УДК 517.929 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2020. Т. 16. Вып. 3
MSC 34K20

Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы

А. В. Екимов, А. П. Жабко, П. В. Яковлев

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В.* Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 316–325.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308

Рассматривается управляемая система линейных дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием. Известны достаточные условия асимптотической устойчивости таких систем, однако общие условия стабилизируемости управляемых систем и конструктивные алгоритмы построения стабилизирующих управлений до сих пор не были получены. Для линейной дифференциально-разностной системы запаздывающего типа с линейно возрастающим запаздыванием применяется каноническое преобразование Зубова и выводятся условия стабилизируемости этих систем статическим управлением. Сформулирован алгоритм проверки условий существования стабилизирующего управления и его построения. Доказаны новые теоремы об анализе устойчивости систем линейных дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием. Полученные результаты могут быть перенесены на случай систем с несколькими пропорциональными сосредоточенными запаздываниями.

Ключевые слова: система дифференциально-разностных уравнений, линейное запаздывание, асимптотическая устойчивость, стабилизирующее управление, асимптотический наблюдатель.

1. Введение. Системы дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием в настоящее время находятся в центре внимания многих исследователей. Необходимость глубокого анализа таких систем связана в том числе с целым рядом математических моделей, учитывающих запаздывающий аргумент. В качестве примера этих моделей следует отметить модель радиоактивного распада [1], работу информационного сервера [2], распространение эпидемии [3] и т. д.

Естественным обобщением систем с постоянным запаздыванием являются системы с запаздыванием, линейно зависящим от времени. К важным проблемам при их изучении относится проблема устойчивости. Наличие в системе неограниченного запаздывания может привести к потере устойчивости, что обусловливает пристальное внимание к этой проблеме. В работах [2–5] получены достаточные условия асимптотической устойчивости систем с одним или несколькими запаздываниями, линейно зависящими от времени.

Линейные управляемые системы с запаздыванием рассмотрены в [6–8]. В работе [6] представлены некоторые методы стабилизации линейных управляемых систем с постоянными матрицами и линейными запаздываниями, в [7] — алгоритм построения стабилизирующего управления для линейных систем с запаздыванием в случае неполной информации. Проблема стабилизации линейных систем с пропорциональными запаздываниями рассмотрена в [8]. Получены достаточные условия существования стабилизирующего управления в случаях полной и неполной информации о векторе состояния системы.

В данной работе будем использовать каноническое преобразование Зубова [9], адаптированное для изучаемых линейных управляемых систем с линейно возрастающим запаздыванием. Основываясь на каноническом виде приведенной системы, выведены условия стабилизируемости, уточняющие результаты [8]. Выявлены условия стабилизируемости системы статическим управлением, а также с использованием асимптотического наблюдателя. Все доказательства являются конструктивными и легко алгоритмизируются, что проиллюстрировано в примере.

2. Постановка задачи. В системе уравнений

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(\alpha t) + Bu, \tag{1}$$

$$y(t) = Kx(t) \tag{2}$$

x — n-мерный вектор состояния, u — r-мерный вектор управления, y — q-мерный вектор наблюдений, A_0, A_1, B, K — постоянные матрицы размерностей $(n \times n), (n \times r)$ и $(q \times n)$ соответственно, $0 < \alpha < 1$. Необходимо построить управление $u = u\left(x(t), x(\alpha t)\right)$, стабилизирующее систему (1). Это означает, что нулевое решение замкнутой этим управлением системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Будем придерживаться следующих определений.

Введем в рассмотрение начальную функцию $\phi(t), t \in [\alpha t_0, t_0]$, такую, что $\phi(t_0) = x_0, t_0 > 0$. Очевидно, нулевое решение системы (1) соответствует нулевой начальной функции.

