

## Исследование нелинейной деформации плоскости с эллиптическим включением для гармонических материалов

*В. М. Мальков, Ю. В. Малькова*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Исследование нелинейной деформации плоскости с эллиптическим включением для гармонических материалов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 4. С. 375–390. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.403>

Аналитическими методами исследуется нелинейная деформация плоскости с эллиптическим включением. Упругие свойства плоскости и включения описываются полулинейным материалом. Внешней нагрузкой являются постоянные номинальные (Пиолы) напряжения на бесконечности. На границе включения выполнены условия непрерывности напряжений и перемещений. Поскольку полулинейный материал относится к классу гармонических, для решения нелинейных плоских задач применяются методы теории функций комплексной переменной. Напряжения и перемещения выражены через две аналитические функции комплексного переменного, определяемые из граничных условий на контуре включения. Предполагается, что напряженное состояние включения является однородным (тензор номинальных напряжений постоянен). Эта гипотеза позволила свести сложную нелинейную задачу сопряжения двух тел из разных материалов к решению двух более простых задач для плоскости с эллиптическим отверстием. Справедливость гипотезы оправдана тем, что построенное решение точно удовлетворяет всем уравнениям и граничным условиям задачи. Такая же гипотеза была использована раньше другими авторами для линейных и нелинейных задач об эллиптическом включении. Выполнен сравнительный анализ напряжений и деформаций для двух моделей гармонических материалов — полулинейного и Джона. В расчетах рассмотрены разные варианты значений параметров упругости включения и матрицы.

*Ключевые слова:* нелинейная плоская задача, эллиптическое включение, гармонический материал, метод функций комплексной переменной.

**1. Введение.** Получено аналитическое решение нелинейной задачи упругости для плоскости с эллиптическим включением. Механические свойства плоскости и включения описываются полулинейным материалом. Эта модель предложена Ф. Джоном в работе [1], термин «полулинейный материал» ввел А. И. Лурье [2]. Полулинейный материал относится к классу гармонических, что позволяет применять методы теории функций комплексной переменной при решении плоских задач нелинейной теории упругости. Модель полулинейного материала использовалась во многих работах отечественных и зарубежных авторов [2–8]. В публикациях нашла применение еще одна модель, также предложенная Ф. Джоном [1] и названная им гармоническим материалом. Развитие и использование методов комплексных функций для решения плоских задач нелинейной теории упругости для этих материалов выполнено в статьях [6–17].

Задача о межфазной трещине, которая нагружена равномерным давлением, ортогональным деформированным берегам трещины, для материала Джона и полулинейного материала решена в [12, 13]. Показано, что существуют критические давле-

ния, превышение которых ведет к потере устойчивости материала и большим закри- тическим деформациям. Для модели материала Джона в [13, 16, 17] получены ана- литические решения нелинейных задач для плоскости с эллиптическим включением или отверстием. Было установлено, что напряженное состояние включения является однородным при нагружении пластины постоянными усилиями на бесконечности [16, 17]. В работах [10, 18] показано, что если включение отличается от эллиптического, то его напряженное состояние не будет однородным. Для неэллиптического вклю- чения напряженное состояние можно сделать однородным, если ввести промежуточ- ный слой между включением и матрицей и подобрать его параметры [18]. Задача об эллиптической полости в гармонической среде рассмотрена в [19], линейная задача об эллиптическом отверстии, расположенном вблизи межфазной линии композитной плоскости, — в [20]. Более обширный и подробный обзор работ по эллиптическим и другим включениям в плоскость содержится в статье [21], где получено аналитиче- ское решение линейной задачи об эллиптическом включении в плоскость.

**2. Основные соотношения плоской задачи.** Для постановки и решения за- дачи будем использовать систему уравнений, содержащую уравнения равновесия для тензора номинальных напряжений и уравнения совместности для градиента дефор- мации [22]:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{G}^T = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$  — тензор номинальных напряжений;  $\mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$  — градиент деформации;  $\mathbf{e}_i$  — ортонормированный векторный базис декартовых координат от- счетной конфигурации.

Тензор  $\mathbf{S}$  выражается через тензор напряжений Коши  $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{J}\mathbf{T}$ , в котором  $J = \det \mathbf{G}$  — кратность изменения объема. Перейдем в (1) к компонентам тензоров, и уравнения для плоской задачи запишем в комплексной форме

$$(s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 = 0, \quad (2)$$

$$(g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 = 0, \quad (3)$$

здесь штрих и индекс у скобок обозначают частные производные по декартовым коор- динатам  $(x_1, x_2)$ . Уравнения (2) и (3) являются точными для плоской деформации и плоского напряженного состояния, поскольку напряжения  $s_{31}, s_{32}$ , отсутствующие в уравнениях равновесия (2), для моделей полуплинейного материала и материала Джона равны нулю.

Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$  и комплексную функцию номинальных напряжений  $\sigma = f_1 + if_2$ . Уравнения (2), (3) тождественно удовлетворяются при подстановке в них выражений

$$s_{11} + is_{12} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \quad s_{22} - is_{21} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \quad (4)$$

$$g_{11} + ig_{21} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad g_{22} - ig_{12} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (5)$$

Комплексные функции  $\zeta(z, \bar{z})$  и  $\sigma(z, \bar{z})$  находятся из определяющих уравнений (за- кона упругости) и граничных условий задачи.

Функция  $\zeta$  представляет текущие координаты точки, физический смысл функ- ции  $\sigma$  ясен из соотношения

$$\sigma = f_1 + if_2 = i \int (s_{n1} + is_{n2}) ds + \text{const},$$

где  $f_1, f_2$  — проекции на оси декартовых координат главного вектора сил на дуге  $s$ .

Упругий потенциал полулинейного материала имеет вид [2]

$$\Phi = 0,5 \lambda \operatorname{tr}^2 (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}) + \mu \operatorname{tr} (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I})^2. \quad (6)$$

Используя (6), получим закон упругости для тензора номинальных напряжений

$$\mathbf{S} = 2\mu \mathbf{G}^T + \varkappa \mathbf{Q}^T, \quad \varkappa = \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{\Lambda} - 3) - 2\mu. \quad (7)$$

В формулах (6), (7)  $\lambda, \mu$  — параметры упругости Ляме материала,  $\mathbf{\Lambda}$  — тензор кратностей удлинений,  $\mathbf{Q}$  — ортогональный тензор, эти тензоры участвуют в полярном разложении градиента деформации  $\mathbf{G} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}$ , причем  $\mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}$ .

