

## Моделирование биомеханических систем с нецелым числом степеней свободы

*В. П. Трегубов, Н. К. Егорова*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Трегубов В. П., Егорова Н. К.* Моделирование биомеханических систем с нецелым числом степеней свободы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 267–276. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.305>

Отмечается, что модель Кельвина—Фойхта непригодна для описания некоторых полимеров и биологических тканей. В этих случаях пользуются трехкомпонентной комбинацией элементов, которая состоит из параллельно соединенной пружины и демпфера с последовательно прикрепленной к ним пружинной. Силовая характеристика данной комбинации включает не только деформацию, скорость деформации и силу, но и скорость изменения силы. Примерами подобных систем могут служить стенка кровеносного сосуда и межпозвоночный диск, которому было уделено особое внимание. Поскольку движение таких систем описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка, то их относят к классу систем с нецелым числом степеней свободы. Для одномассовой колебательной системы с полутора степенями свободы с помощью преобразования Лапласа была построена передаточная функция, а затем амплитудно-частотная характеристика. Анализ последней показал, что увеличение коэффициента демпфирования от нуля до бесконечности сначала приводит к уменьшению ее максимума до некоторого ненулевого значения, а затем к возрастанию и достижению бесконечности при бесконечном значении коэффициента демпфирования. Эта же особенность продемонстрирована и на двухмассовой системе цепной структуры, каждое звено которой имеет полторы степени свободы. Последовательная комбинация из семи таких звеньев была применена для моделирования поясничного отдела позвоночника в структуре общей модели тела сидящего человека, подверженного вертикальной вибрации. Для моделирования многосуставных мышц поясничного отдела использовались многосуставные упруговязкие соединения. Для определения параметров предложенной модели необходимы дополнительные экспериментальные исследования.

*Ключевые слова:* механическая система, амплитудно-частотная характеристика, нецелое число степеней свободы, резонансная частота.

**1. Введение.** При моделировании биомеханических систем широко применяются механические системы с сосредоточенными параметрами. Эти модели состоят обычно из абсолютно твердых тел, соединенных последовательно пружинами и демпферами. Такую комбинацию принято называть моделью Кельвина—Фойхта. В качестве примеров можно привести механическую модель поясничного отдела позвоночника, предназначенную для исследования его поведения при импульсном воздействии во время катапультирования [1] (рис. 1), и механическую модель тела человека, подверженного действию вертикальной вибрации [2] (рис. 2).

Однако известно, что модель Кельвина—Фойхта непригодна для описания свойств целого ряда полимеров и биологических тканей. В этих случаях применяют

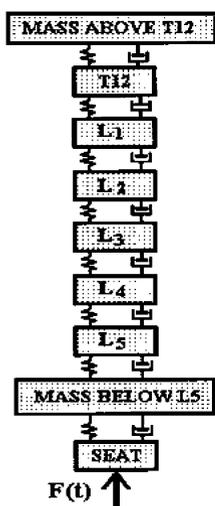


Рис. 1. Модель поясничного отдела при импульсном воздействии [1]

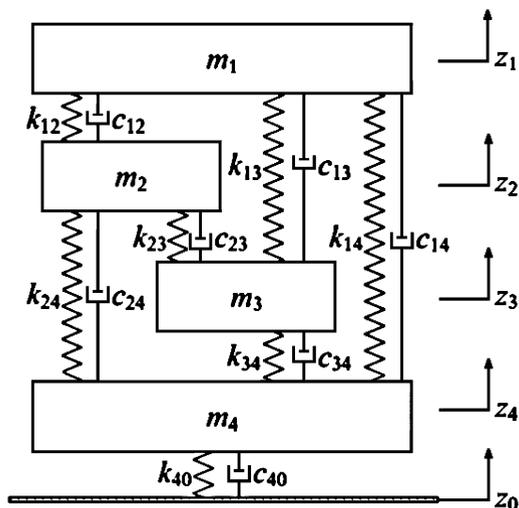


Рис. 2. Механическая модель тела человека, подверженного вибрации [2]