Определение 1. *Нулевое решение системы* (1) *устойчиво по Ляпунову, если для любого числа* $\epsilon > 0$ *и любого начального момента* $t_0 > 0$ *можно указать такое число* $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, *что для всякой начальной функции* $\phi(t)$, *для которой* $\|\phi(t)\| < \delta$ *при* $t \in [\alpha t_0, t_0]$, *решение системы* (1) $x = x(t, t_0, \phi)$ *удовлетворяет условию* $\|x(t, t_0, \phi)\| < \epsilon$ *для любого* $t \geqslant t_0$.

Определение 2. *Нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову в смысле определения 1, и для любого* $t_0 > 0$ *можно указать такое число* $\delta_1 > 0$, *что для всякой начальной функции* $\phi(t)$, *для которой* $\|\phi(t)\| < \delta_1$ *при* $t \in [\alpha t_0, t_0]$, *решение системы* (1) $x = x(t, t_0, \phi)$ *удовлетворяет условию* $\|x(t, t_0, \phi)\| \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

В данной статье предлагается решение задачи синтеза стабилизирующего управления в случае как полной, так и неполной информации о векторе состояния системы. В случае полной информации целью работы является получение условий на матрицы A_0, A_1, B, выполнение которых обеспечивает решение задачи стабилизации. В случае неполной информации строится система асимптотической оценки на основе наблюдения (2), которая используется для построения стабилизирующего управления.

3. Скалярное управление в случае полной информации. Рассмотрим систему (1) при скалярном управлении

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(\alpha t) + bu$$

и управление

$$u = c_0x(t) + c_1x(\alpha t). \tag{3}$$

Согласно [10], известно, что замкнутая система (1), (3) асимптотически устойчива, если все корни уравнения

$$\det(\lambda E - A_0 - bc_0) = 0$$

лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, а корни уравнения

$$\det[(A_0 + bc_0) + \rho(A_1 + bc_1)] = 0 \tag{4}$$

по модулю больше единицы.

Лемма 1. *Предположим, что матрица* A_0 *не вырождена. Если матрицы*

$$P_0 = (b; A_0 b; \ldots; A_0^{n-1} b) \quad и \quad P_1 = [A_0^{-1} b; A_0^{-1} A_1 A_0^{-1} b; \ldots; (A_0^{-1} A_1)^{n-1} A_0^{-1} b]$$

удовлетворяют условиям $\mathrm{rang}(P_0) = \mathrm{rang}(P_1) = n$, *то существуют векторы* c_0 *и* c_1 *такие, что управление* (3) *обеспечивает стабилизируемость системы* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку ранг матрицы P_0 равен n, выберем такой вектор c_0, что матрица $(A_0 + bc_0)$ гурвицева. Тогда матрица $(A_0 + bc_0)$ не вырождена и справедливо равенство

$$(A_0 + bc_0)^{-1} = (E + A_0^{-1} bc_0)^{-1} A_0^{-1} = A_0^{-1}(E + \gamma bc_0 A_0^{-1}),$$

где $\gamma = -\dfrac{1}{1 + c_0 A_0^{-1} b} \neq 0$. Заметим, что $1 + c_0 A_0^{-1} b \neq 0$, поскольку $\det(A_0 + bc_0) \neq 0$.

Покажем, что можно выбрать вектор c_1 таким образом, что все корни уравнения (4) по модулю больше единицы. Для этого достаточно показать, что $\mathrm{rang}(\tilde{P}_1) = n$, где

$$\tilde{P}_1 = [(A_0 + bc_0)^{-1} b; (A_0 + bc_0)^{-1} A_1 (A_0 + bc_0)^{-1} b; \ldots; ((A_0 + bc_0)^{-1} A_1)^{n-1} (A_0 + bc_0)^{-1} b].$$