Закон упругости (7) запишем для плоской задачи в компонентах тензоров в комплексной форме

$$\begin{aligned} s_{11} + i s_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + i g_{21}) + \lambda(g_{22} - i g_{12}) + k e^{i\omega}, \\ s_{22} - i s_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - i g_{12}) + \lambda(g_{11} + i g_{21}) + k e^{i\omega}, \\ s_{33} &= \lambda[(g_{11} + g_{22}) \cos \omega + (g_{21} - g_{12}) \sin \omega] + k + 2\mu\lambda_3, \\ k &= \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu. \end{aligned} \quad (8)$$

Угол  $\omega$  представляет поворот окрестности точки тела в результате деформации.

Подставив в первое и второе соотношения (8) выражения (4), (5), получим уравнения для функций  $\sigma(z, \bar{z})$  и  $\zeta(z, \bar{z})$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} - 2\mu c \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -2\mu c e^{i\omega}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (9)$$

Константа  $c$  различна для плоской деформации и плоского напряженного состояния. Для указанных задач имеем соответственно [6]

$$c = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad c = \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Решение уравнений (9) таково:

$$\begin{aligned} 2\mu\zeta &= \frac{1}{1 + c} \left[ \varphi(z) + \overline{\psi(z)} + 2\mu c \int e^{i\omega} dz \right], \\ \sigma &= \frac{1}{1 + c} \left[ c\varphi(z) - \overline{\psi(z)} - 2\mu c \int e^{i\omega} dz \right], \end{aligned} \quad (10)$$

здесь  $\varphi(z), \psi(z)$  — аналитические функции комплексной переменной  $z$ .

Используя соотношение  $\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| e^{i\omega}$  и формулы (10), выразим через  $\varphi'(z)$  функцию  $e^{i\omega}$

$$e^{i\omega} = \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|}. \quad (11)$$

Такая же формула, полученная другим способом, приведена А. И. Лурье [2].

Напряжения (4) запишем через функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ :

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{1}{1+c} \left[ c\varphi'(z) - 2\mu c e^{i\omega} + \overline{\psi'(z)} + 2\mu c \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int e^{i\omega} dz \right], \\ s_{22} - is_{21} &= \frac{1}{1+c} \left[ c\varphi'(z) - 2\mu c e^{i\omega} - \overline{\psi'(z)} - 2\mu c \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int e^{i\omega} dz \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Для напряжений и деформаций (4), (5) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} + 2\mu(g_{22} - ig_{12}) &= \varphi'(z), \\ s_{22} - is_{21} + 2\mu(g_{11} + ig_{21}) &= \varphi'(z); \end{aligned} \quad (13)$$

$$s_{11} + s_{22} + i(s_{12} - s_{21}) = \frac{2c}{1+c} [\varphi'(z) - 2\mu e^{i\omega}], \quad (14)$$

$$s_{11} - s_{22} + i(s_{12} + s_{21}) = \frac{2}{1+c} \left[ \overline{\psi'(z)} + 2\mu c \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int e^{i\omega} dz \right].$$

**3. Эллиптическое включение в плоскость.** Рассматривается плоскость с эллиптическим включением. На бесконечности заданы постоянные номинальные напряжения

$$s_{ij} \rightarrow s_{ij}^{\infty}, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (15)$$

На контуре включения выполняются условия непрерывности функций  $\sigma$  и  $\zeta$

$$[\sigma]_1 = [\sigma]_2, \quad [\zeta]_1 = [\zeta]_2. \quad (16)$$

Запишем граничные условия (16) через функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$

$$\frac{1}{1+c_1} \left[ c_1\varphi_1(z) - \overline{\psi_1(z)} - 2\mu_1 c_1 \phi_1(z) \right] = \frac{1}{1+c_2} \left[ c_2\varphi_2(z) - \overline{\psi_2(z)} - 2\mu_2 c_2 \phi_2(z) \right], \quad (17)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \frac{1}{1+c_1} \left[ \varphi_1(z) + \overline{\psi_1(z)} + 2\mu_1 c_1 \phi_1(z) \right] = \frac{1}{2\mu_2} \frac{1}{1+c_2} \left[ \varphi_2(z) + \overline{\psi_2(z)} + 2\mu_2 c_2 \phi_2(z) \right],$$

индексами 1, 2 отмечены выражения, относящиеся к области включения и плоскости;

$$\phi(z) = \int e^{i\omega} dz = \int \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|} dz. \quad (18)$$

Предполагаем, что напряженное состояние эллиптического включения является однородным (тензор номинальных напряжений постоянен). В этом случае комплексные функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  имеют вид

$$\varphi_1(z) = A_1 z, \quad \psi_1(z) = B_1 z, \quad (19)$$

где  $A_1, B_1$  — неизвестные комплексные постоянные.

Используем функции (19) в формулах (10)–(12) и получим, что

$$e^{i\omega} = \frac{\varphi'_1(z)}{|\varphi'_1(z)|} = \frac{A_1}{|A_1|},$$

$$2\mu_1\zeta = \frac{1}{1+c_1} \left[ A_1 z + 2\mu_1 c_1 \frac{A_1}{|A_1|} z + \overline{B_1} \bar{z} \right], \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{1}{1+c_1} \left[ c_1 A_1 z - 2\mu_1 c_1 \frac{A_1}{|A_1|} z - \overline{B_1} \bar{z} \right],$$

$$s_{11} + i s_{12} = \frac{1}{1+c_1} \left[ c_1 A_1 - 2\mu_1 c_1 \frac{A_1}{|A_1|} + \overline{B_1} \right], \quad (21)$$

$$s_{22} - i s_{21} = \frac{1}{1+c_1} \left[ c_1 A_1 - 2\mu_1 c_1 \frac{A_1}{|A_1|} - \overline{B_1} \right].$$

Из первой формулы (20) следует важный вывод: после деформации контур включения остается эллиптическим для рассматриваемой внешней нагрузки на бесконечности. Формулы (20) и (21) показывают, что градиент деформации  $\mathbf{G}$ , тензор номинальных напряжений  $\mathbf{S}$  и тензор напряжений Коши  $\mathbf{T}$  постоянны в области включения.

Преобразуем граничные условия (17) с учетом формул (19), (20) следующим образом:

$$c_2 \varphi_2(z) - \overline{\psi_2(z)} - 2\mu_2 c_2 \phi_2(z) = \frac{1+c_2}{1+c_1} \left[ c_1 A_1 z - 2\mu_1 c_1 \frac{A_1}{|A_1|} z - \overline{B_1} \bar{z} \right], \quad (22)$$

$$\varphi_2(z) + \overline{\psi_2(z)} + 2\mu_2 c_2 \phi_2(z) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1+c_2}{1+c_1} \left[ A_1 z + 2\mu_1 c_1 \frac{A_1}{|A_1|} z + \overline{B_1} \bar{z} \right].$$

Уравнения (22) представляют две нелинейные граничные задачи для функций  $\varphi_2(z)$  и  $\psi_2(z)$ . Каждое из уравнений позволяет найти обе функции, как это имеет место в линейной задаче об эллиптическом включении [21]. Совместность уравнений должна обеспечиваться за счет выбора двух комплексных постоянных  $A_1$  и  $B_1$ .

