

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 532.59:539.3:534.12  
MSC 34E13, 74J15, 74J30

**Анализ фазовой структуры колебаний жидкости с плавающей продольно сжатой упругой пластинкой при нелинейном взаимодействии поверхностных прогрессивных волн\***

*А. А. Букатов*

Морской гидрофизический институт Российской академии наук, Российская Федерация, 299011, Севастополь, ул. Капитанская, 2

**Для цитирования:** *Букатов А. А.* Анализ фазовой структуры колебаний жидкости с плавающей продольно сжатой упругой пластинкой при нелинейном взаимодействии поверхностных прогрессивных волн // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 226–237.  
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.301>

На основе полученных методом многих масштабов асимптотических разложений до величин третьего порядка малости для потенциала скорости движения жидких частиц и возвышения поверхности пластинка—жидкость (лед—вода) выполнен анализ фазовых характеристик возмущений, формируемых при взаимодействии прогрессивных поверхностных волновых гармоник конечной амплитуды. Изучено влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений упругой пластинки на дисперсионные характеристики волновых возмущений. Дана оценка зависимости частоты колебаний от учета нелинейности величин первого и второго приближений, толщины пластинки и продольного сжимающего усилия. Показано, что знак амплитуды второй взаимодействующей гармоники и учет нелинейности ускорения вертикальных смещений продольно сжатой упругой пластинки влияют на фазу колебаний. Получено, что с уменьшением длины волны начальной гармоники влияние нелинейности вертикального ускорения пластинки усиливается. Наличие сжимающего усилия проявляется в уменьшении значения частоты колебания волнового возмущения в сравнении с частотой, полученной при отсутствии продольного сжатия, как при положительном, так и при отрицательном знаке амплитуды второй взаимодействующей гармоники.

*Ключевые слова:* колебания ледяной пластинки, волны конечной амплитуды, нелинейное взаимодействие волн, изгибаемая деформация пластинки, продольное сжимающее усилие, фазовые характеристики.

---

\* Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2018-0003 «Фундаментальные исследования океанологических процессов, определяющих состояние и эволюцию морской среды под влиянием естественных и антропогенных факторов, на основе методов наблюдения и моделирования».

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

**1. Введение.** В линейной постановке при отсутствии сжимающего усилия изучение колебаний упругой плавающей пластинки проведено в [1–7], а при его наличии — в [8–12]. Нелинейные колебания абсолютно гибкой плавающей пластинки были рассмотрены в [13], колебания конечной амплитуды без учета нелинейности ускорения вертикальных смещений плавающей упругой пластинки, обусловленных ее изгибом, — в [14–16]. Влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений упругой пластинки на распространение периодических поверхностных волн при отсутствии продольного сжатия исследовано в [17], а при его наличии — в [18]. Изучение возмущения поверхности пластинка–жидкость, сформированного при взаимодействии прогрессивных поверхностных волн конечной амплитуды в случае абсолютно гибкой пластинки, выполнено в [19], в случае упругой плавающей пластинки — в [20], а при учете продольного сжатия — в [21].

Цель настоящей работы — исследование фазовых характеристик колебаний поверхности пластинка–жидкость, формируемых при нелинейном взаимодействии бегущих периодических поверхностных волн, в случае продольно сжатой упругой пластинки.

**2. Постановка задачи.** Пусть неограниченный бассейн конечной глубины  $H$  заполняет однородная идеальная несжимаемая жидкость. На поверхности жидкости плавает тонкая продольно сжатая упругая пластинка, которая, как и жидкость, неограниченна в горизонтальных направлениях. Предполагая движение жидкости потенциальным, а колебания пластинки безотрывными в безразмерных величинах  $x = kx_1$ ,  $z = kz_1$ ,  $t = \sqrt{kg}t_1$ ,  $\zeta = k\zeta^*$ ,  $\varphi = (k^2/\sqrt{kg})\varphi^*$ , где  $k$  — волновое число, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1)$$

для потенциала скорости  $\varphi(x, z, t)$  с граничными условиями на поверхности пластинка–жидкость ( $z = \zeta$ )

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa k \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = P, \quad (2)$$

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

и на дне ( $z = -H$ ) бассейна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ )

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \kappa = h \frac{\rho_1}{\rho},$$

где  $E$ ,  $h$ ,  $\rho_1$ ,  $\nu$  — соответственно модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона пластинки;  $Q$  — продольное сжимающее усилие, приходя-

щесся на единицу ширины пластинки;  $\zeta(x, t)$  — возвышение поверхности пластинка—жидкость;  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения.

