УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4
MSC 60F15

Об оценках скоростей сходимости в комбинаторных сильных предельных теоремах и их приложениях*

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фролов А. Н.* Об оценках скоростей сходимости в комбинаторных сильных предельных теоремах и их приложениях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 688–698. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.410

Найдены необходимые и достаточные условия сходимости рядов взвешенных вероятностей больших уклонений комбинаторных сумм $\sum_i X_{ni\pi_n(i)}$, где $\|X_{nij}\|$ — матрица порядка n независимых случайных величин, а $(\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(n))$ — случайная перестановка с равномерным распределением на множестве перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, не зависящая от X_{nij}. Получены комбинаторные варианты результатов об оценках скоростей сходимости в усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма при условиях, близких к оптимальным. Обсуждается приложение полученных результатов к ранговым статистикам.

Ключевые слова: комбинаторные суммы, скорость сходимости, закон повторного логарифма, усиленный закон больших чисел, оценки Баума — Каца, комбинаторный закон повторного логарифма, комбинаторный усиленный закон больших чисел, ранговые статистики, коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

1. Введение. Пусть $\{\mathbf{X}_n = \|X_{nij}\|_{i,j=1}^n\}_{n=2}^\infty$ — последовательность матриц независимых случайных величин, $\mathbf{E}X_{nij} = c_{nij}$ и $\sigma_{nij}^2 = \mathbf{D}X_{nij}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $n \geqslant 2$. Пусть $\{\pi_n\}_{n=2}^\infty$ — последовательность случайных перестановок таких, что π_n имеет равномерное распределение на множестве всех перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$ для всех n. Предположим, что $\mathbf{X}_n$ и π_n независимы для всех n.

Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_{ni\pi_n(i)}$$

для всех $n \geqslant 2$, где $\pi_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(n))$.

Мы будем также предполагать, что для любого $n \geqslant 2$ выполняются соотношения

$$\sum_{j=1}^n c_{nij} = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n c_{nij} = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \qquad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00393).

Условие (1) играет ту же роль, что и условие центрированности слагаемых в классической теории суммирования. Оно влечет $\mathbf{E}S_n = 0$ для всех n. Кроме того,

$$B_n = \mathbf{D}S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} c_{nij}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{nij}^2$$

для всех $n \geqslant 2$.

Настоящая работа посвящена оценкам скоростей сходимости в усиленном законе больших чисел (УЗБЧ) и законе повторного логарифма (ЗПЛ) для комбинаторных сумм S_n.

Асимптотическое поведение комбинаторных сумм исследовать сложнее, чем поведение сумм независимых случайных величин. Это связано с тем, что при изменении индекса значительно меняется состав слагаемых комбинаторной суммы. Поэтому нет неравенств, аналогичных неравенствам Колмогорова и Леви, позволяющих доказывать оценку сверху в ЗПЛ. Если отказаться от использования таких неравенств, то верхнюю оценку можно получить только для более тяжелой нормировки. Кроме того, нижняя оценка в ЗПЛ существенно использует независимость приращений. Приращения комбинаторных сумм не являются независимыми.

В настоящей работе мы найдем условия, достаточные для сходимости ряда

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n}\mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \sqrt{B_n}h(n)\right),$$

где $f(x)$ и $h(x)$ — положительные функции такие, что $f(x) \to \infty$ и $h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. В частности, из сходимости ряда R при $f(x) = x$ и леммы Бореля—Кантелли мы получим некоторые результаты о сходимости с вероятностью 1.

Имеется довольно значительная литература, посвященная сходимости подобных рядов. Это связано с понятием сходимости вполне, введенным Сюем и Роббинсом [1]: последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится вполне к ξ, если для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum_n \mathbf{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon).$$

Соответствующие результаты для нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин можно рассматривать как результаты о скорости сходимости в законе больших чисел (ЗБЧ). В основе этого лежит идея оценивать скорость убывания последовательности положительных чисел с помощью сходимости ряда из этих чисел с весами. Обобщения результатов Сюя и Роббинса были получены Баумом и Кацем [2, 3]. С тех пор и до настоящего времени эта область интенсивно развивается. При этом рассматриваются как нормированные суммы, так и их супремумы. Это приводит в случае степенных нормировок к оценкам в слабом и усиленном ЗБЧ. В случае нормировок, подобных нормировкам в ЗПЛ, получаются оценки в обобщенном ЗПЛ. К настоящему моменту имеется значительное число работ в этом направлении. Ссылки на ранние результаты и их формулировки можно найти в монографиях В. В. Петрова [4, 5]. Для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин результаты, близкие к окончательным, были получены Гутом и Спатару [6], Л. В. Розовским [7], Гутом и Штайнебахом [8]. Исследовались также различные формы зависимостей случайных величин (см., например, монографию А. В. Булинского и А. П. Шашкина [9]).

