УДК 517.977.1 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2020. Т. 16. Вып. 3
MSC 93C05

К теории конструктивного построения линейного регулятора

А. М. Камачкин, Н. А. Степенко, Г. М. Хитров

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Камачкин А. М., Степенко Н. А., Хитров Г. М.* К теории конструктивного построения линейного регулятора // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 326–344. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.309

Исследуется классическая задача стационарной стабилизации по состоянию линейной стационарной управляемой системы. Рассматриваются эффективные, легко алгоритмизируемые методы построения регуляторов управляемых систем: метод В. И. Зубова и метод П. Бруновски. Указываются наиболее удачные их модификации, облегчающие построение линейного регулятора. Предлагается новая модификация построения линейного регулятора с использованием преобразования матрицы исходной системы в блочно-диагональный вид. Данная модификация содержит все преимущества как метода В. И. Зубова, так и метода П. Бруновски и позволяет свести задачу с многомерным управлением к задаче стабилизации совокупности независимых подсистем со скалярным управлением для каждой подсистемы.

Ключевые слова: стабилизация движений, линейный регулятор, канонические формы управляемости.

1. Следуя классической задаче теории стабилизации движений [1–3], рассмотрим общую систему управления с многомерным управлением, заданную линейной стационарной системой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор переменных системы; A — матрица размерности $n \times n$; управление $u = \big(u_1, \dots, u_r\big)^T$ есть r-мерный вектор; $B = \big[B_1 \dots B_r\big]$ — матрица размерности $n \times r$. Будем считать, что матрица B состоит из линейно независимых столбцов, так как в противном случае система (1) будет полностью эквивалентна системе с этой же матрицей A, но с управлением u меньшей размерности, при котором матрица будет уже состоять из линейно независимых столбцов.

Вектор управления u выбираем в виде

$$u = Cx \tag{2}$$

так, чтобы нулевое решение системы (1) было асимптотически устойчиво по Ляпунову. Матрицу C размерности $r \times n$ обычно называют *линейным регулятором*. Иными словами, ищем линейный стационарный регулятор, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системе (1). Рассмотрим задачу выбора эффективного и алгоритмизируемого метода построения такого линейного регулятора. В статье сравниваются два подхода решения задачи: метод В. И. Зубова и метод П. Бруновски. Название методов условное, поскольку они основаны на работах В. И. Зубова [1] и П. Бруновски [4]. После них было написано большое количество работ, где предлагались другие алгоритмы стабилизации, но все они громоздки и трудно алгоритмизуемы, особенно в случае многомерного управления, что отражено, например, в обзоре [5].

Будем считать, что ранг *матрицы управляемости* $V_{\mathcal{K}}$ равен

$$V_{\mathcal{K}} = \left[B\ AB\ \dots A^{n-1}B\right] = n,$$

т. е. система (1) полностью управляема [3].

Построим теперь матрицу V — классического базиса линейного пространства [1, с. 157], инвариантного относительно оператора A, который будет отражать структуру системы управления (1).

Среди столбцов матрицы управляемости $V_{\mathcal{K}}$ есть n линейно независимых. Выберем из этих линейно независимых векторов систему базисных векторов линейного пространства следующим образом:

$$V = \left[B_{j_1}\, AB_{j_1} \dots A^{k_1-1}B_{j_1}\ \dots\ B_{j_s}\, AB_{j_s} \dots A^{k_s-1}B_{j_s}\ \dots\ B_{j_\rho}\, AB_{j_\rho} \dots A^{k_\rho-1}B_{j_\rho}\right], \quad (3)$$

где возрастающие номера j_s, $s = 1, \dots, \rho$, берутся из множества номеров $\{1, \dots, r\}$, причем $\rho \leqslant r$ и всегда $j_1 = 1$, в силу линейной независимости столбцов матрицы B. Здесь, очевидно, должно выполняться, что размеры k_s цепочек базисных векторов, формирующихся для каждого из B_{j_s}, отвечают равенству

$$k_1 + \dots + k_\rho = n,$$

т. е. общая размерность матрицы V есть $n \times n$. При этом каждый, следующий за замыкающим соответствующую j_s-ю цепочку базисных векторов, вектор $A^{k_s}B_{j_s}$ является линейно зависимым со всеми (для всех цепочек перед j_s-й включительно) предыдущими векторами из базиса V.

2. Отметим структуру пространства системы управления, которая формируется матрицами A, B и способом задания базиса V. Здесь ρ — количество столбцов B_{j_s} матрицы B, которые участвуют в формировании матрицы базиса V и задают свою цепочку длины k_s линейно независимых базисных векторов

$$B_{j_s}, AB_{j_s}, \dots, A^{k_s-1}B_{j_s},$$

где целые числа $k_s > 0$ для всех $s = 1, \dots, \rho$.

Так как каждый вектор $A^{k_s}B_{j_s}$ линейно зависимый со всеми ему предыдущими векторами из матрицы V, то, очевидно, существует представление этих векторов через линейные комбинации предшествующих им векторов из матрицы V вида

$$A^{k_1}B_{j_1} = -p_1^{(1)}A^{k_1-1}B_{j_1} - \dots - p_{k_1}^{(1)}B_{j_1},$$

откуда, сгруппировав

$$\left(A^{k_1} + p_1^{(1)}A^{k_1-1} + \dots + p_{k_1}^{(1)}E\right)B_{j_1} = 0,$$

находим для $s = 1$ — первой цепочки из V и

$$A^{k_s} B_{j_s} = -p_1^{(s)} A^{k_s-1} B_{j_s} - \dots - p_{k_s}^{(s)} B_{j_s} +$$
$$+ \bar{p}_1^{(s-1,s)} A^{k_{s-1}-1} B_{j_{s-1}} + \dots + \bar{p}_{k_{s-1}}^{(s-1,s)} B_{j_{s-1}} + \dots + \bar{p}_1^{(1,s)} A^{k_1-1} B_{j_1} + \dots + \bar{p}_{k_1}^{(1,s)} B_{j_1},$$

или

$$\Big(A^{k_s} + p_1^{(s)} A^{k_s-1} + \dots + p_{k_s}^{(s)} E\Big) B_{j_s} = \sum_{i=1}^{s-1} \Big(\bar{p}_1^{(i,s)} A^{k_i-1} + \dots + \bar{p}_{k_i}^{(i,s)} E\Big) B_{j_i} \tag{4}$$

для всех остальных $s = 2, \dots, \rho$.

Но тогда при умножении на такой вектор обратной матрицы к V получаем для $s = 1$ вектор F_{m_1}:

$$F_{m_1} = V^{-1} A^{k_1} B_{j_1} = -p_1^{(1)} e_{k_1} - p_2^{(1)} e_{k_1-1} - \dots - p_{k_1}^{(1)} e_1 = \Big(-p_{k_1}^{(1)}, \dots, -p_1^{(1)}, 0, \dots, 0\Big)^T,$$

для остальных $s = 2, \dots, \rho - 1$ определяем вектор F_{m_s}:

$$F_{m_s} = V^{-1} A^{k_s} B_{j_s} = -p_1^{(s)} e_{m_s} - p_2^{(s)} e_{m_s-1} - \dots - p_{k_s}^{(s)} e_{m_{s-1}+1} +$$
$$+ \bar{p}_1^{(s-1,s)} e_{m_{s-1}} + \bar{p}_2^{(s-1,s)} e_{m_{s-1}-1} + \dots + \bar{p}_{k_{s-1}}^{(s-1,s)} e_{m_{s-2}+1} + \dots$$
$$\dots + \bar{p}_1^{(1,s)} e_{m_1} + \bar{p}_2^{(1,s)} e_{m_1-1} + \dots + \bar{p}_{k_1}^{(1,s)} e_1 =$$
$$= \Big(\bar{p}_{k_1}^{(1,s)}, \dots, \bar{p}_1^{(1,s)}, \dots, \bar{p}_{k_{s-1}}^{(s-1,s)}, \dots, \bar{p}_1^{(s-1,s)}, -p_{k_s}^{(s)}, \dots, -p_1^{(s)}, 0, \dots, 0\Big)^T$$