Выполним конформное отображение комплексной плоскости  $z$  с эллиптическим включением на комплексную плоскость  $\xi$  с круговым включением [21]:

$$z = \eta(\xi) = R(\xi + m\xi^{-1}), \quad R > 0, 0 \leq m < 1. \quad (23)$$

Функция (23) отображает плоскость с эллиптическим включением, имеющим разрез между фокусами эллипса, на плоскость с кольцевым включением [21, 23].

Полуоси контура эллиптического включения  $a = R(1+m)$ ,  $b = R(1-m)$ . Положим  $\xi = re^{i\theta}$ , параметры  $(r, \theta)$  являются полярными координатами плоскости  $\xi$  и криволинейными координатами плоскости  $z$ : окружностям  $r = \text{const}$  соответствуют софокусные эллипсы, а лучам  $\theta = \text{const}$  — софокусные гиперболы. Граница эллиптического включения преобразуется на плоскости  $\xi$  в окружность единичного радиуса  $r = 1$ .

Перейдем в формулах (10) к переменной  $\xi$ , используя преобразование (23):

$$2\mu\zeta = \frac{1}{1+c} \left[ \varphi(\xi) + \overline{\psi(\xi)} + 2\mu c \phi(\xi) \right],$$

$$\sigma = \frac{1}{1+c} \left[ c\varphi(\xi) - \overline{\psi(\xi)} - 2\mu c \phi(\xi) \right],$$

функция  $\phi(\xi)$  получена из (18) переходом к переменной  $\xi$ :

$$\phi(\xi) = \int \frac{\varphi'(\xi)}{|\varphi'(\xi)|} |\eta'(\xi)| d\xi = \sqrt{\frac{\eta'(\xi)}{\varphi'(\xi)}} \int \sqrt{\varphi'(\xi)\eta'(\xi)} d\xi. \quad (24)$$

Граничные условия (22) формулируются на единичной окружности плоскости  $\xi$  в виде

$$\begin{aligned} c_2\varphi_2(t) - \overline{\psi_2(t)} - 2\mu_2c_2\phi_2(t) &= C_1t + D_1t^{-1}, \\ \varphi_2(t) + \overline{\psi_2(t)} + 2\mu_2c_2\phi_2(t) &= C_2t + D_2t^{-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\phi_2(t)$  — граничное значение функции (24),  $t = e^{i\theta}$ ;

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1+c_2}{1+c_1} \left[ c_1A_1 - 2\mu_1c_1\frac{A_1}{|A_1|} - m\overline{B_1} \right] R, \\ D_1 &= \frac{1+c_2}{1+c_1} \left[ mc_1A_1 - 2\mu_1c_1m\frac{A_1}{|A_1|} - \overline{B_1} \right] R, \\ C_2 &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1+c_2}{1+c_1} \left[ A_1 + 2\mu_1c_1\frac{A_1}{|A_1|} + m\overline{B_1} \right] R, \\ D_2 &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1+c_2}{1+c_1} \left[ mA_1 + 2\mu_1c_1m\frac{A_1}{|A_1|} + \overline{B_1} \right] R. \end{aligned} \quad (26)$$

Выделим в функциях  $\varphi_2(z)$ ,  $\psi_2(z)$ ,  $\varphi_2(\xi)$ ,  $\psi_2(\xi)$  голоморфную и неголоморфную части в бесконечной области  $|\xi| > 1$ :

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= Az + \varphi_0(z), & \psi_2(z) &= Bz + \psi_0(z), \\ \varphi_2(\xi) &= AR\xi + \varphi_0(\xi), & \psi_2(\xi) &= BR\xi + \psi_0(\xi), \end{aligned} \quad (27)$$

в которой  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$ ,  $\varphi_0(\xi)$ ,  $\psi_0(\xi)$  — голоморфные функции.

Комплексные постоянные  $A$  и  $B$  определяются из условий (15) и формул (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} A - 2\mu_2\frac{A}{|A|} &= \frac{1+c_2}{2c_2} [s_{11}^\infty + s_{22}^\infty + i(s_{12}^\infty - s_{21}^\infty)], \\ B &= \frac{1}{2}(1+c_2)[s_{11}^\infty - s_{22}^\infty + i(s_{12}^\infty + s_{21}^\infty)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Первое уравнение (28) имеет два решения:

$$A = \frac{1+c_2}{2c_2} s \pm 2\mu_2\frac{s}{|s|}, \quad s = s_{11}^\infty + s_{22}^\infty + i(s_{12}^\infty - s_{21}^\infty).$$

Берется знак плюс, если  $|A| > 2\mu_2$ , и знак минус, если  $|A| < 2\mu_2$ . При отсутствии напряжений постоянные  $A = 2\mu_2$ ,  $B = 0$ .

Постоянные  $A$  и  $B$  не зависят от формы включения, они определяются заданными напряжениями на бесконечности и параметрами упругости материала плоскости.

Сложив уравнения (25), получим для функции  $\varphi_2(\xi)$  граничную задачу

$$(1+c_2)\varphi_2(t) = (C_1+C_2)t + (D_1+D_2)t^{-1},$$

решение которой имеет вид

$$(1 + c_2)\varphi_2(\xi) = (C_1 + C_2)\xi + (D_1 + D_2)\frac{1}{\xi}. \quad (29)$$

Сравнивая формулы (27) и (29), приходим к уравнению для постоянных  $A_1$  и  $B_1$

$$C_1 + C_2 = (1 + c_2)AR. \quad (30)$$

Чтобы получить второе уравнение для этих постоянных, возьмем интегралы типа Коши от обеих частей уравнений (25), считая, что  $|\xi| > 1$ :

$$c_2\varphi_2(\xi) + 2\mu_2c_2\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\phi_2(t) dt}{t - \xi} = c_2AR\xi + (D_1 + \overline{BR})\frac{1}{\xi}, \quad (31)$$

$$\varphi_2(\xi) - 2\mu_2c_2\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\phi_2(t) dt}{t - \xi} = AR\xi + (D_2 - \overline{BR})\frac{1}{\xi}.$$

Условие совместности формул (31)

$$2\mu_2c_2\frac{1 + c_2}{2\pi i} \oint \frac{\phi_2(t) dt}{t - \xi} = [D_1 - c_2D_2 + (1 + c_2)\overline{BR}]\frac{1}{\xi}. \quad (32)$$

Разложим интеграл типа Коши в ряд по степеням  $1/\xi$ , считая  $|\xi| \rightarrow \infty$ , и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях (32):

$$-2\mu_2c_2\frac{1 + c_2}{2\pi i} \oint \phi_2(t) dt = D_1 - c_2D_2 + (1 + c_2)\overline{BR}, \quad (33)$$

$$\oint \phi_2(t) t^k dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Соотношения (30), (33) являются системой уравнений для постоянных  $A_1$  и  $B_1$ .

