрывы** не могут быть произвольными, так как они должны удовлетворять основным законам сохранения: массы, количества движения и энергии.

Чтобы получить связь между ними (эту связь обычно называют условиями динамической совместности, так как речь идёт об условиях на движущейся поверхности), воспользуемся полученными ранее в общем виде уравнениями гидродинамики в интегральной форме (6):

$$\left(\int_{(\tau)} a d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} a d\tau \right)_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{(S)} c_n ds \right) dt .$$

Рассматриваемая поверхность делит всё пространство на две области: на положительную и отрицательную. Положительной областью будем считать ту, куда направлена нормаль к поверхности и куда двигается поверхность. В процессе своего движения поверхность в каждый момент времени будет совпадать

с некоторой совокупностью частиц газа, которые тоже можно рассматривать как некоторую поверхность в пространстве.

Пусть t_1 и t_2 — два бесконечно близких момента времени. Обозначим через Σ_{t_1} — положение поверхности разрыва в момент t_1 , а через $\Sigma_{t_2'}$ — положение в момент времени t_2 тех частиц, которые в момент времени t_2 окажутся на поверхности разрыва.

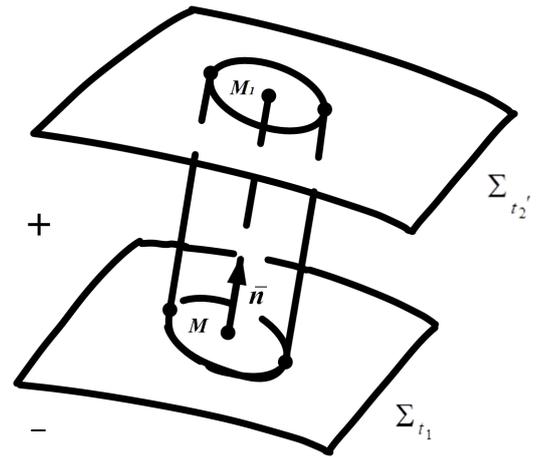


Рис. 3

На поверхности Σ_{t_1} отметим произвольную точку M , проведём в ней нормаль \bar{n} к поверхности в сторону положительной области, окружим её некоторой окружностью радиуса r и на ней как на основании построим цилиндр с образующими, параллельными нормали \bar{n} к поверхности Σ_{t_1} в точке M .

Изобразим на рисунке также поверхность $\Sigma_{t_2'}$. Продолжим этот цилиндр до пересечения с поверхностью $\Sigma_{t_2'}$. Нормаль \bar{n} пересечёт эту поверхность в точке M_1 . Часть цилиндрической поверхности, заключенной между поверхностями Σ_{t_1} и $\Sigma_{t_2'}$, целиком находится в положительной части пространства.

При этом расстояние MM_1 можно представить в виде

$$MM_1 = \theta_+(t_2 - t_1) + o(t_2 - t_1).$$

Примем объём этого цилиндра за объём интегрирования (τ) в момент времени t_1 в выражении (6). Его можно приближённо вычислить следующим образом

$$(\tau)_{t_1} = \pi r^2 \theta_+(t_2 - t_1) + \varepsilon_1 r^2 (t_2 - t_1),$$

где ε_1 — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем r^2 .

Теперь посмотрим, что произойдёт к моменту времени $t = t_2$. Поверхность разрыва переместится и займёт положение Σ_{t_2} , а те частицы, которые в момент времени $t = t_1$ находились на поверхности разрыва, займут некоторое положение $\Sigma_{t_1'}$.

При этом наш цилиндр окажется *целиком* в отрицательной области пространства. Его объём и форма изменится. Этот новый объём (τ) и примем за объём *интегрирования* при $t = t_2$ в левой части формулы (6).

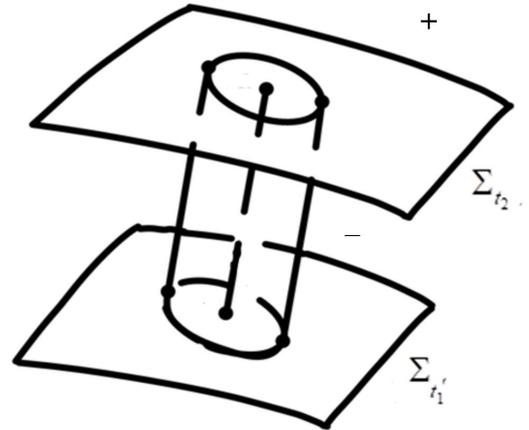


Рис. 4

$$(\tau)_{t_2} = \pi r^2 \theta_-(t_2 - t_1) + \varepsilon_2 r^2 (t_2 - t_1),$$

где ε_2 — бесконечно малая величина.

При этом в обоих случаях под θ_+ и под θ_- мы понимаем значение скорости распространения поверхности разрыва, вычисленное в одной и той же точке M в один и тот же момент времени t_1 , но при приближении с разных сторон к поверхности Σ_{t_1} .

Вычислим теперь левую часть в формуле (6):

$$\left(\int_{(\tau)} a d\tau \right)_{t=t_2} = a_- \pi r^2 \theta_-(t_2 - t_1) + \varepsilon_3 r^2 (t_2 - t_1).$$

Здесь пишем a_- и θ_- , так как при $t = t_2$ весь объём (τ) находится в отрицательной области.

$$\left(\int_{(\tau)} a d\tau \right)_{t=t_1} = a_+ \pi r^2 \theta_+ (t_2 - t_1) + \varepsilon_4 r^2 (t_2 - t_1).$$

Здесь a_+ и a_- — значения величины a в точке M в момент времени t_1 .

Вычтем одно из другого и получим левую часть формулы (6):

$$\begin{aligned} \left(\int_{(\tau)} a d\tau \right)_{t=t_2} - \left(\int_{(\tau)} a d\tau \right)_{t=t_1} &= -(a_+ \theta_+ - a_- \theta_-) \pi r^2 (t_2 - t_1) + \varepsilon_5 r^2 (t_2 - t_1) = \\ &= -[a \theta] \pi r^2 (t_2 - t_1) + \varepsilon_5 r^2 (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Это левая часть формулы (6).

Теперь перейдём к вычислению правой части.

Для этого сначала воспользуемся теоремой о среднем значении внешнего интеграла. Так как значение поверхностного интеграла в основном зависит от формы поверхности, которая в нашем случае изменяется с течением времени, то будем иметь

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{(S)} c_n ds \right) dt = \left(\int_{(S_{cp})} c_n ds \right) (t_2 - t_1).$$

Здесь под S_{cp} следует понимать положение поверхности нашего цилиндра в некоторый *промежуточный момент* времени $t_{cp} \rightarrow (t_1 < t_{cp} < t_2)$.

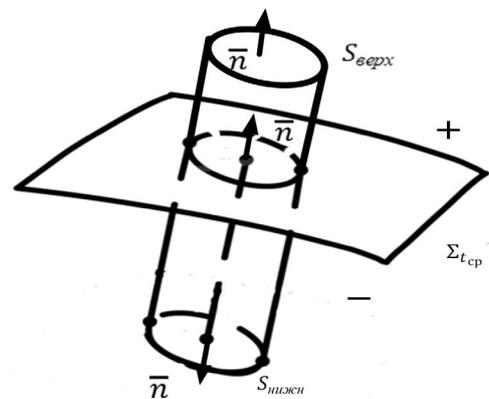


Рис. 5

Поверхность S состоит из двух оснований и боковой поверхности. В этот промежуточный момент времени поверхность разрыва делит наш цилиндр на две части, одна из которых расположена в положительной области, а другая – в отрицательной. При этом

$$\int_{(S_{\text{сп}})} c_n ds = \int_{(S_{\text{бок}})} c_n ds + \int_{(S_{\text{верх}})} c_n ds + \int_{(S_{\text{нижн}})} c_n ds$$

Вычислим приближенно каждое слагаемое:

$$\int_{(S_{\text{бок}})} c_n ds = \frac{(c_n)_{\text{сп}} \theta_{\text{сп}} 2\pi \cdot r(t_2 - t_1)}{O(1) \cdot r(t_2 - t_1)} + \dots =$$

$\int_{(S_{\text{верх}})} c_n ds = \pi r^2 (c_n)_+ + \varepsilon_6 r^2$, здесь нормаль к поверхности $S_{\text{верх}}$ (она для неё всегда внешняя) совпадает с положительным направлением нормали на поверхности разрыва;

$\int_{(S_{\text{нижн}})} c_n ds = -\pi r^2 (c_n)_- + \varepsilon_7 r^2$, а здесь внешняя нормаль к нижнему основанию нашего цилиндра образует угол 180° с выбранным нами положительным направлением нормали к поверхности разрыва.

Тогда для правой части формулы (6) получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{(S)} c_n ds \right) dt = (t_2 - t_1) \left\{ \pi r^2 (c_n)_+ - \pi r^2 (c_n)_- + O(1) \cdot r(t_2 - t_1) + \dots \right\}.$$

Теперь приравняем обе части (левую и правую) в формуле (6)

$$\begin{aligned} & - [a\theta] \pi r^2 (t_2 - t_1) + \varepsilon_5 r^2 (t_2 - t_1) \\ & = [c_n] \pi r^2 (t_2 - t_1) + O(1) \cdot r(t_2 - t_1)^2 + \varepsilon_8 r^2 (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Сначала разделим на $(t_2 - t_1)$ и устремим $t_2 \rightarrow t_1$. Тогда имеем

$$[a\theta] \pi r^2 + [c_n] \pi r^2 = -(\varepsilon_8 - \varepsilon_5) r^2.$$

Затем разделим на πr^2 и устремим r к нулю ($r \rightarrow 0$). Так как все величины ε_i имеют порядок более высокий, чем $r^2 \rightarrow \varepsilon_i = o(r^2)$, то придём к формуле

$$[a\theta] + [c_n] = 0. \quad (10)$$

Такую связь между разрывами величин a и c_n на поверхности сильного разрыва диктуют нам законы сохранения.