Потенциал скорости  $\varphi(x, z, t)$  и возмущение поверхности пластинка—жидкость  $\zeta(x, t)$  связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

В динамическом условии (2)  $\kappa k \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$  может быть преобразовано следующим образом:

$$\kappa k \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \kappa k \frac{d}{dt} \left( \frac{d\zeta}{dt} \right) = \kappa k \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u \right) = \kappa k \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u \right) u \right].$$

Заменим горизонтальную составляющую скорости  $u$  производной от потенциала скорости  $\varphi(x, z, t)$  по горизонтальной координате  $x$ , считая, что  $\varphi$  в этой работе взято со знаком минус. Тогда  $u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Следовательно,

$$\kappa k \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \kappa k \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right].$$

Из кинематического условия (5) находим, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В результате имеем уравнение

$$\kappa k \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \kappa k \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = \kappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right].$$

Таким образом, динамическое условие (2) в нелинейном случае принимает вид

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = P. \quad (6)$$

Выражение с множителем  $\kappa$  представляет собой инерцию вертикальных смещений упругой пластинки, где первое слагаемое в скобках характеризует нелинейность ее вертикального ускорения.

**3. Уравнения для нелинейных приближений.** Решение задачи (1), (3)–(6), сформулированной в безразмерных величинах, было получено с помощью метода многих масштабов [22] в виде уравнений для трех приближений, учитывающих нелинейность ускорения вертикальных смещений продольно сжатой упругой пластинки [21]:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq 0, \quad n = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta_n}{\partial x^4} + Q_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x^2} - \kappa k \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z \partial T_0} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} + \zeta_n = F_n^*, \quad z = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n, \quad z = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad (10)$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0. \quad (11)$$

Здесь

$$F_n^* = F_n + F_n^0, \quad F_1 = F_1^0 = L_1 = G_1 = 0, \quad n = 1, 2, 3,$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \kappa k N,$$

$$N = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z}, \quad L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1},$$

$$F_3 = \zeta_1 N_1 + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + N_2 + \kappa k N_3,$$

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2},$$

$$N_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left( \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right),$$

$$N_3 = \zeta_1 N_4 + \frac{1}{2} \zeta_2^2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \zeta_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2} + N_5,$$

$$N_4 = \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_1}, \quad N_5 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1},$$

$$L_3 = \zeta_1 N_6 - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2,$$

$$N_6 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3}, \quad F_2^0 = -\kappa k \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

$$F_3^0 = -\kappa k \left[ \zeta_1 N_7 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) \right],$$

$$N_7 = \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}, \quad G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}.$$

Слагаемые  $F_2^0, F_3^0$  отвечают за нелинейность ускорения вертикальных смещений упругой продольно сжатой пластинки.

**4. Асимптотические выражения для возвышения поверхности бассейна и потенциала скорости движения жидкости.** Уравнения (7)–(11) выведены для общего случая неустановившихся колебаний конечной амплитуды. Решение этих уравнений для случая нелинейного взаимодействия двух волновых гармоник конечной амплитуды, первое приближение которого задано в виде

$$\zeta_1 = \cos \theta + a_1 \cos 2\theta, \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2),$$

было получено в [21]. Здесь  $T_1$  и  $T_2$  — две медленно меняющиеся по сравнению с  $t = T_0$  переменные,  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $T_2 = \varepsilon^2 t$ , где  $\varepsilon$  малое, но конечное,  $\beta = 0$  при  $t = 0$ .

Выражения для определения возвышения поверхности пластинка—жидкость  $\zeta$  и потенциала скорости движения жидкости  $\varphi$  в размерных величинах до величин третьего порядка малости с учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки представим следующим образом:

$$\zeta = a \cos \theta + aa_1 \cos 2\theta + (a^2 k a_{23} + a^3 k^2 a_{33}) \cos 3\theta + (a^2 k a_{24} + a^3 k^2 a_{34}) \cos 4\theta + a^3 k^2 a_{35} \cos 5\theta + a^2 k^2 a_{36} \cos 6\theta, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varphi = a \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} & \left( \frac{\tau}{\operatorname{sh} H} \operatorname{ch}(z+H) \sin \theta + b_{12} \operatorname{ch} 2(z+H) \sin 2\theta \right) + \\ & + a^2 \sqrt{\kappa g} (b_{23} \operatorname{ch} 3(z+H) + b_{24} \operatorname{ch} 4(z+H) \sin 4\theta + b_{20} t) + \\ & + a^3 k \sqrt{\kappa g} (b_{33} \operatorname{ch} 3(z+H) \sin 3\theta + b_{34} \operatorname{ch} 4(z+H) \sin 4\theta + \\ & + b_{35} \operatorname{ch} 5(z+H) \sin 5\theta + b_{36} \operatorname{ch} 6(z+H) + b_{30} t), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\theta = kx + \sigma t, \quad \sigma = \sqrt{\kappa g} (\tau + ak\sigma_1 + a^2 k^2 \sigma_2), \quad (14)$$

где  $a$  — амплитуда начальной гармоники.