Поскольку вычислить интеграл в формуле (33) сложно, рассмотрим другой способ получения уравнения для постоянных. Преобразуем функцию (24), используя формулы (27), (29) и инверсию относительно единичной окружности [23]:

$$\phi_2(\xi) = R\frac{A}{|A|} \sqrt{\frac{1 - m\xi^2}{1 - (\overline{D}/\overline{AR})\xi^2}} \int \sqrt{\left(1 - \frac{D}{AR}\frac{1}{\xi^2}\right) \left(1 - m\frac{1}{\xi^2}\right)} d\xi,$$

где

$$D = \frac{D_1 + D_2}{1 + c_2} = \frac{1}{\mu_1(1 + c_1)} \left[ m(\mu_2 + \mu_1c_1)A_1 - 2\mu_1c_1m(\mu_1 - \mu_2)\frac{A_1}{|A_1|} - (\mu_1 - \mu_2)\overline{B_1} \right].$$

При инверсии внешние точки переходят внутрь окружности и наоборот. Результатом инверсии, в частности, является равенство  $\varphi(\xi) = \overline{\varphi}(1/\xi)$  [23].

Значение интеграла типа Коши в области  $|\xi| > 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\phi_2(t) dt}{t - \xi} = -\frac{1}{2} \frac{A}{|A|} R \left( m + \frac{D}{AR} \right) \frac{1}{\xi}.$$

Подставим это выражение в (32):

$$D_1 - c_2D_2 + (1 + c_2)\overline{BR} + \mu_2c_2(1 + c_2)\frac{A}{|A|} \left( m + \frac{D}{AR} \right) R = 0. \quad (34)$$

Чтобы найти функцию  $\psi_2(\xi)$ , перейдем в уравнениях (25) к сопряженным величинам, затем возьмем интегралы типа Коши, учитывая разложения (27):

$$\begin{aligned}\psi_2(\xi) &= BR\xi - (\overline{C}_1 - c_2\overline{AR})\frac{1}{\xi} + 2\mu_2c_2\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{\phi_2(t)} dt}{t - \xi}, \\ \psi_2(\xi) &= BR\xi + (\overline{C}_2 - \overline{AR})\frac{1}{\xi} + 2\mu_2c_2\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{\phi_2(t)} dt}{t - \xi}.\end{aligned}\tag{35}$$

Ввиду равенства (30), два решения (35) тождественны.

Перейдем к нахождению постоянных  $A_1$  и  $B_1$  из уравнений (30), (34). Заменим в них постоянные  $C_1, C_2, D_1, D_2$  значениями (26):

$$\begin{aligned}(\mu_2 + \mu_1c_1)A_1 - 2\mu_1c_1(\mu_1 - \mu_2)\frac{A_1}{|A_1|} - m(\mu_1 - \mu_2)\overline{B}_1 &= \mu_1(1 + c_1)A, \\ m\left[\mu_1c_1 - \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_2 + \mu_1c_1)\frac{1}{|A|}\right]A_1 - 2\mu_1c_1m\left[\mu_1 + \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_1 - \mu_2)\frac{1}{|A|}\right]\frac{A_1}{|A_1|} - \\ - \left[\mu_1 + \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_1 - \mu_2)\frac{1}{|A|}\right]\overline{B}_1 &= -\mu_1(1 + c_1)\left[\overline{B} + m\mu_2c_2\frac{A}{|A|}\right].\end{aligned}\tag{36}$$

Используя первое уравнение (36), постоянную  $D$  можно записать так:

$$D = \frac{D_1 + D_2}{1 + c_2} = \left[ mA - (1 - m^2)\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1(1 + c_1)}\overline{B}_1 \right] R.$$

Из второго уравнения (36) выразим постоянную  $B_1$ :

$$\begin{aligned}\overline{B}_1 &= m\frac{\mu_1c_1 - \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_2 + \mu_1c_1)/|A|}{\mu_1 + \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_1 - \mu_2)/|A|}A_1 - 2\mu_1c_1m\frac{A_1}{|A_1|} + \\ &+ \frac{\mu_1(1 + c_1)}{\mu_1 + \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_1 - \mu_2)/|A|}\left[\overline{B} + m\mu_2c_2\frac{A}{|A|}\right].\end{aligned}$$

Подставив это выражение в первое уравнение (36), получим для постоянной  $A_1$  уравнение

$$\alpha A_1 - \beta\frac{A_1}{|A_1|} = \tau,\tag{37}$$

где

$$\alpha = \mu_2 + \mu_1c_1 - m^2(\mu_1 - \mu_2)\frac{\mu_1c_1 - \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_2 + \mu_1c_1)/|A|}{\mu_1 + \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_1 - \mu_2)/|A|},$$

$$\beta = 2\mu_1c_1(\mu_1 - \mu_2)(1 - m^2),$$

$$\tau = \mu_1(1 + c_1)\left[A + m\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2c_2 + \mu_2c_2(\mu_1 - \mu_2)/|A|}\left(\overline{B} + m\mu_2c_2\frac{A}{|A|}\right)\right].$$

Постоянная  $\alpha > 0$  всегда, знак  $\beta$  совпадает со знаком разности  $(\mu_1 - \mu_2)$ . Решение уравнения (37) имеет вид

$$A_1 = \frac{\tau}{\alpha} \pm \frac{\beta}{\alpha} \frac{\tau}{|\tau|}.$$

Нужно взять знак плюс, если  $\alpha|A_1| - \beta > 0$ , и знак минус, если  $\alpha|A_1| - \beta < 0$ .