Для комбинаторных сумм подобных результатов нет, и в этой статье мы их получим. При доказательстве мы будем использовать новые неравномерные оценки в комбинаторной центральной предельной теореме (ЦПТ), которые представляют и самостоятельный интерес. Кроме того, мы воспользуемся также новыми результатами о больших уклонениях комбинаторных сумм.

2. Неравномерные оценки в комбинаторной центральной предельной теореме и оценки скоростей сходимости в комбинаторных законе больших чисел и законе повторного логарифма. Мы начнем этот параграф со следующей неравномерной оценки в комбинаторной ЦПТ, выраженной в терминах дробей Ляпунова.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1). *Пусть* $g(x)$ *— положительная, четная функция такая, что* $g(x)$ *и* $x/g(x)$ *не убывают для* $x > 0$. *Предположим, что* $g_{nij} = E(X_{nij} - \mu_{nij})^2 g(X_{nij} - \mu_{nij}) < \infty$ *для всех* $1 \leqslant i, j \leqslant n$ *и всех* $n \geqslant 2$, *где либо все* μ_{nij} *совпадают с* c_{nij}, *либо все* μ_{nij} *равны нулю. Положим*

$$L_n = \frac{1}{B_n^{3/2} n} \sum_{i,j=1}^{n} |\mu_{nij}|^3 + \frac{1}{B_n g(\sqrt{B_n}) n} \sum_{i,j=1}^{n} g_{nij}.$$

Тогда существуют абсолютные положительные постоянные C *и* δ *такие, что если* $L_n \leqslant \delta$, *то*

$$\left| P(S_n < x\sqrt{B_n}) - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{C L_n \ln L_n^{-1}}{1 + x^2} \tag{2}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ *и всех* n.

Теореме 1 можно придать более общий вид с учетом следующего замечания.

Замечание 1. В теореме 1 вместо одной функции $g(x)$ можно брать функции $g_n(x)$, различные для разных n.

Доказательство. Положим

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P(S_n < x\sqrt{B_n}) - \Phi(x) \right|.$$

Так как $S_n/\sqrt{B_n}$ имеет нулевое среднее и единичную дисперсию, из результата Бхаттачария и Ранга Рао [10, с. 115] следует, что $\Delta_n \leqslant 0.5416$. По теореме 12 главы V монографии В. В. Петрова [4] неравенство

$$\left| P(S_n < x\sqrt{B_n}) - \Phi(x) \right| \leqslant 16.5\, \frac{\Delta_n \ln \Delta_n^{-1}}{1 + x^2}$$

выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$. По теореме 2 из работы автора [11] существует абсолютная положительная постоянная A такая, что $\Delta_n \leqslant A L_n$. Функция $x \ln x^{-1}$ возрастает при $0 < x < e^{-1}$. Если $AL_n \leqslant e^{-1}$, то $\Delta_n \ln \Delta_n^{-1} \leqslant AL_n \ln(AL_n)^{-1}$. Если дополнительно $L_n \leqslant A$, то $\ln(AL_n)^{-1} \leqslant \ln L_n^{-2}$ и $\Delta_n \ln \Delta_n^{-1} \leqslant 2AL_n \ln L_n^{-1}$. Положив $\delta = \min\{A, (Ae)^{-1}\}$ и $C = 33A$, мы приходим к требуемому результату. $\square$

В силу замечания 1 из [11] при $\mu_{nij} = c_{nij}$ в доказательстве теоремы 1 можно положить $A = 2\max\{1810, 78A_0 + 5\}$. Здесь A_0 — абсолютная константа из неравенства Эссеена для комбинаторных сумм в случае конечности третьих моментов X_{nij}. К настоящему моменту A_0 не найдена с точностью хотя бы приблизительно близкой к соответствующим константам классической теории. Из работы Чена и Фанга [12] следует, что можно взять $A_0 = 451$. Тогда $A = 70366$, $C = 2322078$ и можно взять $\delta = 0.000006$. Ясно, что указание подобных констант в результатах пока (до уточнения констант в неравенствах Эссеена для комбинаторных сумм) нецелесообразно.