Подставим вместо a и c_n то, что соответствует трём законам сохранения

$$1) a = \rho, \quad c_n = 0 \quad [\rho\theta] = 0 \rightarrow \rho_+\theta_+ = \rho_-\theta_-$$

$$2) a = \rho\bar{v}, \quad c_n = -p\bar{n} \quad [\rho\bar{v}\theta] = [p]\bar{n}$$

$$3) a = \rho \frac{v^2}{2} + \frac{1}{A}\rho U, \quad c_n = -pv_n \quad \left[\rho \frac{v^2}{2}\theta + \rho \frac{U}{A}\theta \right] = [pv_n]$$

Из полученных условий на поверхности разрыва следует, что величины, разрыв которых равен нулю, можно выносить за знак разрыва. Покажем это на примере второго соотношения

$$\begin{aligned} [\rho\bar{v}\theta] &= \rho_+\bar{v}_+\theta_+ - \rho_-\bar{v}_-\theta_- = (\text{теперь учтём, что } \rho_+\theta_+ = \rho_-\theta_-) \\ &= \rho_+\theta_+\bar{v}_+ - \rho_+\theta_+\bar{v}_- = \rho_+\theta_+[\bar{v}] = \rho\theta[\bar{v}] = [p]\bar{n}. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно связь между разрывами гидродинамических элементов потока на поверхности разрыва или **условия динамической совместности** запишем в следующем виде:

$$[\rho\theta] = 0,$$

$$\rho\theta [\bar{v}] = [p]\bar{n}, \quad (11)$$

$$\rho\theta \left[\frac{v^2}{2} + \frac{U}{A} \right] = [pv_n].$$

Речь идёт о совместности двух движений с элементами \bar{v}_+, p_+, ρ_+ и \bar{v}_-, p_-, ρ_- . Если в некоторый момент времени образовалась поверхность сильного разрыва, а условия (I.11) не выполняются, то такая поверхность одна существовать не может. *Возникает взрыв или распад разрыва.*

В тех же точках, через которые не проходит поверхность сильного разрыва, должны выполняться обычные уравнения гидродинамики в дифференциальной форме.

5. Виды поверхностей сильного разрыва и условия на них

Мы уже говорили, что поверхность сильного разрыва может быть стационарной при $\theta = 0$ и нестационарной при $\theta \neq 0$.

Рассмотрим 1-й случай. Пусть $\theta = 0$. Тогда из условий (I.11) следует

$$1) \quad 0 = 0$$

$$2) \quad [p] = 0$$

$$3) \quad [v_n] = 0.$$

При этом разрывы плотности $[\rho]$, касательной составляющей вектора скорости $[v_\tau]$ и температуры $[T]$ могут быть произвольными.

Так как $[v_n] = 0$ (нет перемещения частиц газа через поверхность), то поверхность всё время совпадает с одними и теми же частицами (говорят, что поверхность «сидит» на одних и тех же частицах).

Примерами стационарной поверхности сильного разрыва являются: поверхность газовой или водяной струи (при истечении из сопла или водопроводного крана), свободная поверхность реки, фронтальная поверхность раздела масс холодного и теплого воздуха (в метеорологии).

Такие поверхности иногда называют поверхностями *тангенциального* разрыва, а иногда называют *контактным* разрывом.

Газовая динамика в основном занимается нестационарными поверхностями сильного разрыва, когда $\theta \neq 0$.

Теперь рассмотрим более интересный случай, когда $\theta \neq 0$. При этом можно предположить два варианта: $[p] = 0$ и $[p] \neq 0$.

При $[p] = 0$ из второго условия динамической совместности имеем $[\bar{v}] = 0$ (так как $\rho \neq 0$ по самому смыслу физической задачи и $\theta \neq 0$ по нашему предположению), а из третьего условия — $[U] = 0$ и следовательно $[T]$ (так как $U = c_v T$ и мы считаем $c_v = const$). Но в этом случае из уравнения Клапейрона следует, что и $[\rho] = 0$. И в итоге получается, что разрыва нет вообще, так как все гидродинамические параметры потока непрерывны.

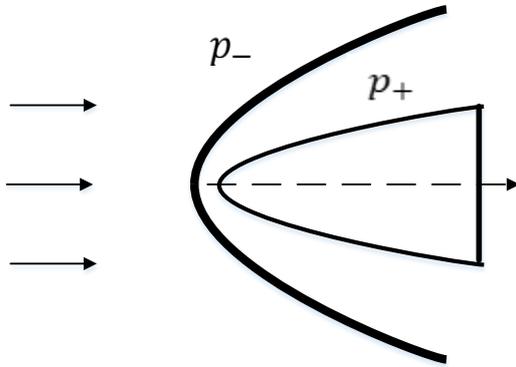
Поэтому будем считать, что $[p] \neq 0$. Тогда из второго условия следует, что $[v_n] \neq 0$, а $[v_\tau] = 0$ (так как известно, что скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю).

Примером такой поверхности может служить баллистическая волна перед снарядом при его движении со сверхзвуковой скоростью (её часто называют головной ударной волной), поверхность сильного разрыва, образующаяся при взрыве.

Нестационарные поверхности сильного разрыва иногда называют скачками сжатия или уплотнения, так как на них обязательно $[p] \neq 0$.

Замечание.

Рассмотрим установившееся обтекание неподвижного тела, на которое набегают сверхзвуковой поток газа с постоянной скоростью.



При таком обтекании перед телом образуется поверхность сильного разрыва. Так как движение стационарное, то скорость перемещения этой поверхности разрыва $D = 0$ и скорость её распространения $\theta = -v_n \neq 0$.

Рис. 6

Таким образом, в стационарной задаче мы имеем дело (в рамках нашей терминологии) с нестационарной поверхностью сильного разрыва, так как она перемещается относительно частиц газа.

Следует отметить, что в классической газовой динамике, газовой динамике так называемого идеального (в термодинамическом смысле), или совершенного газа условия динамической совместности часто пишут в другой форме

$$[\rho \theta] = 0,$$

$$\rho \theta [v_n] = [p], \quad [v_\tau] = 0, \tag{12}$$

$$\rho \theta \left[\frac{v^2}{2} \right] + \frac{\rho \theta}{k-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = [p v_n].$$

Здесь требуются некоторые пояснения. Второе соотношение из (12) умножаем скалярно сначала на орт нормали к поверхности разрыва, а затем на орт касательной.

В третьем соотношении внутренняя энергия единицы массы совершенного газа $U = c_v T$. Воспользуемся уравнением Клапейрона. Тогда $p = \rho RT$, $AR = c_p - c_v$, и второе слагаемое под знаком разрыва примет вид

$$\frac{c_v T}{A} = \frac{c_v}{A} \frac{p}{\rho R} = \frac{p}{\rho} \frac{c_v}{AR} = \frac{p}{\rho} \frac{c_v}{c_p - c_v} = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}; \quad \left(\frac{c_p}{c_v} = k \right)$$

При этом из формулы для скорости распространения поверхности разрыва $\theta = D - v_n$ следует что

$$[v_n] = -[\theta]. \quad (13)$$

так как $[D] = 0$ (ибо скорость перемещения поверхности разрыва D – величина чисто геометрическая и никак не связана с движением газа и поэтому разрыва претерпевать не может).

6. Ударная адиабата

Пусть существует поверхность сильного разрыва. На ней выполняются соотношения

$$[\rho\theta] = 0,$$

$$\rho\theta [\bar{v}] = [p]\bar{n}, \quad (12a)$$

$$\rho\theta \left[\frac{v^2}{2} \right] + \frac{\rho\theta}{k-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = [pv_n].$$

Предположим, для определённости, что нам всё известно в отрицательной области пространства. Тогда мы имеем **шесть** неизвестных:

$$p_+, \rho_+, v_{x+}, v_{y+}, v_{z+} \text{ и } \theta_+$$

Условий в этой системе *только пять* (два скалярных и одно векторное). Поэтому есть принципиальная возможность выразить пять неизвестных через какое-то *одно – шестое*.

Найдём связь между давлением и плотностью за поверхностью сильного разрыва

$$\boxed{p_+ = f(\rho_+)}.$$

Сначала исключим скорость частиц v из третьего соотношения. Для этого воспользуемся вторым условием динамической совместности. Запишем его в развёрнутом виде

$$\rho\theta(\bar{v}_+ - \bar{v}_-) = [p] \bar{n}$$

и умножим скалярно на сумму скоростей $(\bar{v}_+ + \bar{v}_-)$. Тогда получим

$$\rho\theta[v^2] = [p](v_{n+} + v_{n-}).$$

Теперь подставим это выражение в третье условие динамической совместности $\frac{1}{2}[p](v_{n+} + v_{n-}) + \frac{\rho\theta}{k-1}\left[\frac{p}{\rho}\right] = [pv_n]$.

Перенесём всё в левую часть, раскроем скобки и знаки разрывов и всё умножим на $\boxed{2}$

$$\underline{p_+v_{n+}} - p_-v_{n+} + p_+v_{n-} - \underline{\underline{p_-v_{n-}}} - \underline{2p_+v_{n+}} + \underline{\underline{2p_-v_{n-}}} + \frac{2\rho\theta}{k-1}\left[\frac{p}{\rho}\right] = 0.$$

После приведения подобных членов получим

$$p_+v_{n-} - p_+v_{n+} + p_-v_{n-} - p_-v_{n+} + \frac{2\rho\theta}{k-1}\left[\frac{p}{\rho}\right] = 0,$$

выделим $[v_n]$

$$- p_+ [v_n] - p_- [v_n] + \frac{2\rho\theta}{k-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = 0$$

и вынесем его за скобки

$$- (p_+ + p_-) [v_n] + \frac{2\rho\theta}{k-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = 0. \quad (14)$$

Теперь присоединим сюда формулу (13), слегка её преобразовав,

$$[v_n] = -[\theta] = - \left[\frac{\rho\theta}{\rho} \right] = -\rho\theta \left[\frac{1}{\rho} \right].$$

Подставим такое выражение для $[v_n]$ в формулу (14), чтобы исключить этот разрыв и получить связь между давлением и плотностью

$$(p_+ + p_-) \rho\theta \left[\frac{1}{\rho} \right] + \frac{2\rho\theta}{k-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = 0.$$

Так как мы рассматриваем условия на нестационарной поверхности разрыва, то $\theta \neq 0$ (а плотность тем более в нуль не обращается) и мы можем всё выражение разделить на $\rho\theta$

$$(p_+ + p_-) \left[\frac{1}{\rho} \right] + \frac{2}{k-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = 0.$$

Чтобы получить связь между давлением и плотностью за поверхностью сильного разрыва $p_+ = f(\rho_+)$, надо раскрыть знаки разрывов и привести подобные члены.

$$(p_+ + p_-) \left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-} \right) + \frac{2}{k-1} \left(\frac{p_+}{\rho_+} - \frac{p_-}{\rho_-} \right) = 0.$$

Умножим это равенство на ρ_+ и разделим на p_- . Приведём подобные члены и получим соотношение, которое обычно называют уравнением динамической адиабаты в случае идеального газа или уравнением адиабаты Гюгонио

$$\boxed{\frac{p_+}{p_-} = \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}}. \quad (15)$$

Такая связь между давлением и плотностью за поверхностью сильного разрыва была получена ещё в 1887 году.