трехкомпонентную комбинацию элементов, которая состоит из параллельно соединенных пружины и демпфера, с последовательно прикрепленной к ним пружинной

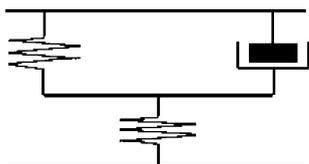


Рис. 3. Стандартное линейное тело

(рис. 3). Эту комбинацию называют стандартным линейным телом или моделью Зинера. В качестве примера можно привести статьи [3, 4], в которых такая модель использовалась для определения входного механического импеданса локтевой кости, окруженной мягкой тканью, а также работу [5], в которой моделировался материал стенки кровеносного сосуда.

**2. Историческая справка.** Термин «нецелое число степеней свободы» появился в первой половине XX в. В [6] были описаны линейные системы с  $1/2$  степени свободы. Одна из них рассматривалась как вырождение линейного осциллятора с малой массой, другая — как электрический контур с пренебрежимо малой индуктивностью. В обоих случаях поведение системы описывалось обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В связи с этим понятие нецелого числа степеней свободы связывалось с порядком уравнения (или системы уравнений), описывающего поведение системы. К сожалению, и в указанном первом издании, и в последующих изданиях [7] обсуждение таких систем ограничилось особенностями задания начальных данных. В работе [8] при изложении теории колебаний линейных систем были рассмотрены и системы с нецелым числом степеней свободы, в том числе системы с полутора степенями свободы, движение которых описывается дифференциальным уравнением третьего порядка. Эти системы по-прежнему описывались как вырожденные систем с конечным числом степеней свободы при пренебрежимо малом значении одной из двух масс.

**3. Системы с полутора степенями свободы.** Известно, что свойства материалов, которые можно рассматривать как стандартное линейное тело, подчинены

соотношению

$$\alpha \dot{F} + \beta F = -\gamma \dot{x} - \delta x, \quad (1)$$

в котором  $x$  — деформация,  $F$  — сила.

В частности, соотношение (1) выполняется для межпозвонкового диска [9], несмотря на его сложную внутреннюю структуру [10]. В связи с этим межпозвонковый диск был выбран в качестве характерного примера биомеханической системы. Поскольку стандартное линейное тело является невесомой конструкцией, то для учета инерциальных свойств реального тела в простейшем случае используется система, изображенная на рис. 4, где  $m$  — масса твердого деформируемого тела,  $c_1$  и  $c_2$  — жесткости пружин,  $b$  — коэффициент демпфирования. Эта система может служить моделью позвонка с межпозвонковым диском. Уравнения его движения относительно неподвижного основания имеют следующий вид:

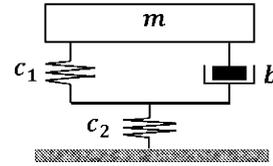


Рис. 4. Механическая модель позвонка с межпозвонковым диском

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -b\dot{x}_1 - c_1x_1, \\ b\dot{x}_1 + c_1x_1 &= c_2x_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x$  — перемещение массы  $m$  в абсолютной системе координат;  $x_1$  и  $x_2$  — деформации пружин. Система уравнений (2) сводится к одному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$ma\ddot{x} + md\dot{x} + bx + c_1x = 0, \quad (3)$$

здесь

$$a = \frac{b}{c_2}, \quad d = \frac{(c_1 + c_2)}{c_2}.$$

Если к основанию системы, изображенной на рис. 4, приложить кинематическое возбуждение по закону  $y(t) = Y \sin(\omega t)$ , то уравнение (3) дополнится правой частью, а именно

$$ma\ddot{x} + md\dot{x} + bx + c_1x = by + c_1y. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно рассматривать как математическую модель позвонка, скрепленного межпозвонковым диском с вибрирующим основанием, хотя может служить моделью и других биомеханических систем. Применяв к нему преобразование Лапласа и разделив все члены уравнения на  $Y(p)$ , где  $p$  — комплексная переменная, получим выражение для передаточной функции (ПФ)

$$H(p) = \frac{\alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (5)$$

в которой  $\delta_0 = \alpha_0 = c_1 c_2$ ,  $\delta_1 = \alpha_1 = b c_2$ ,  $\delta_2 = m(c_1 + c_2)$ ,  $\delta_3 = m b$ .