Введем обозначение $\tilde{A}_1 = A_0^{-1} A_1$, $\tilde{b} = A_0^{-1} b$. Справедливы следующие равенства:

$$(A_0 + bc_0)^{-1} b = A_0^{-1}(E + \gamma bc_0 A_0^{-1}) b = (1 + \gamma c_0 A_0^{-1} b) A_0^{-1} b = -\gamma \tilde{b},$$

$$(A_0 + bc_0)^{-1} A_1 (A_0 + bc_0)^{-1} b = -\gamma \tilde{A}_1 \tilde{b} - \gamma_1 \tilde{b}, \quad \gamma_1 = \gamma^2 c_0 \tilde{A}_1 \tilde{b},$$

$$((A_0 + bc_0)^{-1} A_1)^2 (A_0 + bc_0)^{-1} b = -\gamma \tilde{A}_1^2 \tilde{b} - \gamma_1 \tilde{A}_1 \tilde{b} - \gamma_2 \tilde{b}, \quad \gamma_2 = \gamma^2 c_0 \tilde{A}_1^2 \tilde{b} + \gamma \gamma_1 c_0 \tilde{A}_1 \tilde{b}$$

и т. д.

Поскольку $\gamma = -\dfrac{1}{1 + c_0 A_0^{-1} b} \neq 0$, то, очевидно, $\mathrm{rang}(\tilde{P}_1) = \mathrm{rang}(P_1) = n$.

Следовательно, пара $(\tilde{A}_1, \tilde{b})$ полностью управляема и выбором коэффициентов c_1 можно сделать корни уравнения (4) произвольными. □

Рассмотрим случай вырожденной матрицы A_0.

Лемма 2. *Предположим, что матрица* A_0 *вырождена,* $\det(A_0) = 0$. *Выберем такой вектор* c_0, *чтобы матрица* $\tilde{A}_0 = A_0 + bc_0$ *была гурвицевой. Если матрицы* $P_0 = (b; A_0 b; \ldots; A_0^{n-1} b)$ *и* $P_1 = [\tilde{A}_0^{-1} b; \tilde{A}_0^{-1} A_1 \tilde{A}_0^{-1} b; \ldots; (\tilde{A}_0^{-1} A_1)^{n-1} \tilde{A}_0^{-1} b]$ *удовлетворяют условиям* $\mathrm{rang}(P_0) = \mathrm{rang}(P_1) = n$, *то существует вектор* c_1 *такой, что управление* (3) *обеспечивает стабилизируемость системы* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку матрица $\tilde{A}_0$ гурвицева, то $a_0 = \det \tilde{A}_0 \neq 0$. Покажем возможность выбора такого вектора c_1, что все корни уравнения $\det[\tilde{A}_0 + \rho(A_1 + bc_1)] = 0$ по модулю больше единицы.

Для этого достаточно доказать, что для некоторого вектора c_1 степень полинома $f(\mu) = \det[\mu\tilde{A}_0 + (A_1 + bc_1)]$ равна n и все корни этого полинома удовлетворяют условию $0 < |\mu| < 1$. Поскольку старший коэффициент равен a_0, то $\deg f(\mu) = n$. В то же время пара $(\tilde{A}_1, \tilde{b}) = (\tilde{A}_0^{-1}A_1, \tilde{A}_0^{-1}b)$ полностью управляема, поэтому корни полинома $f(\mu)$ выбором вектора c_1 можно сделать произвольными. □

Замечание. Если для выбранного c_0 $\operatorname{rang}(P_1) < n$, то неравенство $\operatorname{rang}(P_1) < n$ будет выполняться для любого вектора c_0 такого, что матрица $\tilde{A}_0$ не вырождена. Возможность стабилизации системы (1) в этом случае подробно рассмотрена в теореме 2.

Рассмотрим случай $\operatorname{rang}(b; A_0b; \ldots; A_0^{n-1}b) = m < n$.

Теорема 1. *Если неуправляемая часть системы* $\dot{x}(t) = A_0x(t) + bu$ *экспоненциально устойчива и* $\operatorname{rang}[\hat{A}_0^{-1}b; \hat{A}_0^{-1}A_1\hat{A}_0^{-1}b; \ldots; (\hat{A}_0^{-1}A_1)^{n-1}\hat{A}_0^{-1}b] = n$ *для некоторой матрицы* $\hat{A}_0 = A_0 + b\hat{c}$, *то существует стабилизирующее систему* (1) *управление вида* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем вектор c_0 так, что матрица $A_0 + bc_0 = \tilde{A}_0$ гурвицева.

Далее следуем дословно доказательству леммы 2. □

Пример 1. Рассмотрим линейную управляемую систему с линейным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \beta & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(\alpha t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Здесь $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \beta & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, где β — вещественный параметр.

Матрица A_0 невырожденная почти при всех значениях параметра β, за исключением $\beta = 1$. Положим $\beta = 2$, и исследуем стабилизируемость системы в соответствии с леммой 1:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ A_0^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.25 & 0.25 \end{pmatrix}, \ P_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -0.5 \\ 1 & 0 & -0.25 \end{pmatrix}.$$

Матрица P_1 невырожденная. Вместе с тем $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Поскольку $\operatorname{rang}(P_0) = \operatorname{rang}(P_1) = 3$, то, согласно лемме 1, заданная система стабилизируется управлением (3).

Рассмотрим случай вырожденной матрицы A_0 при $\beta = 1$. Имеем

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если выбрать вектор $c_0 = (-1; 1; 0)$, то матрица $\tilde{A}_0 = A_0 + bc_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ невырожденная. Поэтому матрицы

$$\tilde{A}_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P_1 = (\tilde{b}; \tilde{A}_1\tilde{b}; \tilde{A}_1^2\tilde{b}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & -10 & -8 \\ -4 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

также невырожденные. Следовательно, поскольку $\mathrm{rang}(P_0) = \mathrm{rang}(P_1) = 3$, то в соответствии с леммой 2 заданная система стабилизируется управлением (3).

Исследуем условия полной управляемости пары (A_0, b) в общем случае. Поскольку $P_0 = (b; A_0b; A_0^2b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-2\beta \\ 0 & \beta & -\beta \\ 0 & 1 & 3+\beta \end{pmatrix}$ и $\det(P_0) = \beta^2 + 4\beta$, то при $\beta = 0$ и $\beta = -4$ пара (A_0, b) не является полностью управляемой.

1. При $\beta = 0$ получаем матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_0 = (b; A_0b; A_0^2b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выделяя управляемую и неуправляемую части системы, видим, что собственным числом неуправляемой части является $\mu = -2$. Учитывая, что $\mathrm{rang}(P_1) = 3$, согласно теореме 1, делаем вывод о стабилизируемости системы управлением (3).

2. При $\beta = -4$ получаем матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_0 = (b; A_0b; A_0^2b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее действуем аналогично предыдущему случаю и видим, что собственное число неуправляемой части $\mu = 2$ положительно. Поэтому вопрос о стабилизируемости системы не может быть решен на основе теоремы 1.

4. Случай полной информации при $r = m$. Рассмотрим систему (1)

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(\alpha t) + Bu$$

и управление

$$u = C_0x(t) + C_1x(\alpha t). \tag{5}$$

Согласно [10], замкнутая система (1), (5) асимптотически устойчива, если все корни уравнения

$$\det(\lambda E - A_0 - BC_0) = 0 \tag{6}$$

лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, а корни уравнения

$$\det[(A_0 - BC_0) + \rho(A_1 + BC_1)] = 0$$

по модулю больше единицы. Поскольку условие (6) является необходимым для стабилизации системы (1), (5), то полагаем матрицу $\tilde{A}_0 = A_0 + BC_0$ гурвицевой.

Так как матрица $\tilde{A}_0$ гурвицева, то $a_0 = \det \tilde{A}_0 \neq 0$. Поэтому необходимо показать возможность выбора такой матрицы C_1, что все корни уравнения

$$\det[\mu E + \tilde{A}_0^{-1}(A_1 + BC_1)] = 0$$

по модулю будут меньше единицы.