Разделим числитель и знаменатель в правой части формулы (15) на ρ_-

$$\frac{p_+}{p_-} = \frac{(k+1)\frac{\rho_+}{\rho_-} - (k-1)}{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_+}{\rho_-}}$$

Положим $p_+ = p_2$, $p_- = p_1$ и посмотрим, как будет выглядеть зависимость

$$\frac{p_+}{p_-} = f\left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right), \text{ то есть}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = f\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Эта кривая проходит через точку $(1; 1)$ и имеет асимптоту (вертикальную, когда знаменатель равен нулю) при

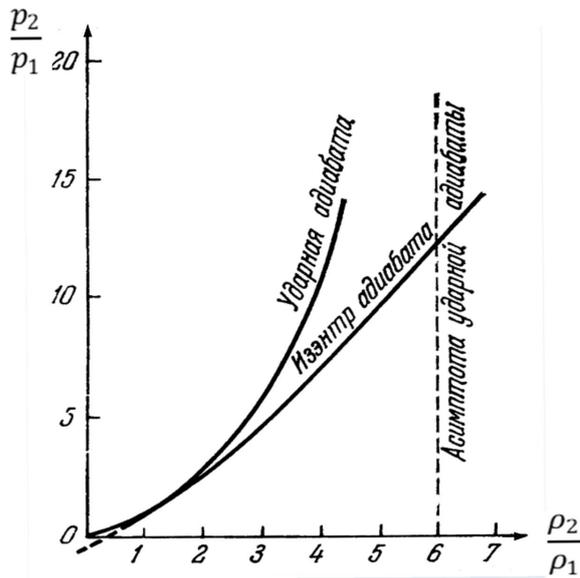


Рис. 7

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1} \Big|_{k=1,4} = 6. \text{ Числи-}$$

тель обращается в нуль при

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k-1}{k+1} \Big|_{k=1,4} = \frac{1}{6} \text{ (это точка пе-}$$

ресечения кривой с осью абсцисс).

Для $k = 1,4$ при увеличении плотности за поверхностью сильного разрыва в **шесть** раз давление должно стремиться к *бесконечности*.

Таким образом, при переходе через поверхность сильного разрыв плотность не может увеличиваться больше, чем в **шесть** раз. В действительности это не так.

Из экспериментов известно, что при больших, но конечных значениях $\frac{p_+}{p_-} \neq \infty$, наблюдается даже 12-ти кратное увеличение плотности.

Расчёты задач стационарного обтекания тел с большой сверхзвуковой скоростью, проведённые на ЭВМ с учётом физико-химических процессов, происходящих в воздухе, показывают, что возможны и более значительные уплотнения воздушной среды до 15 и даже до 20 раз.

Это значит, что при больших уплотнениях в воздухе уже нельзя пользоваться уравнением Клапейрона. Газ нельзя считать идеальным и надо тем или иным способом учитывать физико-химические процессы, происходящие за фронтом интенсивной поверхности сильного разрыва.

В отличие от динамической адиабаты Гюгонио обычную адиабату Пуассона, которая имеет вид $\frac{p}{\rho^k} = const$, называют статической.

Адиабату Пуассона можно применять только для *обратимых процессов*, а при переходе через поверхность сильного разрыва происходят **необратимые**

процессы. Поэтому в этих случаях следует пользоваться адиабатой Гюгонио (I.15), но для **не очень больших** значений плотности.

В пределах 3-х кратного увеличения плотности этой формулой можно пользоваться. Затем точность её падает. При увеличении плотности выше **5-ти раз** газ уже нельзя считать идеальным и уравнением Гюгонио пользоваться уже нельзя.

Так как во времена Римана для расчета параметров газа за фронтом ударной волны использовалась адиабата Пуассона, то сравним эти две адиабаты.

Статическая адиабата Пуассона (в отличие от динамической) проходит через начало координат и не имеет асимптоты (то есть допускает сколь угодно большое увеличение плотности). Они обе проходят через точку (1;1). Исследуем их поведение в окрестности этой точки.

Пусть $\rho_+ = \rho_- + \Delta\rho$. Представим в виде ряда правые части уравнений обеих адиабат, считая $\frac{\Delta\rho}{\rho_-}$ малой величиной. Начнём с адиабаты Пуассона:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_+}{p_-}\right)_p &= \left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)^k = \left(\frac{\rho_- + \Delta\rho}{\rho_-}\right)^k = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^k = \\ &= 1 + k\frac{\Delta\rho}{\rho_-} + \frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Теперь обратимся к адиабате Гюгонио:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_+}{p_-}\right)_H &= \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+} = \frac{(k+1)(\rho_- + \Delta\rho) - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)(\rho_- + \Delta\rho)} = \\ &= \frac{2\rho_- + (k+1)\Delta\rho}{2\rho_- - (k-1)\Delta\rho} = \left(1 + \frac{k+1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)\left(1 - \frac{k-1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^{-1} = \\ &= \left(1 + \frac{k+1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)\left\{1 + \frac{k-1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho_-} + \frac{(k-1)^2}{4}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^2 + \frac{(k-1)^3}{8}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^3 + \dots\right\} \\ &= 1 + k\frac{\Delta\rho}{\rho_-} + \frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^2 + \frac{k(k-1)^2}{8}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что эти два разложения отличаются только в третьих степенях малой величины.

Таким образом, эти адиабаты не просто пересекаются в точке (1;1), а в этой точке у них имеет место касание 2-го порядка. Поэтому, если плотность мало меняется ($\frac{\Delta\rho}{\rho_-}$ — мало), то не имеет большого значения, какой адиабатой пользоваться — адиабатой Гюгонио или адиабатой Пуассона. При этом ошибка при использовании адиабаты Пуассона будет порядка $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_-}\right)^3$, несмотря на то, что адиабата Пуассона не учитывает диссипативные процессы во фронте ударной волны.

При увеличении уплотнения газа за поверхностью разрыва естественно надо пользоваться формулой (15).

Замечание.

С физической точки зрения на самом деле в газе **нет** поверхности разрыва, а есть узкая зона резкого изменения гидродинамических величин (зона больших градиентов). В этой зоне большую роль играют вязкость, теплопроводность и диффузия. Большую роль начинают играть **необратимые процессы**, что не позволяет пользоваться адиабатой Пуассона.

7. Теорема Цемплена

Вид зависимости $\frac{p_+}{p_-} = f\left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)$ для адиабат Гюгонио и Пуассона и их вза-

имное расположение позволяют получить информацию об изменении плотности и нормальной компоненты вектора скорости при переходе частиц газа через поверхность сильного разрыва.

Теорема Цемплена. *Возможны лишь положительные сильные разрывы.*

Под **положительными** мы понимаем такие разрывы, у которых $[v_n] < 0$, а отрицательные — это такие, у которых $[v_n] > 0$.

Это значит, что в случае положительного сильного разрыва

$$v_{n+} - v_{n-} < 0 \rightarrow \boxed{v_{n-} > v_{n+}}.$$

Если газ в положительной области покоится, то есть $v_{n+} = 0$, то $v_{n-} > 0$ и газ за поверхностью разрыва двигается вслед за ней. Таким образом, поверхность разрыва при своём движении увлекает за собой газ и за поверхностью разрыва газ становится более плотным.

Теорема утверждает, что возможны лишь **скачки уплотнения** и *невозможны скачки разрежения*.

Доказательство:

Согласно 2-му началу термодинамики энтропия ограниченной массы газа при различных физических процессах **не убывает**.

Энтропия может быть следующим образом выражена через *давление* и *плотность*:

$$S = \frac{c_v}{A} \ln \frac{p}{\rho^k} + S_0,$$

где $S_0 = const$.

Таким образом, вопрос о возрастании энтропии сводится к вопросу о возрастании величины $\frac{p}{\rho^k}$. Итак, дробь $\frac{p}{\rho^k}$ постоянна или растёт.

Пусть у нас имеется нестационарный сильный разрыв. В процессе его распространения по частицам газа некоторая масса газа, находящаяся вначале с **одной** стороны от поверхности разрыва, попадает затем на *другую* его сторону.

При этом могут представиться два случая: 1) $\theta_+ > 0$ и 2) $\theta_+ > 0$.

Рассмотрим сначала 1-й случай.

1) $\theta_+ > 0$. Нормаль к поверхности направим в сторону положительной области.

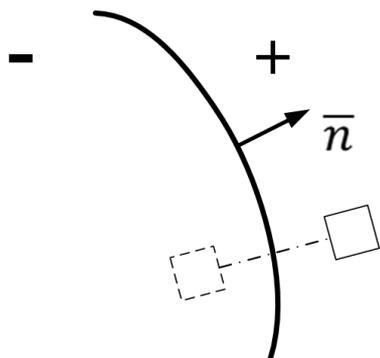


Рис. 8

Тогда массы газа, находившиеся с положительной стороны поверхности, попадут на отрицательную сторону, и энтропия положительной области заменится на энтропию области отрицательной. А так как энтропия не убывает, то

$$S_- \geq S_+ \rightarrow \frac{p_-}{\rho_-^k} \geq \frac{p_+}{\rho_+^k} \rightarrow \left[\frac{p}{\rho^k} \right] \leq 0.$$

Второй случай.

2) $\theta_+ > 0$. В этом случае масса газа, находившаяся с отрицательной стороны

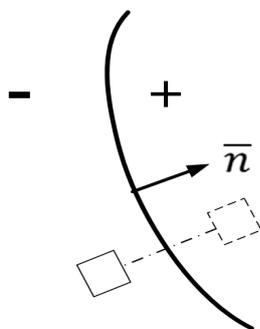


Рис. 9

поверхности, попадёт на положительную сторону, и энтропия отрицательной области заменится на энтропию положительной.

$$\frac{p_+}{\rho_+^k} \geq \frac{p_-}{\rho_-^k} \rightarrow \left[\frac{p}{\rho^k} \right] \geq 0.$$

Рассмотрим выражение для разрыва $\frac{p}{\rho^k}$

$$\left[\frac{p}{\rho^k} \right] = \frac{p_+}{\rho_+^k} - \frac{p_-}{\rho_-^k} = \frac{p_-}{\rho_+^k} \left\{ \frac{p_+}{p_-} - \left(\frac{\rho_+}{\rho_-} \right)^k \right\} =$$

теперь надо воспользоваться формулой (I.15)

$$= \frac{p_-}{\rho_+^k} \left\{ \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+} - \left(\frac{\rho_+}{\rho_-} \right)^k \right\},$$

где $y_H = \left(\frac{p_+}{p_-} \right)_H$, $y_P = \left(\frac{p_+}{p_-} \right)_P$.

Теперь обратимся к Рис. 7, где вместе изображена зависимость $\frac{p_+}{p_-}$ от $\frac{\rho_+}{\rho_-}$

для адиабаты Гюгонио и адиабаты Пуассона.

