САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Афонин
Сергей Сергеевич

Феноменологические подходы к спектроскопии легких мезонов

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физ.-мат. наук
А. А. Андрианов

Санкт-Петербург
2012

Содержание

Введение

Изучение адронных резонансов является крайне важным для глубокого понимания динамики сильных взаимодействий и поэтому составляет одну из основных задач физики элементарных частиц. Поскольку устойчивая адронная материя состоит из лёгких u и d кварков, образованные из них резонансы представляют особый интерес. В настоящее время накоплено много новой экспериментальной информации по лёгким мезонам и барионам, для которой пока не найдено общепринятого теоретического описания из-за недостаточного понимания физики образования этих резонансов, определяющей их характеристики — массы, квантовые числа, константы распада, полные и парциальные ширины. Основная трудность состоит в том, что фундаментальная теория сильных взаимодействий — квантовая хромодинамика (КХД), — лежащая в основе этой физики, оказывается в режиме сильной связи на масштабе масс лёгких адронов, в результате чего исходные динамические переменные лагранжиана КХД — токовые кварки и безмассовые глюоны — не являются физическими степенями свободы. В таком режиме стандартная теория возмущений не применима, а универсальных непертурбативных методов до сих пор не разработано. Весьма многообещающим выглядит развитие решеточных вычислений, однако их применение пока сильно ограничено. Эта ситуация привела к бурному развитию различных модельных подходов, в рамках которых вычисление физических характеристик адронов намного проще.

Модели для сильных взаимодействий призваны описывать ряд важнейших непертурбативных явлений. Прежде всего известно, что массы u и d кварков на масштабах энергий рождения типичных лёгких адронов, 1–2.5 ГэВ, составляют несколько МэВ, что весьма мало по сравнению с массами составленных из них адронов. Таким образом, этими массами можно с хорошей точностью пренебречь в задачах спектроскопии лёгких адронов. В получающемся безмассовом пределе, классический лагранжиан КХД обладает киральной инвариантностью, которая, однако, не является симметрией физического вакуума. Это ведёт к спонтанному нарушению киральной симметрии (НКС) сильных взаимодействий, в результате чего она понижается до изоспиновой симметрии, и одновременно возникают безмассовые частицы — голдстоуновские бозоны. Последние отождествляются с π-мезонами. В результате данного эффекта, линейно-реализованная киральная симметрия, которая приводила бы к вырождению киральных партнёров по чётности, не видна в спектре основных состояний лёгких адронов. Одним из классических примеров является большая относительная разница масс $\rho(770)$-мезона и $a_1(1230)$-мезона.

Однако есть основания полагать, что эффекты НКС играют решающую роль при энергиях ниже 1 ГэВ, то есть, главным образом, для основных состояний адронов. Если рассматривать возбужденные состояния при достаточно высоких энергиях, то, как часто считается, явление НКС становится несущественным. Поэтому можно ожидать, что для достаточно высоких возбуждений адронов, составленных из лёгких кварков, должна наблюдаться приблизительная вырожденность по массе резонансов с противоположными пространственными чётностями. Экспериментальные данные действительно демонстрируют многочисленные случаи такого вырождения. Однако есть и важные исключения систематического характера, в результате чего мнения специалистов расходятся относительно интерпретации физики, лежащей в основе этих данных.

Важной родственной проблемой, привлекающей всё больше внимания в последние годы, является описание общих закономерностей поведения спектров масс высших возбуждений лёгких адронов. Эти возбуждения можно разделить на два типа — спиновые и радиальные (имеющие идентичные квантовые числа, но более тяжёлые массы). На описание последних из первых принципов вряд ли можно надеяться даже в рамках решёточных вычислений. Все высшие возбуждения лежат выше 1 ГэВ, поэтому явление НКС, по-видимому, играет второстепенную роль в генерации масс таких состояний, а на первый план выходит сложная глюодинамика, внутренний механизм которой пока не понятен. Потенциальные модели, довольно успешно применяющиеся для описания тяжёлых кваркониев, малопригодны для вычислений спектральных характеристик лёгких кварккониев, поскольку релятивистские эффекты в последних, по всей вероятности, являются решающими. Различные попытки ввести релятивистские поправки в потенциальные модели с линейно растущим потенциалом имели лишь ограниченный успех (см., например, [1]). Классические эффективные теории поля для КХД, успешно моделирующие физику НКС ниже 1 ГэВ, не приспособлены для описания высших возбуждений адронов в силу своих естественных ограничений по области применимости. Существуют, правда, обобщения модели с локальными четырёх-фермионными взаимодействиями (модели типа Намбу–Йона-Лазинио [2]), позволяющие описывать радиальные возбуждения мезонов. Это достигается либо путём введения дополнительных вершин с производными по полям [3–14], либо вводя нелокальные вершины взаимодействия [15–18]. В частности, в обобщениях первого типа удаётся качественно продемонстрировать сильное снижение роли НКС в формировании масс первых радиальных возбуждений мезонов. Обобщения этого типа на векторный и аксиально-векторный каналы, а также включение странного кварка составили одну из основ кандидатской диссертации автора и в данной диссертации затрагиваться не будут. В общем и целом, во всех таких обобщениях модели Намбу–Йона-Лазинио удавалось эффективно описать первые радиальные возбуждения скалярных и векторных частиц, попытки описания вторых, третьих и т.д. радиальных возбуждений, многие из которых хорошо экспериментально установлены [19], приводят в подобных схемах к быстрому росту числа входных параметров, в результате чего теряется предсказательность моделей.

