ИНФОРМАТИКА

УДК 51-73, 537.2

MSC 35J05

Математическое моделирование полевого эмиттера гиперболической формы**Н. В. Егоров, Е. М. Виноградова*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Егоров Н. В., Виноградова Е. М.* Математическое моделирование полевого эмиттера гиперболической формы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 238–248. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.302>

Данная работа посвящена моделированию полевой эмиссионной диодной системы. Поверхность эмиттера — гиперboloид вращения. Поверхность анода — часть гиперboloида вращения, в частном случае — круговая диафрагма. Поставлена граничная задача для уравнения Лапласа с граничными условиями первого рода, не обладающими осевой симметрией. 3D-решение задачи найдено методом разделения переменных в вырожденных эллипсоидальных координатах для вытянутого эллипсоида вращения. Распределение электростатического потенциала представлено в виде разложений по функциям Лежандра. Вычисление коэффициентов разложений сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Все геометрические размеры системы являются параметрами задачи.

Ключевые слова: микро- и наноэлектроника, полевой эмиттер, полевая эмиссия, математическое моделирование, электростатический потенциал, граничная задача, функции Лежандра.

1. Введение. Полевые эмиттеры по сравнению с термо- и фотокатодами обладают многочисленными преимуществами, например, такими, как высокая яркость, монокинетичность пучка, работа при комнатных температурах, низкое энергопотребление, малый вес и габариты и т. д. [1–3]. Эти особенности источников, основанных на принципе полевой эмиссии, позволяют использовать их в различных вакуумных приборах микро- и наноэлектроники [4–7].

В данной статье моделируется диодная система с полевым эмиттером в виде гиперboloида вращения. Поверхность анода представляет собой часть гиперboloида

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-07-01086).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

вращения или круговую диафрагму. Для вычисления электростатического потенциала $U(\alpha, \beta, \phi)$ во всей области системы используется метод разделения переменных в координатах вытянутого эллипсоида вращения (α, β, ϕ) . Таким образом, поверхности электродов являются осесимметричными (рисунок). Граничные условия первого рода на электродах не обладают свойством осевой симметрии и зависят от угловой координаты ϕ .

Рисунок. Схематическое изображение диодной системы с полевым эмиттером гиперболической формы

2. Математическая модель. Параметры задачи:

$\beta = \beta_1, 0 \leq \alpha < \infty, -\pi \leq \phi < \pi$ — поверхность катода;

$\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ — координаты круговой апертуры анода;

$\beta = \beta_0, \alpha_0 \leq \alpha < \infty, -\pi \leq \phi < \pi$ — поверхность анода;

$U(\alpha, \beta_1, \phi) = f_1(\alpha, \phi), 0 \leq \alpha < \infty, -\pi \leq \phi < \pi$ — граничное условие на катоде;

$U(\alpha, \beta_0, \phi) = f_0(\alpha, \phi), \alpha_0 \leq \alpha < \infty, -\pi \leq \phi < \pi$ — граничное условие на аноде.

При $\beta_0 = \pi/2$ поверхность анода — плоская круговая диафрагма, при $\beta_0 \neq \pi/2$ — часть гиперboloида вращения.

3D-распределение электростатического потенциала $U(\alpha, \beta, \phi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{1}{c^2(\sin^2 \beta + \sinh^2 \alpha)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \coth \alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{\sinh^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right] = 0, \quad (1)$$

$$0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta \leq \beta_1, -\pi \leq \phi < \pi,$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta_1, \phi) &= f_1(\alpha, \phi), \quad 0 \leq \alpha < \infty, \quad -\pi \leq \phi < \pi, \\ U(\alpha, \beta_0, \phi) &= f_0(\alpha, \phi), \quad \alpha_0 \leq \alpha < \infty, \quad -\pi \leq \phi < \pi, \end{aligned} \quad (2)$$

где c — фокальный радиус.