При отсутствии касательных напряжений на бесконечности,  $s_{12}^\infty = s_{21}^\infty = 0$ , постоянные  $A, B, A_1, B_1$  вещественны, причем

$$A = \frac{1 + c_2}{2c_2}(s_{11} + s_{22})^\infty \pm 2\mu_2 \frac{(s_{11} + s_{22})^\infty}{|(s_{11} + s_{22})^\infty|}, \quad B = \frac{1 + c_2}{2}(s_{11} - s_{22})^\infty.$$

**4. Круговое включение.** В этой задаче параметр  $m = 0$ , уравнения (36) имеют вид

$$\begin{aligned} (\mu_2 + \mu_1 c_1)A_1 - 2\mu_1 c_1(\mu_1 - \mu_2) \frac{A_1}{|A_1|} &= \mu_1(1 + c_1)A, \\ (\mu_1 + \mu_2 c_2)B_1 + \mu_2 c_2(\mu_1 - \mu_2) \frac{1}{|A|} B_1 &= \mu_1(1 + c_1)B. \end{aligned}$$

Решение уравнений запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\mu_1(1 + c_1)}{\mu_2 + \mu_1 c_1} A \pm 2\mu_1 c_1 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 c_1} \frac{A}{|A|}, \\ B_1 &= \frac{\mu_1(1 + c_1)}{\mu_1 + \mu_2 c_2 + \mu_2 c_2(\mu_1 - \mu_2)/|A|} B. \end{aligned}$$

**5. Вычисление номинальных напряжений.** Номинальные напряжения и компоненты градиента деформации в векторном базисе криволинейных координат  $(r, \theta)$  плоскости  $z$  находятся по формулам

$$\begin{aligned} s_{rr} + i s_{r\theta} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} e^{-2i\gamma} = \frac{1}{\eta'(\xi)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\xi}} e^{-2i\theta} \right), \\ s_{\theta\theta} - i s_{\theta r} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} e^{-2i\gamma} = \frac{1}{\eta'(\xi)} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\xi}} e^{-2i\theta} \right), \\ g_{rr} + i g_{\theta r} &= \frac{1}{\eta'(\xi)} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\xi}} e^{-2i\theta} \right), \quad g_{\theta\theta} - i g_{r\theta} = \frac{1}{\eta'(\xi)} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\xi}} e^{-2i\theta} \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где  $\gamma$  — угол между осью  $x_1$  и нормалью к эллипсу  $r = \text{const}$  плоскости  $z$ , причем

$$e^{i\gamma} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\eta'(\xi)d\xi}{|\eta'(\xi)d\xi|} = \frac{\eta'(\xi)}{|\eta'(\xi)|} e^{i\theta}, \quad e^{2i\gamma} = \frac{\eta'(\xi)}{\overline{\eta'(\xi)}} e^{2i\theta}, \quad e^{-2i\gamma} = \frac{\overline{\eta'(\xi)}}{\eta'(\xi)} e^{-2i\theta}.$$

В частности, напряжения эллиптического включения таковы:

$$\begin{aligned} s_{rr} + i s_{r\theta} &= \frac{1}{1 + c_1} \left[ c_1 A_1 - 2\mu_1 c_1 \frac{A_1}{|A_1|} + \overline{B_1} e^{-2i\gamma} \right], \\ s_{\theta\theta} - i s_{\theta r} &= \frac{1}{1 + c_1} \left[ c_1 A_1 - 2\mu_1 c_1 \frac{A_1}{|A_1|} - \overline{B_1} e^{-2i\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Для напряжений и деформаций (38) справедливы формулы, аналогичные (13):

$$\begin{aligned} s_{rr} + i s_{r\theta} + 2\mu(g_{\theta\theta} - i g_{r\theta}) &= \varphi'(z), \\ s_{\theta\theta} - i s_{\theta r} + 2\mu(g_{rr} + i g_{\theta r}) &= \varphi'(z), \\ (s_{rr} + i s_{r\theta}) + (s_{\theta\theta} - i s_{\theta r}) &= \frac{2c}{1 + c} [\varphi'(z) - 2\mu e^{i\omega}]. \end{aligned} \quad (40)$$

Наибольший практический интерес представляют величины напряжений на контуре эллиптического включения. Напряжения  $(s_{rr} + is_{r\theta})$  непрерывны на контуре включения, а напряжения  $(s_{\theta\theta} - is_{\theta r})$  различны для включения в плоскости. Были выполнены расчеты напряжений для двух моделей гармонических материалов — полулинейного и материала Джона. Задача об эллиптическом включении в плоскость для гармонического материала Джона была исследована в работе [16] (ее перевод на английский язык см. в [17]). Для расчета напряжений и деформаций использованы формулы статьи [16]. Модель гармонического материала Джона определяется удельной энергией деформации (упругим потенциалом)

$$\Phi = 2\mu[F(I) - J], \quad I = \lambda_1 + \lambda_2, \quad J = \lambda_1\lambda_2,$$

здесь  $\lambda_1, \lambda_2$  — главные кратности удлинений,

$$8\mu d F'(I) = I + \sqrt{I^2 - 16cd},$$

постоянные  $d$  и  $c$  выражаются через модули упругости материала [16].

Приведем формулы для напряжений и деформаций для модели полулинейного материала. Напряжения включения вычисляются достаточно просто по формулам (39). На контуре эллиптического включения напряжения  $(s_{rr} + is_{r\theta})_2 = (s_{rr} + is_{r\theta})_1$  известны из этих формул. Чтобы найти окружные напряжения  $(s_{\theta\theta} - is_{\theta r})_2$  плоскости, сложим напряжения (38):

$$(s_{rr} + is_{r\theta} + s_{\theta\theta} - is_{\theta r})_2 = \frac{2c_2}{1 + c_2} \frac{\varphi'_2(\xi)}{\eta'(\xi)} \left( 1 - 2\mu_2 \left| \frac{\eta'(\xi)}{\varphi'_2(\xi)} \right| \right), \quad (41)$$

отношение функций  $\varphi'_2(\xi)/\eta'(\xi)$  приведем в виде

$$\frac{\varphi'_2(\xi)}{\eta'(\xi)} = \frac{A - D/\xi^2}{1 - m/\xi^2} = \frac{1}{\xi^2 - m} \left[ (\xi^2 - m)A + (1 - m^2) \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1(1 + c_1)} \bar{B}_1 \right]. \quad (42)$$

Полагая в (41), что  $\xi = t = e^{i\theta}$ , получим выражение

$$(s_{\theta\theta} - is_{\theta r})_2(t) = \frac{2c_2}{1 + c_2} \frac{\varphi'_2(t)}{\eta'(t)} \left( 1 - 2\mu_2 \left| \frac{\eta'(t)}{\varphi'_2(t)} \right| \right) - (s_{rr} + is_{r\theta})_1(t).$$

Кроме напряжений практический интерес представляет кратность удлинения контура эллиптического включения при разных нагрузках и параметрах материалов. Тензор деформации Грина—Лагранжа запишем через градиент деформации следующим образом:

$$\mathbf{I} + 2\mathbf{E} = \mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} = g_{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}e_\beta e_\gamma.$$

Кратность удлинения контура  $\lambda_\theta$  выразим через компоненты тензора  $\mathbf{G}$  так:

$$\lambda_\theta^2 = 1 + 2\varepsilon_{\theta\theta} = g_{r\theta}^2 + g_{\theta\theta}^2 = (g_{\theta\theta} - ig_{r\theta})(g_{\theta\theta} + ig_{r\theta}).$$

Из формул (40) следует, что

$$\begin{aligned} (s_{rr} + is_{r\theta})_1 + 2\mu_1(g_{\theta\theta} - ig_{r\theta})_1 &= \varphi'_1(z) = A_1, \\ (s_{rr} + is_{r\theta})_2 + 2\mu_2(g_{\theta\theta} - ig_{r\theta})_2 &= \varphi'_2(z) = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Учитывая равенство напряжений  $(s_{rr} + is_{r\theta})_1 = (s_{rr} + is_{r\theta})_2$  на контуре включения, из (43) получим формулу для кратности удлинений контура включения

$$\lambda_\theta^2 = \frac{1}{4(\mu_1 - \mu_2)^2} \left[ A_1 - \frac{\varphi'_2(\xi)}{\eta'(\xi)} \right] \left[ \bar{A}_1 - \frac{\overline{\varphi'_2(\xi)}}{\overline{\eta'(\xi)}} \right].$$

Отношение функций  $\varphi'_2(\xi)/\eta'(\xi)$  дано формулой (42).