Серьёзным экспериментальным прорывом последнего времени явился эксперимент коллаборации Crystal Barrel по протон-антипротонной аннигиляции на лету, выполненном в ЦЕРНе. Обработка его данных показала [20–22], что в области энергий 1.9–2.4 ГэВ имеются несколько десятков лёгких нестранных мезонных резонансов. Наиболее важным феноменологическим следствием анализа данных оказалось следование квадратов масс состояний закону линейных траекторий как по спину, так и по радиальному квантовому числу. Первое означает линейность траекторий Редже (что подозревалось и ранее), а второе — эквидистантность реджевских траекторий или, другими словами, линейность радиальных реджевских траекторий, на которых квадрат массы есть функция не спина, а радиального квантового числа. Получающийся спектр качественно очень похож на типичный спектр, даваемый струнами типа Намбу-Гото и возникающий в старых дуальных амплитудах типа Венециано [23]. Такое поведение спектра мезонов является весомым аргументов в пользу того, что КХД допускает эффективное струнное описание, по крайней мере, на масштабе энергий выше 1 ГэВ. Модели адронных струн имеют давнюю историю. Обычно в них предполагается, что, в случае мезонов, кварк-антикварковая пара соединена трубкой хромоэлектрического поля, концентрирующей в себе почти всю массу мезона. Поперечные размеры этой трубки считаются много меньшими её длины, что и позволяет приближённо рассматривать такую трубку как струну [24–27]. Однако полностью самосогласованной модели адронной струны построено не было, к тому же рецепт квантования подобных протяжённых объектов неизвестен.

Ввиду сложности обсуждаемой задачи, нужны какие-то существенные упрощения, не меняющие суть дела. Такое упрощение было придумано 'т Хофтом [28]: если взять предел большого числа цветов N_c, то динамика КХД значительно упрощается. В предположении наличия конфайнмента в полученной таким образом теории поля, можно показать, что вытекающая физика качественно и количественно отражает реальный мир в достаточной степени, чтобы этот предел принять за хорошее нулевое приближение, которое можно систематическим образом улучшать поправками по обратным степеням N_c. В нулевом порядке такого разложения выживают только планарные графики, то есть лежащие на одной плоскости, поэтому предел больших N_c часто называют планарным. Геометрически это разложение имеет интересные параллели с теорией струн [29], вследствие чего эквивалентное струнное описание обычно надеются найти именно для планарной КХД. Для нас важнейшим следствием планарного предела является то, что, в предположении конфайнмента, массы мезонов не зависят от N_c в главном порядке, тогда как константы распада и взаимодействия подавлены обратными степенями N_c. Таким образом, мезоны в планарном пределе становятся узкими и слабовзаимодействующими. Можно также показать, что предположение асимптотической свободы в этом пределе предсказывает наличие бесконечного числа мезонных состояний в каждом канале с фиксированными квантовыми числами. Все они дают вклад в функции Грина (корреляционные функции), построенные из билинейных кварковых операторов с квантовыми числами, соответствующими данному каналу. Другое упрощение происходит в пределе высоких энергий, где эти же функции Грина даются свободной кварковой петлёй в ведущем порядке теории возмущений. С другой стороны, с помощью операторного разложения, к кварковой петле можно ввести непертурбативные поправки по обратным степеням большого евклидова импульса [30]. Отсюда напрашивается возможный метод вычисления спектральных характеристик мезонов: нужно сравнить при высоких энергиях резонансное представление корреляционных функций с их выражением из теории возмущений и операторного разложения. Эта идея лежит в основе правил сумм Шифмана-Вайнштейна-Захарова [30]. В них, однако, рассматривался только один резонанс в каждом канале, а дальше вводилось обрезание. В планарном пределе появляется возможность рассматривать бесконечное число резонансов, что позволяет вычислять спектральные характеристики радиальных возбуждений мезонов с точностью, типичной для предела большого числа цветов — порядка 10–20% [31–44]. Стоит отметить, что эквивалентность (часто именуемая дуальность) обмена бесконечным числом узких мезонов и пертурбативного континуума КХД, состоящего из кварков и глюонов, была предложена до введения планарного предела [45–47]. Упомянем также, что подобная кварк-адронная дуальность была аналитически проверена в двумерной КХД в пределе большого числа цветов [48, 49].

Линейный анзац для спектра масс в некоторых случаях некорректно описывает легчайшие состояния на радиальных реджевских траекториях (особенно в псевдоскалярном канале). По этой причине были предприняты попытки выйти за пределы этого приближения [35, 36]. Предложенные подходы, однако, приводят к несогласованию аналитической структуры двухточечных корреляторов с их операторным разложением. Возникает вопрос, как правильно учесть нелинейные поправки к спектру? Ответ был дан в работах [50–53] при участие автора. Другим вопросом является выяснение физики, стоящей за такими поправками. Выявлению связи поправок с НКС были посвящены работы [54, 55]. Данная тематика составляет первую главу представленной диссертации.

Указанные правила сумм могут иметь многочисленные приложения, часть из которых развита во второй главе диссертации. Например, векторные и аксиально-векторные двухточечные корреляторы связаны с важной величиной — электромагнитной разностью масс π-мезонов [56]. В разное время были предложены различные теоретические подходы к вычислению этой величины [57–68]. В диссертации предложен и развит новый способ — с помощью последовательного учёта радиальных возбуждений мезонов, используя правила сумм [69]. Другими рассмотренными приложениями являются вывод соотношения между кварковым и глюонным конденсатами [70], считающиеся независимыми параметрами в операторном разложении, и новый способ вычисления аксиальной константы [71] конституэнтной кварковой модели Джоржи и Манохара [72] (часто называемой киральной кварковой моделью).