Будем использовать следующее обозначение: $L = \{D\}$ — линейное пространство, натянутое на столбцы матрицы D.

Лемма 3. *Пусть $\hat{C}_0$ — произвольная матрица такая, что $\hat{A}_0 = \tilde{A}_0 + B\hat{C}_0$ — невырожденная матрица. Рассмотрим пространства*

$$\tilde{L} = \{\tilde{A}_0^{-1}B; \tilde{A}_0^{-1}A_1\tilde{A}_0^{-1}B; \ldots; (\tilde{A}_0^{-1}A_1)^{n-1}\tilde{A}_0^{-1}B\},$$

$$\hat{L} = \{\hat{A}_0^{-1}B; \hat{A}_0^{-1}A_1\hat{A}_0^{-1}B; \ldots; (\hat{A}_0^{-1}A_1)^{n-1}\hat{A}_0^{-1}B\}.$$

Тогда справедливо равенство $\hat{L} = \tilde{L}$.

Доказательство. Поскольку матрица $\tilde{A}_0$ невырожденная, то справедливо равенство

$$(\tilde{A}_0 + B\hat{C}_0)^{-1} = (E + \tilde{A}_0^{-1}B\hat{C}_0)^{-1}\tilde{A}_0^{-1} = [E + \varphi(\tilde{A}_0^{-1}B\hat{C}_0)]\tilde{A}_0^{-1}.$$

Здесь $\varphi(\tilde{A}_0^{-1}B\hat{C}_0) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} a_j(\tilde{A}_0^{-1}B\hat{C}_0)^j$, где k — порядок наименьшего аннулирующего матрицу $D = \tilde{A}_0^{-1}B\hat{C}_0$ полинома, поэтому $a_{k-1} \neq 0$.

Введем обозначения: $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_0^{-1}A_1,\ \tilde{B} = \tilde{A}_0^{-1}B$.

Тогда $\hat{A}_0^{-1} = (\tilde{A}_0 + B\hat{C}_0)^{-1} = [(1 + a_0)E + \tilde{B}\hat{C}_0F]\tilde{A}_0^{-1},\ F = \sum\limits_{j=0}^{k-2} a_{j+1}(\tilde{B}\hat{C}_0)^j$.

Справедливы следующие равенства:

$$\hat{A}_0^{-1}B = [(1 + a_0)E + \tilde{B}\hat{C}_0F]\tilde{A}_0^{-1}B = \tilde{B}[(1 + a_0)E + \hat{C}_0F\tilde{B}] = \tilde{B}D_1,$$

$$\hat{A}_0^{-1}A_1\hat{A}_0^{-1}B = [(1 + a_0)E + \tilde{B}\hat{C}_0F]\tilde{A}_0^{-1}A_1\tilde{B}D_1 = (1 + a_0)\tilde{A}_1\tilde{B}D_1 + \tilde{B}\hat{C}_0F\tilde{A}_0^{-1}A_1\tilde{B}D_1 =$$
$$= (1 + a_0)\tilde{A}_1\tilde{B}D_1 + \tilde{B}\hat{C}_0F\tilde{A}_0^{-1}A_1\tilde{B}D_1 = (1 + a_0)\tilde{A}_1\tilde{B}D_1 + \tilde{B}D_2,$$
$$(\hat{A}_0^{-1}A_1)^2\hat{A}_0^{-1}B = [(1 + a_0)E + \tilde{B}\hat{C}_0F]\tilde{A}_0^{-1}A_1[(1 + a_0)\tilde{A}_1\tilde{B}D_1 + \tilde{B}D_2] =$$
$$= (1 + a_0)^2\tilde{A}_1^2\tilde{B}D_1 + (1 + a_0)\tilde{A}_1\tilde{B}D_2 + \tilde{B}[\hat{C}_0F\tilde{A}_1((1 + a_0)\tilde{A}_1\tilde{B}D_1 + \tilde{B}D_2)]$$