Выражение для амплитуды второй взаимодействующей гармоники найдено в виде [21]

$$a_1 = \pm \left( \frac{\mu_2 r_1}{4r_2 (2\tau^2 \operatorname{cth} 2H + 4\tau^2 \kappa k + \mu_2) (1 + 2\kappa k \operatorname{th} 2H)} \right)^{1/2},$$

в котором

$$r_1 = \left( 2 \operatorname{cth} H + \operatorname{th} 2H \left( \operatorname{cth} H \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + 3\kappa k \right) - \frac{5}{2} \right) \right) (\tau^2 (\operatorname{cth} H + \kappa k) + \mu_1),$$

$$r_2 = \tau^2 \left( \frac{1}{2} + \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \kappa k \left( \operatorname{cth} 2H - \frac{5}{2} \operatorname{cth} H \right) \right) + \mu_1 \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + \operatorname{cth} 2H \right),$$

$$\tau^2 = (1 - Q_1 k^2 + D_1 k^4) (1 + \kappa k \operatorname{th} H)^{-1} \operatorname{th} H, \quad \mu_i = 1 - i^2 Q_1 k^2 + i^4 D_1 k^4, \quad i = 1, \dots, 2.$$

Все величины для формул (12)–(14) известны [21], но из-за громоздкости не приводятся. Здесь индекс 1 у латинских символов  $x, z, t$  и знак звездочки у греческих  $\zeta$  и  $\varphi$  опущены. Отметим, что по (12), (13) можно определить волновое возмущение и без учета нелинейности вертикальных смещений упругой пластинки в (8), принимая во внимание, что  $F_2^0 = F_3^0 = 0$ .

**5. Анализ результатов.** Найденное решение справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волнового числа  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , причем  $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$ .

Увеличение  $Q_1$  приводит к росту значений  $k_i$  при фиксированных  $h, E$ . С утолщением пластинки величина  $k_i$  снижается при постоянных  $E, Q_1$ . Уменьшение модуля упругости при фиксированных  $h$  и  $Q_1$  увеличивает значения  $k_i$  [21].

Для количественной оценки фазовой структуры волнового возмущения предполагалась упругая продольно сжатая ледовая пластинка со значениями модуля упругости  $E = 10^9 \sim 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициента Пуассона  $\nu = 0.34$ , плотности  $\rho_1/\rho = 0.87$ . Продольное сжимающее усилие выбиралось при условии  $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ , необходимом для устойчивости ледяной пластинки [8, 23].

Профиль возвышения поверхности пластинка—жидкость, рассчитанный по (12), в зависимости от длины волны начальной гармоники при  $t = 0$  представлен на рис. 1. Здесь  $2\pi/3 \cdot 10^3 \leq \lambda \leq \pi \cdot 10^3$  м,  $H = 100$  м,  $h = 1.2$  м,  $a = 1.5$  м,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $Q_1 = 1.5\sqrt{D}$ . Из рис. 1, а видно, что с увеличением длины волны начальной гармоники усиливается проявление высших гармоник в ложбинах между гребнями  $\zeta(x)$  ( $a_1 > 0$ ). Изменение знака амплитуды второй взаимодействующей гармоники существенным образом преобразует профиль возвышения поверхности (рис. 1, б). При  $a_1 < 0$  изменяется структура гребня и ложбины сформированного возмущения. К примеру, заостренный гребень становится двугорбым, с расширяющимся прогибом в сторону увеличения длины волны.

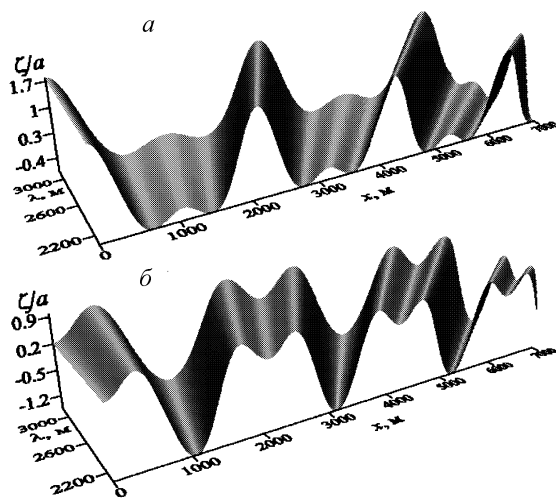


Рис. 1. Профиль волновой поверхности пластинка—жидкость как функция длины волны начальной гармоники при  $a_1 > 0$  (а) и  $a_1 < 0$  (б) в случае  $H = 100$  м,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $Q_1 = 1.5\sqrt{D}$ ,  $h = 1.2$  м,  $a = 1.5$  м

Зависимость частоты колебаний  $\sigma$  волнового возмущения (14), формируемого при нелинейном взаимодействии волновых гармоник, от волнового числа при  $a = 1$  м,  $H = 100$  м,  $h = 1$  м,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $Q_1 = 0$  и  $Q_1 = 1.5\sqrt{D}$  для случаев  $a_1 > 0$  и  $a_1 < 0$  представлена на рис. 2. Сплошные линии на рисунке построены без учета нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки, а штриховые — с учетом ( $F_2^0 \neq 0, F_3^0 \neq 0$ ).