Из графика видно, что в первом случае

$$\left[\frac{p}{\rho^k} \right] \leq 0 \text{ при } y_H \leq y_P \rightarrow \frac{\rho_+}{\rho_-} \leq 1 \rightarrow [\rho] \leq 0.$$

Во втором случае

$$\left[\frac{p}{\rho^k} \right] \geq 0 \text{ при } y_H \geq y_P \rightarrow \frac{\rho_+}{\rho_-} \geq 1 \rightarrow [\rho] \geq 0.$$

Таким образом, скачок $\left[\frac{p}{\rho^k} \right]$ определяется скачком $[\rho]$.

Подведём итоги. Итак, в двух рассмотренных случаях мы имеем:

1) если $\theta_+ > 0 \rightarrow \left[\frac{p}{\rho^k} \right] \leq 0 \rightarrow [\rho] \leq 0,$

2) если $\theta_+ < 0 \rightarrow \left[\frac{p}{\rho^k} \right] \geq 0 \rightarrow [\rho] \geq 0.$

Теперь рассмотрим $[v_n]$:

$$[v_n] = -[\theta] = -\left[\frac{\rho\theta}{\rho} \right] = -\rho\theta \left[\frac{1}{\rho} \right] = -\rho\theta \left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-} \right) = \frac{\rho_+\theta_+[\rho]}{\rho_+\rho_-} = \frac{\theta_+}{\rho_-}[\rho].$$

Теперь посмотрим, какой знак имеет полученное выражение:

1) в первом случае $\theta_+ > 0$, $[\rho] \leq 0$ и $[v_n] \leq 0,$

2) во втором случае $\theta_+ < 0$, $[\rho] \geq 0$ и $[v_n] \leq 0.$

Таким образом, **всегда** $[v_n] \leq 0$. Теорема доказана.

При всех процессах, связанных с возникновением сильных разрывов $[v_n] \leq 0$, то есть существуют только положительные сильные разрывы – скачки уплотнения. Скачков разрежения не бывает. Это вытекает из 2-го начала термодинамики.

Если в покоящейся среде двигается поверхность сильного разрыва, то она увлекает за собой частицы жидкости и давление за фронтом ударной волны больше, чем перед фронтом.

Если есть разрежение, то оно осуществляется только с помощью слабых разрывов.

8. Определение скорости распространения поверхности сильного разрыва

Пусть имеем нестационарную поверхность сильного разрыва ($\theta \neq 0$), перемещающуюся в пространстве со скоростью D . При этом $\theta = D - v_n$.

Так как скорость перемещения D – величина чисто геометрическая и никак не связана с движущейся средой, то $[D] = 0$ и, следовательно, $[\theta] = -[v_n]$.

Тогда второе условие динамической совместности можно переписать следующим образом:

$$\rho \theta [v_n] = [p] \rightarrow \rho \theta [\theta] = -[p] \rightarrow \rho \theta \left[\frac{\rho \theta}{\rho} \right] = -[p].$$

Так как величину, разрыв которой равен нулю, можно выносить за знак разрыва, то в силу первого условия динамической совместности получим:

$$\rho^2 \theta^2 \left[\frac{1}{\rho} \right] = \rho^2 \theta^2 \left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-} \right) = - \rho^2 \theta^2 \frac{[\rho]}{\rho_+ \rho_-} = -[p], \rightarrow \frac{\rho^2 \theta^2}{\rho_+ \rho_-} = \frac{[p]}{[\rho]}$$

Отсюда нетрудно получить выражения для скоростей распространения поверхности сильного разрыва до и после разрыва:

$$\theta_-^2 = \frac{\rho_+ [p]}{\rho_- [\rho]}. \quad (16)$$

$$\theta_+^2 = \frac{\rho_- [p]}{\rho_+ [\rho]}. \quad (17)$$

Возьмём теперь уравнение динамической адиабаты Гюгонио (15)

$$\frac{p_+}{p_-} = \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}$$

и вычтем единицу из правой и левой части

$$\frac{p_+}{p_-} - 1 = \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+} - 1 = \frac{(k+1)[\rho] + (k-1)[\rho]}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}$$

или

$$\frac{[p]}{p_-} = \frac{2k[\rho]}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}$$

Отсюда найдём отношение

$$\frac{[p]}{[\rho]} = \frac{2kp_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}$$

и подставим его в формулу (I.16).

В результате получим $\theta_-^2 = \frac{\rho_+}{\rho_-} \frac{2kp_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}$,

но $\frac{kp_-}{\rho_-} = a_-^2$, поэтому

$$\theta_-^2 = a_-^2 \frac{2 \rho_+}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}. \quad (18)$$

Аналогично

$$\theta_+^2 = 2k \frac{\rho_-}{\rho_+} \frac{p_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}.$$

Чтобы придать этому выражению вид, аналогичный формуле (18), перепишем уравнение динамической адиабаты (15) в виде

$$\frac{p_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+} = \frac{p_+}{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}.$$

Тогда, заменяя вторую дробь в формуле для θ_+ правой частью преобразованного уравнения адиабаты Гюгонио, получим

$$\theta_+^2 = a_+^2 \frac{2 \rho_-}{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}. \quad (19)$$

Здесь $a_+^2 = \frac{k p_+}{\rho_+}$.

Формулы (18) и (19) показывают, что *скорость распространения поверхности сильного разрыва всегда отлична* от местной скорости звука.

Действительно, это ($\theta = a$) может быть только при $\rho_+ = \rho_-$, а тогда $p_+ = p_-$ (из уравнения Гюгонио) и из второго условия динамической совместности $[\bar{v}] = 0$.

Следовательно, в этом случае у нас **нет сильного разрыва**, а может быть лишь *слабый разрыв*.

Более того:

$$\text{если } \theta_+ > a_+, \quad \text{то } \theta_- < a_-;$$

если $\theta_+ < a_+$ то $\theta_- > a_-$;

Докажем это.

Пусть $\theta_+ > a_+$, тогда $\frac{2\rho_-}{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-} > 1$

Решим неравенство.

$$2\rho_- > (k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_- \rightarrow (k+1)\rho_- > (k+1)\rho_+ \rightarrow \boxed{\rho_- > \rho_+}$$

Положим $\rho_- = \rho_+ + \delta$ и $\delta > 0$. Подставим это в (I.18).

Тогда получим

$$\theta_-^2 = a_-^2 \frac{2\rho_+}{(k+1)\rho_+ + (k+1)\delta - (k-1)\rho_+} = a_-^2 \frac{2\rho_+}{2\rho_+ + (k+1)\delta}.$$

Знаменатель всегда больше числителя ($\delta > 0$), поэтому дробь меньше единицы, а, следовательно, и $\theta_- < a_-$.

Аналогично можно доказать и второе утверждение.

Рассмотрим два примера.

1 Допустим, что произошёл взрыв.

Обозначим области до и после образовавшейся ударной волны (Рис. 10). То

гда $\rho_- > \rho_+$ и, следовательно,

$\theta_+ > a_+$. Но тогда $\theta_- < a_-$.

При распространении ударной волны в центре взрыва давление падает, так как ударная волна увлекает за собой частицы газа.

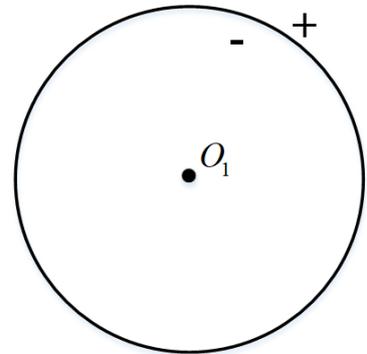


Рис. 10

А так как $\theta_- < a_-$, то фронт волны разрежения, который распространяется из зоны пониженного давления со скоростью a_- , догоняет и ослабляет ударную волну. В результате этого скорость её падает. Волна затухает.

2 Второй пример. Рассмотрим стационарное движение.

Тогда $D = 0$, и следовательно, $\theta = -v_n$ (так как $\theta = D - v_n$).

Но

$$\begin{cases} \theta_+ = -v_{n+} \\ \theta_- = -v_{n-} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{если } |v_{n+}| > a_+, & \quad \text{то } |v_{n-}| < a_-; \\ \text{если } |v_{n+}| < a_+, & \quad \text{то } |v_{n-}| > a_-. \end{aligned}$$

Важное следствие:

При установившемся движении и, следовательно, неподвижной поверхности сильного разрыва скорость движения частиц газа, по крайней мере с одной стороны от поверхности разрыва, превышает скорость звука.

Следовательно, неподвижные поверхности сильного разрыва могут существовать только при наличии сверхзвуковых скоростей.

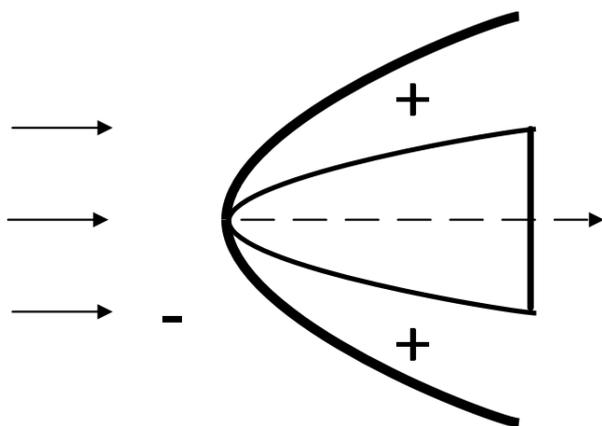


Рис. 11

Баллистическая волна на носике обтекаемого тела будет существовать только, если скорость обтекания больше скорости звука. Если меньше, то поверхности сильного разрыва нет, **она не может существовать.**

9. Условия динамической совместности в явном виде

Если при решении конкретных физических задач с ударными волнами удастся построить общее решение системы уравнений газовой динамики, то возникает вопрос об определении произвольных функций, которые должны содержаться в общем решении системы дифференциальных уравнений в частных производных. Произвольные функции следует определять из граничных условий задачи. На фронте ударной волны должны выполняться условия динамической совместности, в которых искомые величины записаны в неявном виде. Это не очень удобно для определения произвольных функций при построении аналитического решения задачи.

Найдём явное выражение для гидродинамических элементов потока с одной стороны от поверхности сильного разрыва через их значения с другой стороны той же поверхности.

Пусть в газе распространяется заданная поверхность сильного разрыва. Обозначим области, выберем на поверхности произвольную точку M и в этой точке проведём нормаль к поверхности в сторону положительной области. Форма поверхности известна, следовательно, известна и нормаль к ней \vec{n} в любой точке M поверхности.

Значит, известны и направляющие косинусы этой нормали

$$\alpha = \cos(n, \hat{x}),$$

$$\beta = \cos(n, \hat{y}),$$

$$\gamma = \cos(n, \hat{z}).$$

Таким образом, все параметры потока в отрицательной области

$$v_{x-}, v_{y-}, v_{z-}, p_-, \rho_-, \theta_- \text{ — известны.}$$

Надо найти шесть неизвестных величин $v_{x+}, v_{y+}, v_{z+}, p_+, \rho_+, \theta_+$.