В диссертации также затронута следующая задача. Довольно давно Мигдал [74] решил проблему об аппроксимации пертурбативной асимптотики двухточечного векторного коррелятора (так называемый логарифм партонной модели) бесконечной суммой мезонных полюсов наилучшим способом в смысле минимальности отклонений. Полученный спектр оказался линейным по массам с экспоненциально малыми поправками по импульсу к пертурбативному логарифму. Похожий результат был недавно переоткрыт в рамках голографического подхода к КХД [75]. Как уже упоминалось, в настоящее время накоплено много теоретических и феноменологических указаний на то, что с хорошей точностью спектр является линейным по квадратам масс, т.е. имеет струноподобную форму. Кроме того, согласно операторному разложению для двухточечных корреляторов [30], поправки к пертурбативному логарифму должны спадать полиномиально, а не экспоненциально. С другой стороны, насыщая двухточечные корреляторы линейным спектром по квадратам масс, можно корректно воспроизвести аналитическую структуру операторного разложения (полиномиальные поправки). Возникает интересный вопрос: какой линейный спектр для квадратов масс интерполирует асимптотику корреляторов наилучшим образом? Решение задачи в рамках планарных правил сумм было предложено автором в работе [76].

Правила сумм являются техническим приёмом, позволяющим связать параметры спектра с КХД, сама же форма спектра постулируется из других соображений. Она диктуется динамикой сильных взаимодействий и, в отсутствии методов её вычисления из фундаментальной теории, может даваться только динамическими моделями. Однако, для построения таких моделей, желательно иметь как можно больше феноменологической информации о глобальной структуре адронного спектра и всех его особенностях поведения в различных областях энергий. Изучению этого вопроса посвящена третья глава диссертации.

Прежде всего, ввиду наблюдения большого количества новых состояний в последние десять лет, спектры стоит исследовать на возможное наличие новых симметрий. Как известно, открытие приближённых симметрий в адронном спектре всегда играло важнейшую роль в установлении структуры адронов и деталей физики сильных взаимодействий. Например, изоспиновая $SU(2)_f$ инвариантность была осознана как векторная часть спонтанно нарушенной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ киральной инвариантности лагранжиана КХД в пределе нулевых токовых масс кварков. Приближённое вырождение изосинглетов с изотриплетами, имеющими такие же прочие квантовые числа (например, ω-мезон и ρ-мезон) было понято как следствие подавления переходов между кварками различных ароматов — так называемые правила Цвейга. Эти правила можно вывести из разложения по обратным степеням N_c, в планарном пределе они становятся точными. Сильное отклонение от этих правил обычно связано с какой-то важной физикой. Например, аксиальная аномалия ведёт к значительному увеличению массы η'-мезона. Стоит отметить, что вырождение изосинглетов с изотриплетами имеет динамическое происхождение, то есть такая симметрия не присутствует на уровне лагранжиана КХД.

Обнаружение многих новых резонансов в последние годы подняло волну интереса к природе наблюдаемых спектральных вырождений [77–85]. В широком смысле, проблему можно сформулировать следующим образом: если набор адронов имеет чётко-выраженную тенденцию к кластеризации состояний возле определённых значений масс, то какая симметрия ответственна за это приближённое вырождение и какая физика ведёт к данной симметрии? Нет необходимости говорить, что правильный ответ на этот вопрос значительно помог бы в понимании физики образования резонансов. Следующим шагом могло бы стать установление динамики, ответственной за величины и знаки тонких расщеплений внутри вырожденных адронных кластеров, однако эта задача уже более сложная и сильно зависит от рассматриваемого канала. Например, массы резонансов могут серьёзно сдвигаться пороговыми эффектами.

На основе компиляции данных из Particle Data Group [19] и Crystal Barrel [20–22], наличие кластеризации в секторе лёгких нестранных мезонов было впервые продемонстрировано и подробно описано в работе автора [79]. Данный анализ составляет один из разделов диссертации. Вкратце, наблюдаемые спиновые и радиальные возбуждения мезонов группируются возле значений масс 1340, 1700, 2000 и 2260 МэВ. Попытки объяснить это явление уже породили большое число работ (см., например, обзор [78]). Ясно, что такое вырождение масс имеет динамическую природу. Спектральные симметрии составных систем, каковыми являются мезоны, обычно трудно предвидеть, исходя из фундаментальной теории, поэтому наблюдаемое вырождение спектра вряд ли можно получить напрямую из КХД, скорее нужно изучать внутреннее строение состояний. Примеры подобного рода хорошо известны в физике. Например, многочисленные случаи симметрий, возникающих в физике твёрдого тела, имеют в своей основе квантовую электродинамику, с другой стороны, они вряд ли могут быть получены, стартуя с лагранжиана фундаментальной теории. Даже в такой простой системе, как классический атом водорода, возникает дополнительное вырождение уровней энергии, связанное с динамическим возникновением $SO(4)$-симметрии, которое впервые описал В.А. Фок [86]. Именно оно ведёт к зависимости энергии возбуждения только от одного числа — главного квантового числа $n = l + n_r + 1$, где l есть угловой момент, а n_r нумерует радиальные возбуждения. Эта симметрия отражает внутреннюю структуру системы и не имеет ничего общего с приближёнными симметриями лагранжиана квантовой электродинамики. В мире адронов мы можем столкнуться с проявлениями подобных динамических симметрий, что, по-видимому, и происходит в действительности. На основе работ автора [87, 88], в диссертации показывается, что у лёгких мезонов возникает такое же главное квантовое число, наличие которого и приводит к наблюдаемой картине вырождения масс.

Недавно появился новый метод исследования спектров лёгких резонансов, мотивированный теорией струн, — так называемый голографический подход. В его основе лежит гипотеза Малдасены [89] о том, что фундаментальные струны определённого типа в низкоэнергетическом приближении могут быть дуальны некоторым калибровочным теориям в четырёхмерном пространстве-времени. Один из примеров такой дуальности утверждает, что теория замкнутых суперструн с киральными безмассовыми фермионами, определённая на десятимерном пространстве, представляющем прямое произведение пятимерной сферы и пятимерного пространства анти-де Ситтера (АдС), в низкоэнергеническом приближении (то есть в приближении супергравитации) эквивалентна известного вида суперсимметричной теории Янга-Миллса в пределе большого числа цветов, определённой на четырёхмерной границе пространства АдС. Причём эта калибровочная теория представляет конформную теорию поля (КТП), данное обстоятельство породило ставшее общепринятым название для обсуждаемой дуальности — гипотеза АдС/КТП соответствия.