Перейдем к результатам о сходимости рядов.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ и $h(x)$ — положительные функции такие, что $f(x) \to \infty$ и $h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Пусть выполнены условия теоремы 1, $L_n \leqslant \delta$ и сходится ряд*

$$\sum_n \frac{f(n) L_n \ln L_n^{-1}}{n h^2(n)}.$$

Ряд R сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_n \frac{f(n)}{n h(n)} e^{-h^2(n)/2}. \tag{3}$$

Доказательство. По теореме 1 мы имеем

$$\mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \sqrt{B_n} h(n)\right) \leqslant 2\,(1 - \Phi(h(n))) + \frac{2CL_n \ln L_n^{-1}}{1 + h^2(n)}$$

для всех n. Аналогично заключаем, что неравенство

$$2\,(1 - \Phi(h(n))) \leqslant \mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \sqrt{B_n} h(n)\right) + \frac{2CL_n \ln L_n^{-1}}{1 + h^2(n)}$$

выполнено для всех n. Отсюда следует, что сходимость ряда R эквивалентна сходимости ряда $\sum_n n^{-1} f(n)(1 - \Phi(h(n)))$. Так как

$$1 - \Phi(h(n)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} h(n)} e^{-h^2(n)/2} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

мы получаем требуемое. $\square$

Рассмотрим важный частный случай $f(x) = h^2(x)$. Из теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $h(x)$ — положительная функция такая, что $h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Пусть выполнены условия теоремы 1, $L_n \to 0$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum_n n^{-1} L_n \ln L_n^{-1}$ сходится. Ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^2(n)}{n} \mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \sqrt{B_n} h(n)\right) \tag{4}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_n \frac{h(n)}{n} e^{-h^2(n)/2}. \tag{5}$$

Отметим, что при исследовании сходимости ряда (4) можно также использовать результаты об умеренных и больших уклонениях комбинаторных сумм из работ автора [13, 14]. Это мы сделаем в следующем параграфе, а также проведем сравнение полученных результатов.

Сейчас мы перейдем к результату, позволяющему оценить близость условий теоремы 3 к оптимальным условиям классической теории суммирования. Для этого мы положим $\mu_{nij} = 0$ для всех i, j и n и $g(x) = (\ln_+ |x|)(\ln_+ \ln_+ |x|)^{2+\tau}$, где $\tau > 0$, и $\ln_+ x = \ln(1+x)$ для $x > 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (1). *Предположим, что* $\liminf\limits_{n\to\infty} B_n/n > 0$ *и* $g_{nij} = EX_{nij}^2(\ln_+ |X_{nij}|)(\ln_+ \ln_+ |X_{nij}|)^{2+\tau} \leqslant D < \infty$ *для некоторого* $\tau > 0$ *и для всех* $1 \leqslant i, j \leqslant n$ *и всех* $n \geqslant 2$.

Ряд (4) *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* (5).

Доказательство. В условиях теоремы 4 мы имеем $B_n \geqslant dn$ и

$$L_n = \frac{1}{B_n g(\sqrt{B_n})n} \sum_{i,j=1}^{n} g_{nij} \leqslant \frac{Dn}{B_n g(\sqrt{B_n})} \leqslant \frac{D}{dg(\sqrt{dn})} \leqslant \frac{2D}{d\ln n(\ln\ln n)^{2+\tau}} = \delta_n \qquad (6)$$

для всех достаточно больших n, где $d > 0$. Функция $x \ln x^{-1}$ возрастает при $x \leqslant e^{-1}$. Поэтому

$$L_n \ln L_n^{-1} \leqslant \delta_n \ln \delta_n^{-1} = O\left(\frac{1}{(\ln n)(\ln\ln n)^{1+\tau}}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_n n^{-1} L_n \ln L_n^{-1}$ из теоремы 3 сходится. По теореме 3 получаем требуемое. □

Несложно убедиться в справедливости следующего замечания.

Замечание 2. При $\mu_{nij} = c_{nij}$ для всех i, j и n результаты теоремы 4 и ее следствий сохранятся, если в определении моментов g_{nij} заменить случайные величины X_{nij} их центрированными аналогами $X_{nij} - c_{nij}$.