Поведение представленных кривых для значений волнового числа из диапазона  $k > k_1$  показывает, что при заданных начальных условиях влияние учета нелинейности ускорения вертикальных смещений продольно сжатой упругой пластинки замет-

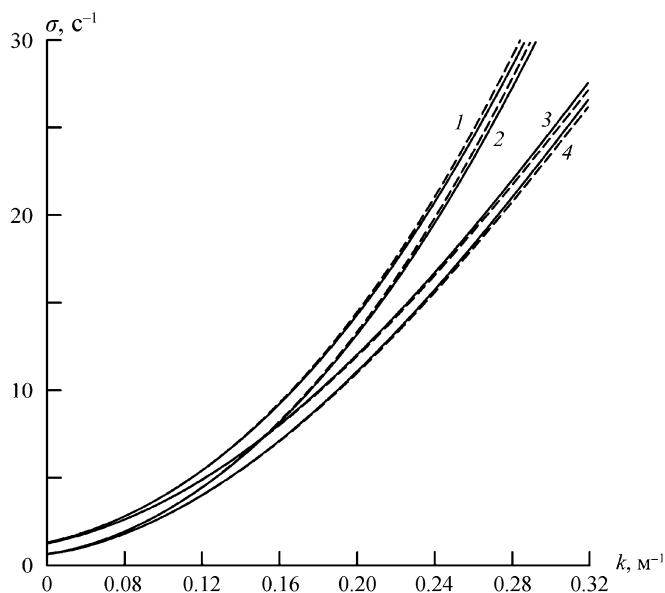


Рис. 2. Распределение частоты колебаний по волновому числу при  $h = 1$  м,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $Q_1 = 0$  (1, 3),  $Q_1 = 1.5\sqrt{D}$  (2, 4) с учетом нелинейности ускорения вертикального смещения пластинки (штриховая линия) и без него (сплошная линия)  
1, 2 —  $a_1 > 0$ ; 3, 4 —  $a_1 < 0$ .

но проявляется в случае глубокой воды ( $kH \gg 1$ ). При  $a_1 > 0$  (кривые 1, 2) оно проявляется в увеличении значения частоты колебаний (штриховая линия), а при  $a_1 < 0$  (кривые 3, 4) — в ее уменьшении. С ростом длины волны начальной гармоники влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки понижается. Наличие сжимающего усилия ( $Q_1 \neq 0$ ) проявляется в снижении значения частоты колебания волнового возмущения в сравнении с частотой, полученной при  $Q_1 = 0$ , как для  $a_1 > 0$ , так и для  $a_1 < 0$ .

Рассмотрим распределение частоты колебаний (14) по волновому числу в линейном случае (рис. 3) и ее нелинейные приближения порядков  $\varepsilon$  (рис. 4) и  $\varepsilon^2$  (рис. 5). На рис. 3  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $H = 100$  м. Кривые 1, 2 получены при  $h = 1$  м, а 3, 4 — при  $h = 0.5$  м. Для кривых 1, 3  $Q_1 = 0$ , а для 2, 4  $Q_1 = 1.5\sqrt{D}$ . Видно, что возрастание толщины льда приводит к увеличению частоты в линейном приближении. Наличие продольного сжатия уменьшает значения частоты колебаний. В случае  $kH \ll 1$  влияние толщины льда и сжимающего усилия существенно ослабевает.

На рис. 4 для случаев  $a_1 > 0$  (кривые 1, 2) и  $a_1 < 0$  (кривые 3, 4) представлено распределение нелинейного приближения частоты колебаний (14) порядка  $\varepsilon$  (без учета множителя  $\varepsilon = ak$ ) по  $k$  при обозначениях, как и на рис. 2. Из анализа рисунка следует, что при  $a_1 > 0$  влияние учета нелинейности вертикального ускорения растет с увеличением  $k$ , т. е. с уменьшением длины волны. Наличие продольного сжимающего усилия проявляется в снижении значения  $\sigma_1$ . Оно понижается и при уменьшении толщины ледовой пластинки. При  $a_1 < 0$  величина  $\sigma_1$  остается прежней, однако знак изменится на противоположный [21].

Рисунок 5 иллюстрирует зависимость сдвиговой компоненты частоты колебаний (14) второго порядка малости от волнового числа при  $a_1 > 0$  (кривые 1, 2) и  $a_1 < 0$

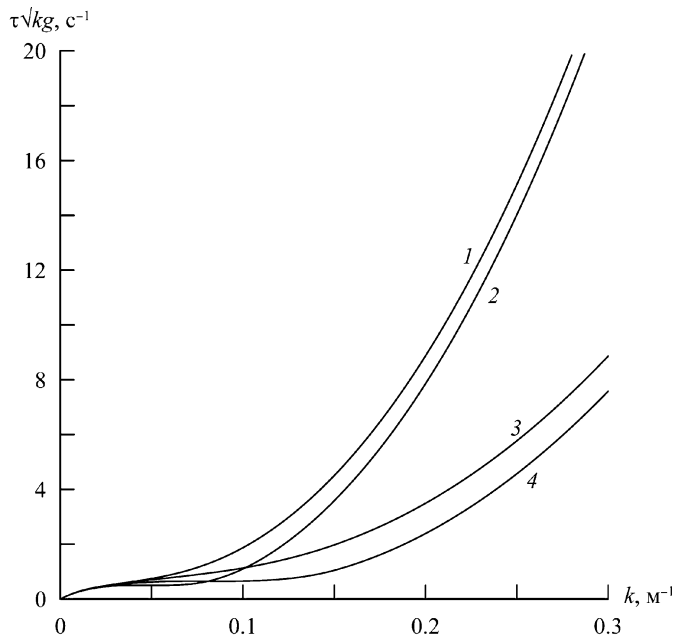


Рис. 3. Распределение частоты колебаний по волновому числу в линейном случае при  $h = 1$  м (1, 2) и  $h = 0.5$  м (3, 4),  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $Q_1 = 0$  (1, 3),  $Q_1 = 1.5\sqrt{D}$  (2, 4)

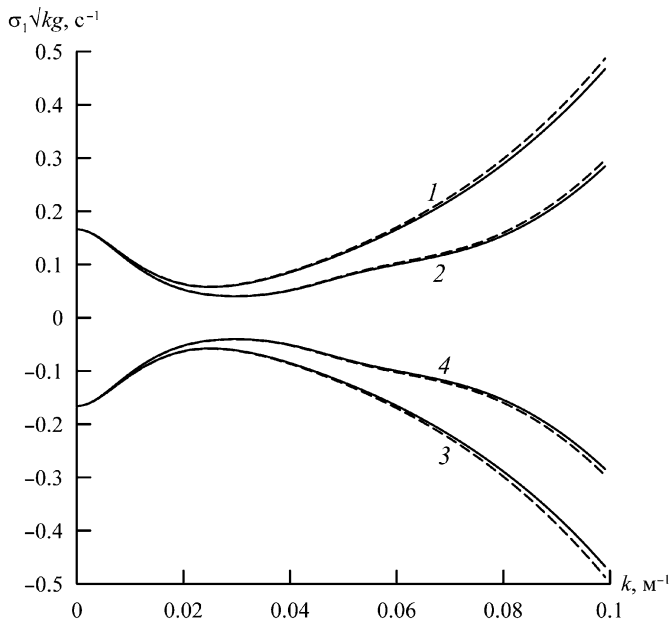


Рис. 4. Распределение сдвиговой компоненты частоты колебаний в первом приближении по волновому числу для случаев  $a_1 > 0$  (1, 2) и  $a_1 < 0$  (3, 4) при  $h = 1$  м,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $Q_1 = 0$  (1, 3),  $Q_1 = 1.5\sqrt{D}$  (2, 4) с учетом нелинейности ускорения вертикального смещения пластинки (штриховая линия) и без него (сплошная линия)



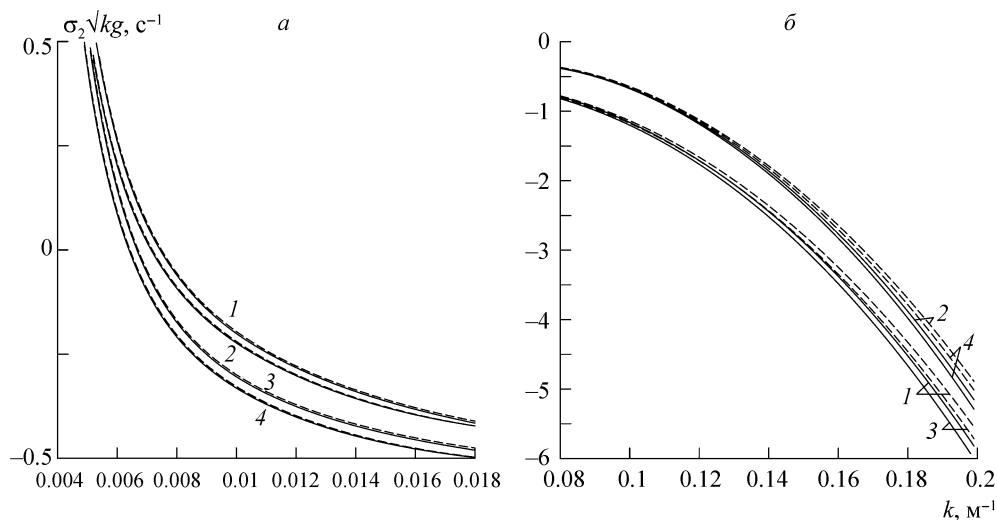


Рис. 5. Распределение сдвиговой компоненты частоты колебаний второго порядка малости по волновому числу при  $k < k_4$  (а) и  $k > k_1$  (б),  $h = 1$  м,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $Q_1 = 0$  (1, 3),  $Q_1 = 1.5\sqrt{D}$  (2, 4) с учетом нелинейности ускорения вертикального смещения пластинки (штриховая линия) и без него (сплошная линия)  
1, 2 —  $a_1 > 0$ ; 3, 4 —  $a_1 < 0$ .

(кривые 3, 4) для  $k < k_4$  (рис. 5, а) и  $k > k_1$  (рис. 5, б). Обозначения для рис. 5 те же, что и для рис. 2. Из рис. 5 видно, что в диапазоне  $k < k_4$  существует такое волновое число  $k_\sigma$ , при переходе через которое знак  $\sigma_2$  — компоненты порядка малости  $\varepsilon^2$  — меняется с плюса на минус как при  $Q_1 = 0$  [20], так и при  $Q \neq 0$ . Для области  $k < k_\sigma$  учет нелинейности ускорения вертикальных смещений продольно сжатой упругой пластинки незначительно увеличивает величину модуля компоненты, а для области  $k_\sigma < k < k_4$  уменьшает. Влияние продольного сжимающего усилия сказывается в увеличении абсолютной величины сдвиговой компоненты в области  $k_\sigma < k < k_4$ . Изменение знака второй взаимодействующей гармоники с плюса на минус проявляется также в росте абсолютного значения  $\sigma_2$  при одинаковой длине волны.

При  $k > k_1$  знак  $\sigma_2$  отрицательный в диапазоне рассмотренных значений  $k$ . Учет нелинейности ускорения вертикальных смещений продольно сжатой упругой пластинки уменьшает модуль  $\sigma_2$  при фиксированной величине  $k$ . Наличие сжимающего усилия как при  $a_1 > 0$ , так и при  $a_1 < 0$  также уменьшает абсолютное значение сдвиговой компоненты второго порядка малости при заданном модуле упругости  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>. Отметим, что и снижение толщины льда ведет к уменьшению модуля  $\sigma_2$  при заданных начальных условиях.

**6. Заключение.** В результате проведенного исследования выполнен анализ фазовых характеристик колебаний, формируемых при нелинейном взаимодействии двух прогрессивных поверхностных волновых гармоник в бассейне с плавающей продольно сжатой упругой пластинкой. Определено, что с увеличением длины волны влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки уменьшается. Наличие сжимающего усилия проявляется в снижении частоты колебания волнового возмущения в сравнении с полученной при отсутствии продольного сжатия как при положительном, так и отрицательном знаке амплитуды второй взаимодействующей гармоники.

ки. Для сдвиговой компоненты частоты первого порядка малости при положительном знаке амплитуды второй взаимодействующей гармоники наличие продольного сжимающего усилия также проявляется в уменьшении ее значения. При смене знака амплитуды величина сдвиговой компоненты остается прежней, однако ее знак изменится на противоположный. Для сдвиговой компоненты второго порядка существует такое волновое число, при переходе через которое ее знак меняется с плюса на минус как при сжимающем усилии, так и без него.

## Литература

1. Хейсин Д. Е. Нестационарная задача о колебаниях бесконечной пластинки, плавающей на поверхности идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 163–167.
2. Bukatov A. E., Cherkesov L. V. Transient vibrations of an elastic plate floating on a liquid surface // Intern. Appl. Mechanics. 1970. Vol. 6. N 8. P. 878–883. <https://doi.org/10.1007/BF00889434>
3. Tkachenko V. A., Yakovlev V. V. Unsteady bending-gravitational waves in fluid-plate system // Intern. Appl. Mechanics. 1984. Vol. 20. N 3. P. 266–271. <https://doi.org/10.1007/BF00883145>
4. Daffy D. G. The response of floating ice to a moving, vibrating load // Cold Regions Science and Technology. 1991. Vol. 20. P. 51–64. [https://doi.org/10.1016/0165-232X\(91\)90056-M](https://doi.org/10.1016/0165-232X(91)90056-M)
5. Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D., Langhorne P. J. Moving loads on ice plates. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. 236 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1649-4>
6. Sturova I. V. Wave generation by an oscillating submerged cylinder in the presence of a floating semi-infinite elastic plate // Fluid Mech. 2014. Vol. 49. N 4. P. 504–514. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040103>
7. Batyaev E. A., Khabakhpashva T. I. Hydroelastic waves in a channel covered with a free ice sheet // Fluid Mech. 2015. Vol. 50. N 6. P. 775–788. <https://doi.org/10.1134/S0015462815060071>
8. Bukatov A. E. Effect of longitudinal compression on transient vibrations of an elastic plate floating on the surface of a liquid // Intern. Appl. Mechanics. 1981. Vol. 17. N 1. P. 75–79. <https://doi.org/10.1007/BF00885650>
9. Пожусев В. И., Полякова Н. П. Нестационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на ледяной покров // Строительная механика и расчет сооружений. 1990. № 6. С. 46–50.
10. Bukatov A. E., Zharkov V. V. Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. Pt 1. Surface waves // Intern. J. Offshore and Polar Engineering. 1997. Vol. 7. N 1. P. 1–12.
11. Kerr A. D. The critical velocities of a moving on a floating ice plate that is subjected to in-plane forces // Cold Regions Science and Technology. 1983. Vol. 6. P. 267–276.
12. Schulkes R. M. S. M., Hosking R. J., Sneyd A. D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 180. P. 297–318. <https://doi.org/10.1017/S0022112087001812>
13. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Propagation of surface wave of finite amplitude in a basin with floating broken ice // Intern. J. Offshore and Polar Engineering. 1999. Vol. 9. N 3. P. 161–166.
14. Gladunand O. M., Fedosenko V. S. Nonlinear steady-state oscillations of an elastic plate floating on the surface of a liquid of finite depth // Fluid Mech. 1989. Vol. 24. N 3. P. 448–455. <https://doi.org/10.1007/BF01051589>
15. Гольдштейн П. В., Марченко А. В. О длинных волнах в системе ледяной покров—жидкость при наличии ледового сжатия // Электрофизические и физико-механические свойства льда: сб. науч. трудов ААНИИ. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. С. 188–205.
16. P'ichev A. T. Soliton-like structures on a water-ice interface // Russian Mathematical Surveys. 2015. Vol. 70. N 6. P. 1051–1103. <https://doi.org/10.1070/RM2015v070n06ABEH004974>
17. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Finite-amplitude waves in a homogeneous fluid with a floating elastic plate // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2009. Vol. 50. N 5. P. 785–791. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0107-x>
18. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Nonlinear oscillations of a floating elastic plate // Intern. Appl. Mechanics. 2011. Vol. 46. N 10. P. 1139–1146. <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0406-9>
19. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Interaction of surface waves in a basin with floating broken ice // Physical Oceanography. 2003. N 6. P. 313–332. <https://doi.org/10.1023/B:POCE.0000013230.35798.a4>
20. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Phase structure of fluid fluctuations with a floating elastic ice plate under nonlinear interaction of progressive surface waves // Physical Oceanography. 2018. [e-journal] Vol. 25(1). P. 3–17. <https://doi.org/10.22449/1573-160X-2018-1-3-17>

21. Bukatov A. A. Nonlinear vibrations of a floating longitudinally compressed elastic plate in the interaction of wave harmonics of finite amplitude // *Fluid Dynamics*. 2019. Vol. 54. N 2. P. 194–204. <https://doi.org/10.1134/S0015462819020046>

22. Найфе А. Х. Методы возмущений / пер. с англ.; под ред. Ф. Л. Черноушко (*Nayfeh A. H. Perturbation methods*). М.: Мир, 1976. 455 с.

23. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоздат, 1967. 215 с.

Статья поступила в редакцию 20 января 2020 г.

Статья принята к печати 13 августа 2020 г.

К о н т а к т н а я   и н ф о р м а ц и я :

Букатов Антон Алексеевич — канд. физ.-мат. наук; [newisland@list.ru](mailto:newisland@list.ru)

## Analysis of the phase structure of fluid vibrations with floating longitudinally compressed elastic plate in nonlinear interaction of the surface progressive waves\*

A. A. Bukatov

Marine Hydrophysical Institute of the Russian Academy of Sciences, 2, Kapitanskaya ul., Sevastopol, 299011, Russian Federation

**For citation:** Bukatov A. A. Analysis of the phase structure of fluid vibrations with floating longitudinally compressed elastic plate in nonlinear interaction of the surface progressive waves. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 226–237. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.301> (In Russian)

Based on the asymptotic expansions obtained by the multi-scale method up to the third order of smallness for the potential velocity of liquid particles and the plate-fluid surface elevation, the dispersion properties of the vibrations generated by the interaction of progressive surface wave harmonics of finite amplitude are analyzed in the article. The effect of nonlinearity of acceleration of vertical displacements of an elastic plate on the dispersion characteristics of wave disturbances is studied. The dependence of the vibration frequency is estimated by taking into account the nonlinearity of the first and second approximations values, the plate thickness, and the longitudinal compressive force. It is shown that the sign of the amplitude of the second interacting harmonic and the nonlinearity of the acceleration of vertical displacements of the longitudinally compressed elastic plate affect the vibration phase. It was found that with a decrease in the wavelength of the initial harmonic, the influence of the plate's nonlinearity vertical acceleration is enhanced. The presence of compressive force is manifested in a decrease in the frequency of vibrations of the wave disturbance in comparison with the frequency obtained in the absence of longitudinal compression, both with a positive and negative sign of the second interacting harmonic amplitude.

*Keywords:* ice plate fluctuations, waves of finite amplitude, nonlinear interaction of waves, flexural deformation of a plate, longitudinal compressive force, phase characteristics.

## References

1. Kheisin D. E. Nestatsionarnaya zadacha o kolebaniyakh beskonechnoy plastinki, plavayushchey na poverkhnosti ideal'noy zhidkosti [Nonstationary problem of infinite plate fluctuations floating on the ideal fluid surface]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i Mashinostroyeniye* [News of AN USSR. Mechanics and Machine-building], 1962, no. 1, pp. 163–167. (In Russian)

2. Bukatov A. E., Cherkosov L. V. Transient vibrations of an elastic plate floating on a liquid surface. *Intern. Appl. Mechanics*, 1970, vol. 6, no. 8, pp. 878–883. <https://doi.org/10.1007/BF00889434>

3. Tkachenko V. A., Yakovlev V. V. Unsteady bending-gravitational waves in fluid-plate system. *Intern. Appl. Mechanics*, 1984, vol. 20, no. 3, pp. 266–271. <https://doi.org/10.1007/BF00883145>

\* This work is carried out within the framework of the State Order N 0827-2019-0003.