3. Вычисление электростатического потенциала. Для решения граничной задачи (1), (2) рассмотрим следующие области:

$$1 - 0 \leq \alpha < \infty, \quad \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1, \quad -\pi \leq \phi < \pi;$$

$$2 - 0 \leq \alpha < \infty, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_0, \quad -\pi \leq \phi < \pi;$$

$$3 - 0 \leq \alpha < \alpha_0, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_1, \quad -\pi \leq \phi < \pi.$$

Обозначим распределение потенциала в j -й области $U(\alpha, \beta, \phi) = U_j(\alpha, \beta, \phi)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда для каждой j -й области функцию $U_j(\alpha, \beta, \phi)$ соответственно можно представить в виде [8–12]

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, \beta, \phi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int_0^{\infty} \left[A_m(\tau) \frac{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_0)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} + \right. \\ &\quad \left. + B_m(\tau) \frac{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} \right] P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

$$U_2(\alpha, \beta, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int_0^{\infty} B_m(\tau) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_3(\alpha, \beta, \phi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_1)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} D_{m,k} \frac{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha)}{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha_0)} P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $P_{\sigma}^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода, $Q_{\rho}^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра второго рода, $W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(x, y)$ — линейная комбинация функций Лежандра

$$W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(x, y) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(x) Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(y) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(y) Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(x), \quad (6)$$

$\nu_{m,n}$, $\mu_{m,k}$ — корни уравнений

$$P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha_0) = 0, \quad P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta_1) = 0. \quad (7)$$

Для отрицательных значений m в (3)–(5) при $x = \cos \beta$, $z = \cosh \alpha$ справедливы следующие формулы [10, 13, 14]:

$$P_{\sigma}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\sigma - m + 1)}{\Gamma(\sigma + m + 1)} P_{\sigma}^m(x), \quad Q_{\sigma}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\sigma - m + 1)}{\Gamma(\sigma + m + 1)} Q_{\sigma}^m(x),$$

$$P_{\sigma}^{-m}(z) = \frac{\Gamma(\sigma - m + 1)}{\Gamma(\sigma + m + 1)} P_{\sigma}^m(z), \quad Q_{\sigma}^{-m}(z) = \frac{\Gamma(\sigma - m + 1)}{\Gamma(\sigma + m + 1)} Q_{\sigma}^m(z),$$

где $\Gamma(y)$ — гамма-функция.

Следует отметить, что формулы (3) и (4) обеспечивают непрерывность распределения потенциала $U(\alpha, \beta, \phi)$ во всем пространстве исследуемой системы в силу того, что на границе раздела областей **1** и **2** при $\beta = \beta_0$ и $0 \leq \alpha < \infty$ выполняется условие

$$U_1(\alpha, \beta_0, \phi) = U_2(\alpha, \beta_0, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int_0^{\infty} B_m(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau. \quad (8)$$

Коэффициенты $A_m(\tau)$ в разложении (3) рассчитываются в явном виде из граничных условий (2) на катоде при $\beta = \beta_1$, $0 \leq \alpha < \infty$:

$$U_1(\alpha, \beta_1, \phi) = f_1(\alpha, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int_0^{\infty} A_m(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau,$$

с помощью интегрального преобразования Мелера—Фока [8, 9]

$$A_m(\tau) = \frac{(-1)^m}{2\pi} \tau \tanh(\pi\tau) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\phi} \int_0^{\infty} f_1(\alpha, \phi) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) \sinh \alpha d\alpha d\phi. \quad (9)$$

Коэффициенты $C_{m,n}$ в разложении (5) также вычисляются в явном виде из граничных условий (2) при $\beta = \beta_1$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$:

$$U_3(\alpha, \beta_1, \phi) = f_1(\alpha, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha)$$

и из условий ортогональности системы собственных функций $P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha)$

$$C_{m,n} = \frac{1}{2\pi N_{m,n}^1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\phi} \int_0^{\alpha_0} f_1(\alpha, \phi) P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha) \sinh \alpha d\alpha d\phi. \quad (10)$$

Нормировочные множители $N_{m,n}^1$ в формуле (10) определяются путем предельного перехода при интегрировании произведения функций Лежандра и первого из уравнений (7) [8, 15]

$$\begin{aligned} N_{m,n}^1 &= \int_0^{\alpha_0} (P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha))^2 \sinh \alpha d\alpha = \int_1^{\cosh \alpha_0} \left(P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(z) \right)^2 dz = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \nu_{m,n}} \sinh^2 \alpha_0 \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^m(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(z)}{(1/4 + \nu^2) - (1/4 + \nu_{m,n}^2)} \frac{dP_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(z)}{dz} \Big|_{z=\cosh \alpha_0} = \\ &= \frac{\sinh^2 \alpha_0}{2\nu_{m,n}} P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^{m'}(\cosh \alpha_0) \frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^m(\cosh \alpha_0)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_{m,n}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов $A_m(\tau)$ и $D_{m,k}$ в разложениях (3)–(5) используется метод перекрытия областей. В силу того, что область **3** частично перекрывает области **1** и **2**, граничные точки областей **1** и **2** при $\beta = \beta_0$ совпадают