Замечательная особенность этой дуальности состоит в том, что четырёхмерная калибровочная теория поля находится в режиме сильной связи, в то время как эквивалентная ей пятимерная теория гравитации является слабосвязной. Отсюда возникает заманчивая перспектива найти мощный непертурбативный метод для решения сильносвязанных теорий Янга-Миллса — нужно отыскать дуальную ей теорию гравитации и работать с последней квазиклассическими методами. Конкретный рецепт получения функций Грина калибровочной теории в этой схеме был предложен Виттеном и независимо Губсером, Клебановым и Поляковым в работах [90, 91]. Поскольку голографический метод позволяет получить теоретический контроль над калибровочными теориями в режиме сильной связи, появляется важнейшая задача обобщения данного метода на физические калибровочные теории, такие как КХД. Первый шаг в этом направлении был сделан Полчинским и Страсслером в работе [92], в которой показано, что пятую координату естественно трактовать как обратный масштаб энергии, а появление масштаба КХД в результате размерной трансмутации можно имитировать введением обрезания пространства АдС по пятой координате — так называемая "жёсткая стенка". Через некоторое время, данная идея была применена к описанию спектра лёгких резонансов и всей низкоэнергетической физики, связанной со спонтанным нарушением киральной симметрии [93–95]. Одним из ключевых моментов в построении пятимерных моделей для сильных взаимодействий является предполагаемое однозначное соответствие между операторами в КХД и пятимерными полями. Это предположение заимствовано из гипотезы АдС/КТП соответствия и диктует массы пятимерных полей. Таким образом, сопоставляя рассматриваемому адрону оператор из КХД, который его интерполирует, можно построить пятимерную модель, описывающую его спектральные характеристики, а также спектр его радиальных возбуждений. При этом последние возникают как калуца-клейновские моды соответствующего пятимерного поля. Однако спектр этих возбуждений в моделях с жёсткой стенкой не имеет реджевской формы. Это послужило главной причиной для введения голографических моделей с "мягкой"стенкой, в которых массовый масштаб возникает за счёт наличия в пятимерном действии дилатонного фона [96].

Дальнейшие исследования в этой области могут оказаться весьма перспективными, независимо от того, имеют ли отношение возникающие модели к оригинальной идее АдС/КТП соответствия или нет. Данным исследованиям посвящена четвёртая и пятая главы диссертации.

Голографический подход работает с планарным пределом КХД, поэтому его применимость к реальной физике с самого начала имеет существенные ограничения. Как следствие, спектр мезонов в АдС/КХД-моделях состоит из бесконечного числа бесконечно узких состояний, в то время как экспериментально видны лишь несколько состояний в каждом канале, они имеют конечную ширину и дискретный спектр постепенно сливается с континуумом. Поэтому одним из следующих шагов в развитии голографического подхода представляется разработка моделей, описывающих конечное число адронов, сливающихся в итоге с континуумом. Автором впервые предложены голографические модели, обладающие этим свойством [97]. Оказывается, что эта проблема связана с задачей построения такой модификации модели с жёсткой стенкой, которая приближённо давала бы реджевский спектр без введения дилатонного фона. В работе автора [98] её во многом удалось решить на пути введения в модель эффектов от вакуумных средних операторов, возникающих в операторном разложении корреляционных функций.

АдС/КХД модели являются гипотетическими конструкциями, поскольку на самом деле неизвестно как надо искать голографическую дуальную модель для реальной КХД. На практике просто заимствуются рецепты из оригинальной идеи АдС/КТП соответствия без каких-либо доказательств. По этой причине имеет смысл разведать также альтернативные пути для построения пятимерных эффективных теорий для сильных взаимодействий [99]. Вероятно главный урок, который можно извлечь из голографического подхода, заключается в том, что в таких эффективных теориях пятая координата играет роль обратного масштаба энергии.

Другим интересным предположением является существование дуальности (соответствия) между операторами в четырёхмерии и полями в пятимерии. Принимая оба этих предположения, автором в диссертации предложен совершенно другой механизм для генерации масс, который выглядит более естественным для теорий поля (по сути, хиггсовский механизм): вместо моделирования спектра в виде калуца-клейновских возбуждений пятимерных полей, определённых в искривлённом компактном пятимерном пространстве, рассматриваются пятимерные поля в плоском бесконечном пространстве, взаимодействующие со скалярным полем, которое приобретает ненулевое вакуумное среднее, зависящее от пятой координаты, то есть от масштаба энергии. Это скалярное поле предполагается дуальным квадрату тензора глюонного поля. Такая конструкция моделирует масштабную аномалию в КХД и генерирует дискретный спектр адронов с конечным числом состояний, переходящий в континуум [100, 101].

Для описания линейного реджевского спектра мезонов в рамках голографического подхода, в соответствующие модели традиционно вводится дилатонный фон, природа происхождения которого остаётся неясной. В диссертации предложен оригинальный способ пролить свет на проблему с помощью переформулировки моделей с дилатонным фоном: специальным преобразованием этот фон можно убрать, а получающийся механизм генерации реджевского спектра переписать как хиггсовский [102]. При этом автоматически исчезает серьёзный недостаток, присущий моделям с дилатонным фоном — предсказание ненулевого вакуумного среднего от локального, калибровочно-инвариантного оператора размерности два, чего в КХД нет.

Применимость голографических моделей, описывающих струноподобный спектр адронов, формально не ограничен. Между тем, при высоких энергиях КХД асимптотически свободна, следовательно, применимость этих моделей не оправдана. Поэтому выглядит разумно попробовать наложить ультрафиолетовое обрезание. В данной диссертации, это впервые проделано аналитически, что позволило чётко проследить как меняется физика при введении такого обрезания [103].

Голографические модели для КХД интересны как язык, который позволяет на единой основе обсуждать разнообразные подходы к моделированию взаимодействий и спектральных характеристик лёгких адронов, систем с одним лёгким и одним тяжёлым кварком, адронные формфакторы, фазовую диаграмму КХД и другие феноменологические аспекты, которые традиционно были предметами исследований для разных научных комьюнити. Это объединяющее свойство поднимает на повестку дня важные вопросы — почему же всё-таки голографические модели хорошо работают при описании непертурбативной физики сильных взаимодействий и как голографическое описание связано с другими известными феноменологическими методами? В настоящее время имеется множество статей, посвящённых приложениям голографических идей, но есть острый дефицит работ, которые бы пытались ответить на эти вопросы. В диссертации, автором сделана попытка продвинуться в понимании природы голографических моделей с помощью непосредственной переформулировки планарной КХД в фиксированном канале в виде пятимерной теории свободного поля, что позволило получить модели, совпадающие с традиционными голографическими моделями в смысле описания спектров мезонов [104, 105].

В конечном итоге, в диссертации разработаны феноменологические подходы к спектроскопии лёгких мезонов, основанные, главным образом, на планарных правилах сумм КХД, эффективных теориях поля, голографических методах и на общем анализе спектров. Все они подчинены одним общим целям — разобраться в физике, лежащей в основе разнообразных особенностей спектров лёгких мезонов, предложить модели для описания спектральных характеристик этих частиц и дать хорошо обоснованные предсказания для будущих экспериментов по мезонной спектроскопии.

Основными целями данного диссертационного исследования являются:

1. Получение общих ограничений на спектры лёгких мезонов из аналитической структуры операторного разложения

двухточечных корреляторов КХД в пределе большого числа цветов.

2. Развитие методов вычисления физических констант и наблюдаемых величин в рамках планарных правил сумм.

3. Построение моделей для описания нарушения киральной симметрии в КХД на основе правил сумм и эффективных теорий поля.

4. Используя современные экспериментальные данные, выполнить детальный анализ спектров лёгких мезонов с целью выявления новых симметрий, теоретическое обоснование обнаруженных симметрий и предсказание параметров новых резонансов для будущих экспериментов.

5. Разработка новых голографических моделей, а также альтернативных им пятимерных динамических моделей, которые более согласованы с известной феноменологией, по сравнению с известными моделями.

Материал изложен в диссертации следующим образом:

В Главе I рассматриваются различные модельные методы получения ограничений на параметры линейного спектра масс мезонов с возможными поправками, исходя из правил сумм КХД в планарном пределе. Раздел 1 посвящен общим проблемам вычисления параметров мезонных спектров масс и констант распада в присутствии нелинейных поправок к струнному спектру. После введения, обсуждаются некоторые вопросы кварк-адронной дуальности и ставится задача. Затем исследован струноподобный бесконечный спектр масс векторных (V), аксиально-векторных (A), скалярных (S) и псевдоскалярных (P) мезонов с универсальным наклоном траекторий и учетом нелинейных поправок. Вначале анализ проведен для VA-каналов. Из условий согласованности с аналитической структурой операторного разложения для двухточечных корреляторов, дан общий вид возможных поправок к линейному спектру. Затем этот анализ распространен на SP-каналы. В конце раздела проведено сравнение VASP спектров, включающих простейшую нелинейную поправку, с известной феноменологией. В разделе 2 рассмотрен иной подход к выводу параметров спектров масс из условий восстановления киральной симметрии. В частности, предложена модель для отклонений от струнного поведения, в рамках которой эффект возникает только за счет НКС. В заключительном разделе проведено сравнение рассмотренных подходов и дан краткий обзор полученных результатов.

Материал Главы II охватывает различные приложения правил сумм КХД в пределе большого числа цветов к феноменологии. В разделе 3 рассмотрен вопрос о вкладе радиальных возбуждений VA-мезонов в электромагнитную разность масс пионов и киральную константу L_{10}. В начале раздела, после обсуждения литературы по тематике, ставится задача. Затем показано, как можно вычислять электромагнитную разность масс π-мезонов, зная разность VA-корреляторов. После этого вычислен вклад первых радиальных возбуждений VA-мезонов в рассматриваемые величины, а также оценка вклада следующих возбуждений. В разделе 4 рассмотрена задача о поиске спектра, максимально точно воспроизводящего пертурбативный логарифм партонной модели. Задача решена методом минимизации поправок к логарифму, возникающих при суммировании по резонансам. Ответ оказался спектром дуальной амплитуды Ловеласа-Шапиро. Показано, что данный спектр является кирально-симметричным в смысле соответствия нулевым значениям параметров порядка НКС в КХД. В разделе 5 выведено новое соотношение между значениями кваркового и глюонного конденсатов из правил сумм в древесном приближении. В разделе 6 предложен новый способ вычисления аксиальной константы g_A конституэнтной кварковой модели, основанный на сшивке этой модели с операторным разложением VA корреляторов. В заключительном разделе кратко суммируются и обсуждаются полученные результаты.

Глава III посвящена явлению кластеризации в спектрах масс легких мезонов — сильно выраженной тенденции к группировке масс только возле определенных значений энергии, независимо от квантовых чисел. В разделе 7 дано обоснование процедуры отбора нужных экспериментальных данных, представлена общая картина спектральных вырождений, оценена скорость вырождения в зависимости от массы и систематически проверена связь между шириной и массой резонанса. В разделе 8 обсуждаются теоретические идеи, способные объяснить наблюдаемую вырожденность резонансов, предложена новая классификация легких мезонов и систематически разработаны спектроскопические предсказания для будущих экспериментов. Полученные результаты резюмированы и кратко обсуждены в заключительном разделе к главе.