и т. д. Из этих равенств вытекает цепочка вложений $\hat{A}_0^{-1}B \in \{\tilde{A}_0^{-1}B\}$, $\hat{A}_0^{-1}A_1\hat{A}_0^{-1}B \in \{\tilde{A}_0^{-1}B; \tilde{A}_0^{-1}A_1\tilde{A}_0^{-1}B\}$, ..., $(\hat{A}_0^{-1}A_1)^{n-1}\hat{A}_0^{-1}B \in \{\tilde{A}_0^{-1}B; \tilde{A}_0^{-1}A_1\tilde{A}_0^{-1}B, \ldots, (\tilde{A}_0^{-1}A_1)^{n-1}$ $\tilde{A}_0^{-1}B\}$, поэтому $\hat{L} \subset \tilde{L}$. Если теперь поменять местами матрицы C_0 и $\hat{C}_0$, то получим включение $\hat{L} \supset \tilde{L}$. Поэтому $\hat{L} = \tilde{L}$. □

Рассмотрим вспомогательные системы

$$\dot{y}(t) = A_0x(t) + Bu \tag{7}$$

и

$$A_0z(t) + A_1z(t-1) + Bu = 0. \tag{8}$$

Теорема 2. *Если системы* (7) *и* (8) *стабилизируемы управлениями $u = C_0y(t)$ и $u = C_1z(t-1)$ соответственно, то существует стабилизирующее систему* (1) *управление вида* (5).

Доказательство. При выполнении условий теоремы неуправляемые собственные числа системы (7) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, а неуправляемые собственные числа системы (8) по модулю меньше единицы.

Выберем матрицу C_0 таким образом, чтобы все корни полинома $f(\lambda) = \det(\lambda E - A_0 - BC_0)$ лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Согласно второму условию теоремы, неуправляемые собственные числа полинома $g(\mu) = \det[\mu(A_0+BC_0)+A_1+Bu]$ по модулю меньше единицы. Тогда в соответствии с леммой 3 можно выбрать такое управление $u = C_1x(\alpha t)$, что все корни уравнения $\det[\mu(A_0 + BC_0) + A_1 + BC_1] = 0$ по модулю будут меньше единицы. Следовательно, управление (5) является стабилизирующим. □

5. Случай неполной информации. Асимптотический наблюдатель. Построение асимптотической оценки будем вести стандартным образом, опираясь на особенности системы и расширяя возможности подхода работы [8]. Рассмотрим систему уравнений (1), наблюдение (2) и будем строить асимптотическую оценку вектора состояния в виде системы

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(\alpha t) + Bu + L_0(K\hat{x}(t) - y(t)) + L_1(K\hat{x}(\alpha t) - y(\alpha t)). \tag{9}$$

Чтобы найти матрицы L_0 и L_1, рассмотрим сопряженную систему

$$\dot{z}(t) = A_0^T z(t) + A_1^T z(\alpha t) + K^T v. \tag{10}$$

Если система (10) удовлетворяет условиям теоремы 2, то существует стабилизирующее эту систему управление $v = \hat{C}_0 z(t)+\hat{C}_1 z(\alpha t)$. Если теперь положить, что $L_0 = C_0^T$ и $L_1 = C_1^T$, то система

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_0\tilde{x}(t) + A_1\tilde{x}(\alpha t) + L_0K\tilde{x}(t) + L_1K\tilde{x}(\alpha t)$$

будет асимптотически устойчивой.

Заметим, что $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, поэтому $\hat{x}(t) \to x(t)$ при $t \to +\infty$ и $\tilde{x}(t) \to 0$.

Предположим, что управление $u = C_0x(t) + C_1x(\alpha t)$ стабилизирует исходную систему (1), но будем использовать управление

$$u = C_0\hat{x}(t) + C_1\hat{x}(\alpha t). \tag{11}$$

Представим систему (1) в виде

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BC_0)x(t) + (A_1 + BC_1)x(\alpha t) + BC_0\tilde{x}(t) + BC_1\tilde{x}(\alpha t).$$

Поскольку в этой линейной системе однородная часть асимптотически устойчива, а неоднородность стремится к нулю, то, очевидно, система (1), (9), (11) асимптотически устойчива по Ляпунову. Таким образом справедлива

Теорема 3. *Если системы* (1) *и* (10) *удовлетворяют условиям теоремы 2, то существует стабилизирующее управление* (9), (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство приведено выше и является конструктивным алгоритмом построения стабилизирующего управления. □

Этот **алгоритм** можно расписать следующим образом.

Шаг 1. Проверяем необходимые условия стабилизации, сформулированные в теореме 2.

Шаг 2. Проверяем выполнение условий теоремы 2 для системы (10).

Шаг 3. Если проверка прошла успешно, то вычисляем матрицы и выписываем стабилизирующее управление в виде системы (9), (11).

Пример 2. Рассмотрим систему (1), в которой

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Поскольку $\operatorname{rang}(b; A_0 b; A_0^2 b) = \operatorname{rang}\left[\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right] = 3$, то система (7) стабилизируема.

Поскольку

$$\operatorname{rang}(\tilde{b}; \tilde{A}_1\tilde{b}; \tilde{A}_1^2 b) = \operatorname{rang}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 8\end{pmatrix}; \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 32\end{pmatrix}\right] = 2,$$

но неуправляемое собственное число $\mu = -\frac{1}{2}$, то система (8) также стабилизируема.

Шаг 2. Поскольку $\operatorname{rang}(K^T; A_0^T K^T) = \operatorname{rang}\left[\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right] =$ 3, то система (7) стабилизируема. Поскольку

$$\operatorname{rang}((A_0^T)^{-1}K^T; (A_0^T)^{-1}A_1^T(A_0^T)^{-1}K^T) =$$
$$= \operatorname{rang}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 8\end{pmatrix}\right] = 3,$$

то система (8) также стабилизируема.

Поэтому можно переходить к следующему шагу, вычислять матрицы C_0, C_1, L_0, L_1 и выписывать стабилизирующее управление в виде системы (9), (11).

6. Заключение. В данной статье рассматривается управляемая система дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием. Получены достаточные условия стабилизируемости таких систем, причем доказательства носят конструктивный характер. Сформулирован алгоритм проверки существования и построения стабилизирующего управления. Доказаны новые теоремы об анализе устойчивости изучаемых систем. Полученные результаты могут быть перенесены на случай систем с несколькими пропорциональными сосредоточенными запаздываниями.

Литература

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения / пер. с англ. А. М. Зверкина, Г. А. Каменского; под ред. Л. Э. Эльсгольца. М.: Мир, 1967. 548 с. (*Bellman R., Cooke K. L.* Differential-difference equations.)

2. *Жабко А. П., Чижова О. Н.* Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 105–115.

3. *Екимов А. В., Чижова О. Н., Зараник У. П.* Устойчивость однородных нестационарных систем дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 415–424.

4. *Laktionov A. A., Zhabko A. P.* Method of differential transformations for differential systems with linear time-delay // Proceedings of the First IFAC Conference LTDS–98. France, 1998. P. 201–205.

5. *Гребенщиков Б. Г.* Методы исследования устойчивости систем с линейным запаздыванием // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 41–51.

6. *Гребенщиков Б. Г., Ложников А. Б.* О стабилизации одной системы с последействием // Автоматика и телемеханика. 2011. № 1. С. 13–26.

7. *Zhabko A. P., Chizhova O. N.* On stabilization of systems of linear equations with linear increasing time-delay by observations // Proceedings of RuPAC2016. St. Petersburg, Russia, 2016. P. 261–263.

8. *Жабко А. П., Тихомиров О. Г., Чижова О. Н.* О стабилизации класса систем с пропорциональным запаздыванием // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 165–172.

9. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

10. *Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U.* Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. N 2. P. 67–72.

Статья поступила в редакцию 24 мая 2020 г.
Статья принята к печати 13 августа 2020 г.

Контактная информация:

Екимов Александр Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.ekimov@spbu.ru

Жабко Алексей Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Яковлев Павел Валентинович — канд. физ.-мат. наук; w330433@gmail.com

The stability of differential-difference equations with proportional time delay. I. Linear controlled system

A. V. Ekimov, A. P. Zhabko, P. V. Yakovlev

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ekimov A. V., Zhabko A. P., Yakovlev P. V. The stability of differential-difference equations with proportional time delay. I. Linear controlled system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308 (In Russian)

The article considers a controlled system of linear differential-difference equations with a linearly increasing delay. Sufficient conditions for the asymptotic stability of such systems are known; however, general conditions for the stabilizability of controlled systems and constructive algorithms for constructing stabilizing controls have not yet been obtained. For a linear differential-difference equation of delayed type with linearly increasing delay, the canonical Zubov transformation is applied and conditions for the stabilization of such systems by static control are derived. An algorithm for checking the conditions for the existence of a stabilizing control and for its constructing is formulated. New theorems on stability analysis of systems of linear differential-difference equations with linearly increasing delay are proven. The results obtained can be applied to the case of systems with several proportional delays.

Keywords: system of linear differential-difference equations, linearly increasing time delay, asymptotic stability, stabilizing control, asymptotic evaluation system.

References

1. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations.* London, United Kingdom, Academic Press, 1963, 461 p. (Russ. ed.: Bellman R., Cooke K. L. *Differencial'no-raznostnye uravnenija.* Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p.)

2. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Analiz ustojchivosti odnorodnogo differencial'no-raznostnogo uravnenija s linejnym zapazdyvaniem [Stability analysis of homogeneous differential-difference equation with linear delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2015, iss. 3, pp. 105–115. (In Russian)

3. Ekimov A. V., Chizhova O. N., Zaranik U. P. Ustoichivost odnorodnykh nestatsionarnykh system differentsial'no-raznostnykh uravnenij s linejno vozrastajushim zapazdyvaniem [Stability of homogeneous nonstationary systems of differential-difference equations with linearly time delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 415–424. (In Russian)

4. Laktionov A. A., Zhabko A. P. Method of differential transformations for differential systems with linear time-delay. *Proceedings of the First IFAC Conference LTDS–98*. France, 1998, pp. 201–205.

5. Grebenshhikov B. G. Metody issledovanija ustojchivosti sistem s linejnym zapazdyvaniem [Methods for investigating the stability of systems with linear delay]. *Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 1, pp. 41–51. (In Russian)

6. Grebenshhikov B. G., Lozhnikov A. B. O stabilizacii odnoj sistemy s posledejstviem [On stabilization of one system with aftereffect]. *Automation and Remote Control*, 2011, no. 1, pp. 13–26. (In Russian)

7. Zhabko A. P., Chizhova O. N. On stabilization of systems of linear equations with linear increasing time-delay by observations. *Proceedings of RuPAC2016*. St. Petersburg, Russia, 2016, pp. 261–263.

8. Zhabko A. P., Tikhomirov O. G., Chizhova O. N. O stabilizatsii klassa system s proportsionalnym zapazdyvaniem [On stabilization of a class of systems with time proportional delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 165–172. (In Russian)

9. Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [*Lectures on control theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 496 p. (In Russian)

10. Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U. Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay. *Cybernetics and Physics*, 2016, vol. 5, no. 2, pp. 67–72.

Received: May 24, 2020.
Accepted: August 13, 2020.

Author's information:

Alexander V. Ekimov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; a.ekimov@spbu.ru

Aleksei P. Zhabko — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Pavel V. Yakovlev — PhD in Physics and Mathematics; w330433@gmail.com