и для последнего $s = \rho$ находим вектор F_{m_ρ}:

$$F_{m_\rho} = V^{-1} A^{k_\rho} B_{j_\rho} = \Big(\bar{p}_{k_1}^{(1,\rho)}, \dots, \bar{p}_1^{(1,\rho)}, \dots, \bar{p}_{k_{\rho-1}}^{(\rho-1,\rho)}, \dots, \bar{p}_1^{(\rho-1,\rho)}, -p_{k_\rho}^{(\rho)}, \dots, -p_1^{(\rho)}\Big)^T.$$

Все вектора F_{m_s} являются n-мерными для всех $s = 1, \dots, \rho$ и величина

$$m_s = \sum_{i=1}^{s} k_s, \tag{5}$$

где $m_1 = k_1$ и $m_\rho = n$. Далее часто будет встречаться обозначение m_{s-1}, которое, для ясности, при $s = 1$ доопределим значением $m_0 = 0$ (так как оно будет всегда использоваться только в связке типа $m_{s-1} + 1$ и подобных).

Замечание 1. Здесь важно отметить, что как сами B_{j_s}, так и отвечающие каждому вектору B_{j_s} значения

$$-p_{k_s}^{(s)}, \dots, -p_1^{(s)} \tag{6}$$

как раз и определяют однозначно структуру пространства, описываемого базисом V, системы управления (1): задают не только k_s — размерности подпространств, но и указывают те компоненты u_{j_s} вектора управления u, по которым и происходит воздействие на основную систему, $s = 1, \dots, \rho$.

Действительно, если учесть смысл преобразования $V^{-1}AV$, то очевидно, что значения (6) задают полиномы

$$\chi_s(\lambda) = \lambda^{k_s} + p_1^{(s)} \lambda^{k_s-1} + \dots + p_{k_s}^{(s)} = \big(\lambda - \lambda_1^{(s)}\big) \cdot \dots \cdot \big(\lambda - \lambda_{k_s}^{(s)}\big),$$

которые являются множителями характеристического полинома $\chi_A(\lambda)$ матрицы A:

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{s=1}^{\rho} \chi_s(\lambda),$$

а числа $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_{k_s}^{(s)}$ являются его корнями и, следовательно, собственными числами матрицы A.

3. Теперь рассмотрим основные методы использования базиса V в решении задачи стабилизации линейных стационарных систем. Изложим сначала метод В. И. Зубова [1, 2, 6] и отразим его ключевые особенности.

Произведем замену переменных

$$x = Vy$$

и переведем исходную систему (1) к виду

$$\dot{y} = V^{-1}AVy + V^{-1}Bu = Fy + Q_V\, u, \tag{7}$$

где матрица

$$F = V^{-1}AV = \Big[V^{-1}AB_{j_1} \ldots V^{-1}A^{k_1-1}B_{j_1}\;\; V^{-1}A^{k_1}B_{j_1} \ldots$$
$$\ldots V^{-1}AB_{j_s} \ldots V^{-1}A^{k_s-1}B_{j_s}\;\; V^{-1}A^{k_s}B_{j_s} \ldots$$
$$\ldots V^{-1}AB_{j_\rho} \ldots V^{-1}A^{k_\rho-1}B_{j_\rho}\;\; V^{-1}A^{k_\rho}B_{j_\rho}\Big] =$$
$$= \Big[e_2 \ldots e_{k_1}\; F_{m_1} \ldots e_{m_{s-1}+2} \ldots e_{m_s}\; F_{m_s} \ldots e_{m_{\rho-1}+2} \ldots e_{m_\rho}\; F_{m_\rho}\Big] =$$
$$= \begin{pmatrix} F_{k_1k_1} & \ldots & F_{k_1k_s} & \ldots & F_{k_1k_\rho} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & F_{k_sk_s} & \ldots & F_{k_sk_\rho} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & F_{k_\rho k_\rho} \end{pmatrix}.$$

Здесь e_i при $i = 2, \ldots, m_\rho = n$ — n-мерные единичные векторы, матрицы $F_{k_sk_s}$ размерности $k_s \times k_s$, фробениусовы нормальные формы и матрицы $F_{k_sk_{s+i}}$ размерности $k_s \times k_{s+i}$, $i = 1, \ldots, \rho - s$, соответственно есть

$$F_{k_sk_s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -p_{k_s}^{(s)} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -p_{k_s-1}^{(s)} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -p_{k_s-2}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -p_1^{(s)} \end{pmatrix}, \quad F_{k_sk_{s+i}} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \bar{p}_{k_s}^{(s,s+i)} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \bar{p}_1^{(s,s+i)} \end{pmatrix}.$$

Примем, что $B_{j_1} = B_1$. С учетом этого матрица Q_V будет выглядеть как

$$Q_V = V^{-1}\Big[B_1 \ldots B_{j_i^*} \ldots B_{j_s} \ldots B_r\Big] = \Big[e_1 \ldots Q_{j_i^*} \ldots e_{m_{s-1}+1} \ldots Q_r\Big],$$

где векторы $e_{m_{s-1}+1}$ находятся на позиции j_s-го столбца матрицы Q_V и являются $m_{s-1}+1$ единичными n-мерными векторами, $s = 1, \ldots, \rho$. Векторы $Q_{j_i^*} = V^{-1}B_{j_i^*}$, отвечающие столбцам матрицы B, не участвовавшим в формировании базиса V (индексы j_i^*, $i = 1, \ldots, r-\rho$, также находятся среди множества номеров $\{1, \ldots, r\}$, но не совпадают со значениями j_s, $s = 1, \ldots, \rho$), представляют собой векторы коэффициентов линейных разложений самих векторов $B_{j_i^*}$ по векторам базиса V, сформированных на векторах B_{j_s}, стоящих перед вектором $B_{j_i^*}$ в матрице B. Вектор Q_r является либо вектором $e_{m_{\rho-1}+1}$, если вектор B_r участвовал в формировании матрицы V, либо вектором $Q_{j^*_{r-\rho}}$ в противном случае.

Как видим, матрица F системы (7) не блочно-диагональная, так как матрицы $F_{k_s k_{s+i}}$, находящиеся над блочной диагональю, могут содержать ненулевые компоненты, $s = 1, \ldots, \rho$ и $i = 1, \ldots, \rho - s$. В таком случае разбить систему (7) на ρ полностью независимых друг от друга подсистем со скалярными управлениями u_{j_s} (учитывая вид матрицы Q_V) не представляется возможным.

Однако, учитывая квазитреугольный вид матрицы F (со стоящими на главной диагонали блоками $F_{k_s k_s}$ размерности $k_s \times k_s$), сделаем переобозначения переменных y следующим образом:

$$Y^{(s)} = \left(y_1^{(s)}, \ldots, y_{k_s}^{(s)}\right)^T,$$

где $y_i^{(s)} = y_{m_{s-1}+i}$, для всех $s = 1, \ldots, \rho$, $i = 1, \ldots, k_s$.

Тогда система (7) в переменных y перепишется как

$$\begin{cases} \dot{Y}^{(s)} = F_{k_s k_s} Y^{(s)} + \sum\limits_{i=1}^{\rho-s} \begin{pmatrix} \bar{p}_{k_s}^{(s,s+i)} \\ \vdots \\ \bar{p}_1^{(s,s+i)} \end{pmatrix} y_{k_{s+i}}^{(s+i)} + e_1^{(k_s)} u_{j_s} + \left[Q_{j^*_{i^*}} \ldots\ Q_{j^*_{r-\rho}} \right] \begin{pmatrix} u_{j^*_{i^*}} \\ \vdots \\ u_{j^*_{r-\rho}} \end{pmatrix}, \\ s = 1, \ldots, \rho, \end{cases}$$

здесь $e_1^{(k_s)}$ — первый единичный вектор k_s-размерности и управление u_{j_s} — j_s-й элемент управления u; номер $j^*_{i^*}$ — первый из номеров j_i^*, который по своему значению превосходит номер j_s (само значение индекса $j^*_{i^*} = j_s + 1$). При $s = \rho$ второго слагаемого (неоднородной составляющей) в правой части системы нет.

Векторы $e_1^{(k_s)}$ получаются из векторов $e_{m_{s-1}+1}$ (матрицы Q_V) путем отбрасывания всех нулей над 1, которая сама стоит на $(m_{s-1}+1)$-й строке, т. е. на первой строке системного блока, относящегося к набору переменных $Y^{(s)}$, и отбрасывания всех нулей после m_s-й строки, так как следующий по порядку единичный вектор e_{m_s+1} матрицы Q содержит свою 1 на (m_s+1)-й строке (относящейся уже к системному блоку переменных $Y^{(s+1)}$).

Положим теперь, что все управления $\left(u_{j_1^*}, \ldots, u_{j^*_{r-\rho}}\right)^T = 0$, т. е. система (7) окончательно примет вид

$$\dot{Y}^{(s)} = F_{k_s k_s} Y^{(s)} + e_1^{(k_s)} u_{j_s} + \sum_{i=1}^{\rho-s} \begin{pmatrix} \bar{p}_{k_s}^{(s,s+i)} \\ \vdots \\ \bar{p}_1^{(s,s+i)} \end{pmatrix} y_{k_{s+i}}^{(s+i)}, \quad s = 1, \ldots, \rho.$$

Здесь каждый блок переменных $Y^{(s)}$ представляет собой линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений (кроме последнего, при $s = \rho$), и тогда для устойчивости данных систем необходимо и достаточно добиться устойчивости соответствующих однородных (с учетом, разумеется, линейного представления управления u_{j_s}) систем в *канонической форме*

$$\dot{Y}^{(s)} = F_{k_s k_s} Y^{(s)} + e_1^{(k_s)} u_{j_s}, \quad s = 1, \ldots, \rho. \tag{8}$$

Следовательно, задача построения многомерного управления сводится к последовательному для каждого блока переменных $Y^{(s)}$ применению метода В. И. Зубова построения скалярного управления $u_{j_s} = \gamma_s Y^{(s)}$, где строки γ_s определяются, согласно [1, 2], однозначным образом в зависимости от коэффициентов соответствующего эталонного полинома, задающего наперед заданные собственные числа, расположенные в открытой левой полуплоскости.

Таким образом, хотя полученная квазитреугольная матрица F позволила решить задачу стабилизации методом В. И. Зубова, предпочтительнее было бы получить такую матрицу замены переменных, после перехода к которым матрица A преобразовывалась в блочно-диагональную. Это, в свою очередь, позволяет свести исходную задачу (1) с многомерным управлением к ряду независимых друг от друга задач стабилизации линейных стационарных систем меньших размерностей со скалярными управлениями.

4. Теперь укажем гибридную модификацию методов [1, 7] построения базиса новых координат для перехода системы (1) к форме с квазитреугольной матрицей, с диагональными блоками в виде *канонической формы управляемости* (*controllable canonical form* (*CCF*)), полностью соответствующими диагональным блокам матрицы F (являющимися их транспонированием) из системы (7), (8), но для скорректированного метода построения базиса V.

1. Вернемся снова к исходной системе управления (1) в прежних переменных x. Будем строить матрицу V на основе структуры (3) таким образом, чтобы или один какой-либо вектор из матрицы B сформировал весь базис V, или, если ни одного такого вектора не нашлось, то выберем векторы $B_{j_1}, \ldots, B_{j_\rho}$, где $1 < \rho \leqslant r$, из матрицы B так, чтобы длины k_s их цепочек базисных векторов $B_{j_s}, AB_{j_s}, \ldots, A^{k_s-1}B_{j_s}$, $s = 1, \ldots, \rho$, удовлетворяли условию

$$k_s \leqslant k_{s+1} \tag{9}$$

для всех $s = 1, \ldots, \rho - 1$.

2. Матрица V невырожденная, следовательно, можно определить обратную к ней матрицу V^{-1}. Рассмотрим в матрице V^{-1} строки v_{m_s} для всех номеров m_s, определенных, как и ранее в (5), при $s = 1, \ldots, \rho$. Исходя из того, что v_{m_s} — это m_s-я строка обратной матрицы V^{-1}, то при умножении данной строки на столбцы матрицы V будет, очевидно, верно равенство

$$v_{m_s} V = e_{m_s}^T,$$

где $e_{m_s}^T$ — транспонированный m_s-й единичный n-мерный вектор.

3. Так как $A^{k_s-1}B_{j_s}$ — m_s-й столбец матрицы V, то также получаем, что

$$\begin{array}{rcl} v_{m_s} A^{k_s-1} B_{j_s} & = & 1, \\ v_{m_s} A^i B_j & = & 0, \quad \text{если} \quad (i,j) \neq (k_s - 1, j_s), \end{array} \tag{10}$$

где значения (i,j) выбираются в соответствии со структурой матрицы V. Причем для $s = 2, \ldots, \rho$ второе свойство из (10) можно дополнить всеми значениями $i = 0, 1, \ldots$

при условии, что $j < j_s$, так как в таком случае вектор $A^i B_j$ является либо базисным вектором из матрицы V, занимающим позицию с 1-го по m_{s-1}-й столбец, либо представляющим собой линейную комбинацию этих первых m_{s-1} столбцов матрицы V (т. е. никоим образом не включающим в свое представление базисного вектора $A^{k_s-1}B_{j_s}$).

4. Составим следующую матрицу S для замены переменных от x к z:

$$S = \left[\begin{array}{c} v_{m_1} \\ v_{m_1}A \\ \vdots \\ v_{m_1}A^{k_1-1} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{m_s} \\ v_{m_s}A \\ \vdots \\ v_{m_s}A^{k_s-1} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{m_\rho} \\ v_{m_\rho}A \\ \vdots \\ v_{m_\rho}A^{k_\rho-1} \end{array}\right]. \tag{11}$$

5. Матрица S является невырожденной, т. е. все ее строки являются линейно независимыми. Действительно, если предположить обратное, то тогда будут существовать одновременно не равные нулю числа $\alpha_i^{(j)}$ при всех $j = 1, \ldots, \rho$ и $i = 1, \ldots, k_j$ такие, что линейная комбинация всех строк матрицы S с этими коэффициентами $\alpha_i^{(j)}$ будет равна нулевой строке

$$\sum_{j=1}^{\rho} \left(\alpha_1^{(j)} v_{m_j} + \alpha_2^{(j)} v_{m_j} A + \cdots + \alpha_{k_j}^{(j)} v_{m_j} A^{k_j-1} \right) = (0, \ldots, 0),$$

и откуда следует, что выполняются скалярные равенства

$$\sum_{j=1}^{\rho} \left(\alpha_1^{(j)} v_{m_j} + \alpha_2^{(j)} v_{m_j} A + \cdots + \alpha_{k_j}^{(j)} v_{m_j} A^{k_j-1} \right) A^l B_{j_s} = (0, \ldots, 0) A^l B_{j_s} = 0$$

для $s = 1, \ldots, \rho$ и $l = 0, \ldots, k_s - 1$. В силу (10), последовательно для всех s и также последовательно для всех l находим, что каждый $\alpha_{k_s-l}^{(s)} = 0$. Таким образом, получаем, что все числа $\alpha_i^{(j)} = 0$, что противоречит сделанному предположению о линейной зависимости строк матрицы S, т. е. матрица S невырожденная.

6. Здесь, так как $SS^{-1} = E$, также очевидно, что строка

$$v_{m_s} A^i S^{-1} = e^T_{m_{s-1}+i+1} \tag{12}$$

для всех $i = 0, \ldots, k_s - 1$ и $s = 1, \ldots, \rho$.

Теорема 1. *Для всякой полностью управляемой системы* (1) *в случае построения базиса* V, *согласно* (3), *при выполнении условия* (9) *можно построить невырожденную матрицу* S *вида* (11) *перехода к новым координатам следующим образом:*

$$x = S^{-1}z,$$

которая преобразует систему (1) *к системе вида*

$$\dot{z} = SAS^{-1}z + SBu = Gz + Q_S u, \tag{13}$$

где новая матрица системы является квазитреугольной:

$$G = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e_2^T \\ \vdots \\ e_{m_1}^T \\ v_{m_1}A^{k_1}S^{-1} \\ \hline \vdots \\ \hline e_{m_s-k_s+2}^T \\ \vdots \\ e_{m_s}^T \\ v_{m_s}A^{k_s}S^{-1} \\ \hline \vdots \\ \hline e_{m_{\rho-1}+2}^T \\ \vdots \\ e_{m_\rho}^T \\ v_{m_\rho}A^{k_\rho}S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{k_1k_1} & \dots & G_{k_1k_s} & \dots & G_{k_1k_\rho} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & G_{k_sk_s} & \dots & G_{k_sk_\rho} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & G_{k_\rho k_\rho} \end{pmatrix},$$

здесь строки $v_{m_s}A^{k_s}S^{-1}$ *находятся на позиции* m_s*-й строки матрицы* G. *Матрицы диагональных блоков* $G_{k_sk_s}$ *размерностей* $k_s \times k_s$ *и матрицы* $G_{k_sk_{s+i}}$ *наддиагональных блоков размерностей* $k_s \times k_{s+i}$ *соответственно имеют вид*

$$G_{k_sk_s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_{k_s}^{(s)} & -p_{k_s-1}^{(s)} & -p_{k_s-2}^{(s)} & \dots & -p_1^{(s)} \end{pmatrix}, \quad G_{k_sk_{s+i}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1^{(s,s+i)} & \dots & \alpha_{k_{s+i}}^{(s,s+i)} \end{pmatrix},$$

где $s = 1, \dots, \rho$, $i = 1, \dots, \rho - s$ *и для каждого* s*-го горизонтального набора блоков* (*с* $(m_s - k_s + 1)$*-й строки по* m_s*-ю строку*) *числа, заполняющие последние строки всех блоков* $G_{k_sk_s}, G_{k_sk_{s+1}}, \dots, G_{k_sk_\rho}$ *и нулей перед этими блоками* (*в случае* $s \geqslant 2$) *складываются в строчку* $v_{m_s}A^{k_s}S^{-1}$.

Матрица Q_S *будет иметь вид*

$$Q_S = \left[e_{m_1}^{(j_1)} \dots Q_{j_i^*} \dots e_{m_\rho}^{(j_\rho)} \right],$$

где векторы $e_{m_s}^{(j_s)}$ находятся на позиции j_s-го столбца матрицы Q_S и являются m_s единичными n-мерными векторами, $s = 1, \ldots, \rho$. Векторы $Q_{j_i^*} = SB_{j_i^*}$, отвечающие столбцам матрицы B, не участвовавшим в формировании базиса V (индексы j_i^*, $i = 1, \ldots, r-\rho$, также находятся среди множества номеров $\{1, \ldots, r\}$, но не совпадают со значениями j_s, $s = 1, \ldots, \rho$) представляют собой векторы коэффициентов линейных разложений самих векторов $B_{j_i^*}$ по векторам базиса V, сформированных на векторах B_{j_s}, где $j_s < j_i^*$, с учетом умножения на матрицу S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, строка $v_{m_s} A^{k_s}$ не входит в невырожденную матрицу S, следовательно, линейно зависима со всеми строками матрицы S, т. е. представима в виде некоторой линейной комбинации строк этой матрицы:

$$v_{m_s} A^{k_s} = \sum_{l=1}^{k_1} \alpha_l^{(s,1)} v_{m_1} A^{l-1} + \cdots + \sum_{l=1}^{k_s} \alpha_l^{(s,s)} v_{m_s} A^{l-1} + \cdots + \sum_{l=1}^{k_\rho} \alpha_l^{(s,\rho)} v_{m_\rho} A^{l-1}.$$

Тогда, в силу (10), последовательно для $h = 1, \ldots, s-1$, но для каждого такого h также последовательно для $i = 1, \ldots, k_h$ (т. е. цикл по i внутри цикла по h) находим, что

$$0 = v_{m_s} A^{k_s} A^{i-1} B_{j_h} = \sum_{l=1}^{k_h} \alpha_l^{(s,h)} v_{m_h} A^{l-1} A^{i-1} B_{j_h} + \cdots + \sum_{l=1}^{k_s} \alpha_l^{(s,s)} v_{m_s} A^{l-1} A^{i-1} B_{j_h} + \ldots$$

$$\cdots + \sum_{l=1}^{k_\rho} \alpha_l^{(s,\rho)} v_{m_\rho} A^{l-1} A^{i-1} B_{j_h} = \alpha_{k_h - i+1}^{(s,h)}.$$

То есть на каждом шаге h в выражении $v_{m_s} A^{k_s} A^{i-1} B_{j_h}$, пробегая значения $i = 1, \ldots, k_h$, получаем, что все $\alpha_l^{(s,h)} = 0$ при $l = 1, \ldots, k_h$, и уже при следующем шаге $h+1$ слагаемые в выражении $v_{m_s} A^{k_s} A^{i-1} B_{j_{h+1}}$ с этими коэффициентами $\alpha_l^{(s,h)}$ не участвуют (как впрочем и все предыдущие), здесь $s = 2, \ldots, \rho$.

Таким образом, разложение всех строчек $v_{m_s} A^{k_s}$ по базису матрицы S сводится к виду

$$v_{m_s} A^{k_s} = \sum_{l=1}^{k_s} \alpha_l^{(s,s)} v_{m_s} A^{l-1} + \cdots + \sum_{l=1}^{k_\rho} \alpha_l^{(s,\rho)} v_{m_\rho} A^{l-1}, \quad s = 1, \ldots, \rho, \tag{14}$$

и аналогично предыдущему определяем значения $\alpha_l^{(s,s)}$ следующим образом. В силу (10), для фиксированного s и всех $i = 1, \ldots, k_s$ будет, с одной стороны, выполняться выражение

$$v_{m_s} A^{k_s} A^{i-1} B_{j_s} = \sum_{l=1}^{k_s} \alpha_l^{(s,s)} v_{m_s} A^{l-1} A^{i-1} B_{j_s} + \cdots + \sum_{l=1}^{k_\rho} \alpha_l^{(s,\rho)} v_{m_\rho} A^{l-1} A^{i-1} B_{j_s} =$$

$$= \sum_{l=1}^{k_s} \alpha_l^{(s,s)} v_{m_s} A^{l-1} A^{i-1} B_{j_s}.$$

Но, с другой стороны, из (4) находим, что

$$v_{m_s} A^{k_s} A^{i-1} B_{j_s} \ = \ v_{m_s} A^{i-1} A^{k_s} B_{j_s} \ = \ -p_1^{(s)} v_{m_s} A^{i-1} A^{k_s - 1} B_{j_s} - \cdots - p_{k_s}^{(s)} v_{m_s} A^{i-1} B_{j_s},$$