(см. формулу (8)) и одновременно являются внутренними точками области **3** при $0 \leq \alpha < \alpha_0$. Аналогично, граничные точки области **3** при $\alpha = \alpha_0$ ($0 \leq \beta \leq \beta_1$) представляют собой внутренние точки областей **1** ($\beta_0 < \beta < \beta_1$) и **2** ($0 \leq \beta < \beta_0$). Таким образом, непрерывность потенциала и его первой производной во всей области диодной системы, с учетом (2), обеспечивается выполнением условий

$$U_1(\alpha, \beta_0, \phi) = U_2(\alpha, \beta_0, \phi) = \begin{cases} U_3(\alpha, \beta_0, \phi), & 0 \leq \alpha < \alpha_0, & -\pi \leq \phi < \pi, \\ f_0(\alpha, \phi), & \alpha_0 \leq \alpha < \infty, & -\pi \leq \phi < \pi, \end{cases} \quad (12)$$

$$U_3(\alpha_0, \beta, \phi) = \begin{cases} U_2(\alpha_0, \beta, \phi), & 0 \leq \beta \leq \beta_0, & -\pi \leq \phi < \pi, \\ U_1(\alpha_0, \beta, \phi), & \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1, & -\pi \leq \phi < \pi. \end{cases} \quad (13)$$

Из (2), (5), (8) и (12) для любого целого m получим, что

$$\int_0^\infty B_m(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau = \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty C_{m,n} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_1)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha) + \\ + \sum_{k=1}^\infty D_{m,k} \frac{P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta_0)}{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha_0)} P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha), & 0 \leq \alpha < \alpha_0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-im\phi} f_0(\alpha, \phi) d\phi, & \alpha_0 \leq \alpha < \infty, \end{cases}$$

и, используя интегральное преобразование Мелера—Фока, первое уравнение, связывающее коэффициенты $B_m(\tau)$ и $D_{m,k}$, можно представить в виде

$$\begin{aligned} B_m(\tau) = & (-1)^m \tau \tanh(\pi\tau) \times \\ & \times \left[\sum_{k=1}^\infty D_{m,k} \frac{P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta_0)}{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha_0)} \int_0^{\alpha_0} P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\cosh \alpha) \sinh \alpha d\alpha + \right. \\ & + \sum_{n=1}^\infty C_{m,n} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_1)} \int_0^{\alpha_0} P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\cosh \alpha) \sinh \alpha d\alpha + \\ & \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-im\phi} \int_{\alpha_0}^\infty f_0(\alpha, \phi) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\cosh \alpha) \sinh \alpha d\alpha d\phi \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (3)–(6) и (13) для любого целого m справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^\infty D_{m,k} P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) = \begin{cases} \int_0^\infty B_m(\tau) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha_0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta) d\tau, & 0 \leq \beta \leq \beta_0, \\ \int_0^\infty \left[A_m(\tau) W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_0) + \right. \\ \quad \left. + B_m(\tau) W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta) \right] \times \\ \quad \times \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha_0)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} d\tau, & \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1, \end{cases}$$

и из ортогональности системы собственных функций $P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta)$ (7) второе уравнение, связывающее коэффициенты $B_m(\tau)$ и $D_{m,k}$, имеет вид

$$D_{m,k} = \frac{1}{N_{m,k}^2} \int_0^\infty \left[B_m(\tau) F_{\mu_{m,k}}^m(\tau) + A_m(\tau) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha_0)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} \times \right. \\ \left. \times \int_{\beta_0}^{\beta_1} W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_0) P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) \sin \beta d\beta \right] d\tau, \quad (15)$$