Если в теореме 4 предположить дополнительно, что все X_{nij} одинаково распределены, то автоматически должно выполняться условие $\mathbf{E}X_{nij} = 0$ для всех i, j и n в силу (1). В этом случае комбинаторная сумма совпадает с суммой независимых одинаково распределенных случайных величин. В работе Дейвиса [15] показано, что при $\mathbf{E}X^2(\ln_+ |X|)(\ln_+ \ln_+ |X|) < \infty$ сходимость ряда (4) для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин эквивалентна сходимости ряда (5). При этом условие $\mathbf{E}X^2 < \infty$ не может быть ослаблено, так как при бесконечном втором моменте в случае притяжения к нормальному закону нормировка отличается от $\sqrt{n}$ и характер результата изменится. Таким образом, условия теоремы 4 близки к оптимальным.

Из теорем 3 и 4 при $h(x) = \sqrt{(2+\varepsilon)\ln\ln x}$ мы получим такой результат о скорости сходимости в комбинаторном ЗПЛ.

Следствие 1. *Если выполнены условия одной из теорем 3 и 4, то ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\ln n}{n} \mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \sqrt{(2+\varepsilon)B_n \ln\ln n}\right) \qquad (7)$$

сходится для любого $\varepsilon > 0$ *и расходится для любого* $\varepsilon \in (-2, 0)$. *Если дополнительно выполнены условия* $\liminf\limits_{n\to\infty} B_n/n > 0$ *и* $\limsup\limits_{n\to\infty} B_n/n < \infty$, *то в* (7) *можно заменить* $\ln\ln n/n$ *на* $\ln\ln B_n/B_n$ *и* $\ln\ln n$ *на* $\ln\ln B_n$.

При $h(x) = \varepsilon n^q$ с $q > 0$ и $\varepsilon > 0$ из теоремы 4 вытекает следующий комбинаторный вариант оценки Баума — Каца скорости сходимости в УЗБЧ.

Следствие 2. *Пусть $q > 0$. Если выполнены условия теоремы 4, то ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2q-1}\mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}n^q\right) \tag{8}$$

сходится для любого $\varepsilon > 0$. Если дополнительно выполнено условие $\limsup\limits_{n\to\infty} B_n/n < \infty$, то в (8) можно заменить B_n на n.

В работе Баума и Каца [3] доказано, что при $q > 0$ для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин сходимость ряда, аналогичного ряду (8), эквивалентна условиям $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Таким образом, моментные условия следствия 2 близки к оптимальным в этом случае.

Отметим, что следствие 2 при $q = 1/2$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} B_n/n < \infty$ вместе с леммой Бореля — Кантелли дают комбинаторный УЗБЧ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad \text{п. н.} \tag{9}$$

Этот результат по моментным условиям лучше, чем результаты в работах автора [16, 17], но в последних работах не предполагается независимость элементов матриц $\mathbf{X}_n$.

3. Большие уклонения и оценки скоростей сходимости. Мы уже отметили выше, что при исследовании сходимости ряда (4) можно использовать результаты о нормальной сходимости в узких зонах. По теореме 2 из работы автора [13] соотношение

$$\mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \sqrt{B_n}h(n)\right) \sim 2(1 - \Phi(h(n))) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

выполнено для всех $h(n)$ таких, что $h(n) \leqslant \sqrt{2\ln L_n^{-1} - \ln\ln L_n^{-1} - \theta_n}$. Здесь $\{\theta_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел такая, что $\theta_n \to \infty$ и $\theta_n = o(\ln\ln L_n^{-1})$ при $n \to \infty$.

В случае, соответствующем теореме 3, применение последнего соотношения приводит к замене условия сходимости ряда $\sum_n n^{-1}L_n \ln L_n^{-1}$ на ограничение сверху для $h(n)$. В то же время если ряд (5) сходится для некоторой функции $h(n)$, то и для возрастающих быстрее функций он тоже сходится. Поэтому ограничения на рост $h(n)$ будут сокращать область применимости полученного результата. Однако это все же может быть полезным, когда L_n стремится к нулю слишком медленно и теорема 3 не применима.

Теперь сформулируем следующий результат, вытекающий из теоремы 2 работы автора [13].