так как произведение строки $v_{m_s}A^{i-1}$ на вектор из правой части (4), в силу (10), очевидно, равно

$$\sum_{l=1}^{s-1}\left(\bar{p}_1^{(l,s)}v_{m_s}A^{i-1}A^{k_l-1}B_{j_l}+\dots+\bar{p}_{k_l}^{(l,s)}v_{m_s}A^{i-1}B_{j_l}\right)=0.$$

Окончательно получаем, что для каждого $i=1,\dots,k_s$ выполняется равенство

$$\alpha_1^{(s,s)}v_{m_s}A^{i-1}B_{j_s}+\dots+\alpha_{k_s}^{(s,s)}v_{m_s}A^{i+k_s-2}B_{j_s}=-p_1^{(s)}v_{m_s}A^{i+k_s-2}B_{j_s}-\dots-p_{k_s}^{(s)}v_{m_s}A^{i-1}B_{j_s},$$

откуда, группируя по одинаковым компонентам $v_{m_s}A^{i-1}B_{j_s},\dots,v_{m_s}A^{i+k_s-2}B_{j_s}$ и записывая все k_s таких равенств, приходим к однородной алгебраической системе уравнений

$$\begin{pmatrix} v_{m_s}B_{j_s} & v_{m_s}AB_{j_s} & \dots & v_{m_s}A^{k_s-1}B_{j_s} \\ v_{m_s}AB_{j_s} & v_{m_s}A^2B_{j_s} & \dots & v_{m_s}A^{k_s}B_{j_s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{m_s}A^{k_s-1}B_{j_s} & v_{m_s}A^{k_s}B_{j_s} & \dots & v_{m_s}A^{2k_s-2}B_{j_s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^{(s,s)}+p_{k_s}^{(s)} \\ \alpha_2^{(s,s)}+p_{k_s-1}^{(s)} \\ \vdots \\ \alpha_{k_s}^{(s,s)}+p_1^{(s)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица этой системы симметрическая, в силу (10), с единицей на обратной диагонали и нулями над этой диагональю, т. е. ее определитель равен по модулю 1, и так как эта система однородная, то единственным ее решением является нулевое, т. е.

$$\alpha_l^{(s,s)}=-p_{k_s-l+1}^{(s)}\quad \text{для всех}\quad s=1,\dots,\rho,\ l=1,\dots,k_s. \tag{15}$$

Оставшиеся коэффициенты $\alpha_l^{(s,s+i)}$ для всех $i=1,\dots,\rho-s$ и $l=1,\dots,k_{s+i}$ уже зависят от соотношения значений k_{s+i} к величине k_s, и в общем случае их точные формулы выписать затруднительно, да к тому же это и не существенно для дальнейших выводов.

Тогда, учитывая (12), (14) и (15), сама строка $v_{m_s}A^{k_s}S^{-1}$ окончательно формируется из линейной комбинации n-мерных строк $e^T_{m_{s-1}+1},\dots,e^T_{m_\rho}$ следующим образом:

$$v_{m_s}A^{k_s}S^{-1}=\sum_{l=1}^{k_s}-p_{k_s-l+1}^{(s)}e^T_{m_{s-1}+l}+\sum_{l=1}^{k_{s+1}}\alpha_l^{(s,s+1)}e^T_{m_s+l}+\dots+\sum_{l=1}^{k_\rho}\alpha_l^{(s,\rho)}e^T_{m_{\rho-1}+l}=$$

$$=\left(0,\dots,0,\ -p_{k_s}^{(s)},\dots,-p_1^{(s)},\ \alpha_1^{(s,s+1)},\dots,\alpha_{k_{s+1}}^{(s,s+1)},\ \dots,\ \alpha_1^{(s,\rho)},\dots,\alpha_{k_\rho}^{(s,\rho)}\right)$$

для всех $s=1,\dots,\rho$ (при $s=1$ нулей в начале строки нет).

Таким образом, матрица G системы (13) является квазитреугольной, причем ее диагональные блоки полностью соответствуют диагональным блокам квазитреугольной матрицы F системы (7), т. е. $G_{k_sk_s}=F^T_{k_sk_s}$.

Далее покажем структуру матрицы $Q_S=\left[SB_1\ \dots\ SB_r\right]$, где все столбцы SB_{j_s}, $s=1,\dots,\rho$, состоят из чисел, определяемых выражениями

$$v_{m_i}A^{l(i)}B_{j_s},\quad i=1,\dots,\rho,\quad l(i)=0,\dots,k_i-1. \tag{16}$$

В силу (10), при $i < j_s$ все такие значения (16) равны нулю, при $i = j_s$ все (16) также равны нулю, кроме

$$v_{m_s} A^{k_s - 1} B_{j_s} = 1$$

(который занимает позицию m_s-й строки), и, наконец, при $i > j_s$, в силу условия (9), все $l(i) \leqslant k_s - 1$, т. е. векторы $A^{l(i)} B_{j_s}$ принадлежат базису V и опять же, в силу (10), все такие значения (16) также равны нулю.

Таким образом, получаем, что все j_s-е столбцы матрицы Q_S при управлении u имеют вид

$$S B_{j_s} = e^{(j_s)}_{m_s}, \quad s = 1, \ldots, \rho.$$

Оставшиеся столбцы $Q_{j_i^*} = S B_{j_i^*}$, отвечающие столбцам матрицы B, не участвовавшим в формировании базиса V, никакой роли в управлении системы (13) не оказывают, так как соответствующие им управления $u_{j_i^*}$ можно принять нулевыми. Теорема доказана. $\square$

5. Теперь отметим еще один метод синтеза линейного регулятора для системы в канонической форме Бруновски [4], которая полностью эквивалентна исходной системе (1). На основании базиса (11) переведем систему (1) к канонической форме (13) системы управления с многомерным управлением, которая позволяет выбрать закон линейной обратной связи для создания любых наперед заданных собственных чисел в замкнутой системе. Укажем способ приведения этой системы к *канонической форме Бруновски* [4], что даст возможность ввести стабилизирующее управление напрямую в систему, исключительно в виде коэффициентов эталонных полиномов (для каждого s-го блока свой).

Теперь, когда структура матрицы G системы (13) известна, добавим в эту систему закон линейной обратной связи заменой управления $u = (u_1, \ldots, u_r)^T$ на новое управление $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_\rho)^T$ следующим образом:

$$Q_S\, u = -\widetilde{G} z + \widetilde{E} \bar{u}, \tag{17}$$

где матрицы $\widetilde{G}, \widetilde{E}$ размерностей $n \times n, n \times \rho$ соответственно имеют вид

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{m_1} A^{k_1} S^{-1} \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{m_s} A^{k_s} S^{-1} \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{m_\rho} A^{k_\rho} S^{-1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{E} = \left[e_{m_1} \ldots e_{m_s} \ldots e_{m_\rho} \right].$$

В матрице $\widetilde{G}$ строки $v_{m_s} A^{k_s} S^{-1}$ стоят на тех же позициях m_s-х строк, что и в матрице G, остальные строки в матрице $\widetilde{G}$ нулевые. Векторы e_{m_s} являются m_s-ми единичными векторами размерности $n \times 1$, здесь везде $s = 1, \ldots, \rho$. Матрицу $\widetilde{E}$ можно также записать в виде $\widetilde{E} = \operatorname{diag}\Big\{ e_{k_1}^{(k_1)}, \ldots, e_{k_s}^{(k_s)}, \ldots, e_{k_\rho}^{(k_\rho)} \Big\}$, где верхний индекс (k_s) обозначает размерность k_s-го единичного вектора $e_{k_s}^{(k_s)}$, $s = 1, \ldots, \rho$.