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), соответствующая ПФ (5), как известно, получается в результате подстановки в нее вместо комплексной переменной  $p$  мнимой переменной  $i\omega$  с последующим определением ее модуля:

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \omega^2}{(\delta_0 - \delta_2 \omega^2)^2 + (\delta_1 \omega - \delta_3 \omega^3)^2}}. \quad (6)$$

В отсутствии демпфирования, т. е. при  $b = 0$ , АЧХ (6) примет следующий вид:

$$|H(\omega)| = \frac{c_1 c_2}{c_1 c_2 - m(c_1 + c_2)\omega^2},$$

откуда резонансная частота для рассматриваемой системы равна

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}.$$

В то же время можно убедиться, что при возрастании коэффициента демпфирования от нуля до бесконечности максимальное значение АЧХ сначала будет уменьшаться до некоторого минимального, а потом снова будет расти, как показано на рис. 5, до бесконечности при частоте, равной

$$\omega_{\text{res}}^* = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}.$$

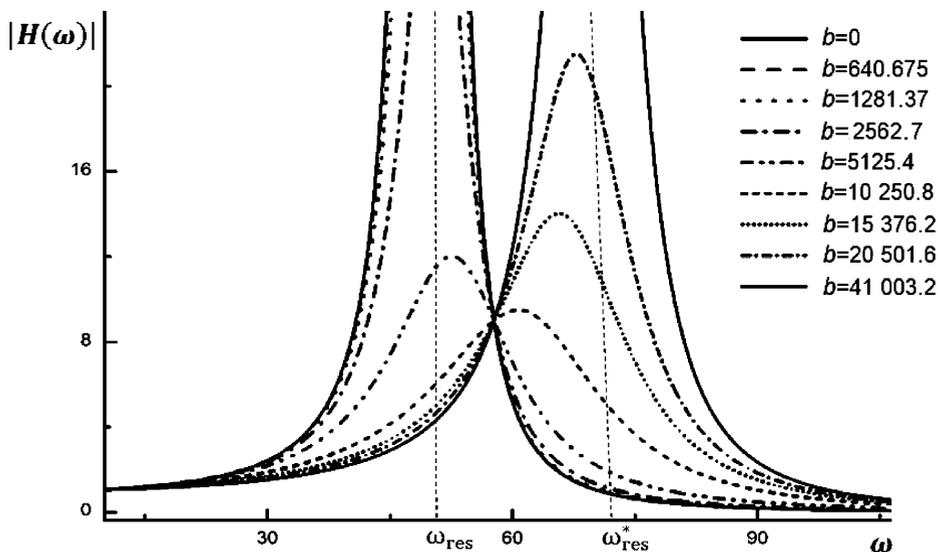


Рис. 5. Изменение АЧХ с возрастанием коэффициента демпфирования  $b$

На рис. 5 также видно, как максимальное значение АЧХ постепенно смещается вправо, т. е. в сторону увеличения частоты.

**4. Моделирование позвоночника.** Следующим шагом было моделирование системы из двух позвонков, соединенных межпозвонковыми дисками между собой и с вибрирующим основанием (рис. 6). Она представляет собой последовательное соединение систем, каждая из которых имеет полторы степени свободы.