где $N_{m,k}^2$ — нормировочные множители [4]

$$N_{m,k}^2 = \int_0^{\beta_1} \left(P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) \right)^2 \sin \beta d\beta = - \frac{\sin^2 \beta_1}{2\mu_{m,k} + 1} P_{\mu_{m,k}}^{m'}(\cos \beta_1) \frac{\partial P_{\mu}^m(\cos \beta_1)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_{m,k}}, \quad (16)$$

и коэффициент $F_{\mu_{m,k}}^m(\tau)$ в уравнении (15) можно представить следующим образом:

$$F_{\mu_{m,k}}^m(\tau) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha_0) \times \\ \times \left[\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_0) \right)^{-1} \int_0^{\beta_0} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta) P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) \sin \beta d\beta + \right. \\ \left. + \left(W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0) \right)^{-1} \int_{\beta_0}^{\beta_1} W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta) P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) \sin \beta d\beta \right]. \quad (17)$$

Подставляя коэффициент $B_m(\tau)$, определяемый формулой (14), в (15), с учетом (16), (17) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $D_{m,k}$

$$D_{m,k} - \frac{(-1)^m}{N_{m,k}^2} \sum_{q=1}^{\infty} D_{m,q} \frac{P_{\mu_{m,q}}^m(\cos \beta_0)}{P_{\mu_{m,q}}^m(\cosh \alpha_0)} \times \\ \times \int_0^\infty \tau \tanh(\pi\tau) F_{\mu_{m,k}}^m(\tau) \int_0^{\alpha_0} P_{\mu_{m,q}}^m(\cosh \alpha) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\cosh \alpha) \sinh \alpha d\alpha d\tau = \\ = \frac{1}{N_{m,k}^2} \int_0^\infty A_m(\tau) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha_0)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} \times \\ \times \int_{\beta_0}^{\beta_1} W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_0) P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) \sin \beta d\beta d\tau + \\ + \frac{(-1)^m}{N_{m,k}^2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_1)} \times \\ \times \int_0^\infty \tau \tanh(\pi\tau) F_{\mu_{m,k}}^m(\tau) \int_0^{\alpha_0} P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\cosh \alpha) \sinh \alpha d\alpha d\tau + \\ + \frac{(-1)^m}{2\pi N_{m,k}^2} \int_0^\infty \tau \tanh(\pi\tau) F_{\mu_{m,k}}^m(\tau) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\phi} \int_{\alpha_0}^\infty f_0(\alpha, \phi) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-m}(\cosh \alpha) \sinh \alpha d\alpha d\phi d\tau. \quad (18)$$

Таким образом, решение граничной задачи (1), (2) о распределении электростатического потенциала во всей области диодной системы сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами (18).

4. Вычисление напряженности поля. В вырожденных эллипсоидальных координатах для вытянутого эллипсоида вращения (α, β, ϕ) составляющие вектора напряженности электростатического поля $E_\alpha(\alpha, \beta, \phi)$, $E_\beta(\alpha, \beta, \phi)$, $E_\phi(\alpha, \beta, \phi)$ имеют вид

$$E_\alpha = -\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \quad E_\beta = -\frac{1}{h_\beta} \frac{\partial U}{\partial \beta}, \quad E_\phi = -\frac{1}{h_\phi} \frac{\partial U}{\partial \phi},$$

$$h_\alpha = h_\beta = c \sqrt{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}, \quad h_\phi = c \sinh \alpha \sin \beta.$$

Для расчета напряженности поля в любой точке области диодной системы достаточно рассмотреть распределение потенциала $U_1(\alpha, \beta, \phi)$, $U_2(\alpha, \beta, \phi)$ для выделенных областей **1** и **2**.

Распределение потенциала (3) в области **1** позволяет представить составляющие напряженности поля так:

$$E_{1,\alpha}(\alpha, \beta, \phi) = \frac{1}{c \sqrt{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left[A_m(\tau) \frac{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_0)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} + B_m(\tau) \frac{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} \right] \times$$

$$\times \left[((1/2 - m)^2 + \tau^2) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m-1}(\cosh \alpha) + m \coth \alpha P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) \right] d\tau, \quad (19)$$

$$E_{1,\beta}(\alpha, \beta, \phi) = \frac{1}{c \sqrt{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left[A_m(\tau) \frac{\widehat{W}_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_0)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} - B_m(\tau) \frac{\widehat{W}_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_1)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} \right] \times$$

$$\times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau, \quad (20)$$

где

$$\widehat{W}_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_0) =$$

$$= \left[-((1/2 - m)^2 + \tau^2) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m-1}(\cos \beta) + m \cot \beta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta) \right] Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_0) -$$

$$- P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_0) \left[-((1/2 - m)^2 + \tau^2) Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m-1}(\cos \beta) + m \cot \beta Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta) \right],$$

$$E_{1,\phi}(\alpha, \beta, \phi) = -\frac{1}{c \sinh \alpha \sin \beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m e^{i(m\phi+\pi/2)} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left[A_m(\tau) \frac{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta, \cos \beta_0)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} + \right. \quad (21)$$

$$\left. + B_m(\tau) \frac{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta)}{W_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_1, \cos \beta_0)} \right] P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau.$$

Составляющие напряженности поля в соответствии с распределением потенциала (4) в области **2** имеют вид

$$E_{2,\alpha}(\alpha, \beta, \phi) = \frac{1}{c \sqrt{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int_0^{\infty} B_m(\tau) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_0)} \times$$

$$\times \left[((1/2 - m)^2 + \tau^2) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m-1}(\cosh \alpha) + m \coth \alpha P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) \right] d\tau, \quad (22)$$

$$E_{2,\beta}(\alpha, \beta, \phi) = \frac{1}{c \sqrt{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int_0^{\infty} B_m(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau \times$$

$$\times \frac{\left[-((1/2 - m)^2 + \tau^2) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m-1}(\cos \beta) + m \cot \beta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta) \right]}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_0)}, \quad (23)$$

$$E_{2,\phi}(\alpha, \beta, \phi) = -\frac{1}{c \sinh \alpha \sin \beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m e^{i(m\phi+\pi/2)} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} B_m(\tau) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \beta_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cosh \alpha) d\tau. \quad (24)$$

Итак, формулы (19)–(24) для областей **1** и **2** задают распределение напряженности поля в любой точке моделируемой эмиссионной системы. Границей между ними является плоскость анода. Несмотря на то, что область **3** только частично перекрывает первые две, важность построенного распределения потенциала (5)–(7), (10), (11), (15)–(17) состоит в том, что, во-первых, именно она есть основная пролетная область пучка, эмитированного катодом, а во-вторых, общие граничные точки областей **1** и **2** являются ее внутренними точками, что улучшает сходимость рядов в представленном решении вблизи анода как для распределения потенциала, так и для напряженности поля. В силу данного обстоятельства приведем составляющие напряженности поля в области **3**, в которой распределение потенциала определяется по формуле (5):

$$E_{3,\alpha}(\alpha, \beta, \phi) = \frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_1)} \times \right. \\ \times \left[((1/2 - m)^2 + \nu_{m,n}^2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^{m-1}(\cosh \alpha) + m \coth \alpha P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha) \right] + \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} D_{m,k} P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) \times \right. \\ \left. \times \frac{\left[-(\mu_{m,k} + m)(\mu_{m,k} - m + 1) P_{\mu_{m,k}}^{m-1}(\cosh \alpha) + m \coth \alpha P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha) \right]}{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha_0)} \right], \quad (25)$$

$$E_{3,\beta}(\alpha, \beta, \phi) = \frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cosh \alpha) \times \right. \\ \times \frac{\left[-((1/2 - m)^2 + \nu_{m,n}^2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^{m-1}(\cos \beta) + m \cot \beta P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta) \right]}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_1)} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} D_{m,k} \frac{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha)}{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha_0)} \times \\ \left. \times \left[(\mu_{m,k} + m)(\mu_{m,k} - m + 1) P_{\mu_{m,k}}^{m-1}(\cos \beta) + m \cot \beta P_{\mu_{m,k}}^m(\cos \beta) \right] \right], \quad (26)$$

$$E_{3,\phi}(\alpha, \beta, \phi) = -\frac{1}{c \sinh \alpha \sin \beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m e^{i(m\phi + \pi/2)} \times \\ \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^m(\cos \beta_1)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu_{m,n}}^{m-1}(\cosh \alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{m,k} \frac{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha)}{P_{\mu_{m,k}}^m(\cosh \alpha_0)} P_{\mu_{m,k}}^{m-1}(\cos \beta) \right]. \quad (27)$$

Формулы (25)–(27) представляют распределение напряженности поля в любой точке области **3**.

5. Заключение. В данной статье моделируется диодная эмиссионная система с полевым острием, поверхность которого представляет собой гиперboloид вращения. Поверхностью анода может быть либо часть гиперboloида вращения, либо круговая диафрагма. На электродах заданы граничные условия первого рода, не обладающие свойством осевой симметрии. Для вычисления трехмерного распределения электростатического потенциала решена граничная задача для уравнения Лапласа (1), (2) в вырожденных эллипсоидальных координатах для вытянутого эллипсоида вращения. При решении поставленной задачи использовался метод перекрытия областей, являющийся обобщением метода разделения переменных. В результате распределение потенциала представлено в виде разложений по присоединенным функциям Лежандра (3)–(7). Часть коэффициентов, входящих в разложения, вычислены в явном виде (9)–(11) из граничных условий (2). Нахождение остальных коэффициентов сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений (14), (18). Кроме того, приведены формулы для определения напряженности поля (19)–(27). Распределение потенциала и напряженности поля найдено во всей области системы.

Литература

1. Li Y., Sun Y., Yeow J. T. W. Nanotube field electron emission: Principles, development, and applications // Nanotechnology. 2015. Vol. 26. Iss. 24. N 242001 (23 p.).

2. Kaur G., Pulagara N.V., Kumar R., Lahiri I. Metal foam-carbon nanotube-reduced graphene oxide hierarchical structures for efficient field emission // *Diamond and Related Materials*. 2020. Vol. 106. N 107847 (8 p.).
3. Grillo A., Giubileo F., Iemmo L., Luongo G., Urban F., Passacantando M., Di Bartolomeo A. Field emission from mono and two-dimensional nanostructures // *Materials Today: Proceedings*. 2020. Vol. 20. P. 64–68.
4. Lim J., Gupta A. P., Yeo S. J., Kong M., Cho C.-G., Kim S. H., Ahn J. S., Mativenga M., Ryu J. Design and fabrication of CNT-based e-gun using stripe-patterned alloy substrate for X-ray applications // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2019. Vol. 66. Iss. 12. N 8874963. P. 5301–5304.
5. Filip V., Filip L. D., Wong H. Review on peculiar issues of field emission in vacuum nanoelectronic devices // *Solid-State Electronics*. 2017. Vol. 138. P. 3–15.
6. Sominskii G. G., Sezonov V. E., Taradaev E. P., Tumareva T. A., Taradaev S. P., Rukavitsyna A. A., Givargizov M. E., Stepanova A. N. Field emitters for miniature high-voltage electronic devices operating in technical vacuum // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2019. Vol. 62. Iss. 7–8. P. 539–546.
7. Бугаев А. С., Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронные катоды и пушки. Долгопрудный: Издат. дом «Интеллект», 2017. 288 с.
8. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
9. Lebedev N. N., Skal'skaya I. P. Electrostatic distribution over a thin segment of a hyperboloid // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1967. Vol. 7. Iss. 2. P. 137–148.
10. Hobson E. W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 500 p.
11. Vinogradova E. M., Egorov N. V. Mathematical modeling of a diode system based on a field emitter // *Technical Physics*. 2011. Vol. 56. Iss. 9. P. 1219–1224.
12. Egorov N. V., Vinogradova E. M. Mathematical modeling of the electron beam formatting systems on the basis of field emission cathodes with various shapes // *User Modeling and User-Adapted Interaction*. 2003. Vol. 72. Iss. 2. P. 103–111.
13. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Washington, DC: NBS, 1964. 1046 p. (Applied Mathematics Series 55).
14. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products. 7th ed. Amsterdam; Boston; Heidelberg; London; New York; Oxford; Paris; San Diego; San Francisco; Singapore; Sydney; Tokyo: Academic Press, 2007. 1171 p.
15. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. In 2 vol. New York; Toronto; London: McGraw-Hill Book Company Inc., 1953. Vol. 1. 302 p.

Статья поступила в редакцию 26 января 2020 г.

Статья принята к печати 13 августа 2020 г.