В Главе IV предложены пятимерные эффективные модели, описывающие спектр мезонов с конечным числом резонансов и слияние дискретного спектра с континуумом. Раздел 9 посвящен построению класса голографических моделей, описывающих конечное число резонансов и появление континуума при определенном масштабе энергии. Проведено сравнение одной из моделей со спектром векторных мезонов. В разделе 10 построена альтернативная (по отношению к голографическому подходу) пятимерная динамическая модель, которую можно трактовать как пятимерную модель глюонного вакуума КХД. В разделе 11 затронута проблема оправдания голографического подхода в применении к спектроскопии мезонов. Явным образом продемонстрировано, что пятимерные модели для планарной КХД, совпадающие с голографическими при описании спектра мезонов, можно вывести, исходя из ряда требований феноменологической самосогласованности, не привлекая идеи из голографического подхода. Эти модели представляют просто иной математический язык для выражения реджевской феноменологии в рамках планарных правил сумм КХД. Заключительный раздел главы подытоживает результаты.

Материал Главы V включает исследования по хиггсовскому механизму генерации масс в голографических моделях, а также по введению ультрафиолетового обрезания в модели с мягкой стенкой. В разделе 12 проанализирована возможность получения реджевской формы спектра в рамках голографической модели с жесткой стенкой. Проблема решена путем эффективного учета вакуумных конденсатов. Раздел 13 посвящён анализу физических следствий при введении ультрафиолетового обрезания в стандартную голографическую модель с мягкой стенкой. В разделе 14 предложена бесстеночная голографическая модель для линейного реджевского спектра мезонов. Продемонстрировано, что аксиально-векторный канал в ней описывается значительно лучше, чем в стандартных голографических моделях с мягкой стенкой. В заключительном разделе кратко суммированы полученные результаты.

Основные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Найден вид поправок к линейным траекториям на плоскости $m^2(n)$ (m — масса n-го радиального возбуждения) для векторных и скалярных мезонов, согласованный с операторным разложением соответствующих двухточечных корреляторов и с адронной феноменологией.

2. Разработаны методы применения планарных правил сумм КХД для вычисления физических параметров, характеризующих наблюдаемый спектр мезонов.

3. Выявлена новая симметрия в спектрах лёгких мезонов и на её основе разработана классификация мезонных состояний, объясняющая их массы.

4. Впервые построен класс голографических моделей, описывающих конечное число резонансов с приближённым реджевским спектром и слияние резонансов с континуумом.

5. Доказано, что голографические модели для КХД в области применения к спектроскопии мезонов являются математической переформулировкой правил сумм КХД в пределе большого числа цветов.

6. Разработан метод построения эффективных пятимерных моделей, описывающих нарушение масштабной инвариантности сильных взаимодействий при низких и промежуточных энергиях и спектр адронов.

7. Впервые исследовано влияние вклада ультрафиолетовой области в голографических моделях, описывающих линейный реджевский спектр мезонов.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах

1. S.S. Afonin. "Low-energy holographic models for QCD", Phys. Rev. C83 (2011) p.048202.

2. S.S. Afonin. "A five-dimensional ansatz for the Veneziano amplitude", Eur. Phys. J. C71 (2011) p.1830-1833.

3. S.S. Afonin. "No-Wall Holographic Model for QCD", Int. J. Mod. Phys. A26 (2011) p.3615-3623.

4. S.S. Afonin. "Holographic like models as a five-dimensional rewriting of large-N_c QCD", Int. J. Mod. Phys. A25 (2010) p.5683-5710.

5. S.S. Afonin. "A five-dimensional toy model for light hadron excitations", Int. J. Mod. Phys. A25 (2010) p.3933-3940.

6. S.S. Afonin. "About the possibility of five-dimensional effective theories for low-energy QCD", Eur. Phys. J. C61 (2009) p.69-73.

7. S.S. Afonin. "AdS/QCD models describing a finite number of excited mesons with Regge spectrum", Phys. Lett. B675 (2009) p.54-58.

8. S.S. Afonin. "Regge spectrum from holographic models inspired by OPE", Phys. Lett. B678 (2009) p.477-480.

9. S.S. Afonin. "Axial coupling from matching constituent quark model to QCD", Phys. Rev. C77 (2008) p.058201, 4pp.

10. S.S. Afonin. "Hydrogen like classification for light nonstrange mesons", Int. J. Mod. Phys. A23 (2008) p.4205-4217.

11. S.S. Afonin. "Implications of the Crystal Barrel data for meson-baryon symmetries", Mod. Phys. Lett. A23 (2008) p.3159-3166.

12. S.S. Afonin. "Illustrative Model for Parity Doubling of Energy Levels", Mod. Phys. Lett. A22 (2007) p.2791-2997.

13. S.S. Afonin. "Properties of new unflavored mesons below 2.4 GeV", Phys. Rev. C76 (2007) p.015202, 5pp.

14. S.S. Afonin. "Cluster duality", Nucl. Phys. B779 (2007) p.13-31.
15. S.S. Afonin. "Light meson spectrum and classical symmetries of QCD", Eur. Phys. J. A29 (2006) p.327-335.
16. S.S. Afonin. "Relation between quark and gluon condensates from QCD sum rules", Int. J. Mod. Phys. A21 (2006) p.6693-6698.
17. S.S. Afonin. "Experimental indication on chiral symmetry restoration in meson spectrum", Phys. Lett. B639 (2006) p.258-262.
18. S.S. Afonin, D. Espriu. "Qualitative solution of QCD sum rules", JHEP 09 (2006) 047, 19pp.
19. S.S. Afonin, A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, D. Espriu. "Matching Regge Theory to the OPE", JHEP 04 (2004) 039, 25pp.
20. S.S. Afonin. "Quark condensate and deviations from string-like behavior of meson spectra", Phys. Lett. B576 (2003) p.122-126.
21. V.A. Andrianov, S.S. Afonin. "Vector and axial-vector mesons in Quasilocal Quark Models", Eur. Phys. J. A17 (2003) p.111-118.
22. В.А. Андрианов, С.С. Афонин. "Вклад высших мезонных резонансов в электромагнитную разность масс π-мезонов", Ядер. Физ. 65 (2002) С.1913-1919.