Тогда после этой замены управления с введением линейной обратной связи (17) система (13) разобьется на ρ независимых систем в канонической форме Бруновски

$$\dot{Z}^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} Z^{(s)} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u}_s, \quad s = 1, \ldots, \rho,$$

в которой

$$Z^{(s)} = \begin{pmatrix} z_{m_{s-1}+1} \\ \vdots \\ z_{m_s} \end{pmatrix}.$$

Для систем в таком виде скалярные управления $\bar{u}_s$ задаются напрямую как

$$\bar{u}_s = \gamma_s Z^{(s)} = \Big(-\mu_{k_s}^{(s)}, \ldots, -\mu_1^{(s)} \Big) Z^{(s)},$$

через коэффициенты эталонных полиномов

$$p_{\mathrm{et}}^{(s)}(\lambda) = \prod_{i=1}^{k_s} \Big(\lambda - \lambda_i^{(s)} \Big) = \lambda^{k_s} + \mu_1^{(s)} \lambda^{k_s - 1} + \cdots + \mu_{k_s}^{(s)}, \tag{18}$$

где $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_{k_s}^{(s)}$ — наперед заданные собственные числа, расположенные в открытой левой полуплоскости, $s = 1, \ldots, \rho$. В данном случае для каждого блока уравнений (s) замкнутая таким управлением система, очевидно, будет иметь вид

$$\dot{Z}^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\mu_{k_s}^{(s)} & -\mu_{k_s-1}^{(s)} & -\mu_{k_s-2}^{(s)} & \ldots & -\mu_1^{(s)} \end{pmatrix} Z^{(s)}$$

с сопровождающей матрицей системы своего характеристического полинома $p_{\mathrm{et}}^{(s)}(\lambda)$ и соответствующими заданными собственными числами $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_{k_s}^{(s)}$.

В многомерном случае для системы (13) с учетом замены (17) вектор управления $\bar{u}$ будет определяться как

$$\bar{u} = \Gamma z, \tag{19}$$

где матрица $\Gamma = \operatorname{diag}\big\{ \gamma_1, \ldots, \gamma_\rho \big\}$ размерности $\rho \times n$. И тогда замыкание системы (13) управлением $\bar{u}$ с использованием обратной связи (17) приведет к системе

$$\dot{z} = \Big(G - \widetilde{G} + \widetilde{E}\Gamma \Big) z,$$

откуда при обратной замене переменных, от z к x, получаем систему

$$\dot{x} = \Big(A - S^{-1}\Big(\widetilde{G} - \widetilde{E}\Gamma\Big)S\Big)x.$$

Принимая, что исходное управление u системы (1) ищется в виде (2) с постоянной матрицей C данного линейного регулятора размерности $r \times n$, приходим к матричному уравнению

$$BC = -S^{-1}\Big(\widetilde{G} - \widetilde{E}\Gamma\Big)S.$$

Полученное матричное уравнение не позволяет окончательно выразить матрицу C для стабилизирующего управления (2) в системе (1). Тем самым синтез стабилизирующего управления для системы (1) методом приведения исходной системы к канонической форме Бруновски возможен только с использованием специальной обратной связи (17).

6. Оба рассмотренных выше способа построения базиса нового пространства переменных позволяли перевести систему управления (1) к канонической форме на основе квазитреугольной матрицы системы. Но, очевидно, что лучшей канонической формой для системы управления (1) была бы форма с блочно-диагональной матрицей системы, позволяющая разделить многомерную систему на независимые подсистемы меньших размерностей и тем самым решать задачу управления динамикой части фазовых переменных отдельно от других. Укажем условия и метод преобразования уже имеющегося классического базиса V к новому базису W, при переходе к координатам которого матрица новой системы управления, сохраняя структуру диагональных блоков матрицы F из (7), определяемых первоначальным базисом V, становилась бы блочно-диагональной согласованно со структурой новой матрицы при управлении u.

Далее будем строить именно такой базис W линейного пространства оператора A, приводящего при соответствующей замене переменных

$$x = Wy \tag{20}$$

матрицу A к матрице P новой системы управления

$$\dot{y} = W^{-1}AWy + W^{-1}Bu = Py + Q_W\, u, \tag{21}$$

где матрица P уже блочно-диагональная и имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} F_{k_1k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_{k_\rho k_\rho} \end{pmatrix}$$

с теми же блоками $F_{k_sk_s}$ на диагонали, что и в матрице F из системы (7), при замене переменных с базисом V, здесь $s = 1, \dots, \rho$. То есть структура исходного базиса V будет полностью задавать и структуру базиса W.

Теорема 2. *Пусть для полностью управляемой системы* (1) *построен некоторый базис V, сформированный на столбцах B_{j_s} матрицы B, согласно* (3)*, и который, тем самым, задает разбиение характеристического полинома $\chi_A(\lambda)$ матрицы A на множители вида*

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{s=1}^{\rho} \chi_s(\lambda), \quad \chi_s(\lambda) = \lambda^{k_s} + p_1^{(s)}\lambda^{k_s-1} + \dots + p_{k_s}^{(s)}.$$

Тогда, если для такого базиса V выполняются условия

$$\operatorname{rank}\Big(\Big(A^{k_s}+p_1^{(s)}A^{k_s-1}+\dots+p_{k_s}^{(s)}E\Big)\Big[B_1\ \dots\ B_{j_s}\Big]\Big)<j_s,\quad s=1,\dots,\rho, \tag{22}$$

то этот базис V линейного пространства, инвариантного относительно оператора A, может быть преобразован к базису W, представляющего собой прямую сумму линейных подпространств

$$W=\Big[\tilde B_{j_1}\,A\tilde B_{j_1}\ \dots\ A^{k_1-1}\tilde B_{j_1}\ \dots\ \tilde B_{j_s}\,A\tilde B_{j_s}\ \dots\ A^{k_s-1}\tilde B_{j_s}\ \dots\ \tilde B_{j_\rho}\,A\tilde B_{j_\rho}\ \dots\ A^{k_\rho-1}\tilde B_{j_\rho}\Big],$$

полностью соответствующий структуре исходного базиса V. Базис каждого подпространства

$$\tilde B_{j_s},A\tilde B_{j_s},\dots,A^{k_s-1}\tilde B_{j_s} \tag{23}$$

задается начальным вектором $\tilde B_{j_s}$, отвечающим соответствующему вектору B_{j_s} из базиса V, который представляет собой линейную комбинацию всех векторов из матрицы B с первого столбца по j_s-й столбец включительно, т. е.

$$\tilde B_{j_s}=\Big[B_1\ \dots\ B_{j_s}\Big]b_s, \tag{24}$$

где b_s — j_s-мерный вектор коэффициентов, удовлетворяющий условию (в силу вида (24)), *что*

$$\Big(A^{k_s}+p_1^{(s)}A^{k_s-1}+\dots+p_{k_s}^{(s)}E\Big)\tilde B_{j_s}=0 \tag{25}$$

для всех $s=1,\dots,\rho$.

В силу построения, базис W после перехода к новым координатам (20) *будет обеспечивать блочно-диагональный вид матрицы системы* (21).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из структуры квазитреугольной матрицы F следует, что и ее характеристическая матрица $\lambda E-F$ также будет квазитреугольной, с блоками на диагонали $\lambda E-F_{k_sk_s}$; здесь единичные матрицы E подразумеваются с размерностями, согласованными с размерностями матриц F, $F_{k_sk_s}$. Тогда, в силу фробениусовой формы матриц $F_{k_sk_s}$ и квазитреугольной структуры матрицы F, очевидно, что характеристический полином $\chi_F(\lambda)$ матрицы F будет совпадать с характеристическим полиномом $\chi_A(\lambda)$ матрицы A и будет произведением определителей матриц $\lambda E-F_{k_sk_s}$, т. е.

$$\chi_A(\lambda)=\chi_F(\lambda)=\big|\lambda E-F\big|=\prod_{s=1}^{\rho}\big|\lambda E-F_{k_sk_s}\big|=\prod_{s=1}^{\rho}\chi_s(\lambda),$$

где полиномы

$$\chi_s(\lambda)=\lambda^{k_s}+p_1^{(s)}\lambda^{k_s-1}+\dots+p_{k_s}^{(s)}=\big(\lambda-\lambda_1^{(s)}\big)\times\dots\times\big(\lambda-\lambda_{k_s}^{(s)}\big).$$

Здесь коэффициенты $p_1^{(s)},\dots,p_{k_s}^{(s)}$ задаются последним столбцом матрицы $F_{k_sk_s}$, а значения $\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_{k_s}^{(s)}$ есть корни полиномов $\chi_s(\lambda)$, которые являются также корнями характеристического полинома $\chi_A(\lambda)$, т. е. собственными числами матрицы A.