На рис. 1–4 представлены графики окружных номинальных напряжений на границе включения для двух моделей гармонических материалов. Рассматривалась плоская деформация, поскольку модель материала Джона не позволяет исследовать плоское напряженное состояние [16]. Напряжения различны для плоскости и включения. Графики, расположенные слева, относятся к плоскости, графики справа — к включению. На каждом рисунке изображены графики напряжений для обеих моделей материалов, причем сплошная линия соответствует полулинейному материалу, пунктирная — материалу Джона. Размерность напряжений дана в мегапаскалях (МПа), угол  $\theta \in [0, \pi]$ . Использовались следующие варианты параметров материалов:

- 1)  $\mu_1 = 1$  МПа,  $\mu_2 = 3$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.49$ ;
- 2)  $\mu_1 = 3$  МПа,  $\mu_2 = 1$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.49$ .

Графики напряжений для этих параметров на рис. 1–4 показаны цифрами 1 и 2 соответственно.

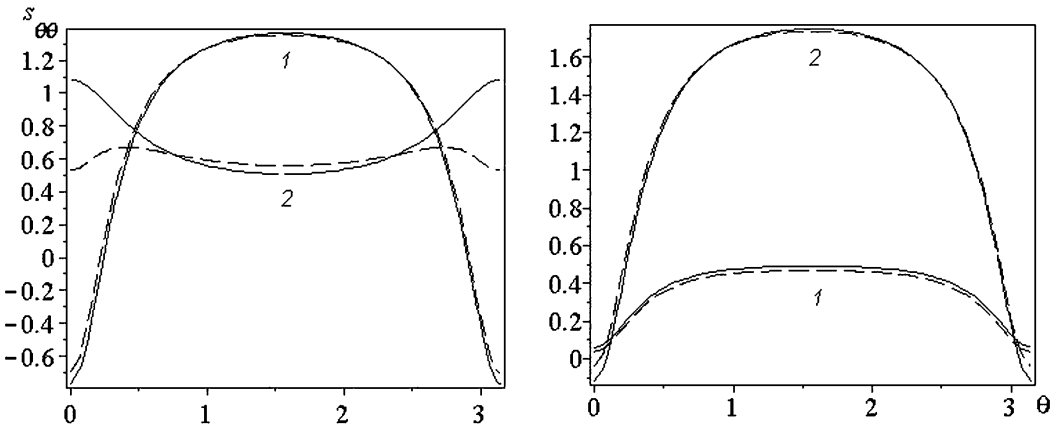


Рис. 1. Растяжение вдоль оси  $x_1$  при  $s_{11}^\infty = 1.0$  МПа

Геометрические параметры включения:  $a = 3$  см,  $b = 1$  см,  $R = 2$  см,  $m = 0.5$ . В качестве внешней нагрузки взято одноосное растяжение или сжатие плоскости вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$ .

На рис. 5 приведены графики кратности удлинений  $\lambda_\theta$  границы включения при растяжении вдоль оси  $x_1$  усилиями  $s_{11}^\infty = 1.0$  МПа (слева) и вдоль оси  $x_2$  усилиями  $s_{22}^\infty = 1.0$  МПа (справа) для двух вариантов параметров полулинейного материала. Первому варианту параметров соответствует сплошная линия, второму — пунктирная.

