УДК 512.741.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4
MSC 14L05, 11S31

Точки кручения обобщенных формальных групп Хонды*

О. В. Демченко, С. В. Востоков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Демченко О. В., Востоков С. В.* Точки кручения обобщенных формальных групп Хонды // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 597–606.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.403

Обобщенные формальные группы Хонды представляют из себя класс формальных групп, который, в частности, включает все формальные группы над кольцом целых локальных полей, слабо разветвленных над $\mathbb{Q}_p$. Этот класс является следующим в цепочке *мультипликативная формальная группа — формальные группы Любина — Тейта — формальные группы Хонды*. Формальные группы Любина — Тейта определяются выделенными эндоморфизмами $[\pi]_F$. Формальные группы Хонды обладают выделенными гомоморфизмами, которые пропускаются через $[\pi]_F$. В настоящей работе мы доказываем, что для обобщенных формальных групп Хонды композиция последовательности выделенных гомоморфизмов пропускается через $[\pi]_F$. В качестве приложения этого факта доказан ряд свойств точек π^n-кручения обобщенной формальной группы Хонды.

Ключевые слова: формальные группы, точки кручения формальной группы.

1. Введение. Пусть k — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$ с кольцом целых чисел $\mathcal{O}$, униформизирующей π и полем вычетов мощности q. Один из центральных фактов теории Любина — Тейта касается группы точек π^n-кручения W_F^n формальной группы Любина — Тейта F над $\mathcal{O}$. Классическим результатом является тот факт, что W_F^n — $\mathcal{O}$-модуль ранга 1, а $k(W_F^n)/k$ — абелево вполне разветвленное расширение степени $q^{n-1}(q-1)$.

Формальные группы Хонды [1] представляют из себя расширение класса формальных групп Любина — Тейта и полностью классифицируют формальные группы над $\mathcal{O}$ в случае, когда k неразветвлено. Для формальной группы Хонды F высоты h известно, что $W_F^n \cong (\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})^h$ как $\mathcal{O}$-модуль, $k(W_F^1)$ содержит неразветвленное расширение степени h и $\nu(\eta) = 1/(q^h-1)q^{(n-1)h}$, где $\eta \in W_F^n \setminus W_F^{n-1}$ и ν — нормализованное нормирование k (см. [2, 3]).

Дальнейшее обобщение дает новый класс формальных групп [4], который мы будем называть *обобщенными формальными группами Хонды*. Этот класс, который, в частности, описывает все формальные группы в случае, если индекс ветвления e поля k меньше p, и будет предметом нашего исследования.

Формальные группы Любина — Тейта определяются выделенным эндоморфизмом $[\pi]_F(x) \equiv x^q \mod \pi$. Для любой формальной группы Хонды высоты h существует гомоморфизм $[\pi]_{F,F_1}(x) \equiv x^{q^h} \mod \pi$ (см. [5]), а обобщенные формальные

*Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 16-11-10200).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

группы Хонды обладают гомоморфизмом $[a]_{F,F_1}(x) \equiv x^{q^h} \mod a$ для некоторых $a \in \mathcal{O}, 1 \le \nu(a) \le e-1$. Очевидным недостатком этого гомоморфизма является то, что он непосредственно не связан с эндоморфизмом, который может быть использован при определении точек кручения. Цель нашей статьи — устранить эту проблему и получить некоторые непосредственные следствия.

Для обобщенной формальной группы Хонды F над $\mathcal{O}$ мы строим цепочку выделенных гомоморфизмов и находим их параметры. Оказывается, что композиция некоторого числа таких гомоморфизмов пропускается через эндоморфизм F и, таким образом, может служить аналогом выделенного эндоморфизма формальной группы Любина—Тейта. Это позволяет нам вычислить нормирование точек кручения и оценить степень вычетов расширения $k(W_F^1)/k$.

2. Обобщенные формальные группы Хонды. Пусть k/k_1 — конечное расширение локальных полей нулевой характеристики с индексом ветвления e. Предположим, что поле вычетов $\bar{k}_1$ имеет характеристику $p \ne 2$ и мощность q. Обозначим через $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ кольца целых полей k, k_1 и через Π, π — их соответствующие униформизующие. Пусть k_0 — подполе инерции в k/k_1 с кольцом целых $\mathcal{O}_0$. Пусть ν — нормализованное нормирование k.

Обозначим через Δ автоморфизм Фробениуса неразветвленного расширения k_0/k_1. Положим $\blacktriangle\varphi = \varphi^{\Delta}(x^q)$, где $\varphi \in k_0[[x]]$, что определяет левое действие на $k_0[[x]]$ некоммутативного кольца $E = \mathcal{O}_0[[\blacktriangle]]$ с правилом умножения $\blacktriangle a = a^{\Delta}\blacktriangle$, $a \in \mathcal{O}_0$.

Определим «координатные отображения» из k в k_0. Любой элемент $\alpha \in k$ можно однозначно представить в виде $\alpha = a_0 + a_1\Pi + \dots + a_{e-1}\Pi^{e-1}$, где $a_0, a_1, \dots, a_{e-1} \in k_0$. Тогда положим $|\alpha|_0 = a_0, |\alpha|_1 = a_1, \dots, |\alpha|_{e-1} = a_{e-1}$. Эти отображения также могут быть естественным образом продолжены до отображений из $k[[x]]$ в $k_0[[x]]$.

Пусть $E_0 = E\blacktriangle$. Мы говорим, что степенной ряд $\lambda \in k[[x]]$ имеет тип $(A_0, A_1, \dots, A_{e-1})$, где $A_i \in E_0, 0 \le i \le e-1$, если $\lambda(x) \equiv x \mod \deg 2$ и $\pi|\lambda|_i \equiv A_i|\lambda|_0 \mod \pi, 0 \le i \le e-1$. Заметим, что тип не определен однозначно.

Формальная группа F над $\mathcal{O}$ называется *обобщенной формальной группой Хонды*, если ее логарифм имеет тип $(A_0, A_1, \dots, A_{e-1})$ для некоторых $A_i \in E_0$, $0 \le i \le e-1$.

Из [4, теорема 2] следует, что $\mathcal{O}_1 \subset \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(F)$, и в частности, $[\pi]_F$ является эндоморфизмом F над $\mathcal{O}$.

Теорема 1 [4, теоремы 1 и 3]**.**

1. *Любой $\lambda \in k[[x]]$, имеющий некоторый тип $(A_0, A_1, \dots, A_{e-1})$, является логарифмом обобщенной формальной группы Хонды над $\mathcal{O}$. Если $\mu \in k[[x]]$ имеет тот же тип, то формальное группы, соответствующие λ и μ, строго изоморфны.*

2. *Если $k_1 = \mathbb{Q}_p$ и $e < p$, то любая формальная группа над $\mathcal{O}$ является обобщенной формальной группой Хонды.*

По лемме 5.1 из [4] любая формальная группа над $\mathcal{O}$ конечной высоты имеет тип $(B_0\blacktriangle^{h_0}, B_1\blacktriangle^{h_1}, \dots, B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}})$ такой, что $B_i \in E^*$ для всех $1 \le i \le e-1$. Пусть $1 \le t \le e-1$ — наименьший индекс, для которого достигается минимум $h_0, \dots, h_{e-1}$. Для $0 \le i \le e-1$ определим $\widehat{B}_i = \varepsilon_i^{-1}B_i$, если $B_i \equiv \varepsilon_i \mod \blacktriangle, \varepsilon_i \in \mathcal{O}_0^*$. Переформулируем теорему 5 из [4].

Теорема 2. *Предположим, что* $\Pi^e = \delta\pi$ *для некоторого* $\delta \in \mathcal{O}_0^*$. *Пусть* $\lambda \in k[[x]]$ *— степенной ряд типа* $(B_0\blacktriangle^{h_0}, B_1\blacktriangle^{h_1}, \ldots, B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}})$. *Определим* $\mu \in k[[x]]$ *условием*

$$|\mu|_i = \begin{cases} \varepsilon_t^{-1} B_{t+i}\blacktriangle^{h_{t+i}-h_t}|\lambda|_0^{\Delta^{h_t}}, & 0 \le i \le e-t-1, \\ \pi^{-1}\delta^{-1}\varepsilon_t^{-1} B_{t+i-e}\blacktriangle^{h_{t+i-e}-h_t}|\lambda|_0^{\Delta^{h_t}}, & e-t \le i \le e-1. \end{cases}$$

Тогда

1) μ *имеет тип* $(D_0\blacktriangle^{h'_0}, D_1\blacktriangle^{h'_1}, \ldots, D_{e-1}\blacktriangle^{h'_{e-1}})$, *где*

$$D_i = \begin{cases} \varepsilon_t^{-1} B_{t+i} B_0^{\Delta^{h_{t+i}}} \left(\widehat{B}_t^{\Delta^{h_{t+i}+h_0-h_t}}\right)^{-1}, & 0 \le i \le e-t-1, \\ \delta^{-1}\varepsilon_t^{-1} B_{t+i-e}\left(\widehat{B}_t^{\Delta^{h_{t+i-e}-h_t}}\right)^{-1}, & e-t \le i \le e-1 \end{cases}$$

и

$$h'_i = \begin{cases} h_{t+i} + h_0 - h_t, & 0 \le i \le e-t-1, \\ h_{i-e+t} - h_t, & e-t \le i \le e-1; \end{cases}$$

2) $f = [\delta^{-1}\varepsilon_t^{-1}\Pi^{e-t}]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}(F, G)$, *где* F *и* G *— формальные группы с логарифмами* λ *и* μ;

3) $f \equiv x^{q^{h_t}} \mod \Pi^{e-t}$.

3. Преобразование наборов чисел. Рассмотрим преобразование, которое отображает набор из e натуральных чисел $(h_0, \ldots, h_{e-1})$ в другой набор из e натуральных чисел

$$(h_0, h_{t+1} + h_0 - h_t, \ldots, h_{e-1} + h_0 - h_t, h_0 - h_t, \ldots, h_{t-1} - h_t),$$

где t — наименьший индекс, для которого достигается минимум $h_0, \ldots, h_{e-1}$, т. е. $h_i > h_t$ при $0 \le i \le t-1$ и $h_i \ge h_t$ при $t+1 \le i \le e-1$.

Для начального набора $(h_0, \ldots, h_{e-1})$ рекурсивно определим последовательность индексов: $t_0 = e$ и t_{j+1} — наименьший индекс, для которого достигается минимум $h_0, \ldots, h_{t_j-1}$, т. е. $0 \le t_{j+1} \le t_j - 1$ и $h_i > h_{t_{j+1}}$ при $0 \le i \le t_{j+1} - 1$; $h_i \ge h_{t_{j+1}}$ при $t_{j+1} + 1 \le i \le t_j - 1$. Поскольку индексы t_j строго убывают, существует индекс r такой, что $t_r = 0$.

Для единообразия предположим, что $h_e = 0$.

Пример. Для шестерки чисел $(5, 3, 2, 3, 1, 4)$ последовательность индексов выглядит как $4, 2, 1, 0$. Последовательность шестерок:

$$(5,3,2,3,1,4) \xrightarrow{\mathrm{I}} (5,8,4,2,1,2) \xrightarrow{\mathrm{II}} (5,6,4,7,3,1) \xrightarrow{\mathrm{III}} (5,4,5,3,6,2) \xrightarrow{\mathrm{IV}} (5,3,2,3,1,4).$$

Лемма 1. *После* j *последовательных преобразований,* $1 \le j \le r$, *набор чисел становится равным* $(h_0^{(j)}, \ldots, h_{e-1}^{(j)})$, *где*

$$h_i^{(j)} = \begin{cases} h_{t_j+i} + h_0 - h_{t_j}, & 0 \le i \le e - t_j - 1, \\ h_{i-e+t_j} - h_{t_j}, & e - t_j \le i \le e-1. \end{cases}$$

Доказательство. База индукции $j = 1$ тривиальна. Применим преобразование к набору

$$(h_0, h_{t_j+1} + h_0 - h_{t_j}, \ldots, h_{e-1} + h_0 - h_{t_j}, h_0 - h_{t_j}, \ldots, h_{t_j-1} - h_{t_j}),$$

который обозначим за $(h'_0, \ldots, h'_{e-1})$. Тогда

$$h'_i = \begin{cases} h_{t_j+i} + h_0 - h_{t_j}, & 0 \le i \le e - t_j - 1, \\ h_{i-e+t_j} - h_{t_j}, & e - t_j \le i \le e - 1. \end{cases}$$

Сначала докажем, что индекс t', удовлетворяющий $h'_i > h'_{t'}$ при $0 \le i \le t' - 1$ и $h'_i \ge h'_{t'}$ при $t'+1 \le i \le e-1$, равен $e-t_j+t_{j+1}$. Действительно, $h'_i = h_{t_j+i}+h_0-h_{t_j} > h_{t_{j+1}} - h_{t_j} = h'_{e-t_j+t_{j+1}}$ при $0 \le i \le e - t_j - 1$ и $h'_i = h_{i-e+t_j} - h_{t_j} > h_{t_{j+1}} - h_{t_j} = h'_{e-t_j+t_{j+1}}$ при $e-t_j \le i \le e-t_j+t_{j+1}-1$. Более того, $h'_i = h_{i-e+t_j} - h_{t_j} \ge h_{t_{j+1}} - h_{t_j} = h'_{e-t_j+t_{j+1}}$ при $e - t_j + t_{j+1} + 1 \le i \le e - 1$.

Обозначим за $(h''_0, \ldots, h''_{e-1})$ набор чисел, получающийся из $(h'_0, \ldots, h'_{e-1})$. Тогда при $t' = e - t_j + t_{j+1}$ имеем

$$h''_i = \begin{cases} h'_{t'+i} + h'_0 - h'_{t'} & = (h_{t_{j+1}+i} - h_{t_j}) + h_0 - (h_{t_{j+1}} - h_{t_j}), \\ h'_{i-e+t'} - h'_{t'} & = (h_{t_{j+1}+i} + h_0 - h_{t_j}) - (h_{t_{j+1}} - h_{t_j}), \\ h'_{i-e+t'} - h'_{t'} & = (h_{i-e+t_{j+1}} - h_{t_j}) - (h_{t_{j+1}} - h_{t_j}), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} h_{t_{j+1}+i} + h_0 - h_{t_{j+1}}, & 0 \le i \le e - t' - 1 = t_j - t_{j+1} - 1, \\ h_{t_{j+1}+i} + h_0 - h_{t_{j+1}}, & e - t' = t_j - t_{j+1} \le i \le e - t_{j+1} - 1, \\ h_{i-e+t_{j+1}} - h_{t_{j+1}}, & e - t_{j+1} \le i \le e - 1, \end{cases}$$

что доказывает индукционный переход. □

В результате имеем $h_i^{(r)} = h_i, 0 \le i \le e - 1$, т. е. после r преобразований последовательность наборов зацикливается.

4. Основная теорема. Рассмотрим формальную группу F над $\mathcal{O}$ конечной высоты с логарифмом λ типа

$$(B_0 \blacktriangle^{h_0}, B_1 \blacktriangle^{h_1}, \ldots, B_{e-1} \blacktriangle^{h_{e-1}}),$$

где $B_i \in E^*$ для всех $1 \le i \le e - 1$. Теорема 2 позволяет построить цепочку формальных групп над $\mathcal{O}$

$$F = F_0 \xrightarrow{f_1} F_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_r} F_r,$$

где $f_j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F_{j-1}, F_j), f_j \equiv x^{q^{h_j^*}} \mod \pi_j$ и $f_j \equiv \pi_j x \mod \deg 2$ для некоторых $h_j^* \ge 1, \pi_j \in \mathcal{O}$ с $1 \le \nu(\pi_j) \le e$ при $j \ge 1$.

Теорема 3. *Формальная группа $F_j, 0 \le j \le r$, имеет логарифм $\lambda^{(j)}$ с $|\lambda^{(j)}|_0 = \widehat{B}_{t_j} |\lambda|_0^{\Delta^{h_{t_j}}}$ типа $\left(B_0^{(j)} \blacktriangle^{h_0^{(j)}}, B_1^{(j)} \blacktriangle^{h_1^{(j)}}, \ldots, B_{e-1}^{(j)} \blacktriangle^{h_{e-1}^{(j)}}\right)$, где $h_i^{(j)}, 1 \le i \le e - 1$, определены в лемме 1 и $B_i^{(j)} \in E^*, 0 \le i \le e - 1$, определены как*

$$B_i^{(j)} = \begin{cases} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_j+i} B_0^{\Delta^{h_{t_j+i}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_j+i}+h_0-h_{t_j}}} \right)^{-1}, & 0 \le i \le e - t_j - 1, \\ \delta^{-1} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_j+i-e} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_j+i-e}-h_{t_j}}} \right)^{-1}, & e - t_j \le i \le e - 1. \end{cases}$$

При этом $h_{j+1}^* = h_{t_{j+1}} - h_{t_j}$ и $\pi_{j+1} = \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} \Pi^{t_j - t_{j+1}}$, где $\varepsilon_e = \delta^{-1}$.

Доказательство. Докажем формулы для $|\lambda^{(j)}|_0$ и $B_i^{(j)}$ индукцией по j. База $j=1$ следует из теоремы 2.

Для $1 \le i \le e-1$ обозначим $B_i^{(j)}$ через C_i. По индукционному предположению имеем

$$|\lambda^{(j)}|_0 = \widehat{B}_{t_j} |\lambda|_0^{\Delta^{h_{t_j}}}$$

и

$$C_i = \begin{cases} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_j+i} B_0^{\Delta^{h_{t_j+i}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_j+i}+h_0-h_{t_j}}}\right)^{-1}, & 0 \le i \le e-t_j-1, \\ \delta^{-1}\varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_j+i-e} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_j+i-e}-h_{t_j}}}\right)^{-1}, & e-t_j \le i \le e-1. \end{cases}$$

По теореме 2 и лемме 1 получаем

$$B_i^{(j+1)} = \begin{cases} (\varepsilon'_{t'})^{-1} C_{t'+i} C_0^{\Delta^{h'_{t'+i}}} \left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i}+h'_0-h'_{t'}}}\right)^{-1}, & 0 \le i \le e-t'-1, \\ \delta^{-1}(\varepsilon'_{t'})^{-1} C_{t'+i-e} \left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i-e}-h'_{t'}}}\right)^{-1}, & e-t' \le i \le e-1, \end{cases}$$

где $C_{t'} = \varepsilon'_{t'}\widehat{C}_{t'}, \widehat{C}_{t'} \in E^*$,

$$h'_i = h_i^{(j)} = \begin{cases} h_{t_j+i} + h_0 - h_{t_j}, & 0 \le i \le e-t_j-1, \\ h_{i-e+t_j} - h_{t_j}, & e-t_j \le i \le e-1 \end{cases}$$

и $t' = e - t_j + t_{j+1}$. Заметим, что $h'_{t'} = h_{t_{j+1}} - h_{t_j}$ и

$$C_{t'} = \delta^{-1}\varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}}\right)^{-1},$$

откуда $\varepsilon'_{t'} = \delta^{-1}\varepsilon_{t_j}^{-1}\varepsilon_{t_{j+1}}$ и $\widehat{C}_{t'} = \widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}}\right)^{-1}$.

Начнем с того, что

$$|\lambda^{(j+1)}|_0 = \widehat{C}_{t'} |\lambda^{(j)}|_0^{\Delta^{h'_{t'}}} = \widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}}\right)^{-1} \left(\widehat{B}_{t_j} |\lambda|_0^{\Delta^{h_{t_j}}}\right)^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}} = \widehat{B}_{t_{j+1}} |\lambda|_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}}}},$$

что дает требуемый результат для $|\lambda^{(j)}|_0$. Для того, чтобы получить формулу для типов, рассмотрим по отдельности три случая.

Случай I ($0 \le i \le t_j - t_{j+1} - 1$). Имеем

$$C_{t'+i} = \delta^{-1}\varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_{j+1}+i} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}-h_{t_j}}}\right)^{-1},$$

$$C_0^{\Delta^{h'_{t'+i}}} = \left(\widehat{B}_{t_j} B_0^{\Delta^{h_{t_j}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_0}}\right)^{-1}\right)^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}-h_{t_j}}} = \\ = \widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}-h_{t_j}}} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}+h_0-h_{t_j}}}\right)^{-1}$$

и

$$\left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i}+h'_0-h'_{t'}}}\right)^{-1} = \left(\left(\widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}}\right)^{-1}\right)^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}-h_{t_j}+h_0-(h_{t_{j+1}}-h_{t_j})}}\right)^{-1} =$$

$$= \widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_j}}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1},$$

откуда

$$B_i^{(j+1)} = \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}.$$

Случай II ($t_j - t_{j+1} \le i \le e - t_{j+1} - 1$). Здесь

$$C_{t'+i-e} = \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_{j+1}+i} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}}+i}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_j}}}} \right)^{-1}$$

и

$$\left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i-e}-h'_{t'}}} \right)^{-1} = \left(\left(\widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}} \right)^{-1} \right)^{\Delta^{(h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_j}})-(h_{t_{j+1}}-h_{t_j})}} \right)^{-1} =$$

$$= \widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_j}}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1},$$

что дает

$$B_i^{(j+1)} = \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}.$$

Случай III ($e - t_{j+1} \le i \le e - 1$). Аналогично,

$$C_{t'+i-e} = \delta^{-1} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_{j+1}+i-e} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e}-h_{t_j}}} \right)^{-1}$$

и

$$\left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i-e}-h'_{t'}}} \right)^{-1} = \left(\left(\widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}} \right)^{-1} \right)^{\Delta^{(h_{t_{j+1}+i-e}-h_{t_j})-(h_{t_{j+1}}-h_{t_j})}} \right)^{-1} =$$

$$= \widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e}-h_{t_j}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e}-h_{t_{j+1}}}} \right)^{-1},$$

откуда вытекает

$$B_i^{(j+1)} = \delta^{-1} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i-e} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e}-h_{t_{j+1}}}} \right)^{-1}.$$

В результате получаем

$$B_i^{(j+1)} = \begin{cases} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}, & 0 \le i \le e - t_{j+1} - 1, \\ \delta^{-1} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i-e} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e}-h_{t_{j+1}}}} \right)^{-1}, & e - t_{j+1} \le i \le e - 1, \end{cases}$$

что и доказывает индукционный переход.

Наконец, h_{j+1}^* определено выше, как $h'_{t'} = h_{t_{j+1}} - h_{t_j}$ и $\pi_{j+1} = \delta^{-1} \varepsilon_{t'}^{\prime -1} \Pi^{e-t'} = \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} \Pi^{t_j - t_{j+1}}$. □

Из теоремы 3 следует, что логарифм $\lambda^{(r)}$ формальной группы F_r имеет тип

$$\left(B_0^{(r)}\blacktriangle^{h_0}, B_1^{(r)}\blacktriangle^{h_1}, \ldots, B_{e-1}^{(r)}\blacktriangle^{h_{e-1}}\right),$$

где

$$|\lambda^{(r)}|_0 = \widehat{B}_0|\lambda|_0^{\Delta^{h_0}}$$

и

$$B_i^{(r)} = \varepsilon_0^{-1}B_iB_0^{\Delta^{h_i}}\left(\widehat{B}_0^{\Delta^{h_i}}\right)^{-1} = \varepsilon_0^{-1}B_i\varepsilon_0^{\Delta^{h_i}}.$$

Продолжим цепочку формальных групп с помощью теоремы 2:

$$F = F_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_r} F_r \xrightarrow{f_{r+1}} F_{r+1} \xrightarrow{f_{r+2}} \cdots.$$

Пусть $f_s \equiv \pi_s x \mod \deg 2$ и $f_s \equiv x^{q^{h_s^*}} \mod \pi_s, s \geq 1$. Положим $\varepsilon_{(0)} = 1$ и $\varepsilon_{(m)} = \varepsilon_0\varepsilon_0^{\Delta^{h_0}}\cdots\varepsilon_0^{\Delta^{(m-1)h_0}}, m \geq 1$.

Лемма 2. *При* $1 \leq j \leq r, m \geq 0$ *имеем* $h_{rm+j}^* = h_{t_j} - h_{t_{j-1}}$ *и*

$$\pi_{rm+j} = \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_{j-1}}}}\left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_j}}}\right)^{-1}\varepsilon_{t_{j-1}}\varepsilon_{t_j}^{-1}\Pi^{t_{j-1}-t_j}.$$

Доказательство. Очевидно, логарифм $\lambda^{(rm)}$ формальной группы F_{rm} имеет тип

$$\left(B_0^{(rm)}\blacktriangle^{h_0}, B_1^{(rm)}\blacktriangle^{h_1}, \ldots, B_{e-1}^{(rm)}\blacktriangle^{h_{e-1}}\right),$$

где $B_i^{(rm)} = \varepsilon_{(m)}^{-1}B_i\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_i}} \equiv \varepsilon_{(m)}^{-1}\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_i}}\varepsilon_i \mod \blacktriangle$.

Тогда первое равенство очевидно, а второе следует из теоремы 3, где

$$\pi_{rm+j} = \left(\varepsilon_{(m)}^{-1}\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_{j-1}}}}\varepsilon_{t_{j-1}}\right)\left(\varepsilon_{(m)}^{-1}\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_j}}}\varepsilon_{t_j}\right)^{-1}\Pi^{t_{j-1}-t_j}.$$

$\square$

Теперь для любого $m \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\pi_{rm+1}\cdots\pi_{rm+r} = \\
&\quad = \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_0}}}\left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_1}}}\right)^{-1}\varepsilon_{t_0}\varepsilon_{t_1}^{-1}\Pi^{t_0-t_1}\cdot\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_1}}}\left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_2}}}\right)^{-1}\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}^{-1}\Pi^{t_1-t_2}\cdots \\
&\quad\quad \cdots\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_{r-1}}}}\left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_r}}}\right)^{-1}\varepsilon_{t_{r-1}}\varepsilon_{t_r}^{-1}\Pi^{t_{r-1}-t_r} = \\
&= \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_0}}}\left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_r}}}\right)^{-1}\varepsilon_{t_0}\varepsilon_{t_r}^{-1}\Pi^{t_0-t_r} = \varepsilon_{(m)}\left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_0}}\right)^{-1}\delta^{-1}\varepsilon_0^{-1}\Pi^e = \left(\varepsilon_0^{\Delta^{mh_0}}\right)^{-1}\pi.
\end{aligned}$$

Определим $f^{(s)} = f_s \circ \cdots \circ f_1, s \geq 1$. Поскольку

$$\pi_1\cdots\pi_{rm} = \varepsilon_0^{-1}\pi\cdot\left(\varepsilon_0^{\Delta^{h_0}}\right)^{-1}\pi\cdots\left(\varepsilon_0^{\Delta^{(m-1)h_0}}\right)^{-1}\pi = \varepsilon_{(m)}^{-1}\pi^m,$$

заключаем, что $f^{(rm)} \equiv \varepsilon_{(m)}^{-1}\pi^m x \mod \deg 2$.

Далее получаем

$$h^*_{rm+1}+\dots+h^*_{rm+r}=(h_{t_1}-h_{t_0})+(h_{t_2}-h_{t_1})+\dots+(h_{t_r}-h_{t_{r-1}})=h_{t_r}-h_{t_0}=h_0,$$

и следовательно, $f^{(rm)}\equiv x^{q^{h_0 m}} \mod \Pi$.

5. Точки кручения. Пусть $\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}$ обозначает максимальный идеал пополнения алгебраического замыкания k. Положим $W^n_F=\{\alpha\in\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}:[\pi^n]_F(\alpha)=0\}$.

Предложение 1.

1. $W^n_F=\{\alpha\in\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}:f^{(rn)}(\alpha)=0\}$.

2. *W^n_F является $\mathcal{O}_1$-модулем мощности $q^{h_0 n}$, изоморфным $(\mathcal{O}_1/\pi^n\mathcal{O}_1)^{h_0}$.*

Доказательство. 1. Прямая проверка условий теоремы 2 из [4] показывает, что существует изоморфизм $[\varepsilon_{(n)}]_{F_{rn},F}$ над $\mathcal{O}$, что дает требуемый результат.

2. Результат о мощности W^n_F следует из подготовительной леммы Вейерштрасса и сравнения $f^{(rn)}\equiv x^{q^{h_0 n}} \mod \Pi$. Пусть $W^n_F\cong\oplus\,\mathcal{O}_1/\pi^{s_i}\mathcal{O}_1$ — прямое разложение W^n_F в качестве конечного $\mathcal{O}_1$-модуля. Поскольку $[\pi^n]_F(\alpha)=0$ для любого $\alpha\in W^n_F$, имеем $s_i\le n$ и $W^1_F\cong(\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_0}$. Из сюръективности $[\pi^{n-1}]_F:W^n_F\to W^1_F$ следует, что число компонент в приведенном выше разложении W^n_F с $s_i=n$ не меньше h_0, поэтому все компоненты имеют такой вид. □

Пусть M — максимальный идеал $k(W^n_F)$. Для $1\le j\le r, m\ge 1$ положим

$$e_{m,j}=\frac{t_{j-1}-t_j}{(q^{h_{t_j}}-q^{h_{t_{j-1}}})q^{(m-1)h_0}}.$$

Предложение 2.

1. *Для $\alpha\in M$ и натурального $s>0$ имеем*

$$f_s(\alpha)\equiv\begin{cases}\alpha^{q^{h^*_s}} \mod M^{\nu(\alpha)q^{h^*_s}+1}, & \nu(\alpha)<\frac{\nu(\pi_s)}{q^{h^*_s}-1},\\ \pi_s\alpha \mod M^{\nu(\alpha)+\nu(\pi_s)+1}, & \nu(\alpha)>\frac{\nu(\pi_s)}{q^{h^*_s}-1},\\ \pi_s\alpha+\alpha^{q^{h^*_s}} \mod M^{\nu(\alpha)+\nu(\pi_s)+1}, & \nu(\alpha)=\frac{\nu(\pi_s)}{q^{h^*_s}-1}.\end{cases}$$

2. *Если $\eta\in W^n_F\setminus W^{n-1}_F$, то $\nu(\eta)=e_{n,j}$ для некоторого $1\le j\le r$.*

3. *Существует базис W^n_F, содержащий $h_{t_j}-h_{t_{j-1}}$ элементов с нормированием $e_{n,j}$ для каждого $1\le j\le r$.*

Доказательство. 1. Это легко следует из того, что $\nu(f_s(\alpha))=\nu(\pi_s\alpha+\alpha^{q^{h^*_s}})$.

2. Во-первых, определим $V^s_F=\{\alpha\in F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}):f^{(s)}(\alpha)=0\}, s\le rn$. Очевидно, что $V^{rm}_F=W^m_F$ и

$$W^n_F\setminus W^{n-1}_F=(V^{rn}_F\setminus V^{rn-1}_F)\cup(V^{rn-1}_F\setminus V^{rn-2}_F)\cup\dots\cup(V^{r(n-1)+1}_F\setminus V^{r(n-1)}_F).$$

Пусть $\zeta\in V^s_F\setminus V^{s-1}_F$. Тогда из того, что $f^{(s-1)}(\zeta)\ne0$ и $f_s(f^{(s-1)}(\zeta))=0$, следует, что $\nu(f^{(s-1)}(\zeta))=\frac{\nu(\pi_s)}{q^{h^*_s}-1}$. В свою очередь, из $\nu(f_{s-1}(f^{(s-2)}(\zeta)))=\frac{\nu(\pi_s)}{q^{h^*_s}-1}$ получаем

$\nu(f^{(s-2)}(\zeta)) = \frac{\nu(\pi_s)}{(q^{h_s^*}-1)q^{h_{s-1}^*}}$, поскольку $\frac{\nu(\pi_s)}{q^{h_s^*}-1} < \frac{e}{p-1} \le 1 \le \nu(\pi_{s-1})$. Продолжая, для $s = rm + j$ получаем $\nu(\zeta) = \frac{\nu(\pi_s)}{(q^{h_s^*}-1)q^{h_{s-1}^*+\cdots+h_1^*}} = e_{m,j}$.

3. Поскольку $[\pi]_F(\alpha) = 0$ для любого $\alpha \in V_F^j$ при $1 \le j \le r$, имеем $V_F^j \cong (\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_1^*+\cdots+h_j^*}$ как $\mathcal{O}_1$-модуль. Теперь выберем h_1^* элементов в качестве базиса $V_F^1 \cong (\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_1^*}$, затем добавим h_2^* элементов, чтобы получить базис $V_F^2 \cong (\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_1^*+h_2^*}$ и т. д., в конце получаем базис $W_F^1 \cong (\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_0}$. Для каждого α из этого базиса выберем $\alpha' \in W_F^n$ такое, что $[\pi^{n-1}]_F(\alpha') = \alpha$, что дает базис W_F^n с требуемыми свойствами. $\square$

Предложение 3. *Расширение $k(W_F^1)/k$ содержит неразветвленное подрасширение степени*

$$\text{НОК}(h_{t_1}, h_{t_2} - h_{t_1}, \cdots, h_{t_{r-1}} - h_{t_{r-2}}, h_0 - h_{t_{r-1}}).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого $1 \le j \le r$ поле $k(W_F^1)$ содержит ζ, примитивный корень $(q^{h_j^*}-1)$-й степени из единицы для $h_j^* = h_{t_j} - h_{t_{j-1}}$. Напомним, что $f_j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F_{j-1}, F_j)$, $f_j \equiv x^{q^{h_j^*}} \mod \pi_j$ и $f_j \equiv \pi_j x \mod \deg 2$. Из теоремы 6 из [4] следует, что существуют формальные группы G, G' над $\mathcal{O}$ такие, что G, F_{j-1} и G', F_j имеют один и тот же тип, и $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(G, G')$ для $g(x) = \pi_j x + x^{q^{h_j^*}}$. Тогда эти пары формальных групп строго изоморфны. Пусть φ — строгий изоморфизм из F_{J-1} в G и φ' — строгий изоморфизм из F_j в G', при этом $\varphi' \circ f_j = g \circ \varphi$.

Пусть $\eta \in \mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}$ — какой-то ненулевой корень f_j. Для $\xi \in \mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}$ такого, что $f^{(j-1)}(\xi) = \eta$, имеем $\xi \in V_F^j \subset k(W_F^1)$, откуда $\eta \in k(W_F^1)$. Если $\eta' = \varphi^{-1}(\zeta\varphi(\eta))$ и $\varphi' \circ f_j \circ \varphi^{-1}(\zeta\varphi(\eta)) = g(\zeta\varphi(\eta)) = \zeta g(\varphi(\eta)) = \zeta\varphi'(f_j(\eta)) = 0$, то $f_j(\eta') = 0$ и $\eta' \in k(W_F^1)$. Таким образом, $\zeta = \varphi(\eta')/\varphi(\eta) \in k(W_F^1)$, что и требовалось доказать. $\square$

Литература

1. *Honda T.* On the theory of commutative formal groups // J. Math. Soc. Japan. 1970. Vol. 22. P. 213–246.

2. *Бенуа Д. Г., Востоков С. В.* Норменное спаривание в формальных группах и представления Галуа // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. Вып. 6. С. 69–97.

3. *Демченко О. В.* Формальные группы Хонды: арифметика группы точек // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. Вып. 1. С. 132–149.

4. *Демченко О. В.* Формальные группы над p-адическими кольцами целых с малым ветвлением и выделенные изогении // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. Вып. 3. С. 55–85.

5. *Демченко О. В.* Новое в отношениях формальных групп Любина — Тэйта и формальных групп Хонды // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. Вып. 5. С. 77–84.

Статья поступила в редакцию 8 мая 2020 г.;
после доработки 17 июня 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Демченко Олег Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доц.; o.demchenko@spbu.ru
Востоков Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; s.vostokov@spbu.ru

Torsion points of generalized Honda formal groups*

O. V. Demchenko, S. V. Vostokov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Demchenko O. V., Vostokov S. V. Torsion points of generalized Honda formal groups. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 597–606. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.403 (In Russian)

Generalized Honda formal groups are a new class of formal groups that in particular describes the formal groups over the ring of integers of local fields weakly ramified over $\mathbb{Q}_p$. It is the next class in the chain *the multiplicative formal group — Lubin — Tate formal groups — Honda formal groups*. Lubin — Tate formal groups are defined by distinguished endomorphisms $[\pi]_F$, Honda formal groups possess distinguished homomorphisms that factor through $[\pi]_F$ and in the present paper we prove that for generalized Honda formal groups it is compositions of distinguished homomorphisms that factor through $[\pi]_F$. As an application of this fact, some properties of π^n-torsion points of generalized Honda formal groups are studied.

Keywords: formal groups, torsion points.

References

1. Benois D. G., Vostokov S. V., "Norm pairing in formal groups and Galois representations", *Leningrad Math. J.* **2** (6), 1221–1249 (1991).

2. Demchenko O., "New relationship between formal Lubin — Tate groups and formal Honda groups", *St. Petersburg Math. J.* **10** (5), 785–789 (1999).

3. Demchenko O. V., "Honda formal groups: the arithmetic of the group of points", *St. Petersburg Math. J.* **12** (1), 101–115 (2001).

4. Demchenko O. V., "Formal groups over p-adic rings of integers with small ramification and distinguished isogenies", *St. Petersburg Math. J.* **14** (3), 405–428 (2003).

5. Honda T., "On the theory of commutative formal groups", *J. Math. Soc. Japan* **22**, 213–246 (1970).

Received: May 8, 2020
Revised: June 17, 2020
Accepted: June 18, 2020

Authors' information:

Oleg V. Demchenko — o.demchenko@spbu.ru
Sergei V. Vostokov — s.vostokov@spbu.ru

*This work was supported by Russian Science Foundation (grant no. 16-11-10200).