Движение этой механической модели в абсолютной системе координат описывается системой двух дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} m_1 a_1 \ddot{x}_1 + m_1 d_1 \dot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_{11} x_1 - b_1 \dot{x}_2 - c_{11} x_2 &= 0, \\ m_2 a_2 \ddot{x}_2 + m_2 d_2 \dot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + c_{21} x_2 + m_1 a_2 \ddot{x}_1 + m_1 d_2 \dot{x}_1 &= b_2 \dot{y} + c_{21} y, \end{aligned} \quad (7)$$

в которой

$$a_1 = \frac{b_1}{c_{12}}, \quad d_1 = \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{12}},$$

$$a_2 = \frac{b_2}{c_{22}}, \quad d_2 = \frac{c_{21} + c_{22}}{c_{22}},$$

$x_1$  и  $x_2$  — перемещения масс  $m_1$  и  $m_2$ ,  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — жесткости пружин,  $b_1$  и  $b_2$  — коэффициенты демпфирования.

Применив к системе уравнений (7) преобразование Лапласа и разделив каждый член уравнений на  $Y(p)$ , где  $p$  — комплексная переменная, разрешим данную систему относительно  $H_1(p)$ . В результате получаем для массы  $m_1$  ПФ в виде уравнения

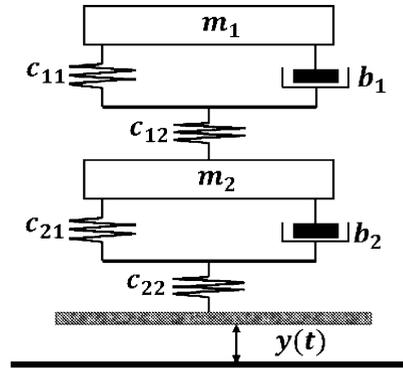


Рис. 6. Механическая модель двухпозвоночного участка позвоночника

$$H_1(p) = \frac{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_6 p^6 + \delta_5 p^5 + \delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (8)$$

здесь

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \alpha_0 = c_{11}c_{21}, & \delta_1 &= \alpha_1 = b_1c_{21} + b_2c_{11}, \\ \delta_2 &= (m_1 + m_2)c_{11}d_2 + m_1c_{21}d_1 + b_1b_2, \\ \delta_3 &= (m_1 + m_2)(b_1d_2 + c_{11}a_2) + m_1(b_2d_1 + c_{21}a_1), \\ \delta_4 &= (m_1 + m_2)b_1a_2 + m_1b_2a_1 + m_1m_2d_1d_2, \\ \delta_5 &= m_1m_2(a_1d_2 + a_2d_1), & \delta_6 &= m_1m_2a_1a_2, & \alpha_2 &= b_1b_2. \end{aligned}$$

АЧХ, соответствующая ПФ (8), имеет вид

$$|H_1(\omega)| = \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2\omega^2)^2 + \alpha_1^2\omega^2}{(\delta_0 - \delta_2\omega^2 + \delta_4\omega^4 - \delta_6\omega^6)^2 + (\delta_1\omega - \delta_3\omega^3 + \delta_5\omega^5)^2}}. \quad (9)$$

При  $b_1 = b_2 = 0$  АЧХ (9) запишем следующим образом:

$$|H'_1(\omega)| = \frac{\alpha_0}{\delta_0 - \delta'_2\omega^2 + \delta'_4\omega^4}, \quad (10)$$

где  $\delta'_0 = \delta_0$ ,  $\delta'_2 = (m_1 + m_2)c_{11}d_2 + m_1c_{21}d_1$ ,  $\delta'_4 = m_1m_2d_1d_2$ .

Приравняв знаменатель выражения для  $|H'_1(\omega)|$  (10) к нулю и решая биквадратное уравнение

$$\delta'_4\omega^4 - \delta'_2\omega^2 + \delta'_0 = 0,$$

получим квадраты резонансных частот, а именно

$$(\omega_{\text{res}})_{1,2}^2 = \frac{\delta'_2 \pm \sqrt{(\delta'_2)^2 - 4\delta'_0\delta'_4}}{2\delta'_4}.$$

Нетрудно убедиться, что подкоренное выражение больше нуля и корни вещественные и положительные. Для определения поведения АЧХ при  $b_1$  и  $b_2$ , стремящимся к бесконечности, нужно разделить ее коэффициенты на  $b_1$  и  $b_2$  и устремить их к бесконечности. В результате АЧХ (9) представим в виде

$$|H''_1(\omega)| = \frac{-\alpha''_2\omega^2}{-\delta''_2\omega^2 + \delta''_4\omega^4 - \delta''_6\omega^6}, \quad (11)$$

здесь

$$\delta_2'' = \alpha_2'' = 1, \quad \delta_4'' = \frac{m_1(c_{12} + c_{22}) + m_2 c_{12}}{c_{12} c_{22}}, \quad \delta_6'' = \frac{m_1 m_2}{c_{12} c_{22}}.$$

Разделив числитель и знаменатель выражения для  $|H_1''(\omega)|$  (11) на  $-\omega^2$ , находим, что

$$|H_1''(\omega)| = \frac{1}{1 - \delta_4'' \omega^2 + \delta_6'' \omega^4}.$$

Приравнявая знаменатель к нулю и решая биквадратное уравнение

$$\delta_6'' \omega^4 - \delta_4'' \omega^2 + 1 = 0,$$

получим два значения квадрата резонансных частот при  $b_1$  и  $b_2$ , стремящихся к бесконечности:

$$(\omega_{\text{res}}^*)_{1,2}^2 = \frac{\delta_4'' \pm \sqrt{(\delta_4'')^2 - 4\delta_6''}}{2\delta_6''}.$$

Нетрудно убедиться, что подкоренное выражение больше нуля, а корни вещественные и положительные.

Характер изменения АЧХ этой двухмассовой системы при изменении коэффициентов демпфирования  $b_1$  и  $b_2$  от нуля до бесконечности представлен на рис. 7. Видно, что возрастание  $b_1$  и  $b_2$  приводит к уменьшению максимумов АЧХ до некоторых ненулевых значений с последующим возрастанием их до бесконечности при найденных выше частотах  $(\omega_{\text{res}}^*)_1$  и  $(\omega_{\text{res}}^*)_2$ .

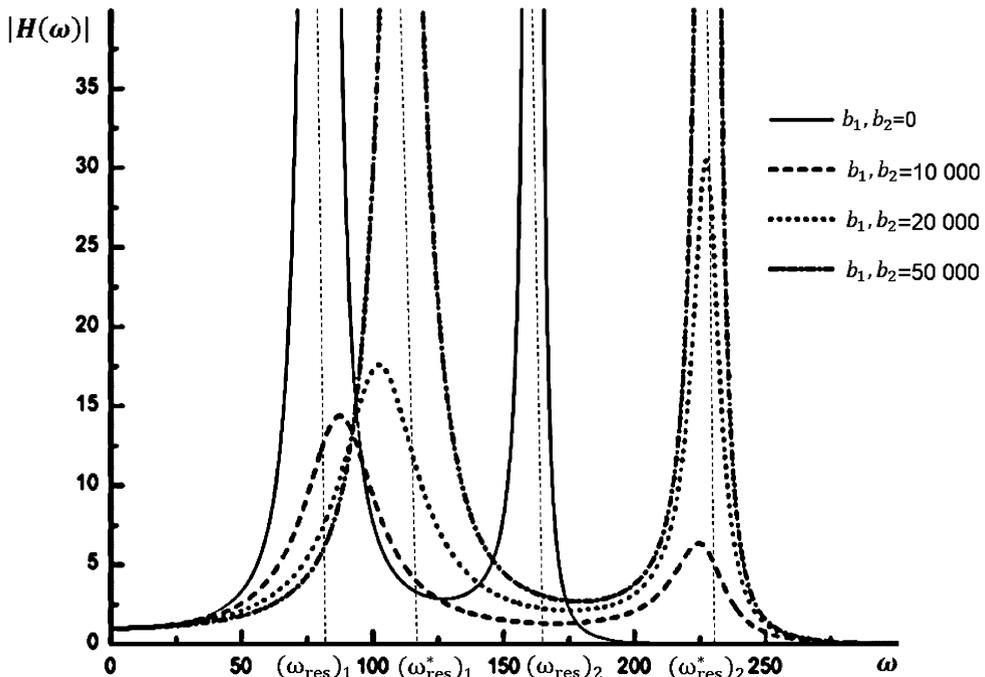


Рис. 7. Изменение АЧХ двухмассовой системы при возрастании коэффициентов демпфирования

В результате приведенных исследований АЧХ одномассовой и двухмассовой систем появляется возможность строить и многосвязные системы, у которых каждое звено имеет полторы степени свободы. Такие системы можно использовать для моделирования некоторых отделов позвоночника, подверженных вертикальному вибрационному воздействию. Грудной отдел гораздо в меньшей степени подвержен вертикальной деформации при допустимых значениях амплитуды вибрационного воздействия. Шейный отдел достаточно подвижен, однако в наибольшей степени вибрационному воздействию подвержен поясничный отдел позвоночника. В связи с этим была построена механическая модель поясницы, которая встроена в модель тела сидящего человека (рис. 8). Она состоит из семи твердых тел, моделирующих пять поясничных позвонков с равными массами  $m_i$ , и двух тел, моделирующих части туловища ниже и выше поясницы с массами  $m_1$  и  $m_7$ . Все тела соединены между собой трехэлементными системами с полутора степенями свободы.

В работе [11] было показано, что в случае вибрационного воздействия многосуставные мышцы можно моделировать с помощью пассивных механических соединений. В связи с этим в предложенной модели верхняя и нижняя части туловища связаны многосвязными вязкоупругими соединениями с жесткостью  $c_0$  и коэффициентом демпфирования  $b_0$ , которые моделируют многосуставные мышцы поясничного отдела.

В целом это модель тела сидящего человека. Она может быть применена для построения системы виброзащиты человека-оператора.

Что касается параметров модели, то для определения коэффициентов упругости использовались экспериментальные данные, полученные на изолированных образцах межпозвоночных дисков [12]. Для определения коэффициентов демпфирования требуются дополнительные экспериментальные исследования. В предложенной модели они выбирались таким образом, чтобы исключить собственные колебания системы. Массы тел  $m_1$  и  $m_7$  соответствуют средним значениям масс верхней и нижней частей туловища. Что же касается моделирования мышц, то их параметры  $c_0$  и  $b_0$  подбираются таким образом, чтобы АЧХ модели соответствовала экспериментальной АЧХ тела человека.

**5. Заключение.** Основная цель исследования АЧХ системы с полутора степенями свободы заключалась в том, чтобы продемонстрировать особенности поведения