Все гидродинамические параметры среды в положительной области надо выразить через известные величины.

Для этого имеем условия на поверхности сильного разрыва. Запишем их в виде

$$[\rho \theta] = 0,$$

$$\rho \theta [\bar{v}] = [p] \bar{n},$$

$$\frac{p_+}{p_-} = \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+},$$

$$\theta_+ = D - v_{n+}.$$

Имеем **шесть** уравнений (второе условие динамической совместности векторное и даёт три скалярных условия) для определения *шести* неизвестных величин.

Из второго соотношения найдём разрыв вектора скорости

$$[\bar{v}] = \frac{[p]}{\rho \theta} \bar{n} = \bar{v}_+ - \bar{v}_-.$$

Спроектируем это равенство на оси координат и получим выражения для компонентов вектора скорости за поверхностью разрыва

$$v_{x+} = v_{x-} + \frac{[p]}{\rho \theta} \alpha,$$

$$v_{y+} = v_{y-} + \frac{[p]}{\rho \theta} \beta, \tag{20a}$$

$$v_{z+} = v_{z-} + \frac{[p]}{\rho \theta} \gamma.$$

Чтобы найти величину скорости распространения поверхности разрыва в положительной области нам потребуется также величина нормальной к поверхности разрыва составляющей вектора скорости частиц газа

$$v_{n+} = v_{n-} + \frac{[p]}{\rho \theta}.$$

Тогда

$$\underline{\theta_+} = D - v_{n+} = \underline{\underline{D - v_{n-}}} - \frac{[p]}{\rho \theta} = \underline{\theta_- - \frac{[p]}{\rho \theta}}. \quad (20b)$$

Для плотности из первого условия динамической совместности найдём

$$\rho_+ = \frac{\rho_- \theta_-}{\theta_+} = \frac{\rho_- \theta_-}{\theta_- - \frac{[p]}{\rho \theta}}. \quad (20c)$$

Таким образом, все величины выразилось через разрыв давления.

Далее надо найти $[p]$.

Возьмём сначала адиабату Гюгонио и опять вычтем по единице из правой и левой части. Тогда получим связь между разрывами давления и плотности

$$\frac{p_+ - p_-}{p_-} = \frac{2k[p]}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}.$$

В формуле (20c) тоже есть связь между $[p]$ и $[\rho]$. Найдём оттуда $[\rho]$.

$$[\rho] = \rho_+ - \rho_- = \rho_- \left(\frac{\theta_-}{\theta_- - \frac{[p]}{\rho \theta}} - 1 \right) = \rho_- \frac{\frac{[p]}{\rho \theta}}{\theta_- - \frac{[p]}{\rho \theta}}$$

и подставим в предыдущую формулу. Тогда получим

$$\frac{[p]}{p_-} = \frac{2k\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\frac{\rho_- \theta_-}{\theta_- - \frac{[p]}{\rho\theta}}} \cdot \frac{\frac{[p]}{\rho\theta}}{\theta_- - \frac{[p]}{\rho\theta}}.$$

Так как разрыв давления в нуль не обращаются (рассматриваются условия на поверхности сильного разрыва), то можно сократить на $[p]$ и ρ_-

$$\frac{\frac{2k\rho_-}{\rho\theta}}{(k+1)\theta_- - (k+1)\frac{[p]}{\rho\theta} - (k-1)\theta_-} = 1.$$

$$\frac{2k\rho_-}{\rho_- \theta_-} = 2\theta_- - (k+1)\frac{[p]}{\rho_- \theta_-} \Rightarrow (k+1)[p] = 2\rho_- \theta_-^2 - 2\rho_- a_-^2.$$

$$[p] = \frac{2}{k+1} \rho_- (\theta_-^2 - a_-^2).$$

Подставим теперь последнее выражение во все формулы (20).

В результате получим, полагая везде $\rho\theta = \rho_- \theta_-$,

$$v_{x+} = v_{x-} + \frac{2}{k+1} \frac{\alpha}{\theta_-} (\theta_-^2 - a_-^2),$$

$$v_{y+} = v_{y-} + \frac{2}{k+1} \frac{\beta}{\theta_-} (\theta_-^2 - a_-^2), \quad (21)$$

$$v_{z+} = v_{z-} + \frac{2}{k+1} \frac{\gamma}{\theta_-} (\theta_-^2 - a_-^2),$$

$$p_+ = p_- + \frac{2}{k+1} \rho_- (\theta_-^2 - a_-^2),$$

$$\theta_+ = \theta_- \left[\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \left(\frac{a_-}{\theta_-} \right)^2 \right],$$

$$\rho_+ = \rho_- \frac{1}{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \left(\frac{a_-}{\theta_-} \right)^2}.$$

Отсюда видно, что при $\theta_- = a_-$ *сильного* разрыва действительно **нет**.

Мы предполагали, что поверхность *сильного* разрыва задана и получили формулы (21).

Если же поверхность *сильного* разрыва не задана и её форму приходится искать в процессе построения решения всей газодинамической задачи, то соотношения (21) будут служить краевыми условиями на неизвестной границе, форма которой подлежит определению.

10. Неравенства, характеризующие ударные переходы

Итак, что же мы знаем о разрывах гидродинамических элементов потока?

Формулы (21) *позволяют получить* ряд следствий. Перечислим основные из них.

Предположим, что отрицательной областью является та, где возмущений нет. Частицы после прохождения фронта ударной волны попадают из отрицательной области в положительную область. $\theta_+ < 0$. Нормаль направим в положительную область.

Следствия из формул (I.21).

1) $\left[\frac{p}{\rho^k} \right] > 0$ – это вытекает из 2-го начала термодинамики, согласно кото-

рому энтропия $S = \frac{c_v}{A} \ln \frac{p}{\rho^k} + S_0$ не убывает.

2) $[\rho] > 0$ при $\theta_+ < 0$, так как имеют место только скачки уплотнения (теорема Цемплена).

3) $[p] > 0$ для поверхностей сильного разрыва, так как из формулы для ρ_+ в (21) в силу $\rho_+ > \rho_-$ следует $(a_-)^2 < (\theta_-)^2$. Действительно, из соотношения для плотности следует, что

$$\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \left(\frac{a_-}{\theta_-} \right)^2 < 1 \quad \rightarrow \Rightarrow \quad k-1 + 2 \left(\frac{a_-}{\theta_-} \right)^2 < k+1,$$

$$\left(\frac{a_-}{\theta_-} \right)^2 < 1 \quad \rightarrow \Rightarrow \quad \boxed{a_-^2 < \theta_-^2}$$

Тогда из 4-й формулы (21) (для p_+) получим $[p] > 0$.

4) $[v_n] < 0$ – это следует из теоремы Цемплена.

5) $[v_\tau] = 0$, если умножить второе условие динамической совместности на орт касательной $\bar{\tau} \rightarrow \rho \theta [\bar{v}] \cdot \bar{\tau} = [p] (\bar{n} \cdot \bar{\tau})$, то получим $[v_\tau] = 0$, так как $(\bar{n} \cdot \bar{\tau}) = 0$.

6) $[v] < 0$, так как $[v_n] < 0$, а $[v_\tau] = 0$.

7) $[a] > 0$. Вспомним, что $a^2 = \frac{k p}{\rho}$ и воспользуемся адиабатой Гюгонио

$$\frac{p_+}{\rho_-} = \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}. \text{ В левой части этого равенства умножим числитель}$$

и знаменатель на k , а затем обе части этого равенства умножим на $\frac{\rho_-}{\rho_+}$. Тогда

получим $\frac{a_+^2}{a_-^2} = \frac{k p_+}{\rho_+} \cdot \frac{\rho_-}{k p_-} = \frac{(k+1)\rho_- - (k-1)\frac{\rho_-^2}{\rho_+}}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}$. Теперь в правой части этого

равенства числитель и знаменатель разделим на ρ_- .

$$\frac{a_+^2}{a_-^2} = \frac{(k+1)\rho_- - (k-1)\frac{\rho_-^2}{\rho_+}}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+} = \frac{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_-}{\rho_+}}{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_+}{\rho_-}} > 1.$$

Последняя дробь всегда больше единицы, так как при $[\rho] > 0$ (см. п. 2))

$$\frac{\rho_+}{\rho_-} > 1.$$

8) $[M] < 0 \rightarrow \frac{M_+}{M_-} = \frac{v_+}{a_+} \cdot \frac{a_-}{v_-} = \frac{v_+}{v_-} \cdot \frac{a_-}{a_+} < 1$, так как оба

сомножителя меньше единицы: $\frac{v_+}{v_-} < 1$ в силу $[v] < 0$ (см. п. 6), а $\frac{a_-}{a_+} < 1$ в силу

$[a] > 0$ (см. п. 7)).

9) Если движение установившееся $D = 0$, то $\theta = -v_n$ и для существования поверхности сильного разрыва скорость частиц в невозмущённой области должна быть сверхзвуковой. Это следует из 6-го соотношения (21).

$[\rho] > 0 \rightarrow \frac{\rho_+}{\rho_-} > 1 \rightarrow$ решим неравенство и $\boxed{(\theta_-)^2 > (a_-)^2}$ смотри п. 3).

Тогда $(a_-)^2 < (\theta_-)^2 = (v_{n-})^2 \rightarrow (v_{n-})^2 > (a_-)^2$

10) $[T] > 0$. $p = \rho RT \rightarrow T = \frac{p}{\rho R}$

$$\frac{T_+}{T_-} = \frac{p_+}{p_-} \cdot \frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+} \cdot \frac{\rho_-}{\rho_+}.$$

Разделим числитель и знаменатель сначала на ρ_+ , а затем на ρ_- . В результате получим

$$\frac{T_+}{T_-} = \frac{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_-}{\rho_+}}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+} \rho_- = \frac{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_-}{\rho_+}}{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_+}{\rho_-}} > 1,$$

так как при $\frac{\rho_+}{\rho_-} > 1$ (в силу $[\rho] > 0$ см. п. 2)) числитель всегда больше знаменателя.

11. Условия на поверхности разрыва в плоской стационарной задаче

Так как рассматривается движение плоское (переменная z отсутствует) и установившееся, то уравнение поверхности разрыва не содержит времени t и имеет вид: $f(x, y) = 0$. При этом скорость перемещения поверхности разрыва $D = 0$.

Покажем сначала, что в этом случае теплосодержание i_0 непрерывно при переходе через поверхность сильного разрыва.

Для доказательства третье условие динамической совместности запишем в виде (см. (I.12))

$$\rho\theta \left[\frac{v^2}{2} \right] + \frac{\rho\theta}{k-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = [pv_n].$$

Здесь $\theta = D - v_n = -v_n$ и $\boxed{v_n = -\theta}$.

Подставим это соотношение в условие на фронте и преобразуем его

$$\underline{\underline{\rho\theta\left[\frac{v^2}{2}\right] + \frac{\rho\theta}{k-1}\left[\frac{p}{\rho}\right]}} = -[p\theta] = -\left[\frac{p}{\rho}\rho\theta\right] = \underline{\underline{-\rho\theta\left[\frac{p}{\rho}\right]}}.$$

Приравняем подчёркнутые члены, перенесём все члены в левую часть

$$\rho\theta\left[\frac{v^2}{2}\right] + \frac{\rho\theta}{k-1}\left[\frac{p}{\rho}\right] + \rho\theta\left[\frac{p}{\rho}\right] = 0$$

и приведём подобные.

Тогда, учитывая, что $\frac{1}{k-1} + 1 = \frac{1+k-1}{k-1} = \frac{k}{k-1}$, получим

$$\rho\theta\left[\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\right] = 0 \quad \rightarrow \Rightarrow \quad \rho\theta\left[\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1}\right] = 0.$$

Так как $\theta \neq 0$, то $\left[\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1}\right] = 0$.

Но $\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = i_0$, следовательно, $\rightarrow [i_0] = 0$.

Завихрённость потока (или его вихреватость) зависит от $i_0(\psi)$ и $\mathcal{G}(\psi)$

$$\Omega = -\rho\left(\frac{di_0}{d\psi} - \frac{k}{k-1}p^{\frac{k-1}{k}}\frac{d\mathcal{G}}{d\psi}\right)$$

В большинстве конкретных практических задач газовой динамики речь идёт о течениях, где перед фронтом ударной волны поток безвихревой. Следовательно, там $\boxed{i_0 = const}$, а так как $[i_0] = 0$, то наличие ударной волны не изменяет величины i_0 .

Посмотрим, как ведёт себя на фронте ударной волны величина $\mathcal{G}(\psi)$, от которой также зависит завихрённость потока.

Покажем, что безвихревой поток при переходе через криволинейную поверхность сильного разрыва становится вихревым.

Запишем условия динамической совместности для плоского случая в разрешённом виде

$$\begin{aligned}
 v_{x+} &= v_{x-} + \frac{2}{k+1} \frac{\cos(n, \wedge x)}{\theta_-} (\theta_-^2 - a_-^2), \\
 v_{y+} &= v_{y-} + \frac{2}{k+1} \frac{\cos(n, \wedge y)}{\theta_-} (\theta_-^2 - a_-^2), \\
 p_+ &= p_- + \frac{2}{k+1} \rho_- (\theta_-^2 - a_-^2), \\
 \rho_+ &= \rho_- \frac{1}{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \left(\frac{a_-}{\theta_-}\right)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Но $\theta = -v_n$. Следовательно, для существования поверхности сильного разрыва при установившемся движении скорость частиц перед фронтом ударной волны должна быть сверхзвуковой.

Пусть имеем перед фронтом (в отрицательной области) равномерный сверхзвуковой поток с параметрами: v_1, p_1, ρ_1 . Направим ось x по скорости потока v_1 в отрицательной области, а нормаль к поверхности разрыва \vec{n} — в сторону положительной области. Обозначим угол между нормалью и осью x через φ . Угол φ будем считать положительным, когда кратчайший поворот от направления нормали к направлению оси x осуществляется против часовой стрелки.

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} v_{x-} = v_1 \\ v_{y-} = 0 \\ p_- = p_1 \\ \rho_- = \rho_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (n, \hat{x}) = \varphi \\ \theta_- = -v_{n-} = \\ = -v_1 \cos \varphi \\ a_- = a_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} v_{x+} = v_x \\ v_{y+} = v_y \\ p_+ = p \\ \rho_+ = \rho \end{array} \right.$$

$$\cos(n, \hat{y}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$$

Условия динамической совместности в нашем случае перепишем в виде

$$v_x = v_1 - \frac{2}{k+1} \frac{(v_1^2 \cos^2 \varphi - a_1^2)}{v_1},$$

$$v_y = \frac{2}{k+1} \frac{(v_1^2 \cos^2 \varphi - a_1^2)}{v_1} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$p = p_1 + \frac{2}{k+1} \rho_1 (v_1^2 \cos^2 \varphi - a_1^2),$$

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \frac{a_1^2}{v_1^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Очевидно, что величина $\mathcal{G}(\psi)$

$$\mathcal{G} = \frac{p^{\frac{1}{k}}}{\rho} = F(\varphi)$$

при фиксированных параметрах в отрицательной области зависит от местного угла наклона криволинейного фронта ударной волны.

Таким образом, при переходе через поверхность сильного разрыва $[\mathcal{G}]$ будет различен, вообще говоря, в разных точках поверхности разрыва и будет меняться от одной линии тока к другой.

Так что, если \mathcal{G} слева от поверхности разрыва и было постоянно, то, претерпев в разных точках этой поверхности разные скачки, оно (\mathcal{G}) станет функцией от ψ .

Иными словами, безвихревой поток до поверхности разрыва делается при переходе через неё, вообще говоря, вихревым.

Но $\mathcal{G} = F(\varphi)$ на фронте, следовательно только в частном случае, когда поверхность разрыва прямолинейна ($\varphi = const$) энтропия может быть за ней постоянна. Но на фронте она (энтропия) будет претерпевать разрыв. **Только в этом случае поток за фронтом может быть безвихревым** (когда фронт прямолинейным).

12. Гипоцисоида сильных разрывов и ее свойства

Запишем условия динамической совместности для плоского случая в разрешённом виде (23):

$$v_x = v_1 - \frac{2}{k+1} \frac{(v_1^2 \cos^2 \varphi - a_1^2)}{v_1},$$

$$v_y = \frac{2}{k+1} \frac{(v_1^2 \cos^2 \varphi - a_1^2)}{v_1} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$p = p_1 + \frac{2}{k+1} \rho_1 (v_1^2 \cos^2 \varphi - a_1^2),$$

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \frac{a_1^2}{v_1^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Из условий динамической совместности (23) имеем $v_x = v_x(\varphi)$ и $v_y = v_y(\varphi)$. Следовательно, можно считать, что в плоскости годографа скорости эти соотношения определяют кривую, заданную в параметрической форме, где параметром является угол φ .

Найдём уравнение этой кривой, которое связывает компоненты вектора скорости v_x и v_y за поверхностью сильного разрыва. Для этого надо исключить угол φ из первых двух соотношений (23):

$$v_1 - v_x = \frac{2}{k+1} \frac{(v_1^2 \cos^2 \varphi - a_1^2)}{v_1} \Rightarrow [(v_1 - v_x) \operatorname{tg} \varphi]^2 = (v_y)^2.$$

Теперь с помощью первого соотношения надо исключить отсюда $\operatorname{tg} \varphi$. Воспользуемся тригонометрической формулой $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1$.

$$\text{Из первого соотношения (I.23) имеем } \frac{k+1}{2} (v_1 - v_x) v_1 + a_1^2 = v_1^2 \cos^2 \varphi.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 = \frac{v_1^2}{\frac{k+1}{2} (v_1 - v_x) v_1 + a_1^2} - 1 = \frac{v_1^2 - a_1^2 - \frac{k+1}{2} v_1 (v_1 - v_x)}{\frac{k+1}{2} (v_1 - v_x) v_1 + a_1^2}$$

Умножим числитель и знаменатель на $\frac{2}{k+1}$ и разделим на v_1

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\frac{2}{k+1} \left(v_1 - \frac{a_1^2}{v_1} \right) - (v_1 - v_x)}{v_1 - v_x + \frac{2}{k+1} \frac{a_1^2}{v_1}}.$$

Теперь окончательно получим

$$v_y^2 = (v_1 - v_x)^2 \frac{\frac{2}{k+1} \left(v_1 - \frac{a_1^2}{v_1} \right) - (v_1 - v_x)}{v_1 - v_x + \frac{2}{k+1} \frac{a_1^2}{v_1}}. \quad (24)$$

Анализ этой зависимости $v_y = f(v_x)$ показывает, что эта кривая:

1. расположена целиком в правой полуплоскости, так как не имеет точек пересечения с осью v_y (если положить $v_x = 0$, то v_y^2 должен быть отрицательным).
2. симметрична относительно оси v_x .
3. пересекает ось v_x в двух точках $v_x = v_1$ и $v_x = \frac{k-1}{k+1} v_1 + \frac{2}{k+1} \frac{a_1^2}{v_1}$; первая из них соответствует отсутствию скачка, а вторая – прямому скачку уплотнения. В обоих случаях направление вектора скорости при переходе через поверхность разрыва не меняется.
4. имеет асимптоту с уравнением $v_x = v_1 + \frac{2}{k+1} \frac{a_1^2}{v_1}$.

Эта кривая определяется только величиной v_1 , так как если i_0 известна перед фронтом ударной волны (как это обычно бывает) и при переходе через фронт разрыва не терпит, то a_1 получим из уравнения Бернулли. Эту кривую называют гипоциссоидой сильных разрывов, ударной полярой или строфоидой

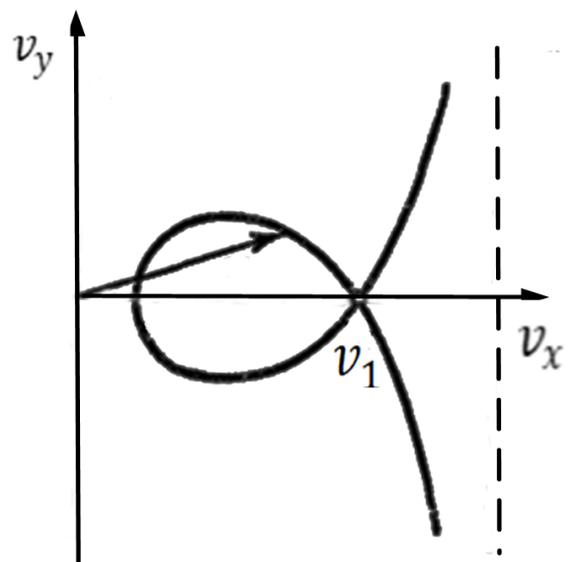


Рис. 12

Она представляет собой геометрическое место точек возможного положения конца вектора скорости частиц газа за фронтом ударной волны, если перед фронтом скорость частиц газа направлена вдоль оси x и равна v_1 .

С её помощью можно получать некоторую информацию о свойствах потока за поверхностью сильного разрыва.

Она позволяет:

- 1) по величине скорости потока за поверхностью разрыва позволяет судить об абсолютной величине угла наклона этой скорости к оси x ;
- 2) по углу наклона вектора скорости к оси x за поверхностью разрыва позволяет судить о её величине;
- 3) позволяет определить максимально возможный угол поворота потока за поверхностью разрыва;
- 4) с помощью дополнительного построения позволяет определять наклон поверхности разрыва к оси x (направление касательной) в тех точках, где уже известна скорость частиц газа за поверхностью разрыва.

Покажем, как это можно сделать на плоскости годографа скорости.

1) Пусть скорость потока за поверхностью разрыва v_0 . Проведём окружность радиуса $v = v_0$. Точки пересечения соединим с началом координат. Так определяются углы.

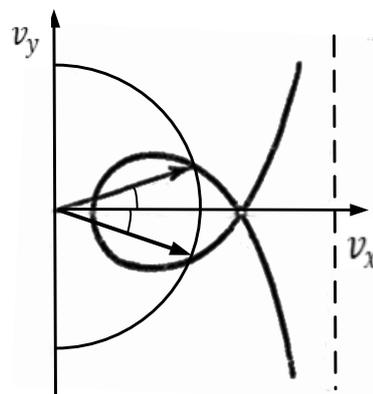


Рис. 13

2) Пусть известно направление вектора скорости за поверхностью разрыва, то есть известен угол β – угол наклона вектора скорости к оси x в

физической плоскости. В плоскости годографа скорости из начала координат проведём луч под углом β к оси v_x . Оси x и v_x у нас всегда параллельны.

Этот луч пересечёт гипоциссоиду в трёх точках B_1 , B_2 и B_3 . Далее мы покажем, что точка B_3 , а с ней и все точки, лежащие на расходящихся ветвях гипоциссоиды исключаются из рассмотрения, так как они противоречат теореме Цемплена. Точки B_1 и B_2 с точки зрения теоремы Цемплена равноправны.

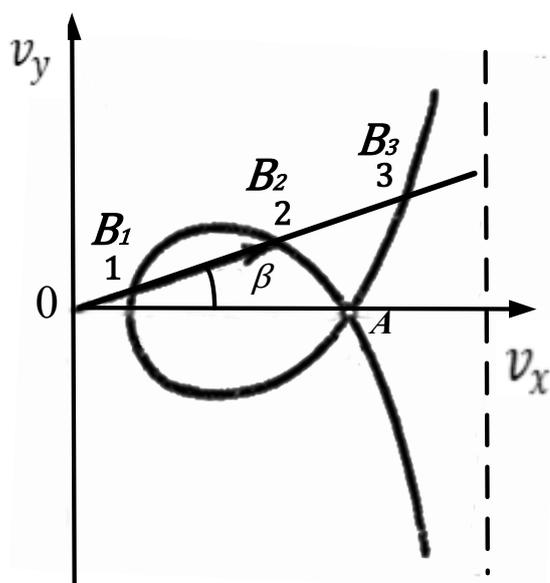


Рис. 14

Как правило, скорость за фронтом определяется точкой B_2 в случае, когда поверхность разрыва присоединена к границе обтекаемого тела и скорость движения частиц при этом сверхзвуковая. Точки типа B_1 соответствуют решению, примыкающему к области дозвуковых скоростей (например, в случае обтекания с отошедшей ударной волной). Далее мы это более подробно проиллюстрируем на примере обтекания угла. Строго математического обоснования этого пока ещё нет.

3) Если мы будем увеличивать угол β , то точки B_1 и B_2 будут стремиться друг к другу и при некотором значении угла $\beta = \beta_{\max}$ они совместятся и вместо секущей будет касательная. Таким образом, получим β_{\max} — максимально возможный угол поворота потока за поверхностью сильного разрыва при данной скорости v_1 перед ней.

4) Известно, что разрыв касательной составляющей вектора скорости при переходе через поверхность сильного разрыва равен нулю $[v_\tau] = 0$, то есть

$$v_{\tau+} = v_{\tau-}.$$

Таким образом, чтобы найти направление поверхности в той точке M ударного фронта, где известна скорость по величине и направлению, надо так подобрать направление поверхности разрыва, чтобы проекции скорости на касательное направление к поверхности до и после разрыва были бы одинаковы.

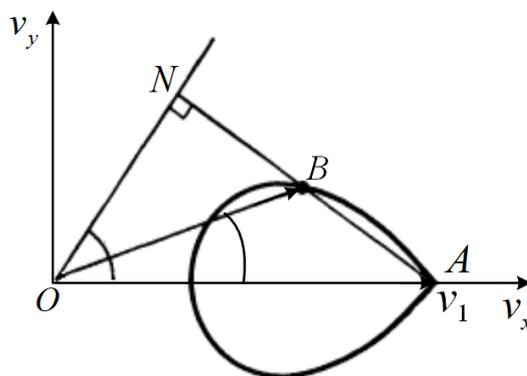


Рис. 15

$$\text{Здесь } OA = v_1, \quad ON = v_{1\tau} \text{ и } ON = v_\tau.$$

Достаточно соединить концы векторов скорости до и после разрыва, и из начала координат в плоскости годографа опустить перпендикуляр на эту линию. Это и будет направление поверхности сильного разрыва в точке M . Действительно, ON – проекция вектора скорости до разрыва и после него на касательное к фронту направление τ . Отсюда имеем метод построения фронта ударной волны.

Теперь легко показать, что не надо учитывать точки на расходящихся ветвях гипоцисоиды (точки типа B_3).

Действительно, пусть B_3 – конец вектора скорости за фронтом ударной волны. Пользуясь предыдущим правилом, найдём направление фронта поверхности разрыва. Соединим $(\cdot)A$ с $(\cdot)B_3$ и опустим на продолжение этой линии перпендикуляр из начала координат на плоскости годографа. Получим точку N_1

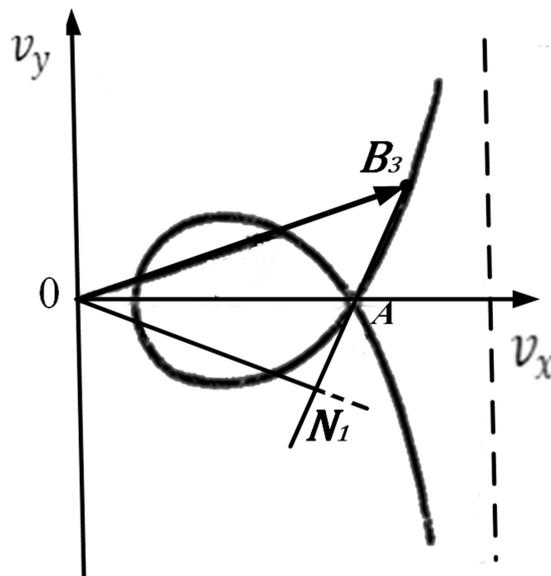


Рис. 16

Тогда AN_1 – проекция на нормаль к ударной волне вектора скорости до поверхности разрыва. N_1B_3 – проекция вектора скорости после разрыва на нормаль к фронту ударной волны

$$\begin{cases} AN_1 = v_{1n} = v_{n-} \\ N_1B_3 = v_{n+} \end{cases}, \text{ но из чертежа видно, что } N_1B_3 > N_1A = AN_1. \text{ Следова-}$$

тельно, $v_{n+} > v_{n-}$, то есть $[v_n] > 0 \rightarrow$, что противоречит теореме Цемплена

Поэтому *расходящиеся* ветви гипоцисоиды следует исключить из рассмотрения.

13. Условия кинематической совместности

Рассмотрим поверхность **слабого разрыва**.

Существование поверхности сильного разрыва само по себе не накладывало никаких ограничений на скачки величин. И только необходимость удовлетворить законам сохранения массы, количества движения и энергии (уравнениям газовой динамики в интегральной форме) приводит к условиям динамической совместности.

Иначе обстоит дело в случае поверхности **слабого разрыва**. Уже сам факт наличия такой поверхности – а под поверхностью слабого разрыва мы понимаем такую поверхность, на которой сами величины непрерывны, а их производные терпят разрыв – приводит к определённым ограничениям на скачки производных. Эти ограничения являются следствием того, что поверхность разрыва **единственна**.

А поскольку они вытекают из геометрической или кинематической картины движения и зависят только от условий передвижения поверхности разрыва вне всякой связи с уравнениями газовой динамики, то они и называются **условиями кинематической совместности** или *условиями кинематической тождественности*.

Перейдём к выводу этих условий.

Пусть имеется поверхность $\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0$, которая перемещается в пространстве и как-то деформируется при этом. Она делит всё пространство на две области: положительную ($\mathcal{F}(x, y, z, t) > 0$) и отрицательную ($\mathcal{F}(x, y, z, t) < 0$).

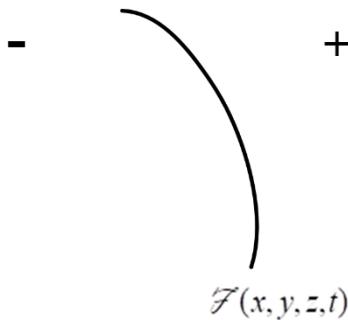


Рис. 17

Пусть функция $\Phi(x, y, z, t)$ непрерывна во всём пространстве, занимаемом жидкостью, имеет непрерывные производные первого порядка в положительной и отрицательной областях, но при переходе через поверхность \mathcal{F} эти производные терпят разрыв непрерывности.

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_+ \neq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_-, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_+ \neq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_-, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_+ \neq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_-, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_+ \neq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_-.$$

Под функцией $\Phi(x, y, z, t)$ мы можем подразумевать какой-нибудь гидродинамический элемент непосредственно или же какую-либо его производную по координатам или по времени.

Будем рассматривать четырёхмерное пространство (x, y, z, t) , в котором гиперповерхность $\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0$ неподвижна.

Пусть существует функция $\Psi(x, y, z, t)$ непрерывная вместе с производными такая, что на гиперповерхности \mathcal{F} она, то есть $\Psi(x, y, z, t)$, сохраняет постоянное значение

$$\Psi(x, y, z, t)|_{\mathcal{F}} = const.$$

Тогда вдоль гиперповерхности \mathcal{F} имеем $d\Psi = 0$ или

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt = 0$$

(при этом дифференциалы берутся вдоль этой поверхности) и

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} dt = 0.$$

Так как dx, dy, dz и dt вообще говоря, произвольны, то сопоставляя эти два соотношения, приходим к выводу, что одно из этих соотношений является следствием другого и должны выполняться следующие равенства

$$\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial z}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial t}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}} = \mu_{\Psi}. \quad (25)$$

где $\mu_{\Psi} = \mu_{\Psi}(x, y, z, t)$, определённая на поверхности \mathcal{F} .