Теорема 5. *Заключение теоремы 3 останется справедливым, если условие сходимости ряда $\sum_n n^{-1}L_n \ln L_n^{-1}$ заменить условием $h(n) \leqslant \sqrt{2\ln L_n^{-1} - \ln\ln L_n^{-1} - \theta_n}$.*

Любопытно, что из этой теоремы нельзя получить результат следствия 1 в условиях теоремы 4. Действительно, для простоты дополнительно предположим, что

$B_n \sim cn$ при $n \to \infty$ и $g_{nij} > g_0 > 0$ для всех i, j и n. Тогда L_n с точностью до множителя ведет себя как δ_n из (6) при $n \to \infty$ и верхняя граница для $h(n)$ эквивалентна $\sqrt{2 \ln \ln n}$. Зона нормальной сходимости оказалась немного у́же необходимой для получения оценки в ЗПЛ.

Узость зоны нормальной сходимости в настоящий момент можно скомпенсировать лишь применением результатов для слагаемых с экспоненциальными моментами. Отметим, что пока отсутствуют результаты при более слабых моментных предположениях. Это связано с тем, что результаты об умеренных уклонениях были получены из оценок типа неравенств Эссеена для комбинаторных сумм (см. [13]). Исследование больших уклонений методами, сходными с методами классической теории только начались. Работа автора [14] является первой работой в этом направлении. Исследования естественно начинать со случая конечных экспоненциальных моментов, как это было и в классической теории.

Из теоремы 1 работы автора [14] вытекает следующий результат.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (1). *Пусть* $\{M_n\}$ *— неубывающая последовательность положительных чисел такая, что при* $s = 1, 2, 3$ *неравенства*

$$\left|\mathbf{E}X_{nij}^k\right| \leqslant Dk! M_n^{k-s} \mathbf{E}|X_{nij}|^s \tag{10}$$

выполняются для всех $k \geqslant s$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ *и* $n \geqslant 2$, *где* D *— абсолютная положительная постоянная. Положим*

$$\gamma_n = \max\left\{\max_{i,j} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{B_n}} \mathbf{E}|X_{nij}|,\ \max_i \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{E}X_{nij}^2}{B_n},\ \max_j \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{E}X_{nij}^2}{B_n},\ \sum_{i,j=1}^n \frac{\mathbf{E}|X_{nij}|^3}{\sqrt{n} B_n^{3/2}}\right\}.$$

Пусть $h^3(n) = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$ *и* $h(n) = o(\sqrt{B_n}/M_n)$ *при* $n \to \infty$.

Ряд R *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* (3).

Неравенства (10) представляют из себя аналог неравенств Бернштейна, выполнение которых эквивалентно условию существования экспоненциальных моментов в классической теории суммирования.

Если существует неубывающая последовательность положительных постоянных $\{M_n\}$ такая, что $\mathbf{P}(|X_{nij}| \leqslant M_n) = 1$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $n \geqslant 2$, то условие (10) выполнено. В вырожденном случае $\mathbf{P}(X_{nij} = c_{nij}) = 1$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $n \geqslant 2$ условие (10) выполнено с $M_n = \max_{i,j} |c_{nij}|$ для всех n.

4. Приложения к ранговым статистикам. Так как вектор рангов выборки объема n с непрерывным распределением имеет равномерное распределение на множестве перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, всякая линейная ранговая статистика является комбинаторной суммой с вырожденными X_{nij}. Простые ранговые статистики соответствуют случаю $c_{nij} = a_{ni} b_{nj}$.

В качестве примера применения теоремы 6 мы рассмотрим поведение коэффициента ранговой корреляции Спирмена. В этом случае $a_{ni} = b_{ni} = 2(n-1)^{-1}(i - (n+1)/2)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и

$$c_{nij} = \frac{4}{(n-1)^2}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)\left(j - \frac{n+1}{2}\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Несложно проверить, что условие (1) здесь выполнено. Ранговый коэффициент корреляции ϱ Спирмена определяется соотношением

$$\varrho = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} \right) \left(\pi_i - \frac{n+1}{2} \right) = \frac{3(n-1)^2}{n(n^2-1)} S_n.$$

В нашем случае $M_n = 1$ и

$$B_n = \mathbf{D} S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i.j=1}^{n} c_{nij}^2 = \frac{16}{(n-1)^5} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(j - \frac{n+1}{2} \right)^2 \right)^2 = \frac{16}{(n-1)^5} \left(\frac{n(n^2-1)}{12} \right)^2.$$