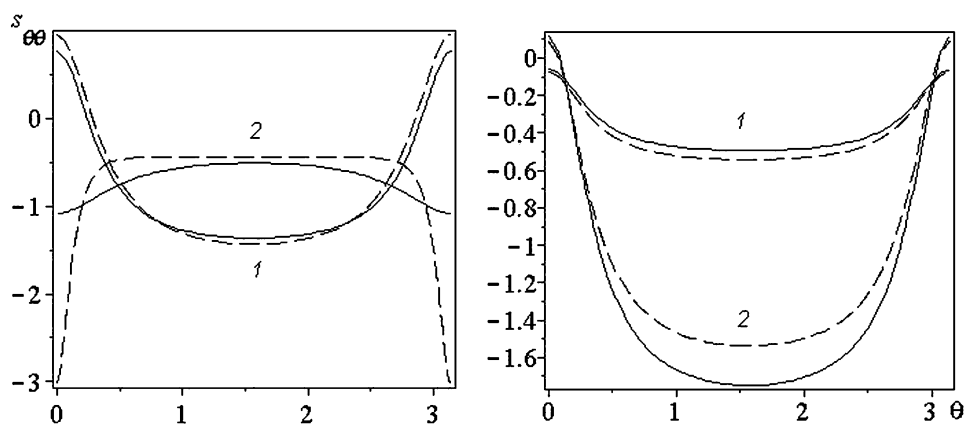


Рис. 2. Сжатие вдоль оси  $x_1$  при  $s_{11}^\infty = -1.0$  МПа

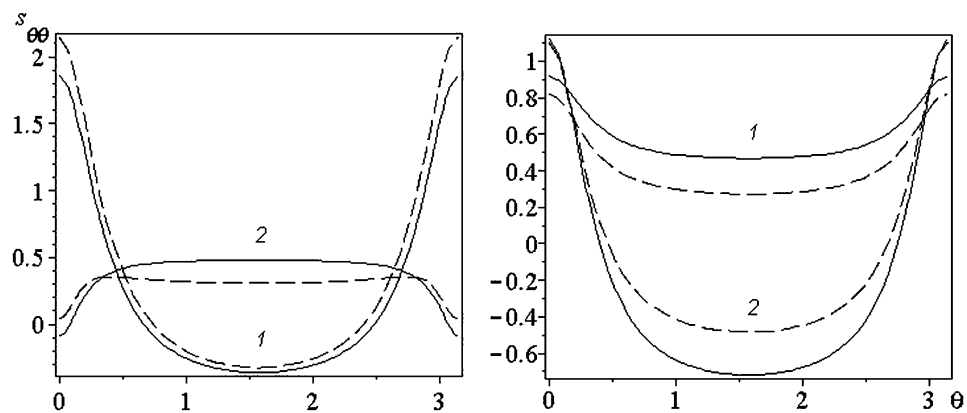


Рис. 3. Растяжение вдоль оси  $x_2$  при  $s_{22}^\infty = 1.0$  МПа

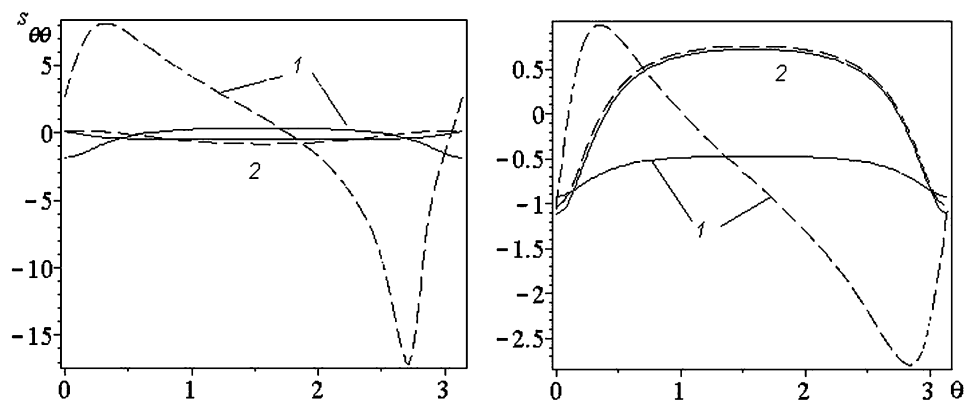


Рис. 4. Сжатие вдоль оси  $x_2$  при  $s_{22}^\infty = -1.0$  МПа

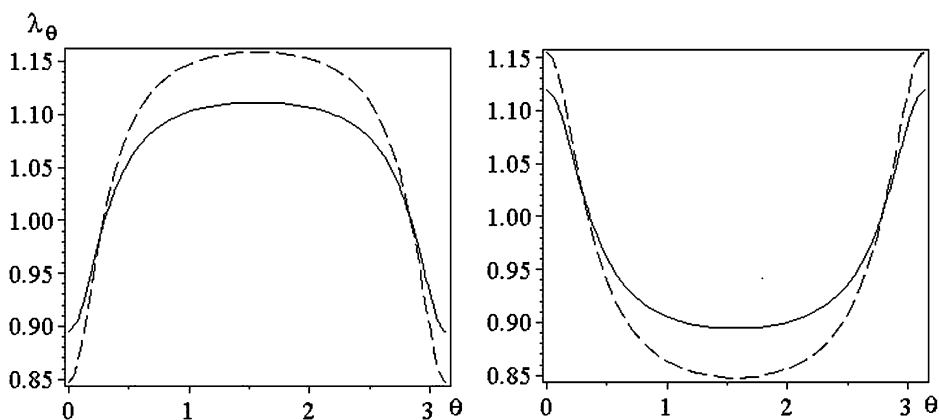


Рис. 5. Кратность удлинения границы включения при растяжении плоскости вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$

**6. Заключение.** Установлено (рис. 1–4), что напряжения для двух моделей материалов при растяжении плоскости вдоль оси  $x_1$  усилиями  $s_{11}^{\infty} = 1.0$  МПа отличаются мало, при сжатии плоскости усилиями  $s_{11}^{\infty} = -1.0$  МПа отличие напряжений существенно. При растяжении плоскости вдоль оси  $x_2$  усилиями  $s_{22}^{\infty} = 1.0$  МПа различие напряжений более значительно, чем вдоль оси  $x_1$ . В случае сжатия плоскости вдоль оси  $x_2$  произошла потеря устойчивости материала (рис. 4). Кратность удлинения контура включения, показанная на рис. 5, существенно больше для второго варианта параметров материала, чем для первого.

## Литература

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Commun. Pure and Applied Mathematics. 1960. Vol. 13. N 2. P. 239–296.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
5. Zubov L. M. Nonlinear theory of dislocations and declinations in elastic bodies. Berlin: Springer, 1997. 205 p.
6. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоские задачи упругости для полулинейного материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 3. С. 93–106.
7. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоские задачи о сосредоточенных силах для полулинейного материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 83–96.
8. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Stresses analysis of a plane with elliptical inclusion for the model of the semi-linear material // Intern. Conference on Mechanics — Eighth Polyakhov's Reading, AIP Conference Proceedings 1959. 2018. Art. no. 070022, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1063/1.5034697>
9. Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes // Journal of Elasticity. 1980. Vol. 10. N 4. P. 341–405.
10. Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // Acta Mechanica. 2002. Vol. 156. N 3–4. P. 219–234.
11. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A. Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics // Intern. Journal of Non-linear mechanics. 2005. Vol. 38. N 2–3. P. 281–287.
12. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Вып. 3. С. 114–126.

13. *Malkova Y. V., Malkov V. M.* Large deformation of a plate with an elastic elliptic inclusion for John's harmonic material // "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov (SCP). 2015 Intern. Conference. Saint Petersburg. 2015. P. 410–413.
14. *Domanskaia T., Malkov V., Malkova Yu.* Bi-material plane of John's harmonic material with a point force at interface // XXIV Intern. Congress of Theor. and Appl. Mech. (ICTAM), 21–26 August 2016. Montreal, Canada. 2016. P. 1958–1959.
15. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Доманская Т. О.* Анализ напряжений двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенной силы для двух моделей гармонического материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 1. С. 38–52.
16. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Моделирование нелинейной деформации плоскости с эллиптическим отверстием или включением гармоническим материалом Джона // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 121–130. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.114>
17. *Malkov V. M., Malkova Yu. V.* Modeling nonlinear deformation of a plate with an elliptic inclusion by John's harmonic material // Vestnik Saint Petersburg University. Mathematics. 2017. Vol. 50. Iss. 1. P. 74–81.
18. *Wang Xu.* Three-phase elliptical inclusion with internal uniform hydrostatic stresses in finite plane elastostatics // Acta Mechanica. 2011. Vol. 219. N 1–2. P. 93–97.
19. *Wheeler L. T.* Finite deformation of a harmonic elastic medium containing an ellipsoidal cavity // Intern. Journal of Solids Struct. 1985. Vol. 21. P. 799–804.
20. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Петрухин Р. Р.* Взаимодействие эллиптического отверстия с межфазной границей двух полуплоскостей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 73–87.
21. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Деформация пластины с упругим эллиптическим включением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2(60). Вып. 4. С. 617–632.
22. *Мальков В. М.* Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 276 с.
23. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

Статья поступила в редакцию 16 июня 2020 г.

Статья принята к печати 23 октября 2020 г.

Контактная информация:

*Мальков Вениамин Михайлович* — д-р физ.-мат. наук, проф.; [v.malkov@spbu.ru](mailto:v.malkov@spbu.ru)

*Малькова Юлия Вениаминовна* — канд. физ.-мат. наук, доц.; [y.malkova@spbu.ru](mailto:y.malkova@spbu.ru)

## The study of nonlinear deformation of a plane with an elliptical inclusion for harmonic materials

*V. M. Malkov, Yu. V. Malkova*

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Malkov V. M., Malkova Yu. V. The study of nonlinear deformation of a plane with an elliptical inclusion for harmonic materials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 4, pp. 375–390.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.403> (In Russian)

Analytical methods are used to study nonlinear deformation of a plane with an elliptical inclusion. The elastic properties of a material of the plane and inclusion are described with a semi-linear material. The external load is constant nominal (Piola) stresses at infinity. At the inclusion boundary, the conditions of the continuity for stresses and displacements are satisfied. Semi-linear material belongs to the class of harmonic, the methods of the theory of functions of a complex variable are applicable to solving nonlinear plane problems. Stresses

and displacements are expressed in terms of two analytical functions of a complex variable, determined by the boundary conditions on the inclusion contour. It is assumed that the stress state of an inclusion is uniform (the tensor of nominal stresses is constant). This hypothesis made it possible to reduce the difficult nonlinear problem of conjugation of two elastic bodies to the solution of two more simpler problems for a plane with an elliptical hole. The validity of this hypothesis is justified by the fact that the constructed solution exactly satisfies all the equations and boundary conditions of the problem. The same hypothesis was used earlier by other authors to solve linear and nonlinear problems of an elliptical inclusion. In the article, a comparative analysis of the stresses and strains is carried out for two models of harmonic materials — semi-linear and John's. Various variants of values of elasticity parameters of the inclusion and matrix have been considered.

*Keywords:* nonlinear plane problem, elliptical inclusion, harmonic material, method of complex-variable functions.

## References

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure and Applied Mathematics*, 1960, vol. 13, no. 2, pp. 239–296.
2. Lurie A. I. *Nelineynaya teoria uprugosti [Non-linear elasticity]*. Moscow, Nauka Publ., 1980, 512 p. (In Russian)
3. Lurie A. I. *Teoria uprugosti [Theory of elasticity]*. Moscow, Nauka Publ., 1970, 940 p. (In Russian)
4. Morozov N. F. *Matematicheskie voprosy teorii treschin [Mathematical problems theory of cracks]*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 256 p. (In Russian)
5. Zubov L. M. *Nonlinear theory of dislocations and declinations in elastic bodies*. Berlin, Springer Publ., 1997, 205 p.
6. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskye zadachi uprugosti dlya polulineynogo materiala [Plane problems of elasticity for semi-linear material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, iss. 3, pp. 93–106. (In Russian)
7. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskye zadachi o sosredotochennykh silah dlya polulineynogo materiala [Plane problems on concentrated forces for semi-linear material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2013, iss. 3, pp. 83–96. (In Russian)
8. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Stresses analysis of a plane with elliptical inclusion for the model of the semi-linear material. *Intern. Conference on Mechanics — Eighth Polyakhov's Reading, AIP Conference Proceedings 1959*. 2018. Art. no. 070022, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1063/1.5034697>
9. Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes. *Journal of Elasticity*, 1980, vol. 10, no. 4, pp. 341–405.
10. Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials. *Acta Mechanica*, 2002, vol. 156, no. 3–4, pp. 219–234.
11. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A. Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics. *Intern. Journal of Non-linear mechanics*, 2005, vol. 38, no. 2–3, pp. 281–287.
12. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Ploskaya zadacha nelineynoy uprugosti dlya garmonicheskogo materiala [Plane problem of non-linear elasticity for harmonic material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2008, iss. 3, pp. 114–126. (In Russian)
13. Malkova Y. V., Malkov V. M. Large deformation of a plate with an elastic elliptic inclusion for John's harmonic material. “*Stability and Control Processes*” in memory of V. I. Subov (SCP), 2015 *Intern. Conference*. Saint Petersburg, 2015, pp. 410–413.
14. Domanskaia T., Malkov V., Malkova Yu. Bi-material plane of John's harmonic material with a point force at interface. *XXIV Intern. Congress of Theor. and Appl. Mech. (ICTAM)*, 21–26 August 2016. Montreal, Canada, 2016, pp. 1958–1959.
15. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Domanskaya T. O. Analiz napryazheniy dvuhkomponentnoy ploskosti i poluploskosti pri deystvii sosredotochennoy sily dlya dvuh modeley garmonicheskogo materiala [Analysis of stresses of bi-material plane and half-plane at action of a point force for two models of harmonic materials]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2016, iss. 1, pp. 38–52. (In Russian)
16. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Modelirovanie nelineynoy deformatsii ploskosti s ellipticheskimi otverstiyami ili vklucheniem garmonicheskogo materialom Djona [Modeling nonlinear deformation of a plate

with an elliptic hole or inclusion by John's harmonic material]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4(62), iss. 1, pp. 121–130.  
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.114> (In Russian)

17. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Modeling nonlinear deformation of a plate with an elliptic inclusion by John's harmonic material. *Vestnik Saint Petersburg University. Mathematics*, 2017, vol. 50, iss. 1, pp. 74–81.

18. Wang Xu. Three-phase elliptical inclusion with internal uniform hydrostatic stresses in finite plane elastostatics. *Acta Mechanica*, 2011, vol. 219, no. 1–2, pp. 93–97.

19. Wheeler L. T. Finite deformation of a harmonic elastic medium containing an ellipsoidal cavity. *Intern. Journal of Solids Struct.*, 1985, vol. 21, pp. 799–804.

20. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Petrukhin R. R. Vzaimodeistvie ellipticheskogo otverstiya s meghfaznoy granicey dvuh poluploskostey [Interaction of an elliptic hole with interface of two bonded half-planes]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2016, iss. 3, pp. 73–87. (In Russian)

21. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Deformaciya plastinu s uprugim ellipticheskim vklucheniem [Deformation of a plate with elliptic elastic inclusion]. *Vestnik Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2015, vol. 2(60), iss. 4, pp. 617–632. (In Russian)

22. Malkov V. M. *Vvedenie v nelineynuyu uprugost* [Introduction to non-linear elasticity]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Press, 2010, 276 p. (In Russian)

23. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 708 p. (In Russian)

Received: June 16, 2020.

Accepted: October 23, 2020.

#### A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

*Venyamin M. Malkov* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; [v.malkov@spbu.ru](mailto:v.malkov@spbu.ru)

*Yulia V. Malkova* — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; [y.malkova@spbu.ru](mailto:y.malkova@spbu.ru)