Контактная информация:

Егоров Николай Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; robbv7@mail.ru

Виноградова Екатерина Михайловна — д-р физ.-мат. наук, проф.; e.m.vinogradova@spbu.ru

Mathematical modeling of a field emitter with a hyperbolic shape*

N. V. Egorov, E. M. Vinogradova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Egorov N. V., Vinogradova E. M. Mathematical modeling of a field emitter with a hyperbolic shape. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 238–248.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.302> (In Russian)

This article is devoted to modeling a field emission diode system. The emitter surface is a hyperboloid of rotation. The anode surface is a part of the hyperboloid of rotation,

* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant N 20-07-01086).

in a particular case, a circular diaphragm. A boundary value problem is formulated for the Laplace equation with non-axisymmetric boundary conditions of the first kind. A 3D solution was found by the variable separation method in the prolate spheroidal coordinates. The electrostatic potential distribution is presented in the form of the Legendre functions expansions. The calculation of the expansion coefficients is reduced to solving a system of linear equations with constant coefficients. All geometric dimensions of the system are the parameters of the problem.

Keywords: micro and nanoelectronics, field emitter, field emission, mathematical modeling, electrostatic potential, boundary-value problem, Legendre functions.

References

1. Li Y., Sun Y., Yeow J. T. W. Nanotube field electron emission: Principles, development, and applications. *Nanotechnology*, 2015, vol. 26, iss. 24, no. 242001 (23 p.).
2. Kaur G., Pulagara N. V., Kumar R., Lahiri I. Metal foam-carbon nanotube-reduced graphene oxide hierarchical structures for efficient field emission. *Diamond and Related Materials*, 2020, vol. 106, no. 107847 (8 p.).
3. Grillo A., Giubileo F., Immo L., Luongo G., Urban F., Passacantando M., Di Bartolomeo A. Field emission from mono and two-dimensional nanostructures. *Materials Today: Proceedings*, 2020, vol. 20, pp. 64–68.
4. Lim J., Gupta A. P., Yeo S. J., Kong M., Cho C.-G., Kim S. H., Ahn J. S., Mativenga M., Ryu J. Design and fabrication of CNT-based e-gun using stripe-patterned alloy substrate for X-ray applications. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2019, vol. 66, iss. 12, no. 8874963, pp. 5301–5304.
5. Filip V., Filip L. D., Wong H. Review on peculiar issues of field emission in vacuum nanoelectronic devices. *Solid-State Electronics*, 2017, vol. 138, pp. 3–15.
6. Sominskii G. G., Sezonov V. E., Taradaev E. P., Tumareva T. A., Taradaev S. P., Rukavitsyna A. A., Givargizov M. E., Stepanova A. N. Field emitters for miniature high-voltage electronic devices operating in technical vacuum. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2019, vol. 62, iss. 7–8, pp. 539–546.
7. Bugaev A. S., Vinogradova E. M., Egorov N. V., Sheshin E. P. *Avtoelektronnyye katody i pushki* [Field-electron cathodes and guns]. Dolgoprudny, ID Intellect Publ., 2017, 288 p. (In Russian)
8. Uflyand Ya. S. *Metod parnykh uravneniy v zadachakh matematicheskoy fiziki* [Method of paired equations in problems of mathematical physics]. Leningrad, Nauka Publ., 1977, 220 p. (In Russian)
9. Lebedev N. N., Skal'skaya I. P. Electrostatic distribution over a thin segment of a hyperboloid. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1967, vol. 7, iss. 2, pp. 137–148.
10. Hobson E. W. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1931, 500 p.
11. Vinogradova E. M., Egorov N. V. Mathematical modeling of a diode system based on a field emitter. *Technical Physics*, 2011, vol. 56, iss. 9, pp. 1219–1224.
12. Egorov N. V., Vinogradova E. M. Mathematical modeling of the electron beam formatting systems on the basis of field emission cathodes with various shapes. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 2003, vol. 72, iss. 2, pp. 103–111.
13. Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington, DC, NBS Press, 1964, 1046 p. (Applied Mathematics Series 55).
14. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Table of integrals, series, and products*. 7th ed. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo, Academic Press, 2007, 1171 p.
15. Bateman H., Erdelyi A. *Higher transcendental functions*. In 2 vol. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company Inc., 1953, vol. 1, 302 p.

Received: January 21, 2020.

Accepted: August 13, 2020.

Author's information:

Nikolay V. Egorov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; robby7@mail.ru

Ekaterina M. Vinogradova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; e.m.vinogradova@spbu.ru