Мы имеем $B_n \sim n/9$ и

$$\begin{aligned}
&\max_{i,j} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{B_n}} \mathbf{E}|X_{nij}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{B_n}} = O(1), \\
&\max_{i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E} X_{nij}^2}{B_n} \leqslant \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} c_{nij}^2 \leqslant \frac{4}{B_n (n-1)^2} \sum_{j=1}^{n} \left(j - \frac{n+1}{2} \right)^2 = O(1), \\
&\max_{j} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E} X_{nij}^2}{B_n} = O(1), \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}|X_{nij}|^3}{\sqrt{n} B_n^{3/2}} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \frac{c_{nij}^2}{\sqrt{n} B_n^{3/2}} = O(1)
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $\gamma_n = O(1)$ и $h(n) = o(n^{1/6})$ при $n \to \infty$ в последней теореме. В данном случае имеет место соотношение

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \mathbf{P} \left(|S_n| \geqslant \sqrt{B_n} h(n) \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \mathbf{P} \left(\sqrt{n-1} |\rho| \geqslant h(n) \right).$$

Положив $f(x) = x$ и $h(x) = \sqrt{(2+\varepsilon)\ln x}$ с $\varepsilon > 0$, по теореме 6 мы получим сходимость ряда R. По лемме Бореля—Кантелли мы имеем

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{\ln n}} |\rho| \leqslant \sqrt{2} \quad \text{п. н.}$$

Этот результат для ϱ лучше, чем в [16, 17], но в последних работах рассматривалась более общая ситуация при более слабых моментных ограничениях. Последнее неравенство дает оценку скорости сходимости в УЗБЧ для ϱ (т. е. в соотношении (9) с заменой S_n на $n\varrho$). В силу указанных выше причин, мы не можем улучшить эту оценку до аналога классического ЗПЛ. Отметим, что для $g(x) = x$ дробь Ляпунова L_n имеет порядок $n^{-1/2}$ при $n \to \infty$ и получить последний результат с помощью теоремы 2 не удается. Однако, взяв $f(x) = h^2(x)$ и $h(x) = \sqrt{(2+\varepsilon)\ln\ln x}$ с $\varepsilon > 0$, и по теореме 3, и по теореме 6 мы получим сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\ln n}{n} \mathbf{P} \left(\sqrt{n-1} |\rho| \geqslant \sqrt{(2+\varepsilon)\ln\ln n} \right)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Для $\varepsilon < 0$ последний ряд расходится.

Теорема 3 (и ее следствия) в отличие от теоремы 6 позволяет рассматривать X_{nij} при значительно более слабых моментных ограничениях. В работе автора [17] можно найти пример обобщенных ранговых статистик, для которых теорема 6, вообще говоря, неприменима. Тем самым мы показали, что полезны оба типа результатов, дополняющих друг друга.

Автор выражает благодарность анонимным рецензентам за ряд замечаний, способствовавших улучшению статьи.

Литература

1. *Hsu P. L., Robbins H.* Complete convergence and the law of large numbers // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1947. Vol. 33. P. 25–31.

2. *Baum L. E., Katz M.* Convergence rate in the law of large numbers // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 69. P. 771–772.

3. *Baum L. E., Katz M.* Convergence rate in the law of large numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 120. P. 108–123.

4. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

5. *Petrov V. V.* Limit theorems of probability theory. Sequences of independent random variables. Oxford: Clarendon Press, 1995.

6. *Gut A., Spataru A.* Precise asymptotics in Baum-Katz and Davis law of large numbers // J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol. 248. P. 233–246.

7. *Розовский Л. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона // Записки научн. семин. ПОМИ. 2002. Т. 294. С. 165–193.

8. *Gut A., Steinebach J.* Convergence rate in precise asymptotics // J. Math. Analysis Appl. 2012. Vol. 390. P. 1–14.

9. *Булинский А. В., Шашкин А. П.* Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.

10. *Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р.* Аппроксимации нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982.

11. *Frolov A. N.* Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT // J. Statist. Planning and Inference. 2014. Vol. 149. P. 90–97.

12. *Chen L. H. Y., Fang X.* 0n the error bound in a combinatorial central limit theorem // Bernoulli. 2013. Vol. 21, no. 1. P. 335–359.

13. *Фролов А. Н.* О вероятностях умеренных уклонений комбинаторных сумм // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2 (60). Вып. 1. С. 60–67.

14. *Frolov A. N.* On large deviations of combinatorial sums. 2019. ArXiv: 1901.04244.

15. *Davis J. A.* Convergence rate for the law of the iterated logarithm // Ann. Math. Statist. 1968. Vol. 39, no. 5. P. 1479–1485.