Введем теперь матрицы A_s размерности $n\times n$ следующего вида:

$$A_s=\chi_s(A)=A^{k_s}+p_1^{(s)}A^{k_s-1}+\dots+p_{k_s}^{(s)}E=\big(A-\lambda_1^{(s)}E\big)\times\dots\times\big(A-\lambda_{k_s}^{(s)}E\big),\quad s=1,\dots,\rho.$$

Ранг этих матриц, определяющих алгебраическую однородную систему (25),

$$\operatorname{rank}\bigl(A_s\bigr) < n,$$

так как их определитель

$$\bigl|A_s\bigr| = \bigl|A - \lambda_1^{(s)}E\bigr| \times \dots \times \bigl|A - \lambda_{k_s}^{(s)}E\bigr| = 0 \times \dots \times 0 = 0,$$

т. е. все эти матрицы A_s для систем (25) вырожденные.

Теперь, учитывая условие (22), соответствующая этой матрице однородная алгебраическая система уравнений относительно j_s-мерного вектора b_s:

$$A_s\Bigl[B_1 \, \dots \, B_{j_s}\Bigr]b_s = \Bigl(A^{k_s} + p_1^{(s)}A^{k_s-1} + \dots + p_{k_s}^{(s)}E\Bigr)\Bigl[B_1 \, \dots \, B_{j_s}\Bigr]b_s = 0$$

будет иметь бесконечное количество ненулевых решений для всех $s = 1, \dots, \rho$.

Из этих решений b_s будем выбирать любое максимально простого вида, которое будет задавать и сам первый вектор (24), и всю соответствующую ему базисную цепочку (23), причем, в силу (25), очевидно, что любой вектор вида $A^{k_s+i}\tilde{B}_{j_s}$, $i = 0, 1, \dots$, уже будет линейно зависимым только с векторами из своей соответствующей цепочки базиса W.

По построению, векторы $\tilde{B}_{j_s}$, $s = 1, \dots, \rho$, будут линейно независимы между собой, так как каждый следующий вектор $\tilde{B}_{j_s} = \Bigl[B_1 \, \dots \, B_{j_s}\Bigr]b_s$ содержит в своей комбинации новый вектор B_{j_s}, который линейно независим со всеми предыдущими B_{j_i} (и вообще со всеми векторами из B), входящими в разложения $\tilde{B}_{j_i}$, $i = 1, \dots, s-1$. Соответственно будут линейно независимы все векторы в соответствующих цепочках базиса W. Теорема 2 доказана. □

Так как, вообще говоря, векторы B_{j_s} матрицы B уже не входят в новый базис W, то матрица $Q_W = W^{-1}B$ системы (21) теряет свою правильную единичную структуру, согласованную с матрицей P, необходимую для определения линейного регулятора вида (2). Однако, учитывая выполнение условия (22) теоремы 2, это не является неразрешимой проблемой, так как в таком случае достаточно произвести промежуточную замену с матрицей D размерности $r \times \rho$, управления u вида

$$u = D\bar{u}, \tag{26}$$

восстанавливающую согласованную с матрицей P структуру матрицы при новом управлении $\bar{u}$ размерности $\rho \times 1$, т. е. чтобы было верно равенство

$$Q_W D = W^{-1}BD = E = \bigl[e_1 \dots e_{m_{s-1}+1} \dots e_{m_{\rho-1}+1}\bigr],$$

где $e_{m_{s-1}+1}$ — это $m_{s-1}+1$ единичные n-мерные векторы матрицы E размерности $n \times \rho$, $s = 1, \dots, \rho$. Матрицу E (аналогично записи матрицы $\widetilde{E}$) можно также записать в виде $E = \operatorname{diag}\Bigl\{e_1^{(k_1)}, \dots, e_1^{(k_\rho)}\Bigr\}$, где, по прежнему, верхний индекс (k_s) обозначает размерность 1-го единичного вектора $e_1^{(k_s)}$.

Теорема 3. *В случае выполнения условия* (22) *теоремы* 2 *матрица* D *для замены* (26) *определяется однозначным образом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, дополним все векторы b_s, $s = 1, \dots, \rho$, снизу нулями до размерности $r \times 1$ и составим из таких векторов матрицу $D = \bigl[D_1 \dots D_\rho\bigr]$. Тогда, в силу построения векторов $\tilde{B}_{j_s}$ вида (24), очевидно, что

$$W^{-1}BD_s = W^{-1}\Big[B_1 \ \dots \ B_{j_s}\Big] b_s = W^{-1}\tilde{B}_{j_s} = e_{m_{s-1}+1}$$

для всех $s = 1, \dots, \rho$. Теорема доказана. □

Таким образом, теоремы 2 и 3 позволяют преобразовать исходную систему (1) к системе вида

$$\dot{y} = W^{-1}AW + W^{-1}BD\bar{u} = Py + E\bar{u}, \tag{27}$$

которая, в силу блочно-диагонального вида матрицы P и согласованного с ней вида матрицы E (единицы в столбцах стоят на строчках, являющихся первыми строками в блоках $F_{k_sk_s}$ матрицы P), разбивается на ρ независимых подсистем со скалярными управлениями вида (8) (здесь просто $u_{j_s} = \bar{u}_s$) для всех $s = 1, \dots, \rho$. Эти подсистемы представляют собой *каноническую форму* для метода В. И. Зубова в случае скалярного управления и их задачи стабилизации решаются, как обычно, из [1].

Однако рассмотрим еще одну дополнительную замену переменных, на основе идеи [2], когда для каждого блока (s) на основе матриц $F_{k_sk_s}$ строятся матрицы T_s вида

$$T_s = \begin{pmatrix} p^{(s)}_{k_s-1} & p^{(s)}_{k_s-2} & \dots & p^{(s)}_1 & 1 \\ p^{(s)}_{k_s-2} & p^{(s)}_{k_s-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ p^{(s)}_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу симметричности матриц T_s, будут симметричными и матрицы $F_{k_sk_s}T_s$, так как

$$F_{k_sk_s}T_s = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p^{(s)}_{k_s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -p^{(s)}_{k_s-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -p^{(s)}_{k_s-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -p^{(s)}_1 \end{pmatrix}\right) T_s =$$

$$= \begin{pmatrix} -p^{(s)}_{k_s} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p^{(s)}_{k_s-2} & p^{(s)}_{k_s-3} & \dots & p^{(s)}_1 & 1 \\ 0 & p^{(s)}_{k_s-3} & p^{(s)}_{k_s-4} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & p^{(s)}_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем выражение

$$F_{k_sk_s}T_s = \big(F_{k_sk_s}T_s\big)^T = T_s^T F^T_{k_sk_s} = T_s F^T_{k_sk_s},$$

где вид матриц $F^T_{k_sk_s} = G_{k_sk_s}$ такой же, как и в теореме 1 (т. е. фробениусовая форма с нижней строчкой).