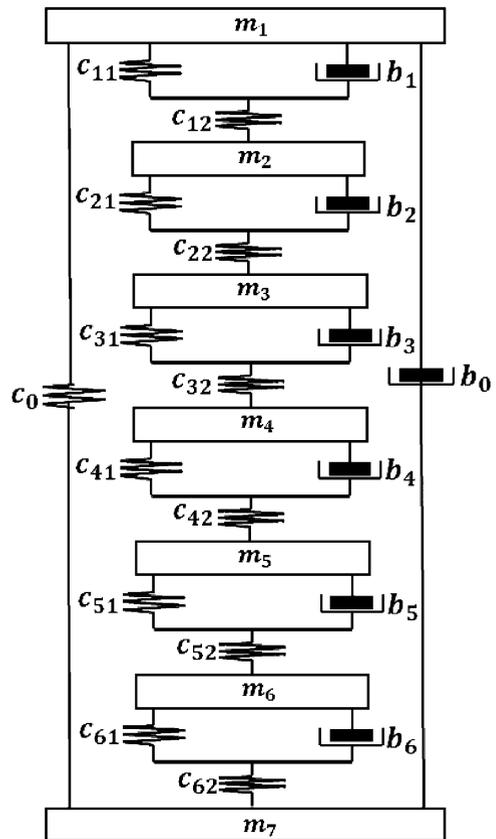


Рис. 8. Механическая модель тела человека с поясничным отделом позвоночника

АЧХ при увеличении коэффициента демпфирования  $b$ . Следует отметить, что та резонансная частота, при которой максимальное значение АЧХ обращается в бесконечность, при бесконечно большом коэффициенте демпфирования не играет большую практическую роль. Важно то, что с некоторого значения возрастающий коэффициент демпфирования АЧХ перестает убывать и начинает возрастать. Данный факт следует учитывать при моделировании материалов со свойствами стандартного линейного тела, которыми обладают не только межпозвоночный диск или стенка кровеносного сосуда, но и многие биологические материалы. Для этих материалов характерно достаточно высокое внутреннее трение, при котором собственные колебания отсутствуют. К сожалению, определение значений коэффициента демпфирования для модели каждого конкретного материала требует дополнительных экспериментальных исследований, в которых будут проведены измерения скорости деформации, приложенной силы и скорости ее изменения. Выполнение таких исследований позволит перейти к использованию этих материалов при протезировании.

## Литература

1. *Toth R.* Multiple degree-of-freedom nonlinear spinal model // Proceeding of 19th Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology. San Francisco, California, 1967. P. 126–132.
2. *Bai Xian-Xu, Xu Shi-Xu, Cheng Wei, Qian Li-Jun.* On 4-degree-of-freedom biodynamic models of seated occupants: Lumped-parameter modeling // Journal of Sound and Vibration. 2017. Vol. 402. N 18. P. 122–141.
3. *Thompson G. T.* In vivo determination of mechanical properties of the human ulna by mechanical impedance tests: Experimental results and improved mathematical model // Medical and Biological Engineering. 1976. Vol. 14. P. 253–262.
4. *Orne D.* The in vivo driving-point impedance of the human ulna — a viscoelastic beam modal // Journal of Biomechanics. 1974. Vol. 7. P. 249–257.
5. *Kizilova N. N.* Presser wave propagation in liquid field // Fluid dynamics. 2006. Vol. 41. N 3. P. 434–446.
6. *Андронов А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. 519 с.
7. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
8. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
9. *Orne D., King L. Y.* A mathematical model of spinal response to impact // Journal of Biomechanics. 1971. Vol. 4. N 1. P. 49–71.
10. *Жарнов А. М., Жарнова О. А.* Биомеханические процессы в межпозвоночном диске шейного отдела позвоночника при его движении // Рос. журн. биомеханики. 2013. Т. 17. № 1. С. 32–40.
11. *Трегубов В. П., Егорова Н. К.* Модельное изучение влияния многосуставных мышц на частотные характеристики тела человека // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 150–164. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.207>
12. *Ciach M., Awrejcewicz J., Maciejczak A., Radek M.* Experimental and numerical investigations of C5–C6 cervical spinal segment before and after discectomy using the Cloward operation technique // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 1999. Vol. 1. N 1. P. 101–105.

Статья поступила в редакцию 24 июня 2020 г.

Статья принята к печати 13 августа 2020 г.

Контактная информация:

*Трегубов Владимир Петрович* — д-р физ.-мат. наук, проф.; [v.tregubov@spbu.ru](mailto:v.tregubov@spbu.ru)

*Егорова Надежда Константиновна* — аспирант; [nadezhda\\_ego@mail.ru](mailto:nadezhda_ego@mail.ru)

# Model study of the influence of multi-joint muscles on the frequency characteristics of the human body

V. P. Tregubov, N. K. Egorova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Tregubov V. P., Egorova N. K. Model study of the influence of multi-joint muscles on the frequency characteristics of the human body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 267–276. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.305> (In Russian)

It is noted that the Kelvin–Voigt model is unsuitable for describing some polymers and biological tissues. In these cases, a three-component combination of elements, which consists of a spring and damper, connected in parallel and a spring sequentially attached to them, is used. The force characteristic of such a combination includes not only the strain, strain rate, and force, but also the rate of force change. Examples of such systems are the blood vessel wall and the intervertebral disc, which have been given special attention. Since the motion of such systems is described by an ordinary third-order differential equation, they are classified as systems with a non-integer number of degrees of freedom. For a single-mass oscillating system with one and a half degrees of freedom, a transfer function was constructed using the Laplace transform. In addition, the amplitude-frequency response (AFR) was also constructed. Analysis of this characteristic showed that increasing the damping coefficient from zero to infinity first leads to a decrease in its maximum to a certain non-zero value, and then to an increase and reaching infinity with an infinite value of the damping coefficient. The same feature is demonstrated on a two-mass system of chain structure, each link of which has one and a half degrees of freedom. A sequential combination of seven such links was used to model the lumbar spine in the structure of a General body model of a sitting person subject to vertical vibration. Multi-link elastic-viscous joints were used to model the multi-articular muscles of the lumbar spine. Additional experimental studies are needed to determine the numerical values of the parameters of the proposed model.

*Keywords:* mechanical system, amplitude-frequency response, non-integer number of degrees of freedom, resonant frequency.

## References

1. Toth R. Multiple degree-of-freedom nonlinear spinal model. *Proceeding of 19th Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology*. San Francisco, California, 1967, pp. 126–132.
2. Bai Xian-Xu, Xu Shi-Xu, Cheng Wei, Qian Li-Jun. On 4-degree-of-freedom biodynamic models of seated occupants: Lumped-parameter modeling. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, vol. 402, no. 18, pp. 122–141.
3. Thompson G. T. In vivo determination of mechanical properties of the human ulna by mechanical impedance tests: Experimental results and improved mathematical model. *Medical and Biological Engineering*, 1976, vol. 14, pp. 253–262.
4. Orne D. The in vivo driving-point impedance of the human ulna — a viscoelastic beam modal. *Journal of Biomechanics*, 1974, vol. 7, pp. 249–257.
5. Kizilova N. N. Presser wave propagation in liquid field. *Fluid dynamics*, 2006, vol. 41, no. 3, pp. 434–446.
6. Andronov A. A., Haikin S. E. *Teoriya kolebanij [Theory of oscillations]*. Moscow, Leningrad, ONTI NKTP USSR Publ., 1937, 519 p. (In Russian)
7. Andronov A. A., Witt A. A., Haikin S. E. *Teoriya kolebanij [Theory of oscillations]*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 916 p. (In Russian)
8. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. *Ustojchivost' i kolebaniya uprugih sistem [Stability and vibrations of elastic systems]*. Moscow, Nauka Publ., 1987, 352 p. (In Russian)
9. Orne D., King L. Y. A mathematical model of spinal response to impact. *Journal of Biomechanics*, 1971, vol. 4, no. 1, pp. 49–71.

10. Zharnov A. M., Zharnova O. A. Biomechanicheskie processy v mezhpozvonkovom diske shejnogo otdela pozvonochnika pri ego dvizhenii [Biomechanical processes in the intervertebral disc of the cervical spine during its movement]. *Russian Journal of Biomechanics*, 2013, vol. 17, no. 1, pp. 32–40. (In Russian)

11. Tregubov V. P., Egorova N. K. Model'noe izuchenie vliyaniya mnogosustavnykh myshc na chasotnye harakteristiki tela cheloveka [Model study of the influence of multi-joint muscles on the frequency characteristics of the human body]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 150–164.  
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.207> (In Russian)

12. Ciach M., Awrejcewicz J., Maciejczak A., Radek M. Experimental and numerical investigations of C5–C6 cervical spinal segment before and after discectomy using the Cloward operation technique. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 1999, vol. 1, no. 1, pp. 101–105.

Received: June 24, 2020.

Accepted: August 13, 2020.

#### A u t h o r ' s i n f o r m a t i o n :

*Vladimir P. Tregubov* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; [v.tregubov@spbu.ru](mailto:v.tregubov@spbu.ru)

*Nadezhda K. Egorova* — Postgraduate Student; [nadezhda\\_ego@mail.ru](mailto:nadezhda_ego@mail.ru)