16. *Frolov A. N.* On a combinatorial strong law of large numbers // Istatistik: Journ. of Turkish Statist. Assoc. 2018. Vol. 11, no. 3. P. 46–52. URL: http://jtsa.ieu.edu.tr/current/1.pdf (дата обращения: 03.09.2020).

17. *Фролов А. Н.* О комбинаторном усиленном законе больших чисел и ранговых статистиках // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 490–499. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.311

Статья поступила в редакцию 19 декабря 2019 г.;
после доработки 15 февраля 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Фролов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

On bounds for convergence rates in combinatorial strong limit theorems and its applications*

A. N. Frolov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Frolov A. N. On bounds for convergence rates in combinatorial strong limit theorems and its applications. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 688–698. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.410 (In Russian)

We find necessary and sufficient conditions for convergences of series of weighted probabilities of large deviations for combinatorial sums $\sum_i X_{ni\pi_n(i)}$, where $\|X_{nij}\|$ is a matrix of order n of independent random variables and $(\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(n))$ is a random permutation with the uniform distribution on the set of permutations of numbers $1, 2, \ldots, n$, independent with X_{nij}. We obtain combinatorial variants of results on convergence rates in the strong law of large numbers and the law of the iterated logarithm under conditions closed to optimal ones. We discuss applications to rank statistics.

Keywords: combinatorial sums, convergence rate, law of the iterated logarithm, strong law of large numbers, Baum — Katz bounds, combinatorial strong law of large numbers, combinatorial law of the iterated logarithm, rank statistics, Spearman's coefficient of rank correlation.

References

1. Hsu P. L., Robbins H., "Complete convergence and the law of large numbers", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **33**, 25–31 (1947).

2. Baum L. E., Katz M., "Convergence rate in the law of large numbers", *Bull. Amer. Math. Soc.* **69**, 771–772 (1963).

3. Baum L. E., Katz M., "Convergence rate in the law of large numbers", *Trans. Amer. Math. Soc.* **120**, 108–123 (1965).

4. Petrov V. V., *Limit theorems for sums of independent random variables* (Nauka Publ., Moscow, 1987). (In Russian)

5. Petrov V. V., *Limit theorems of probability theory. Sequences of independent random variables* (Clarendon Press, Oxford, 1995).

6. Gut A., Spataru A., "Precise asymptotics in Baum — Katz and Davis law of large numbers", *J. Math. Anal. Appl.*, **248**, 233–246 (2000).

7. Rozovskii L. V., "Some limit theorems for large deviations of sums of independent random variables with joint distribution function from the domain of attraction of the normal law", *Zapiski Nauch. Semin. POMI*, **294**, 165–193 (2002). (In Russian)

8. Gut A., Steinebach J., "Convergence rate in precise asymptotics", *J. Math. Analysis Appl.* **390**, 1–14 (2012).

9. Bulinskii A. V., Shashkin A. P., *Limit theorems for associated random fields and related systems* (Fizmatlit Publ., Moscow, 2008). (In Russian)

10. Bhattacharya R. N., Ranga Rao R., *Approximations by the normal distribution and asymptotic expansion* (Nauka Publ., Moscow, 1982).

11. Frolov A. N., "Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT", *J. Statist. Planning and Inference* **149**, 90–97 (2014).

12. Chen L. H. Y., Fang X., "0n the error bound in a combinatorial central limit theorem", *Bernoulli* **21** (1), 335–359 (2013).

13. Frolov A. N., "On the probabilities of moderate deviations for combinatorial sums", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **48** (1), 23–28 (2015).

14. Frolov A. N., "On large deviations of combinatorial sums", ArXiv: 1901.04244 (2019).

15. Davis J. A., "Convergence rate for the law of the iterated logarithm", *Ann. Math. Statist.* **39** (5), 1479–1485 (1968).

*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 18-01-00393).

16. Frolov A. N., “On a combinatorial strong law of large numbers”, *Istatistik: Journ. of Turkish Statist. Assoc.* **11** (3), 46–52 (2018). Available at: http://jtsa.ieu.edu.tr/current/1.pdf (accessed: September 3, 2020).

17. Frolov A. N., “On combinatorial strong law of large numbers and rank statistics”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 3, 336–343 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120030073

Received: December 19, 2019
Revised: February 15, 2020
Accepted: June 18, 2020

Author's information:

Andrei N. Frolov — Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru