

# Глава 1

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Динамические изменения в структуре паттернов могут быть исследованы с помощью следующих методов: вейвлетного, мультифрактального, рекуррентного и бифуркационного анализов.

В настоящей работе проанализированы записи ЭЭГ, полученные от 89 здоровых лиц, 61 пациента с тревожно-фобическими расстройствами, 15 пациентов, страдающих парциальной симптоматической эпилепсией, 79 пациентов с сосудистой патологией мозга и 38 — с нарушениями сердечного ритма. ЭЭГ регистрировалась с помощью 21-канального энцефалографа фирмы «Мицар» (Санкт-Петербург, Россия) врачами-нейрофизиологами И. А. Святогор и И. А. Моховиковой на базе городской поликлиники № 45, городской психиатрической больницы № 3 им. И. И. Скворцова-Степанова и клиники военно-морской терапии Военно-медицинской академии им. С. М. Кирова во время неврологического лечения пациентов. От всех тестируемых было получено информированное согласие. При регистрации ЭЭГ активные электроды располагались по схеме 10×20, в качестве индифферентного использовался усредненный электрод (Av). Безартефактные отрезки записи ЭЭГ оценивались в лобных F3, Fz, F4, затылочных O1, Oz, O2, теменных P3, P4, Pz или височных T3, T4, T5, T6 отведениях в различных состояниях (спокойного бодрствования и при функциональных нагрузках) в зависимости от поставленной в исследовании задачи.

Непроизвольные колебания руки человека были зарегистрированы С. П. Романовым в Институте мозга человека им. Н. П. Бехтеревой РАН во время неврологического лечения пациентов в условиях выполнения предложенной двигательной задачи. От всех тестируемых было получено информированное согласие. Были проанализированы записи, полученные от 55 здоровых тестируемых, 51 больного первичным паркинсонизмом с двусторонними проявлениями тремора и 45 пациентов с синдромом эссенциального тремора.

Двигательная задача заключалась в управлении изометрическим напряжением мышц с возможностью слежения за величиной усилия по смещению меток на экране монитора. Испытуемые сидели за столом перед монитором и нажимали пальцами рук на платформы с тензочувствительными датчиками, которые преобразовывали силу давления каждой руки в электрический сигнал (рис. 1.1).

Жесткость платформ обеспечивала регистрацию усилия в изометрическом режиме, т.е. без видимого смещения пальцев в точке контакта с измерительным элементом. Регистрация изометрического усилия производилась двумя типами тестов: в первом испытуемый удерживал усилие пальцами снизу вверх, а тыльная сторона ладони обеих выпрямленных рук прижималась к основанию платформы; во втором тесте усилие удерживалось сверху вниз пальцами выпрямленных вперед рук. Регистрируемая траектория изометрического усилия содержала медленный тренд и быструю произвольную компоненту (тремор), которую выделяли из полученной траектории с помощью использования вейвлетов (*wavelet denoising method*) [14] или с помощью адаптивного метода удаления тренда (*adaptive detrending method*) [15].

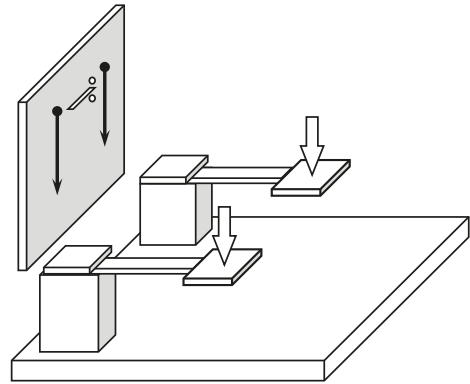


Рис. 1.1. Регистрация изометрического усилия на жесткой платформе с тензочувствительными датчиками, измеряющими прогибание до 0,01 мм на длине до 100 мм

В случае использования вейвлет-преобразования пороговая обработка вейвлет-коэффициентов осуществлялась по принципу Штейна несмещенной оценки риска. При этом использовалась схема мягкой фильтрации, при которой коэффициенты дискретного вейвлет-преобразования  $d_{j,k}$  изменялись по формуле:

$$d_{j,k} = \begin{cases} 0 & |d_{j,k}| \leq p \\ \text{sign}(d_{j,k}) \cdot (|d_{j,k}| - p) & |d_{j,k}| > p \end{cases},$$

где  $p$  — выбранное значение порога на масштабе  $j$  связано с числом  $N$  точек оцифровки исходной функции и дисперсией вейвлет-коэффициентов  $\sigma$  на первом масштабе следующим образом [1]:

$$\sigma = \sqrt{2 \sum_k d_{1,k}^2 / N}.$$

Адаптивный метод удаления тренда основан на разделении временного ряда на сегменты длины  $w$  с последующей аппроксимацией каждого сегмента полиномом порядка  $m$  [15].

Колебательные тренды, выделенные из зарегистрированной траектории изометрического усилия с использованием двух описанных выше алгоритмов, приведены на рис. 1.2. Оставшаяся после выделения медленного тренда быстрая произвольная компонента (тремор) представлена на рис. 1.3.

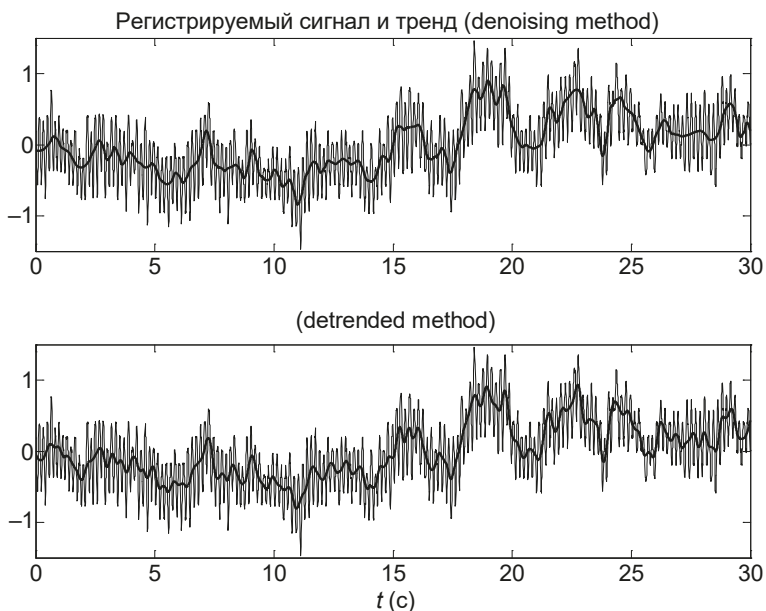


Рис. 1.2. Сравнение эффективности удаления тренда из оригинальной записи данных с помощью адаптивного метода удаления тренда и с использованием вейвлетов (регистраемая траектория показана тонкой линией, тренд — жирной линией)

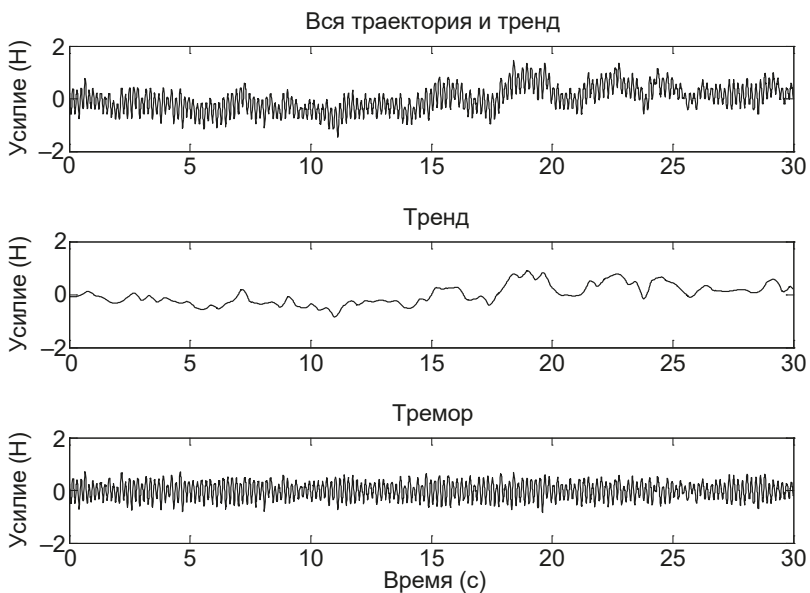


Рис. 1.3. Пример регистрируемой траектории изометрического усилия, выделенного медленного тренда и быстрой составляющей (тремора)

## 1.1. Вейвлет-анализ физиологических сигналов

Вейвлет-преобразование широко используется для решения широкого класса задач, связанных с анализом физиологических сигналов, например анализом электрокардиограмм [16–22], электроэнцефаллограмм и томограмм мозга [10–16]. Метод вейвлет-анализа используется также при исследовании электрической активности нервных клеток [30–36] и последовательностей времен жизни ионных каналов [37].

Метод вейвлет-преобразования [38] позволяет разложить одномерный сигнал, представленный в виде ряда числовых значений  $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$ , по набору копий одной исходной функции-прототипа (материнского вейвлета  $\psi(t)$ ). Эти копии (вейвлетные функции) масштабируются в некоторое число раз (т.е. растягиваются во времени) и смещаются на некоторое расстояние:

$$\Psi_{a,t_0} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-t_0}{a}\right),$$

где  $a$  и  $t_0$  — параметры масштаба и сдвига, определяющие ширину и смещение вейвлета, при этом временной масштаб ( $a$ ) обратно пропорционален частоте преобразования Фурье. Смещение вейвлета вдоль изучаемого сигнала дает возможность обнаружить изменение во времени масштаба, а значит, и частоты сигнала [14], что важно для существенно нестационарных сигналов, какими являются большинство физиологических сигналов.

Вейвлет-преобразование непрерывного сигнала представляет собой свертку сигнала с вейвлетной функцией:

$$W(a, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi_{a,t_0}^* dt,$$

где символ  $\Psi_{a,t_0}^*$  означает комплексно-сопряженную функцию. Величина коэффициента  $W(a, t_0)$  вейвлет-преобразования характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба  $a$  в момент времени  $t_0$ .

## 1.2. Дискретное вейвлет-преобразование сигнала

Дискретное вейвлет-преобразование вычисляется для дискретных значений параметров масштаба  $a = 2^m$  и сдвига  $t_0 = k2^m$ , где  $k, m$  — целые числа. В этом случае семейство вейвлетных функций имеет следующий вид [26]:

$$\Phi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \phi\left(\frac{t - k2^m}{2^m}\right).$$

На  $m$ -уровне разложения дискретное преобразование сигнала представляет собой суперпозицию вейвлетных функций. После обратного вейвлет-пре-

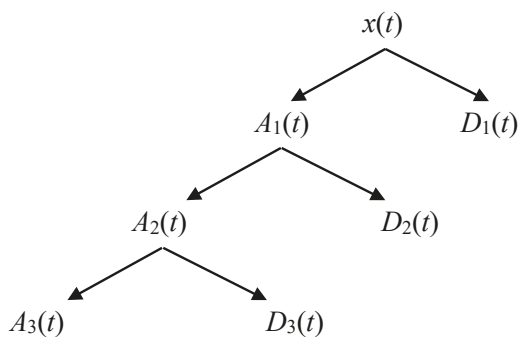


Рис. 1.4. Трехуровневое вейвлет-разложение сигнала:  
 $x(t) = A_3(t) + D_3(t) + D_2(t) + D_1(t)$

образования анализируемый сигнал  $x(t)$  равен сумме сглаженной (низкочастотной) компоненты последнего уровня ( $A_m$ ) и детализирующих (высокочастотных) компонент всех уровней ( $D_m, \dots, D_1$ ) разложения (рис. 1.4).

Компонента  $A_3(t)$  описывает грубое приближение к исходному сигналу на третьем уровне разложения, а  $D_1(t) \dots$  и  $D_3(t)$  — мелкомасштабные детали, полученные на трех уровнях разложения; при этом компонента  $D_1(t)$  характеризует наиболее высокочастотные детали анализируемого сигнала. Таким образом, дискретное вейвлет-преобразование фактически является прохождением сигнала через определенные частотные фильтры, а кратномасштабный алгоритм многоуровневого разложения и последующего восстановления сигнала позволяет выявить особенности этого сигнала на различных частотах [14]. Пример сглаженной и детализирующих компонент вейвлет-разложения физиологического сигнала представлен на рис. 1.5.

В отличие от оконного преобразования Фурье, имеющего одно и то же разрешение по времени и частоте для всех точек сигнала, вейвлетные функции имеют уменьшающееся (при уменьшении масштаба) разрешение по времени и увеличивающееся (при увеличении масштаба) разрешение по частоте [40]. Это свойство вейвлет-преобразования дает ему большое преимущество при анализе сигнала, так как «адаптивное» частотно-временное окно позволяет с хорошей точностью извлекать высокочастотную информацию из относительно малых временных интервалов, а низкочастотную информацию — определять из относительно широких временных интервалов сигнала.

Для анализа полученных компонент сигнала обычно используется быстрый алгоритм дискретного преобразования Фурье с последующим оцениванием спектральной плотности энергии этих компонент, что позволяет определить распределение энергии компонент сигнала по частотам [40, 41]. В работе [42] предложен оригинальный метод оценки спектральной плотности энергии нестационарного сигнала, описание которого приведено в следующем параграфе.

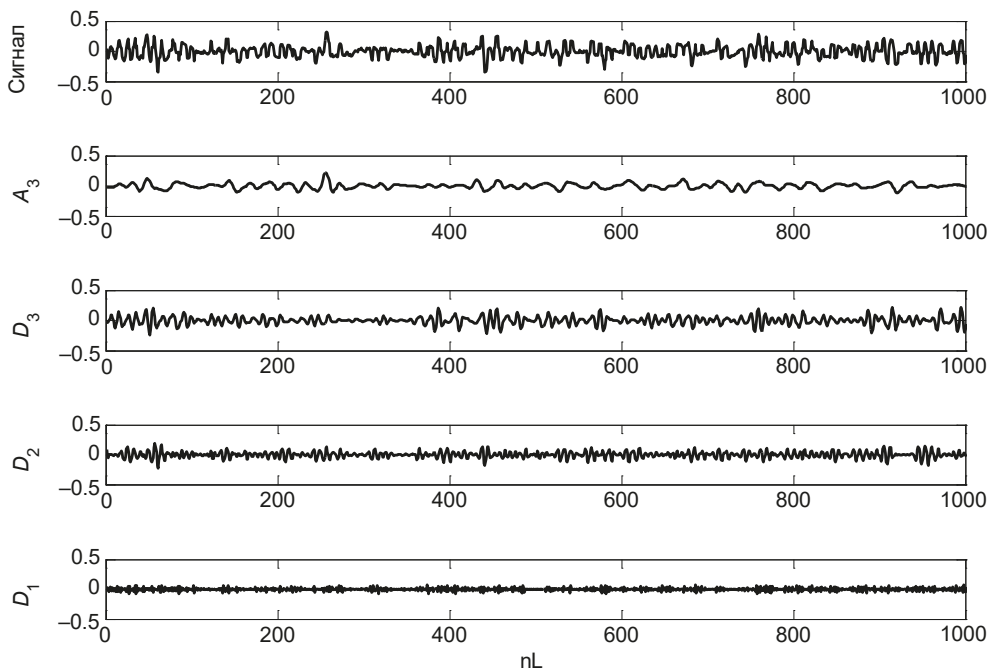


Рис. 1.5. Трехкомпонентное вейвлет-разложение физиологического сигнала: сверху вниз показаны тремор и сглаженная низкочастотная компонента разложения  $A_3$ , а также высокочастотные детализирующие компоненты разложения  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$

### 1.3. Интегральная оценка спектральной плотности энергии сигнала

Спектральная плотность энергии компоненты  $D(t)$  сигнала равна квадрату Фурье преобразования этой компоненты и описывает распределение энергии сигнала по частоте [38]:

$$S(f) = \left| \int D(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2.$$

Интеграл от спектральной плотности энергии компоненты  $D(t)$  сигнала

$$E = \int_{f_1}^{f_2} S(f) df$$

определяет накопление спектральной плотности энергии данной компоненты в пределах заданной полосы частот  $[f_1, f_2]$ .

В качестве энергетического параметра оценки спектральной плотности в работе [42] предложена следующая величина:

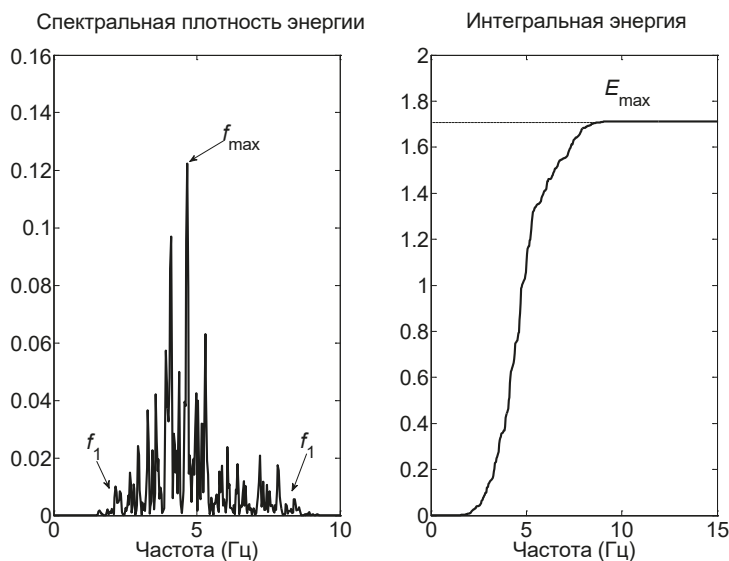


Рис. 1.6. Определение параметров спектральной плотности энергии компоненты сигнала

$$k = \frac{E_{\max}}{(f_2 - f_1)f_{\max}},$$

где  $f_{\max}$  — значение частоты, соответствующее максимуму спектральной плотности;  $E_{\max}$  — максимальный уровень накопления спектральной плотности энергии,  $[f_1, f_2]$  — интервал значений частот, оставшийся после 5% фильтрации шумовых компонент, т. е.  $f_1$  и  $f_2$  соответствуют значениям  $0,05 S_{\max}$  и  $0,95 S_{\max}$  (рис. 1.6). В приведенной формуле параметр  $k$  определяет связь между уровнем максимального накопления энергии компоненты сигнала, частотой, соответствующей максимальному накоплению спектральной плотности энергии, и интервалом частот, в котором накоплена эта энергия.

#### 1.4. Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала и оценивание энергии сигнала

Непрерывное вейвлет-преобразование временного ряда, определяющего исследуемый сигнал  $x(t)$ , обычно записывают в виде [39]:

$$W(a, t_0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t - t_0}{a} \right) dt,$$

где  $a$  — параметр масштаба;  $t_0$  — параметр временного сдвига;  $\psi((t - t_0)/a)$  — вейвлет-функция, полученная из базисного вейвлета  $\psi(t)$  путем масштабирования и сдвига по времени, символ  $*$  означает комплексное сопряжение.

В качестве базисного вейвлета при исследовании физиологических сигналов, как правило, применяют комплексный вейвлет Морле [30]:

$$\psi_0(t) = \pi^{-1/4} \exp(-0.5t^2) (\exp(i\omega_0 t) - \exp(-0.5\omega_0^2)),$$

где второй компонентой в скобках можно пренебречь при  $\omega_0 = 2\pi > 0$ .

Значение  $\omega_0 = 2\pi$  обеспечивает простое соотношение между масштабом  $a$  и частотой  $f$  спектра Фурье:  $f = 1/a$ . Тогда вейвлет-преобразование сигнала  $x(t)$  можно записать в виде:

$$W(f, t_0) = \pi^{-1/4} \sqrt{f} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-0.5(t-t_0)^2 f^2) (\exp(-i2\pi(t-t_0)f) dt.$$

Величина модуля вейвлетного спектра  $|W(f, t_0)|$  характеризует наличие и интенсивность частоты  $f$  в момент времени  $t_0$  в анализируемом сигнале, а величина квадрата модуля  $|W(f, t_0)|^2$  определяет мгновенное распределение энергии фрагмента сигнала по частотам, т.е. локальный вейвлетный спектр энергии в момент времени  $t_0$ . Этот спектр характеризует локализацию определенной частоты по времени ее возникновения в сигнале.

После интегрирования локальных спектров во времени можно получить глобальный вейвлетный спектр

$$E(f) = \int_{t_1}^{t_2} |W(f, t_0)|^2 dt_0,$$

т.е. интегральное распределение энергии вейвлетного спектра сигнала по частотам в определенном интервале времени  $[t_1, t_2]$ .

Примеры локального и глобального спектров сигнала приведены на рис. 1.7. На представленном рисунке глобальный вейвлетный спектр показывает широкий интервал частот в исследуемом сигнале с максимумом на частоте 11 Гц. Однако локальный вейвлетный спектр демонстрирует, что в данном интервале записи максимальная частота сигнала присутствовала не постоянно, а в некоторые определенные промежутки времени.

Отметим, что спектр мощности Фурье информацию о временной локализации максимальной частоты в сигнале не дает, как не дает ее и его аналог (глобальный вейвлетный спектр). Различия в информации, представляемой локальным и глобальными вейвлетными спектрами, показаны на рис. 1.8 и 1.9.

На рис. 1.8 изображен периодический сигнал  $x(t)$ , частота которого в течение первых двух секунд составляет 3,84 Гц, а в последующие увеличивается до 62,8 Гц, т.е. сигнал, заданный следующей функцией:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi w_1 t), & w_1 = 3, & \text{если } 0 < t < 2 \\ \sin(2\pi w_2 t), & w_2 = 10, & \text{если } 2 \leq t < 4 \end{cases}.$$



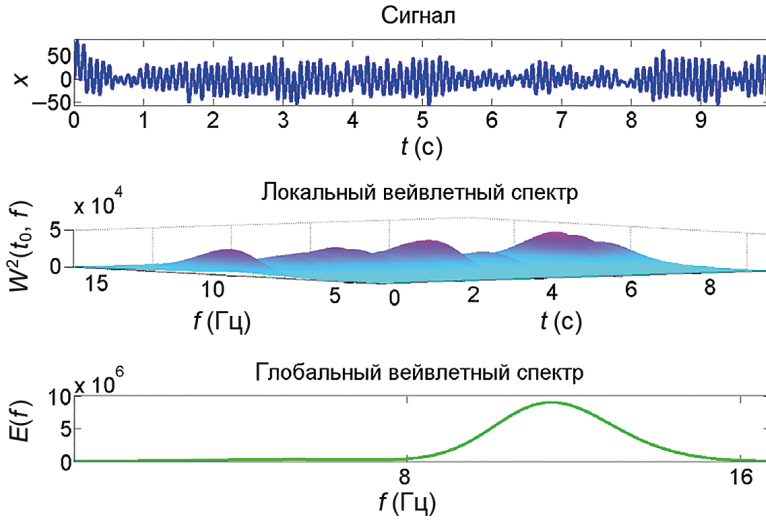


Рис. 1.7. Сигнал, его локальный и глобальный вейвлетные спектры

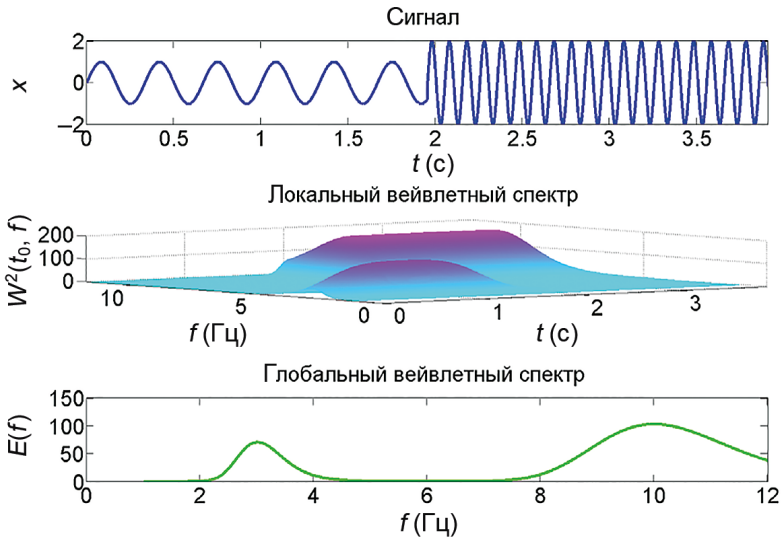


Рис. 1.8. Вейвлетные спектры сигнала  $x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi w_1 t), & w_1 = 3, & \text{если } 0 < t < 2 \\ \sin(2\pi w_2 t), & w_2 = 10, & \text{если } 2 \leq t < 4 \end{cases}$

В отличие от этого на рис. 1.9 показан двухпериодический сигнал  $y(t)$ , содержащий обе частоты 3,84 и 62,8 Гц одновременно, т. е. заданный:

$$y(t) = \sin(2\pi w_1 t) + 0.5 \sin(2\pi w_2 t), \quad w_1 = 3, \quad w_2 = 10.$$

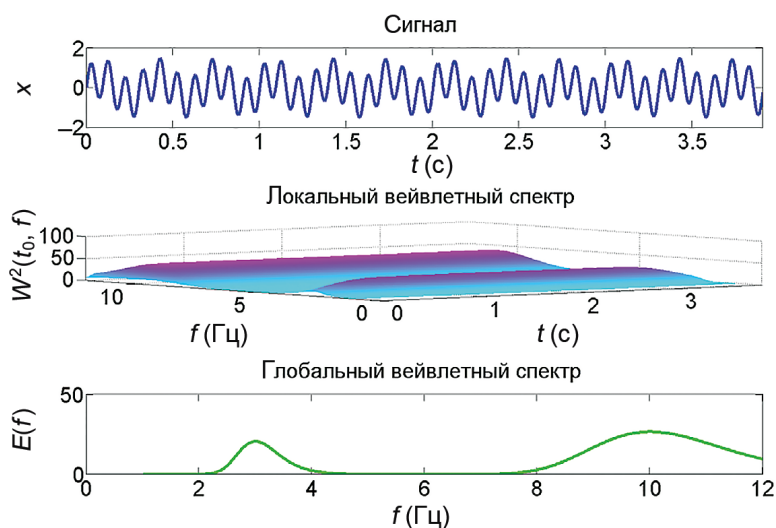


Рис. 1.9. Вейвлетные спектры сигнала  $y(t) = \sin(2\pi w_1 t) + 0.5 \sin(2\pi w_2 t)$ ,  $w_1 = 3$ ,  $w_2 = 10$

Глобальный вейвлетный спектр, как и спектр Фурье, не различает сигналы  $x(t)$  и  $y(t)$ , в то время как локальный вейвлетный спектр демонстрирует различия в частотно-временных особенностях сигналов.

### 1.5. Сравнение вейвлетного преобразования сигнала с быстрым преобразованием Фурье и оконным преобразованием Фурье

Преимущества вейвлетного анализа сигналов по сравнению с классическим спектральным анализом, основанном на дискретном преобразовании Фурье, широко обсуждаются в работах [14, 45, 46]. В случае когда необходимо только определить усредненные по времени спектральные компоненты, представленные в анализируемом сигнале, классический подход может быть успешно применен. Однако если нас интересует распределение во времени различных частотных компонент, использование вейвлетов имеет значительные преимущества [18]. В отличие от быстрого преобразования Фурье (FFT) непрерывное вейвлет-преобразование позволяет получить информацию об изменении частотных характеристик сигнала во времени, т.е. узнать, в какие именно моменты времени возникают те или иные частоты [44]. Следовательно, метод непрерывного вейвлет-преобразования хорошо подходит к изучению так называемых event-related модуляций ЭЭГ [46], поскольку его результаты содержат информацию не только о распределении энергии сигнала по частотам, но и о моментах времени, в которые происходят эти быстрые модуляции частот.

Другим подходом к исследованию сигналов может быть использование оконного преобразования Фурье (STFT). Алгоритм этого метода состоит из следующей последовательности процедур: 1) запись ЭЭГ разделяется на короткие перекрывающиеся фрагменты; 2) для каждого фрагмента применяется быстрое преобразование Фурье с оконной функцией, например окном Хэмминга; 3) далее окно сдвигается на число значений, равных разности  $w - n$ , где  $w$  — длина окна,  $n$  — число значений, которые перекрываются в каждом сегменте [47].

В силу такого алгоритма спектр, полученный при помощи оконного преобразования Фурье, является произведением сигнала и оконной функции, а результат оконного преобразования Фурье зависит от обоих параметров  $w$  и  $n$ . Поэтому при использовании оконного преобразования Фурье оказывается невозможным одновременно обеспечить хорошее разрешение как по времени, так и по частоте. Чем уже окно, тем выше разрешение по времени, но ниже по частоте, т. е. узкое окно не обеспечивает хорошего определения частот в структуре исследуемого сигнала. Таким образом, фиксированный размер окна в методе STFT не позволяет описать локальные свойства паттернов ЭЭГ.

В отличие от оконного преобразования Фурье в вейвлетном анализе используются окна различных размеров, в силу чего удастся найти оптимальный компромисс для частотно-временного разрешения анализируемого сигнала.

### 1.6. Кросс-вейвлетные спектры и оценивание вейвлет-когерентности двух сигналов

Для сравнения динамики двух сигналов  $y(t)$  и  $x(t)$  используется оценивание кросс-вейвлетного спектра

$$|W_{xy}| = |W_x(f, t_0)W_y^*(f, t_0)|,$$

определяющего локальные соотношения между двумя сигналами в определенные моменты времени на определенных частотах [35].

На рис. 1.10 представлены два периодических сигнала  $x(t)$  и  $y(t)$ , заданные функциями

$$x(t) = \begin{cases} 2 \sin(2\pi w_1 t), & w_1 = 8, & \text{если } 0 < t < 2.2 \\ 0.5 \sin(2\pi w_2 t), & w_2 = 2, & \text{если } 2.2 \leq t < 4.6, \end{cases}$$

$$y(t) = \sin(2\pi w_1 t) + \sin(2\pi w_2 t), \quad w_1 = 8, \quad w_2 = 2$$

и кросс-вейвлетный спектр этих сигналов, отражающий их ковариантность (одновременное существование во времени) на частоте 8 Гц в первые 2,2 с, и последующую ковариантность на частоте 2 Гц в последние 2,4 с.

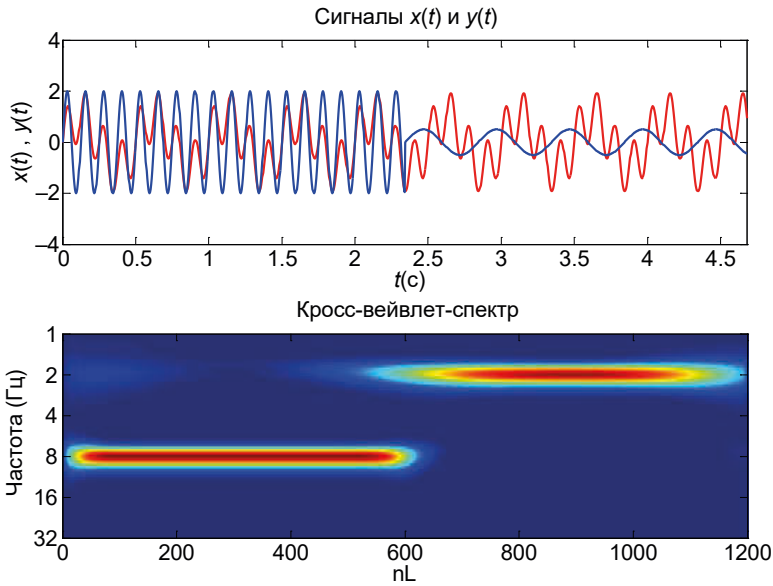


Рис. 1.10. Сигналы и их кросс-вейвлетные спектры

Для сравнения динамики двух сигналов  $y(t)$  и  $x(t)$  можно оценить также вейвлет-когерентность этих сигналов [49]:

$$WC = \frac{|S(W_{xy})|}{\sqrt{|S(W_{xx})|} \sqrt{|S(W_{yy})|}}.$$

Символ  $S$  обозначает предварительное сглаживание сигнала до применения к нему вейвлет-преобразования с целью улучшения частотно-временного разрешения и статистической значимости [48]. Вейвлет-когерентность  $WC$  может принимать значения от 0 до 1 и описывает локальные корреляции между двумя сигналами; чем ближе это значение к 1, тем более коррелированы сигналы. Статистически значимая вейвлет-когерентность определяется, как правило, с использованием теста, в котором исходный сигнал рандомизируется по методу Монте-Карло, и статистический уровень значимости каждой частоты в сигнале оценивается по нескольким рандомизированным реализациям [49].

### 1.7. Фрактальный анализ физиологических сигналов

Оценка степени фрактальности физиологических сигналов важна при исследовании флуктуаций ритмов мозга [50] для анализа генерации потенциалов действия нейронами и последовательностей времен жизни ионных каналов [37, 50–56]. При этом в основе фрактальности ритмов мозга лежит фракталь-

ность длительностей открытого или закрытого состояний ионных каналов и связанных с ними микротоковых флуктуаций одиночных ионных каналов и далее интегральных ионных токов, формирующих ритмическое возбуждение нейрона и изменение состояния мембранных белков и мембраносвязанного  $\text{Ca}^{+2}$  [57–60].

Фрактальность физиологического процесса связана с наличием сильно изрезанной формы графика функции, описывающей колебательный процесс, и с некоторой повторяемостью в широком диапазоне временных масштабов [61]. Для функции, обладающей свойством фрактальности, справедливо следующее соотношение:

$$g(x_0 + lx) - g(x_0) \approx l^H (g(x_0 + x) - g(x_0)),$$

где показатель степени  $H$ , называемый экспонентой Херста, характеризует нерегулярность функции  $g(x)$  в окрестности точки  $x_0$ . Чем меньше величина  $H$ , тем более сингулярна (менее гладкая) функция [62].

Для численной оценки показателя Херста, как правило, применяется метод анализа флуктуаций относительно тренда (*detrended fluctuation analysis*) [63].

Алгоритм вычисления показателя Херста состоит в следующем:

1. Для исходного ряда значений  $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$  вычисляется интегрированная последовательность  $\{y(k)\}_{k=1}^N$ , состоящая из накопленных отклонений от среднего  $\hat{x}_k$ :

$$y(k) = \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_k).$$

2. Эта последовательность разбивается на некоторое число  $m = N/n$  неперекрывающихся интервалов длины  $n$ .
3. В каждом из интервалов полученная интегрированная последовательность аппроксимируется прямой по методу наименьших квадратов.
4. Координата  $y_n(k)$  прямой является средним значением интегрированной последовательности на  $k$ -м интервале и обозначает локальный тренд в пределах выбранного интервала.
5. Среднеквадратичные отклонения (флуктуации) вычисленной интегрированной последовательности относительно локального тренда для  $k$ -го интервала вычисляются по формуле:

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}.$$

6. Далее вычисления повторяются для других значений длины интервала  $n$  от 5 до 100.

В силу того что при увеличении длины интервала  $n$  значение  $F(n)$ , как правило, возрастает по степенному закону:  $F(n) \sim n^\alpha$ , скейлинговая экспонента  $\alpha$  может быть вычислена как угловой коэффициент прямой, определяющей зависимость  $\log F(n)$  от  $\log n$ . При  $\alpha \leq 1$  полученное значение  $\alpha$  совпадает со значением показателя Херста  $H$ . Фрактальная размерность сигнала  $D$  связана с показателем Херста  $H$  следующим образом:

$$D = 2 - H.$$

К недостаткам метода следует отнести тот факт, что для надежного вычисления показателя Херста и, соответственно, фрактальной размерности требуется большой временной ряд, а физиологический сигнал, как правило, при длительной записи меняет характер своего поведения многократно. Поэтому вычисленная фрактальная размерность не будет связана с локальной динамикой исследуемого процесса, а будет характеризовать некоторую ее усредненную динамику. В этом смысле для описания динамики физиологического процесса лучше подходит концепция мультифрактальности.

### **1.8. Оценка степени мультифрактальности физиологических сигналов**

Если для описания фрактальности монофрактального сигнала достаточно одной величины (фрактальной размерности сигнала), определяющей сохраняемость статистических характеристик исследуемого сигнала при изменении масштаба (частоты), то для того чтобы охарактеризовать мультифрактальный сигнал, необходимо использовать целый спектр фрактальных размерностей.

Информация о возможной мультифрактальной структуре исследуемого сигнала и ее временной локализации  $t_0$  отражается в асимптотическом поведении коэффициентов вейвлет-разложения сигнала  $|W(f, t_0)|$  при малых значениях масштаба  $a$  и, соответственно, больших значениях частот  $f$  [49]. Чем быстрее уменьшаются вейвлет-коэффициенты при  $a \rightarrow 0$ , тем более регулярен сигнал в окрестности точки  $t_0$ . Медленное уменьшение вейвлет-коэффициентов при  $a \rightarrow 0$  в окрестности точки  $t_0$  свидетельствует о наличии сингулярности (особенности в виде изрезанности сигнала) в этой точке. Таким образом, скорость изменения модуля коэффициентов вейвлет-преобразования сигнала позволяет определять наличие или отсутствие сингулярностей этого сигнала.

Степень сингулярности сигнала  $x(t)$  в точке  $t_0$  описывается экспонентой Гельдера,  $h(t_0)$ , т.е. наибольшей экспонентой, при которой анализируемый сигнал может быть представлен суммой двух компонент: полинома  $P_n(t)$ , описывающего регулярное поведение анализируемого сигнала, и слагаемого, описывающего его нерегулярное поведение [62]:

$$x(t) = P_n(t) + c |t - t_0|^{h(t_0)}.$$

В силу простой зависимости  $W(a, t_0) \sim a^{h(t_0)}$  при  $a \rightarrow 0$  [64] экспонента Гельдера может быть вычислена следующим образом:

$$h(t_0) \sim \frac{\log_{10} W(a, t_0)}{\log_{10} a}.$$

Однако при возрастании величины  $a$  влияние соседних сингулярностей может приводить к неточности вычисления, поэтому, как правило, экспонента Гельдера вычисляется на основании статистического описания локальных сингулярностей с помощью частичных функций  $Z(q, a)$ , которые строятся по методу поиска максимумов модулей вейвлет-коэффициентов (WTMM — *wavelet transform modulus maxima*) вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения  $a$  [64]. Детальное описание метода и его применение к экспериментальным данным дано в работе [65].

Иллюстрация к поиску линий локальных максимумов трехмерной вейвлетной поверхности  $|W(f, t_0)|^2$  сигнала, определяющей его локальный вейвлетный спектр, дана на рис. 1.11.

Алгоритм оценивания мультифрактальности сигнала по методу поиска максимумов модулей вейвлет-коэффициентов (WTMM) состоит из следующей последовательности процедур:

1. Применяется непрерывное вейвлет-преобразование временного ряда, описывающего исследуемый сигнал  $x(t)$ :

$$W(a, t_0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi^* \left( \frac{t - t_0}{a} \right) dt.$$

2. Для каждого значения  $a$  находится множество  $L(a)$  линий локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов (линий, для которых выполняется условие

$$\frac{\partial |W(a, t_0)|}{\partial t} = 0).$$

Пример этого множества представлен на рис. 1.11.

3. Вдоль каждой линии для значений масштабов, меньших заданного значения  $a$ , вычисляются частичные функции  $Z(q, a)$  как сумма  $q$  степеней максимумов модулей вейвлет-коэффициентов вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения  $a$  (так называемые обобщенные статистические суммы):

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left( \sup_{a' \leq a} |W(a', t_l(a'))| \right)^q,$$

где  $t_l(a^*)$  определяет положение максимума соответствующего линии  $l$  на этом масштабе.

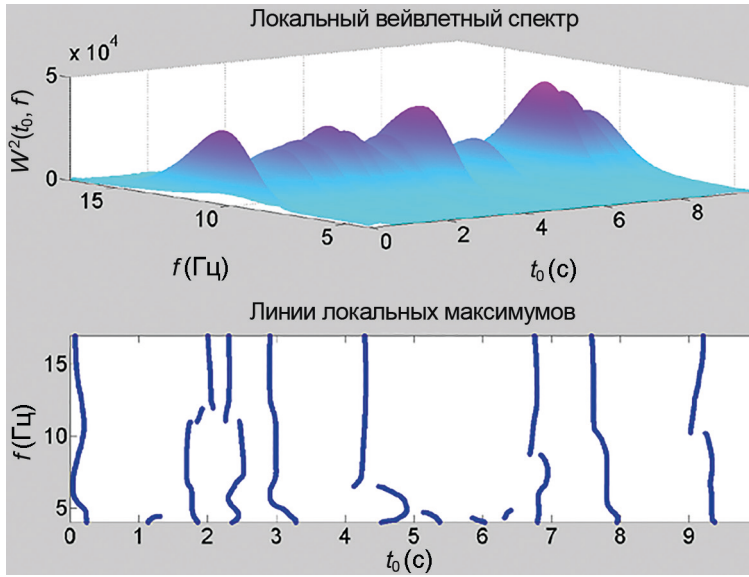


Рис. 1.11. Локальный вейвлетный спектр сигнала и линии его локальных максимумов

4. В силу того что при  $a \rightarrow 0$  частичная функция  $Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}$  [65], скейлинговая экспонента  $\tau(q)$  находится следующим образом:

$$\tau(q) \sim \log_{10} Z(q, a) / \log_{10} a.$$

5. Выбирая различные значения степени  $q$ , можно получить линейную или нелинейную зависимость  $\tau(q)$ , что дает постоянное значение экспоненты Гельдера  $h(q) = \text{const}$  для монофрактальных сигналов или большое число экспонент  $h(q) = d\tau(q)/dq \neq \text{const}$  для мультифрактальных сигналов и получить в этом случае распределение экспонент Гельдера, называемое спектром сингулярности, которое вычисляется на основе скейлинговых экспонент:

$$D(h) = qh(q) - \tau(q).$$

Другим методом оценивания мультифрактальности сигнала является метод анализа флуктуаций относительно тренда (MDFFA) [66].

Алгоритм оценивания мультифрактальности сигнала по методу MDFFA состоит из следующих процедур:

1. Для исходного ряда значений  $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$  вычисляется интегрированная последовательность, состоящая из накопленных отклонений от среднего  $\hat{x}$ :

$$y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \hat{x}), \quad i = 1, \dots, N.$$



2. Эта последовательность разбивается на некоторое число  $m = N/n$  неперекрывающихся интервалов длины  $n$ , разбиение повторяется начиная с противоположного конца, в итоге получается  $2m$  интервалов.
3. Для каждого из интервалов полученная последовательность аппроксимируется прямой по методу наименьших квадратов, в результате чего определяется локальный тренд  $v_s(i)$  в пределах выбранного интервала.
4. Далее определяются отклонения вычисленных последовательностей относительно локального тренда для каждого интервала  $s = 1, \dots, m$  и  $s = m+1, \dots, 2m$ :

$$F^2(n, s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y((s-1)n+i) - v_s(i)]^2,$$

$$F^2(n, s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y((N-(s-m)n+i) - v_s(i)]^2$$

5. Вычисляется функция  $F_q(n)$  флуктуаций  $q$ -порядка:

$$F_q(n) = \left\{ \frac{1}{2m} \sum_{s=1}^{2m} [F^2(n, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}.$$

6. Вычисления повторяются для других значений длины интервала  $n$  от 5 до 100.

В силу того что при увеличении длины интервала  $n$  значение  $F_q(n)$ , как правило, возрастает по степенному закону:  $F_q(n) \sim n^{h(q)}$ , экспонента Гельдера  $h(q)$  может быть вычислена как угловой коэффициент прямой, определяющей зависимость  $\log F_q(n)$  от  $\log n$ .

В работе [53] отмечается, что метод *M DFA* хорошо определяет только положительные значения экспонент Гельдера, в то время как точность определения значений  $h(q)$  существенно уменьшается при  $h(q) \rightarrow 0$ .

Используя глобальные вейвлетные спектры и метод максимумов модулей вейвлет-преобразования, можно получить значения максимумов глобальной энергии физиологического сигнала  $E_{\max}$  и двух мультифрактальных параметров: а) ширины спектра сингулярности  $\Delta h = h_{\max} - h_{\min}$ ; б) асимметрии спектра сингулярности  $\Delta = |\Delta_2 - \Delta_1|$ , где  $h_{\max} = h(q = -5)$  и  $h_{\min} = h(q = 5)$  — максимальное и минимальное значения экспоненты Гельдера, соответствующие минимальной и максимальной флуктуациям сигнала,  $\Delta_1 = h_{\max} - h_0$  и  $\Delta_2 = h_0 - h_{\min}$ ,  $h_0 = h(q = 0)$ .

Первый параметр  $\Delta h$  характеризует степень мультифрактальности анализируемого сигнала (чем больше величина  $\Delta h$ , тем больше степень мультифрактальности), второй параметр  $\Delta$  определяет, где в области сильных сингулярностей (больших флуктуаций — при  $q > 0$ ) или в области слабых сингулярностей (малых флуктуаций — при  $q < 0$ ) в основном находятся экспоненты Гельдера

[62, 67]. Эти параметры определяют также степень коррелированности интервалов в паттернах сигнала, так как величины  $h < 0,5$  соответствуют антикоррелированной динамике последовательных значений сигнала (когда за большим значением интервала следует малое значение), а величины  $h > 0,5$  — его коррелированной динамике (когда за большим значением интервала следует также большое значение, а за малым — малое), поэтому в целом сигнал является более гладким во втором случае, чем в первом [50].

Как отмечается в работах [62, 65, 68], мультифрактальный анализ, являясь методом локального исследования временной структуры сигнала, позволяет оценивать его корреляционные свойства даже при сравнительно не очень длинной регистрации сигнала, что является несомненным преимуществом этого метода нелинейной динамики.

### 1.9. Метод рекуррентного анализа

Другим перспективным методом исследования физиологических колебаний является метод рекуррентного анализа, позволяющий визуализировать определенные закономерности в паттернах сложных нестационарных колебаний [69–71].

В основе метода лежит построение и анализ рекуррентных диаграмм. Рекуррентная диаграмма является графическим представлением матрицы

$$R_{i,j}(m, \epsilon) = \Theta(\epsilon - \|y_i - y_j\|), i, j = 1, \dots, N,$$

служащей для отображения  $m$ -мерной фазовой траектории состояний  $y(t)$  на плоскость, в которой координатные оси являются осями времени, а черная точка соответствует повторению состояния во времени  $i$  в некоторое другое время  $j$ .

В представленной выше формуле  $N$  — количество рассматриваемых состояний;  $\epsilon$  — размер окрестности точки  $y$ ;  $\|\dots\|$  — норма;  $m$  — размерность пространства вложения;  $\Theta(\cdot)$  — функция Хевисайда (принимаяющая значения 0 или 1) [70]. Таким образом,

$$R_{i,j}(m, \epsilon) = \begin{cases} 1, & y_i \approx y_j \\ 0, & y_i \neq y_j \end{cases}.$$

При этом значения матрицы 1 или 0 отмечаются на рекуррентной диаграмме черной или белой точками и отражают рекуррентность или ее отсутствие с точностью до  $\epsilon$ -ошибки. Рекуррентность определяется как достаточная близость состояния  $y_j$  состоянию  $y_i$ , т. е. рекуррентными являются состояния  $y_j$ , попадающие в  $m$ -мерную окрестность с радиусом  $\epsilon$  и центром в  $y_i$ .

Фазовая траектория состояний  $y(t)$  получается из временного ряда  $\{x(t)\}$  методом временных задержек [72]:

$$y(t) = (x(t), x(t + d), \dots, x(t + (m - 1)d),$$

где  $d$  — временная задержка;  $m$  — размерность вложения аттрактора.

Рекуррентные диаграммы показывают структурные свойства паттернов анализируемого сигнала и изменения в паттернах на протяжении записи. Отдельные изолированные точки на диаграмме свидетельствуют о сильных флуктуациях, происходящих в анализируемом сигнале, т.е. его стохастичности. Наличие диагональных линий, параллельных «линии идентичности», проходящей под углом  $45^\circ$ , говорит о сходстве паттернов в различные времена. Таким образом, появление длинных диагональных линий демонстрирует появление периодичности в исследуемом процессе, при этом вертикальные расстояния между диагональными линиями соответствуют периодам колебаний. Если эти расстояния различны, то колебания являются квазипериодическими. Возникновение в диаграмме вертикальных или горизонтальных линий говорит о появлении паттернов, которые не изменяются во времени или изменяются очень медленно. Нерегулярное появление черных зон, соответствующих скоплениям вертикальных и горизонтальных линий, указывает на нерегулярность процесса [70].

Используя метод рекуррентного анализа, можно определить численные показатели рекуррентных диаграмм [70]:

А) показатель детерминизма (предсказуемости) исследуемого процесса

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N lP(\epsilon, l)}{\sum_{i,j} R_{i,j}(m, \epsilon)} -$$

отношение числа рекуррентных точек, составляющих диагональные структуры, к общему числу рекуррентных точек, где  $P(\epsilon, l) = \{l_i, i = 1, \dots, N_l\}$  — частотное распределение диагональных линий длин  $l$  в рекуррентной диаграмме;  $N$  — число всех диагональных линий;

Б) показатель дивергенции

$$DIV = 1/L_{\max},$$

где  $L_{\max} = \max(\{l_i, i = 1, \dots, N_l\})$  — наибольшая диагональная линия в рекуррентной диаграмме;

В) рекуррентное время

$$T_j = \left| \left\{ i, j: y_i, y_j \in R_i, y_{j-1} \notin R_i \right\} \right|,$$

необходимое для того, чтобы траектория вернулась в  $\epsilon$ -окрестность точки, в которой она была ранее, определяемое как расстояние по вертикали между

началом и концом последовательной рекуррентной структуры в рекуррентной диаграмме, где  $R_i$  — рекуррентные точки, которые принадлежат состоянию  $y_i$  [69];

Г) энтропия плотности рекуррентных времен

$$EDRT = - \frac{\sum_{T=1}^{T_{\max}} P(T) \ln P(T)}{\ln T_{\max}},$$

где  $T_{\max}$  — наибольшее рекуррентное время в рекуррентной диаграмме;  $P(T)$  — функция плотности рекуррентных времен, полученная после нормирования гистограммы  $H(T)$  рекуррентных времен:

$$P(T) = \frac{H(T)}{\sum_{T=1}^{T_{\max}} H(T)}.$$

Показатель детерминизма  $DET$ , или предсказуемости поведения процесса, максимален ( $= 1$ ) для периодического процесса и минимален ( $= 0$ ) для стохастического, так как процессы со стохастическим поведением порождают очень короткие диагонали либо вообще не имеют их, в то время как детерминистские процессы дают длинные диагонали [70].

Показатель дивергенции, наоборот, минимален ( $= 0$ ) для периодического процесса и характеризует сходимость сегментов траектории (чем дальше процесс от периодического, тем короче диагональные линии и тем больше значение показателя  $DIV$ ) [70].

Гистограмма рекуррентных времен  $H(T)$  имеет единственный максимум для периодического сигнала и множество максимумов для сильно зашумленного неоднородного сигнала, а функция плотности рекуррентных времен  $P(T)$  принимает значения от 1 для периодического сигнала до  $1/T_{\max}$  [73] — для неоднородного сигнала.

Энтропия плотности рекуррентных времен  $EDRT$  отражает сложность детерминистской составляющей сигнала и характеризует неопределенность его периода. Эта величина может быть равной 0 (что означает отсутствие неопределенности в значении периода для периодического сигнала) или 1 (максимальная неопределенность для стохастического сигнала) [73]. Для реальных сигналов  $EDRT$  принимает промежуточные от 0 до 1 значения.

Таким образом, метод рекуррентного анализа, позволяющий не только визуализировать определенные закономерности в паттернах сложных нестационарных колебаний, но и выявлять количественные параметры эволюции сигнала во времени, является перспективным исследованием нелинейной динамики физиологических ритмов.

## 1.10. Метод совместного рекуррентного анализа

Метод совместного рекуррентного анализа позволяет визуализировать определенные закономерности в двух сигналах, полученных даже от различных физических источников [70, 74]. В основе метода лежит построение и анализ совместной рекуррентной диаграммы.

Совместная рекуррентная диаграмма является графическим представлением матрицы

$$R_{i,j}(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & y_i \approx y_j, x_i \approx x_j \\ 0, & y_i \neq y_j, x_i \neq x_j \end{cases},$$

в которой значения 1 или 0 соответствуют черной или белой точкам, при этом черная точка соответствует совместной рекуррентности двух сигналов  $x$  и  $y$  или ее отсутствию. Совместная рекуррентность с точностью до  $\varepsilon$ -ошибки, определяется как возврат состояния  $y_j$  к состоянию  $y_i$  и одновременный возврат состояния  $x_j$  к состоянию  $x_i$  [74].

На основании анализа совместной рекуррентной диаграммы можно определить численные показатели:  $L$  — средняя длина диагональных линий в совместной рекуррентной диаграмме и  $\tau$  — рекуррентное время, необходимое для того, чтобы значение сигнала вернулось в  $\varepsilon$ -окрестность точки, в которой оно было ранее [70].

## 1.11. Локализация неустойчивых периодических орбит

Паттерн, соответствующий периодическим колебаниям (периодическим орбитам), отражается в рекуррентной диаграмме непрерывающимися равноотстоящими друг от друга диагональными линиями. Вертикальные расстояния между диагональными линиями соответствуют периодам колебаний. Хаотические паттерны приводят к появлению коротких диагоналей, вертикальные расстояния между которыми становятся нерегулярными. Когда траектория колебательного процесса приближается к неустойчивой периодической орбите, она остается в его окрестности на некотором временном интервале, длина которого зависит от того, насколько неустойчива орбита [75–77]. Поэтому неустойчивые периодические орбиты могут быть обнаружены путем поиска внутри рекуррентной диаграммы окон, в которых паттерны соответствуют периодическому движению. Если расстояния между диагональными линиями изменяются от одного выбранного окна к другому, то существуют разные орбиты с различными периодами.

Период неустойчивой периодической орбиты можно оценить по вертикальному расстоянию между рекуррентными точками в окне, умноженному на интервал дискретизации [75].

Алгоритм нахождения неустойчивой периодической орбиты состоит из следующих процедур.

1. Находятся рекуррентные времена с рекуррентностью с точностью до  $\varepsilon$ -ошибки, т. е. в окрестности с радиусом  $\varepsilon$ .
2. Значения рекуррентных периодов определяются как рекуррентные времена, умноженные на интервал дискретизации. На основании этих значений строится гистограмма рекуррентных периодов. Значения периодов неустойчивых периодических орбит находятся как максимумы этой гистограммы.
3. Для исключения влияния шума найденные неустойчивые периодические орбиты проверяются на статистическую значимость. Для этого описанные выше процедуры повторяются для суррогатных сигналов, полученных рандомизацией исходных данных [78].

Статистическая мера наличия статистически значимых неустойчивых периодических орбит в исследуемом сигнале определяется отношением

$$k = (A - \bar{A}) / \sigma,$$

где  $A$  — значение максимума гистограммы;  $\bar{A}$  — значение  $A$  для суррогатных сигналов;  $\sigma$  — стандартное отклонение. Величина  $k$  характеризует существование статистически значимых неустойчивых периодических орбит в исследуемом сигнале по сравнению с его рандомизированным вариантом. Значение  $k > 2$  означает обнаружение неустойчивых периодических орбит с более чем 95 %-м уровнем значимости [79].

### **1.12. Построение фазовых портретов физиологических сигналов**

Для визуализации динамического поведения сложных нелинейных систем можно рассмотреть их поведение в фазовом пространстве. Это позволяет обнаружить изменения во времени значений, которые принимают переменные системы.

Фазовая траектория состояний  $y(t)$  получается из временного ряда  $\{x(t)\}$  методом Такенса, основанном на использовании временных задержек [72]:

$$y(t) = (x(t), x(t + d), \dots, x(t + (m - 1)d),$$

где  $d$  — временная задержка;  $m$  — размерность вложения (минимальная размерность пространства, в котором восстановленный аттрактор воспроизводит свойства исходного аттрактора), т. е. наименьшее число независимых переменных, однозначно определяющих его свойства. Таким образом, каждому значению  $x(t_i)$  временного ряда  $\{x(t)\}$  в заданный момент времени соответствует точка  $(x(t_i), x(t_i + d), x(t_i + 2d), x(t_i + (m - 1)d))$ , т. е. значения той же пе-

ременной после некоторого фиксированного времени задержки. Множество таких точек для последовательных моментов времени образует траекторию, которая описывает эволюцию исследуемой системы.

Для корректной реконструкции фазовой траектории состояний  $y(t)$  из исходного временного ряда необходимо выбрать такую задержку  $d$ , чтобы координаты точки  $(x(t_i), x(t_i + d))$  несли как можно меньше повторяющейся информации. Подбор оптимального интервала задержки производится на основании поиска первого минимума функции взаимной информации [72]. Далее методом поиска ближайших ложных соседей определяется оптимальная размерность вложения  $m$  [80]. Величина размера окрестности  $\epsilon$  выбирается равной 1% от величины стандартного отклонения анализируемого временного ряда [70].

### 1.13. Метод бифуркационного анализа

Для изучения изменений в паттернах импульсной активности нейронов, как правило, применяется метод бифуркационного анализа [81]. Этот метод позволяет получать информацию о соотношениях между значениями параметров модели, определяющей импульсную активность, и типом ее устойчивого решения [82–84]. Метод состоит в нахождении бифуркационных значений параметров, т.е. значений, при которых происходит качественное изменение решения системы (изменение режима импульсной активности).

Пусть исследуемая модель задается системой дифференциальных уравнений и может быть записана в виде:

$$\frac{dy}{dt} = F(y, p),$$

где  $y = (y_1, \dots, y_n)$  — вектор переменных системы;  $p$  — вектор параметров.

Поиску бифуркационных значений параметров системы предшествует нахождение стационарного состояния системы  $y_0(p)$ , при котором выполняется условие

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Локальные бифуркации стационарного состояния связаны с изменением его устойчивости. К бифуркациям такого типа относятся бифуркация седло — узел, бифуркация Андронова — Хопфа и седло — узел на инвариантном круге [85]. Локальные бифуркации предельного цикла связаны с изменением типа и (или) устойчивости периодического решения системы. К ним относятся бифуркации седло — узел предельного цикла, бифуркация удвоения периода и бифуркация рождения (исчезновения) тора [86].

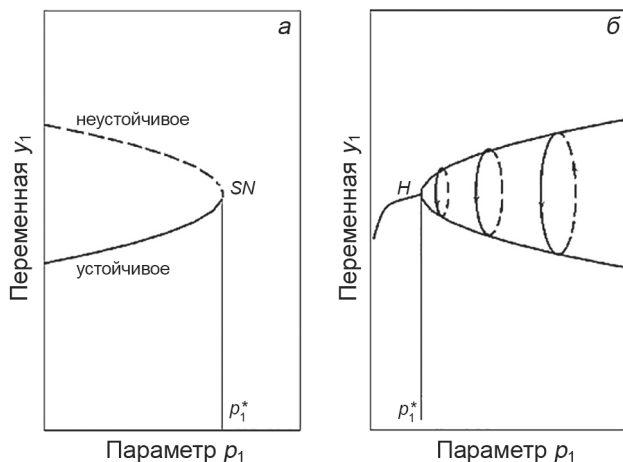


Рис. 1.12. Бифуркационные диаграммы  $y_1(p_1)$ : а — в случае бифуркации типа седло — узел; б — в случае бифуркации Андронова — Хопфа

Для визуализации смены возможных режимов динамического поведения системы (стационарных состояний, периодических орбит или нерегулярных аттракторов), возникающей при изменении того или иного параметра системы, служат бифуркационные диаграммы, дающие зависимости переменных системы от значений ее бифуркационных параметров. Бифуркация седло — узел на бифуркационной диаграмме изображается точкой, в которой два стационарных состояния системы сливаются вместе и исчезают [81]. Пример такой бифуркации показан на рис. 1.12, а.

При значении параметра  $p_1 = p_1^*$  устойчивое и неустойчивое состояния сливаются, таким образом, при  $p_1 > p_1^*$  стационарное состояние не обнаруживается. Это происходит, когда якобиан системы

$$J(p_1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

вычисленный в стационарной точке  $y_0(p_1)$ , имеет одно нулевое собственное число,  $\lambda_1(p_1) = 0$ , а остальные собственные числа  $\lambda_i(p_1) \neq 0, i = 2, \dots, n$ .

Бифуркация Андронова — Хопфа на бифуркационной диаграмме отображается точкой, в которой при соответствующем бифуркационном значении параметра  $p_1$  устойчивое стационарное состояние теряет устойчивость и рождается устойчивый предельный цикл (рис. 1.12, б), что означает, что вместо стационарного поведения система демонстрирует колебательное поведение.



При этом амплитуда колебаний растет по мере удаления вправо от точки бифуркации, а частота колебаний сохраняется. Рождение устойчивого предельного цикла происходит, когда якобиан системы, вычисленный в стационарной точке, имеет пару чисто мнимых комплексно-сопряженных собственных чисел  $(\lambda_{1,2}(p_1) = \pm i\omega)$ , а остальные собственные числа  $\lambda_i(p_1) < 0$ ,  $i = 3, \dots, n$ .

Бифуркации Андронова — Хопфа могут быть субкритическими или суперкритическими, что определяется знаком максимального показателя Ляпунова. Вычисление этого показателя для систем дифференциальных уравнений сводится к анализу систем уравнений в вариациях [81]

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t),$$

где  $Y(t) = y(t) - y_0(t)$  — малое возмущение;  $y_0(t)$  — решение системы;  $A(t) = J(p_1, t)$  — матрица линеаризации в окрестности решения  $y_0(t)$ .

В случае если решение  $y_0(t)$  является периодическим, т.е.  $y_0(t) = y_0(t + T)$ , его устойчивость определяется значениями мультипликаторов предельного цикла — собственными значениями периодической матрицы монодромии  $A(t)$ , описывающей эволюцию малого возмущения за период  $T$ :  $y(t_0 + T) = A(t)y_0(t)$  [72]. Отметим, что для периодического решения один из мультипликаторов цикла всегда равен 1 ( $\mu_1 = 1$ ).

Суперкритическая бифуркация Андронова — Хопфа связана с потерей устойчивости стационарного состояния системы в результате изменения ее бифуркационного параметра и возникновением устойчивого периодического решения малой амплитуды (мягкое возбуждение), а устойчивость такого решения связана с тем, что остальные (кроме  $\mu_1 = 1$ ) мультипликаторы  $|\mu_i| < 1$  [85]. В случае субкритической бифуркации Андронова — Хопфа исчезает неустойчивый предельный цикл, который влипает в устойчивое стационарное состояние, в силу чего это состояние теряет устойчивость и ведет к появлению устойчивого периодического решения большой амплитуды (жесткое возбуждение). Неустойчивость предельного цикла и субкритическая бифуркация Андронова — Хопфа, соответственно, определяются значениями всех мультипликаторов  $|\mu_i| > 1$  (кроме  $\mu_1 = 1$ ).

Связь мультипликаторов цикла с показателями Ляпунова задается отношением

$$\lambda_i = (\ln(\mu_i))/T,$$

в силу чего при  $\mu_i = 1$  значения  $\lambda_i = 0$  и при  $\mu_i < 1$  значения  $\lambda_i < 0$ , таким образом, для устойчивого предельного цикла максимальный показатель Ляпунова равен нулю, а для неустойчивого — имеет положительное значение [85].

В случае бифуркации тора предельный цикл меняет свою устойчивость, и вместо него появляется инвариантный тор, устойчивость которого такая же, что и устойчивость породившего его предельного цикла [81]. Бифуркация тора

соответствует смене режима периодических колебаний на режим квазипериодических колебаний. Квазипериодичность с колебаниями  $k$  различных частот связана с наличием в спектре показателей Ляпунова  $k$  нулевых показателей, в то время как остальные  $\lambda_l < 0$ .

При бифуркации удвоения периода значение мультипликатора  $\mu_1 = -1$ , при этом на смену устойчивому периодическому решению периода  $T$  рождается предельный цикл удвоенного периода:  $T_1 \sim 2T$ .