4. Daffy D. G. The response of floating ice to a moving, vibrating load. *Cold Regions Science and Technology*, 1991, vol. 20, pp. 51–64. [https://doi.org/10.1016/0165-232X\(91\)90056-M](https://doi.org/10.1016/0165-232X(91)90056-M)
5. Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D., Langhorne P. J. *Moving loads on ice plates*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1996, 236 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1649-4>
6. Sturova I. V. Wave generation by an oscillating submerged cylinder in the presence of a floating semi-infinite elastic plate. *Fluid Mech.*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 504–514. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040103>
7. Batyaev E. A., Khabakhpasheva T. I. Hydroelastic waves in a channel covered with a free ice sheet. *Fluid Mech.*, 2015, vol. 50, no. 6, pp. 775–788. <https://doi.org/10.1134/S0015462815060071>
8. Bukatov A. E. Effect of longitudinal compression on transient vibrations of an elastic plate floating on the surface of a liquid. *Intern. Appl. Mechanics*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 75–79. <https://doi.org/10.1007/BF00885650>
9. Pozhuev V. I., Polyakova N. P. Nestatsionarnaya zadacha o vozdeystvii podvizhnoy nagruzki na ledyanoy pokrov [Nonstationary problem about effect of a moving load on an ice cover]. *Stroitel'nay mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and calculation of structures], 1990, no. 6, pp. 46–50. (In Russian)
10. Bukatov A. E., Zharkov V. V. Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. Pt 1. Surface waves. *Intern. J. Offshore and Polar Engineering*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 1–12.
11. Kerr A. D. The critical velocities of a moving on a floating ice plate that is subjected to in-plane forces. *Cold Regions Science and Technology*, 1983, vol. 6, pp. 267–276.
12. Schulkes R. M. S. M., Hosking R. J., Sneyd A. D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 180, pp. 297–318. <https://doi.org/10.1017/S0022112087001812>
13. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Propagation of surface wave of finite amplitude in a basin with floating broken ice. *Intern. J. Offshore and Polar Engineering*, 1999, vol. 9, no. 3, pp. 161–166.
14. Gladunand O. M., Fedosenko V. S. Nonlinear steady-state oscillations of an elastic plate floating on the surface of a liquid of finite depth. *Fluid Mech.*, 1989, vol. 24, no. 3, pp. 448–455. <https://doi.org/10.1007/BF01051589>
15. Gol'dshtein R. V., Marchenko A. V. O dlinnykh volnakh v sisteme ledianoi pokrov—zhidkost pri nalichii ledovogo szhatiia [Long waves in the ice–fluid system subject to ice pressure]. *Electrical and Mechanical Properties of Ice*. Collection of scientific work of AANII. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1989, pp. 188–205. (In Russian)
16. Il'ichev A. T. Soliton-like structures on a water-ice interface. *Russian Mathematical Surveys*, 2015, vol. 70, no. 6, pp. 1051–1103. <https://doi.org/10.1070/RM2015v070n06ABEH004974>
17. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Finite-amplitude waves in a homogeneous fluid with a floating elastic plate. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 5, pp. 785–791. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0107-x>
18. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Nonlinear oscillations of a floating elastic plate. *Intern. Appl. Mechanics*, 2011, vol. 46, no. 10, pp. 1139–1146. <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0406-9>
19. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Interaction of surface waves in a basin with floating broken ice. *Physical Oceanography*, 2003, no. 6, pp. 313–332. <https://doi.org/10.1023/B:POCE.0000013230.35798.a4>
20. Bukatov A. E., Bukatov A. A. Phase structure of fluid fluctuations with a floating elastic ice plate under nonlinear interaction of progressive surface waves. *Physical Oceanography*, 2018, [e-journal] vol. 25(1), pp. 3–17. <https://doi.org/10.22449/1573-160X-2018-1-3-17>
21. Bukatov A. A. Nonlinear vibrations of a floating longitudinally compressed elastic plate in the interaction of wave harmonics of finite amplitude. *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 194–204. <https://doi.org/10.1134/S0015462819020046>
22. Nayfeh A. H. *Perturbation methods*. New York, Wiley–Interscience Publ., 1973 (Russ. ed.: Nayfeh A. N. *Metody vozmushchenii*. Moscow, Mir Publ., 1976, 455 p.)
23. Kheisin D. Y. *Dinamika ledianogo pokrova* [Dynamics of floating ice covers]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1967, 215 p. (In Russian)

Received: January 20, 2020.

Accepted: August 13, 2020.

#### Author's information:

Anton A. Bukatov — PhD in Physics and Mathematics; newisland@list.ru