Теперь, сформировав общую матрицу

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_\rho \end{pmatrix}$$

и произведя замену переменных

$$y = Tz,$$

учитывая, что $PT = TP^T$, переходим от системы (27) к системе вида

$$\dot{z} = T^{-1}PTz + T^{-1}E\bar{u} = P^T z + \widetilde{E}\bar{u} = \begin{pmatrix} G_{k_1k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{k_\rho k_\rho} \end{pmatrix} z + \widetilde{E}\bar{u}, \qquad (28)$$

в которой, как и ранее, матрица $\widetilde{E} = \big[e_{m_1} \dots e_{m_\rho}\big] = \mathrm{diag}\big\{e_{k_1}^{(k_1)}, \dots, e_{k_\rho}^{(k_\rho)}\big\}$ размерности $n \times \rho$. Вид матрицы $\widetilde{E}$ следует из того, что и $T^{-1} = \mathrm{diag}\big\{T_1^{-1}, \dots, T_\rho^{-1}\big\}$ является блочно-диагональной (как обратная к блочно-диагональной), и сама матрица $E = \mathrm{diag}\big\{e_1^{(k_1)}, \dots, e_1^{(k_\rho)}\big\}$ тоже блочно-диагональная. Рассмотрев перемножение двух любых согласованных блоков

$$T_s e_{k_s}^{(k_s)} = e_1^{(k_s)}$$

и заметив верность этого равенства (так как $e_1^{(k_s)}$ — последний столбец матрицы T_s), получаем равенство

$$e_{k_s}^{(k_s)} = T_s^{-1} T_s e_{k_s}^{(k_s)} = T_s^{-1} e_1^{(k_s)}, \quad s = 1, \dots, \rho,$$

что и подтверждает вид матрицы $\widetilde{E}$.

Далее, задавая ρ эталонных полиномов $p_{\mathrm{et}}^{(s)}(\lambda)$ вида (18) с соответствующими, наперед заданными, собственными числами $\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_{k_s}^{(s)}$ из левой полуплоскости, строим управление $\bar{u}$ вида (19), где матрица $\Gamma = \mathrm{diag}\big\{\gamma_1, \dots, \gamma_\rho\big\}$ размерности $\rho \times n$ задается коэффициентами эталонных полиномов $p_{\mathrm{et}}^{(s)}(\lambda)$ и коэффициентами блоков $G_{k_sk_s}$ следующим образом:

$$\gamma_s = \Big(p_{k_s}^{(s)} - \mu_{k_s}^{(s)}, \dots, p_1^{(s)} - \mu_1^{(s)}\Big), \quad s = 1, \dots, \rho.$$

И тогда замыкание системы (28) управлением $\bar{u} = \Gamma z$ приведет к системе

$$\dot{z} = \Big(P^T + \widetilde{E}\Gamma\Big) z$$

с диагональными блоками своих сопровождающих (характеристических) полиномов $p_{\mathrm{et}}^{(s)}(\lambda)$ с собственными числами $\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_{k_s}^{(s)}$.

Возвращаясь, двойной обратной заменой $z = T^{-1}W^{-1}x$ к первоначальным переменным x, получаем систему вида

$$\dot{x} = \Big(A + BD\Gamma T^{-1}W^{-1}\Big) x$$

и находим матрицу C линейного регулятора (2)

$$C = D\Gamma T^{-1}W^{-1},$$

которая стабилизирует исходную систему (1) и доставляет ей любые, наперед заданные, собственные числа $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_{k_s}^{(s)}$ из левой полуплоскости, $s = 1, \ldots, \rho$.

Замечание 2. Действуя подобным образом, получаем аналогичный матричный групповой стабилизатор, который с успехом применяется для декомпозиции многомерных систем управления [8].

7. В заключение подведем итоги. Установлено, что метод В. И. Зубова в том виде, в котором он представлен в этой работе, является более универсальным, основным методом построения линейного регулятора. Потому, если бы нас спросили, какое последнее достижение науки в области тематики статьи, то отметили бы работу [1] члена-корреспондента АН СССР Владимира Ивановича Зубова, которому в этом году исполнилось бы 90 лет. Заметим, что, как отмечено выше, рассматриваемая задача перетекает в задачу о размещении собственных чисел матрицы замкнутой системы. Задача размещения также была сформулирована В. И. Зубовым, но здесь мы этих вопросов глубоко не касаемся.

Литература

1. *Зубов В. И.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судостроение, 1966. 352 с.
2. *Смирнов Е. Я.* Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 307 с.
3. *Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A.* Topics in mathematical system theory. Second ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969. 358 p.
4. *Brunovsky P. A.* A classification of linear controllable systems // Kybernetika. 1970. Vol. 6. N 3. P. 173–188.
5. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 419 с.
6. *Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Тамасян Г. Ш.* Стабилизация программных движений при полной и неполной обратной связи. СПб.: Изд-во «СОЛО», 2013. 131 с.
7. *Luenberger D.* Canonical forms for linear multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1967. Vol. 12. Iss. 3. P. 290–293. https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098584
8. *Kamachkin A. M., Shamberov V. N., Chitrov G. M.* Normal matrix forms to decomposition and control problems for manydimentional systems // Вестник С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 4. С. 417–430. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.408

Статья поступила в редакцию 24 июня 2020 г.
Статья принята к печати 13 августа 2020 г.

Контактная информация:

Камачкин Александр Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.kamachkin@spbu.ru

Степенко Николай Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; n.stepenko@spbu.ru

Хитров Геннадий Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; chitrow@gmail.com

On the theory of constructive construction of a linear controller

A. M. Kamachkin, N. A. Stepenko, G. M. Chitrov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kamachkin A. M., Stepenko N. A., Chitrov G. M. On the theory of constructive construction of a linear controller. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 326–344. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.309 (In Russian)

The classical problem of stationary stabilization with respect to the state of a linear stationary control system is investigated. Efficient, easily algorithmic methods for constructing controllers of controlled systems are considered: the method of V. I. Zubov and the method of P. Brunovsky. The most successful modifications are indicated to facilitate the construction of a linear controller. A new modification of the construction of a linear regulator is proposed using the transformation of the matrix of the original system into a block-diagonal form. This modification contains all the advantages of both V. I. Zubov's method and P. Brunovsky's method, and allows one to reduce the problem with multidimensional control to the problem of stabilizing a set of independent subsystems with scalar control for each subsystem.

Keywords: stabilization of movements, linear regulator, controllable canonical forms.

References

1. Zubov V. I. *Teoriya optimal'nogo upravleniya sudnom i drugimi podvizhnymi ob"ektami* [*Theory of optimal control of a ship and other mobile objects*]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1966, 352 p. (In Russian)

2. Smirnov E. Ya. *Stabilizaciya programmnyh dvizhenij* [*Stabilization of program movements*]. St. Petersburg, Saint Petersburg University Press, 1997, 307 p. (In Russian)

3. Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A. *Topics in mathematical system theory.* Second ed. New York, McGraw-Hill Book Company Press, 1969, 358 p.

4. Brunovsky P. A. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 1970, vol. 6, no. 3, pp. 173–188.

5. Leonov G. A., Shumafov M. M. *Metody stabilizacii linejnyh upravlyaemyh sistem* [*Methods of stabilization of linear controlled systems*]. St. Petersburg, Saint Petersburg University Press, 2005, 419 p. (In Russian)

6. Smirnov N. V., Smirnova T. E., Tamasyan G. Sh. *Stabilizaciya programmnyh dvizhenij pri polnoj i nepolnoj obratnoj svyazi* [*Stabilization of program movements with full and incomplete feedback*]. St. Petersburg, SOLO Publ., 2013, 131 p. (In Russian)

7. Luenberger D. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, vol. 12, iss. 3, pp. 290–293. https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098584

8. Kamachkin A. M., Shamberov V. N., Chitrov G. M. Normal matrix forms to decomposition and control problems for manydimentional systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 417–430.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.408

Received: June 24, 2020.
Accepted: August 13, 2020.

Author's information:

Alexander M. Kamachkin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.kamachkin@spbu.ru

Nikolai A. Stepenko — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; n.stepenko@spbu.ru

Gennady M. Chitrov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; chitrow@gmail.com