Для того, чтобы выбрать соответствующим образом функцию $\Psi(x, y, z, t)$, рассмотрим функцию $\bar{\Phi}(x, y, z, t)$ непрерывную во всём нашем гиперпространстве и имеющую непрерывные первые производные по координатам и времени, такую, что она совпадает с нашей функцией Φ в положительной области. Тогда на поверхности \mathcal{F}_+ имеем

$$\bar{\Phi}(x, y, z, t)|_+ = \Phi(x, y, z, t)|_+$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_+, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_+, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_+, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_+.$$

Рассмотрим ещё функцию $\bar{\bar{\Phi}}(x, y, z, t)$, непрерывную вместе со своим первыми производными во всём гиперпространстве и равную тождественно функции Φ в отрицательной области. Тогда на \mathcal{F}_-

$$\bar{\bar{\Phi}}(x, y, z, t)|_- = \Phi(x, y, z, t)|_-$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_-, \quad \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_-, \quad \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_-, \quad \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_-.$$

Рассмотрим разность $\bar{\Phi} - \bar{\bar{\Phi}}$. Она непрерывна со своими производными во всём гиперпространстве и так как сама функция Φ непрерывна на поверхности \mathcal{F} ($[\Phi] = 0$), то обращается в нуль на \mathcal{F} . Следовательно, в качестве функции Ψ можно выбрать

$$\Psi(x, y, z, t) = \bar{\Phi} - \bar{\bar{\Phi}}$$

Заметим, что на поверхности \mathcal{F}

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_+ - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_- = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]$$

Аналогично

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]$$

Теперь из (25) для разрывов производных получим

$$\frac{\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}} = \frac{\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}} = \frac{\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}} = \frac{\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}} = \mu_{\Psi}. \quad (26)$$

или в векторном виде

$$\left. \begin{aligned} [\nabla \Phi] &= \mu_{\Phi} \nabla \mathcal{F} \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] &= \mu_{\Phi} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Это и есть в окончательном виде условия кинематической совместности.

Они показывают, что достаточно задать только одну функцию μ , чтобы определить разрывы всех производных от функции Φ . Достаточно знать также разрыв одной из производных, чтобы определить все остальные разрывы. Так, например, если разрыв одной из производных первого порядка равен нулю, то и все производные первого порядка будут непрерывны на поверхности \mathcal{F} .

Умножим и разделим правую часть на корень

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} [\nabla \Phi] &= \lambda_\Phi \bar{n} \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] &= \lambda_\Phi D \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

\bar{n} – единичный вектор нормали и

$$\lambda_\Phi = \mu_\Phi \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}.$$

Кроме кинематических условий разрывы должны удовлетворять по обе стороны уравнениям газовой динамики

14. Скорость распространения поверхности слабого разрыва

Вернемся опять к поверхности слабого разрыва. Кроме кинематических условий совместности (27)

$$[\nabla \Phi] = \mu_\Phi \nabla \mathcal{F}, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = \mu_\Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$$

разрывы производных от различных гидродинамических величин должны удовлетворять условиям динамическим, вытекающим из того, что эти величины должны в положительной и отрицательной области по отдельности удовлетворять уравнениям газовой динамики в дифференциальной форме

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{V} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) = 0.$$

В случае полной производной по времени от скалярной величины имеем

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho.$$

Преобразуем последнее уравнение следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) &= \frac{d}{dt} (p \rho^{-\kappa}) = \rho^{-\kappa} \frac{dp}{dt} + p (-\kappa) \rho^{-\kappa-1} \frac{d\rho}{dt} = \\ &= \rho^{-\kappa} \frac{dp}{dt} - \frac{\kappa p}{\rho} \rho^{-\kappa} \frac{d\rho}{dt} = \rho^{-\kappa} \left[\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} \right] = \\ &= \rho^{-\kappa} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Так как полная производная по времени $\frac{d\vec{V}}{dt}$ равна сумме локальной производной $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ и конвективной производной $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$, которая является тензором, систему уравнений газовой динамики можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \nabla p &= -\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho \right) &= 0. \end{aligned}$$

Запишем эти уравнения сначала для положительной области, затем для отрицательной и вычтем вторые из первых. Тогда получим

$$[\nabla p] = -\rho \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \right] - \rho (\bar{V} \cdot [\nabla \bar{V}]),$$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + \rho [\operatorname{div} \bar{V}] + \bar{V} \cdot [\nabla \rho] = 0,$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] + \bar{V} \cdot [\nabla p] - a^2 \left(\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + \bar{V} \cdot [\nabla \rho] \right) = 0.$$

Нам потребуется $\lambda_p, \lambda_\rho, \lambda_{V_x}, \lambda_{V_y}, \lambda_{V_z}$ и вектор

$$\bar{\lambda}_V = \lambda_{V_x} \bar{i} + \lambda_{V_y} \bar{j} + \lambda_{V_z} \bar{k}.$$

Из (28) имеем

$$\left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial V_x}{\partial t} \right] \bar{i} + \left[\frac{\partial V_y}{\partial t} \right] \bar{j} + \left[\frac{\partial V_z}{\partial t} \right] \bar{k} = -D (\lambda_{V_x} \bar{i} + \lambda_{V_y} \bar{j} + \lambda_{V_z} \bar{k}) = -\bar{\lambda}_V \cdot D$$

$$\bar{V} \cdot [\nabla V_x] = \bar{V} \cdot \lambda_{V_x} \cdot \bar{n} = V_n \lambda_{V_x},$$

$$\bar{V} \cdot [\nabla V_y] = V_n \lambda_{V_y}, \quad \bar{V} \cdot [\nabla V_z] = V_n \lambda_{V_z}$$

$$\bar{V} \cdot [\nabla \bar{V}] = V_n (\lambda_{V_x} \bar{i} + \lambda_{V_y} \bar{j} + \lambda_{V_z} \bar{k}) = V_n \bar{\lambda}_V$$

$$[\operatorname{div} \bar{V}] = \left[\frac{\partial V_x}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial V_y}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial V_z}{\partial z} \right] = \lambda_{V_x} n_x + \lambda_{V_y} n_y + \lambda_{V_z} n_z = \bar{\lambda}_V \cdot \bar{n}$$

Теперь подставим всё это в систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \lambda_p \bar{n} &= \rho \bar{\lambda}_V \cdot D - \rho \bar{\lambda}_V \cdot V_n = \rho \bar{\lambda}_V \cdot (D - V_n) \\ -\lambda_p D + \rho (\bar{\lambda}_V \cdot \bar{n}) + \bar{V} \cdot \lambda_p \bar{n} &= 0 \\ -\lambda_p D + \bar{V} \lambda_p \bar{n} - a^2 (-\lambda_p D + \bar{V} \lambda_p \bar{n}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

В результате получили систему из 5-ти уравнений для пяти неизвестных функций

$$\lambda_p \bar{n} = \rho \bar{\lambda}_V \cdot (D - V_n)$$

$$\rho (\bar{\lambda}_V \cdot \bar{n}) = \lambda_p (D - V_n)$$

$$\lambda_p D - \lambda_p V_n - a^2 \lambda_p (D - V_n) = 0$$

Из 1-го, умножая на орт нормали, получим:

$$\lambda_p = \rho (\bar{\lambda}_V \cdot \bar{n}) (D - V_n).$$

Воспользуемся вторым уравнением

$$\lambda_p = \lambda_p (D - V_n)^2.$$

и подставим полученное выражение для λ_p в 3-е уравнение. В результате будем иметь

$$\lambda_p (D - V_n)^3 - \lambda_p a^2 (D - V_n) = 0.$$

$\boxed{\lambda_p \neq 0}$ по условию, ибо иначе поверхность \mathcal{F} не является поверхностью слабого разрыва.

$$\underline{D - V_n = \theta} \text{ — скорость распространения поверхности } \mathcal{F}.$$

Тогда

$$\theta^3 = a^2 \theta.$$

Здесь возможны два варианта:

$$\begin{aligned} \text{либо 1) } \theta = 0 \text{ (разрыв стационарный),} \\ \text{либо 2) } \theta^2 = a^2 \rightarrow |\theta| = a. \end{aligned} \tag{29}$$

Таким образом стационарном случае скорость распространения поверхности слабого разрыва равна нулю, а скорость распространения нестационарной поверхности слабого разрыва по абсолютной величине равна скорости звука.

Можно показать, что скорость распространения любого слабого разрыва (то есть, когда рвутся производные любого порядка) будет либо $\theta = 0$, либо $\theta = \pm a$.

Теперь естественно поставить вопрос о том, всегда ли могут существовать в газе поверхности слабого разрыва?

$$\theta = - \frac{\frac{d\mathcal{F}}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}}$$

Рассмотрим сначала неустановившиеся движения $\theta = \pm a$ или

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = \mp a \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2} \tag{30}$$

При любых скоростях среды можно найти поверхность \mathcal{F} , так чтобы условие (1.30) выполнялось.

Пусть теперь движение установившееся. Тогда $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0$ и на поверхности разрыва имеем

$$\frac{V_x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}} = \mp a$$

Или

$$|V_n| = a. \quad (31)$$

Вот к чему сводится условие существования поверхности слабого разрыва в установившемся потоке.

Рассмотрим два частных случая:

а) движение всюду дозвуковое $|V| < a$, в этом случае условие (31) не выполняется в области, занятой жидкостью, а, следовательно, при дозвуковом установившемся движении поверхности слабого разрыва существовать не могут

б) движение сверхзвуковое $|V| > a$.

В этом случае можно найти такую поверхность, где $|V_n| = a$.

Таким образом, при установившемся движении поверхности слабого разрыва могут существовать **только** в сверхзвуковом потоке.

ЛИТЕРАТУРА

Список основной литературы

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Том 2. М., Физматгиз, 1963. – 728 с.
2. Черный Г.Г. Газовая динамика. М., Наука. 1988. – 424 с.
3. Крайко А. Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010. – 440 с.

Список дополнительной литературы

1. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 760 с.
2. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., Наука. 1981. – 308 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., ГИТТЛ. 1973. – 784 с.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. Наука. 1968 – 592 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. Скорость распространения поверхности разрыва	5
2. Уравнения гидродинамики в интегральной форме	12
3. Уравнения газовой динамики в дифференциальной форме	16
4. Условия динамической совместности	22
5. Виды поверхностей сильного разрыва и условий на них	28
6. Ударная адиабата	31
7. Теорема Цемплена	37
8. Определение скорости распространения поверхности сильного разрыва	41
9. Условия динамической совместности в явном виде	46
10. Неравенства, характеризующие ударные переходы	50
11. Условия на поверхности разрыва в плоской стационарной задаче	53
12. Гипоцисоида сильных разрывов и ее свойства	57
13. Условия кинематической совместности	63
14. Скорость распространения поверхности слабого разрыва	68
Литература	74