Обзоры в ведущих рецензируемых научных журналах

1. S.S. Afonin. "Weinberg like sum rules revisited", PMC Physics A3 (2009) p.1-29.
2. S.S. Afonin. "Parity doubling in particle physics", Int. J. Mod. Phys. A22 (2007) p.4537-4586.
3. S.S. Afonin. "Towards understanding spectral degeneracies in nonstrange hadrons", Mod. Phys. Lett. A22 (2007) p.1359-1372.

Прочие статьи по теме диссертации

1. V.A. Andrianov, S.S. Afonin. "Vector particles in Quasilocal Quark Models", Записки Научных Семинаров ПОМИ. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.17. 291 (2002) С.5-23 [J. Math. Sci. (N.Y.), 125 No.2 (2005) p.99-110].

2. С.С. Афонин. "Описание спектральных характеристик векторных мезонов на основе квазилокальных кварковых моделей из квантовой хромодинамики", Вестник Молодых Ученых 3 Серия: Физические Науки 1 (2002) С.12-28.

3. А.А. Андрианов, В.А. Андрианов, С.С. Афонин. "Квазилокальные кварковые модели в теории сильных и электрослабых взаимодействий", Физическая Мысль России 1 (2002) С.2-10.

4. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin. "Dynamical CP-violation in Quasilocal Quark Models at nonzero quark chemical potential", Записки Научных Семинаров ПОМИ. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 335 (2006) С.5-21 [J. Math. Sci. (N.Y.), 143 No.1 (2007) p.2697-2706].

Работы, опубликованные в материалах международных конференций, симпозиумов и школ

1. S.S. Afonin. "Selected issues on justification of holographic approach to QCD", Excited QCD 2010 (Tatry National Park, Slovakia, Feb. 2010), Acta Physica Polonica B3 (Proc. Suppl.) (2010) p.911-916.

2. S.S. Afonin. "A five-dimensional effective model for excited light mesons", 12th International Conference on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon (Virginia, USA, June 2010) AIP Conf. Proc. 1374 (2011) p.613-616.

3. S.S. Afonin. "A five-dimensional effective model for excited light mesons", XIX International Workshop on HEP and QFT (Golitsyno, Moscow region, Russia, Sept. 2010), Proceedings of Science QFTHEP2010 (2010) 051 (Eds. M.N. Dubinin and V.I. Savrin).

4. S.S. Afonin, A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, D. Espriu. "Scalar mesons within QCD sum rules in the planar limit", "Workshop On Scalar Mesons And Related Topics Honoring 70th Birthday Of Michael Scadron (SCADRON 70)", (Lisbon, Portugal, Feb. 2008) AIP Conf. Proc. 1030 (2008) p.177-182.

5. S.S. Afonin, A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, D. Espriu. "Spontaneous P-parity violation in dense baryon matter", 11th International Conference on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon, (Juelich, Germany, 2007) p.202-205.

6. S.S. Afonin, A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, D. Espriu. "Matching Regge Theory to the OPE", "12th International QCD Conference", (Montpellier, France, Jule 2005), Nucl. Phys. B164 (Proc. Suppl.) (2007) p.296-299.

7. V.A. Andrianov, A.A. Andrianov, S.S. Afonin. "Dynamical CP-violation at finite nuclear (quark) densities in Quasilocal quark models", International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy, (Kyiv, Ukraine, 2006), (Kyiv, 2007) p.193-203.

8. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin, D. Espriu. "Matching meson resonances to OPE in QCD", "International Conference on QCD and Hadronic Physics", (Beijing, China, June 2005), Int. J. Mod. Phys. A21 (2006) p.885-888.

9. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin, D. Espriu. "Matching meson resonances to OPE", "1st Workshop on Quark-Hadron duality and transition to pQCD", (Frascati, Rome, Italy, June 2005), Eds. A. Fantoni et al. (World Sci., Singapore, 2006) p.205-210.

10. S.S. Afonin. "Matching Regge theory to the operator product expansion (OPE)", International Summer School SUSSP58 (St. Andrews, Scotland, May 2004), Eds. I.J.D. MacGregor and R. Kaiser (Taylor & Francis, New York London, 2006) p.415-416.

11. S.S. Afonin, A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, D. Espriu. "Matching Regge Theory to the OPE", International Workshop

"Hadron Structure and QCD", (St. Petersburg, Russia, May 2004), 6pp.

12. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin. "Large-N_c QCD, Operator Product Expansion and string-like meson spectra", XIIth International Conference on "Selected Problems of Modern Physics"(Blokhintsev'03) (Dubna, Russia, June 2003), Eds. B.M. Barbashov et. al. (JINR, 2003) p.153-158.

13. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin, D. Espriu. "String-like meson spectra: phenomenology vs. QCD", XVII International Workshop on HEP and QFT, (Samara, Russia, Sept. 2003), Eds. M.N. Dubinin and V.I. Savrin (Moscow State University, 2003) p.217-225.

14. А.А. Андрианов, В.А. Андрианов, С.С. Афонин. "Meson mass spectrum and OPE: matching to the large-N_c QCD", XXXVII Зимняя Школа ПИЯФ (Репино, Россия, февраль 2003), (ПИЯФ, 2004) С.287-306.

15. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin. "Meson mass spectrum and OPE: the matching to the large-N_c QCD", 5th International Conference on Quark confinement and the hadron spectrum (Gargnano, Italy, Sept. 2002), World Sci., Singapore, 2003, p.361-363.

16. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin. "QCD tests for Quasilocal Quark Model", Proceedings of the 12th International Seminar on High Energy Physics QUARKS'2002 (Novgorod, 2002), Eds. V.A. Matveev et. al. (JINR, 2003) p.19-28.

17. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin. "Meson mass splitting in $U(3)$ Quasilocal Quark Model", Proceedings of the 16th International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory (Moscow, 2001), ed. by M.N. Dubinin and V.I. Savrin, MSU, Moscow, 2003, p.254-263.

18. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin. "Vector mesons in Quasilocal Quark Models", Proceedings of the 15th International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field

Theory (Tver, 2000), ed. by M.N. Dubinin and V.I. Savrin, MSU, Moscow, 2000, p.233-240.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на международных конференциях по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля QFTHEP'2000 (Тверь), QFTHEP'2001 (Москва), QUARKS'2002 (Новгород), Quark Confinement 2002 (Гарньяно, Италия), Selected Problems of Mod. Phys. 2003 (Дубна), QFTHEP'2003 (Самара), Hadron Structure and QCD 2004 (Петербург), 1st Workshop on Quark-Hadron duality and transition to pQCD (Фраскати, Италия), International Conference on QCD and Hadronic Physics 2005 (Пекин, Китай), 12th International QCD Conference 2005 (Монпелье, Франция), International Conference on Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy 2006 (Киев), MENU'2007 (Юлих, Германия), Workshop On Scalar Mesons And Related Topics 2008 (Лиссабон, Португалия), Excited QCD 2010 (Словакия, Татры), MENU'2010 (Виллиамсбург, США), QFTHEP'2010 (Голицыно, Московская область), а также на Зимних Школах ПИЯФ 2003 и 2007 (Репино), на Летней Школе SUSSP58 2004 (Сэнт-Эндрюс, Шотландия), на семинарах в университетах Барселоны (3 раза), Болоньи, Гранады, Валенсии, Бохума (2 раза), в НИИ ядерной физики им. Д.В. Скобельцина при МГУ, в Дубне и в отделе теоретической физики СПбГУ (8 раз).

Глава I

1 Поправки к реджевскому спектру из правил сумм

1.1 Введение

Феноменология адронов указывает на то, что квадраты масс мезонов с фиксированными квантовыми числами приближенно лежат на эквидистантных линейных траекториях[1] (см., например, современные обзоры [20,21]). Данное поведение является сильным аргументов в пользу того, что КХД допускает эффективное струнное описание, т.к. этот тип спектра характерен для бозонной[2] струны [23]. Давно было замечено [45–47], что если принять линейное поведение, то, путём включения бесконечного числа резонансов, можно воспроизвести логарифм партонной модели, присутствующий в двухточечных корреляторах. Это наблюдение означает, что обмен бесконечным числом векторных мезонов может быть дуален пертурбативному континууму КХД, состоящему из кварков и глюонов. Подобная кварк-адронная дуальность была точно проверена в КХД в 1+1 мерии в пределе большого числа цветов [48, 49]. В настоящее время, под кварк-адронной дуальностью специалисты понимают несколько отчасти различных утверждений. Наиболее общим предположением является то, что теория возмущений может быть использована для вычисления определенных усредненных сечений рассеяния. (так называемая глобальная дуальность) [108]. Мы используем данный термин в довольно свободном смысле и понимаем под кварк-адронной дуальностью любую сшивку адронных и партонных степеней свободы.

В контексте планарной КХД, кварк-адронная дуальность для мезонов привлекла большое внимание [31–44]. В работе [39], параметры векторного спектра масс были выведены в рамках

[1] Мы будем именовать это поведение как "линейный анзац"(ЛА).

[2] Строго говоря, модель адронных струн не является самосогласованной теорией, более реалистичным подходом выглядит амплитуда Ловеласа-Шапиро, но, к сожалению, она не может быть выведена ни из какой струнной модели, более того, она не совместима с КХД, как мы это увидим ниже. Дискуссии на эту тему приведены в [106,107].

правил сумм с конечной энергией. Был также рассмотрен и аксиально-векторный канал. Позже этот подход был обобщен на псевдоскалярный [41] и скалярный [42] случаи. В работе [31] была рассмотрена проблема сшивки бесконечного набора мезонных состояний с операторным разложением (ОР) [30], при этом функция $m_V^2(n)$ выбиралась общей. Возможные отклонения от кварк-адронной дуальности исследовались в обзоре [32] (включая ширины резонансов, т.е. за пределами большого числа цветов). ЛА в случае векторных и аксиальных мезонов использовался в работе [33] для вычисления некоторых наблюдаемых величин. Позже, различные аспекты кварк-адронной дуальности, восстановления киральной симметрии (ВКС) и сшивки с ОР интенсивно обсуждались в работах [31–44].

Хорошо известно, что ЛА обычно плохо описывает легчайшие состояния на траектории (особенно в псевдоскалярном канале). По этой причине были предприняты попытки выйти за пределы ЛА [35, 36]. Предложенные анзацы, однако, не согласуются с ОР, что будет объяснено ниже.

В настоящем разделе, на единой основе рассматривается бесконечный набор резонансов в векторном (V), аксиально-векторном (A), скалярном (S) и псевдоскалярном (P) корреляторах [50, 51]. Из модели бозонной струны следует, что наклон траекторий должен быть одинаков во всех VASP случаях, так как он пропорционален натяжению струны, которое, в свою очередь, зависит только от глюодинамики. Феноменология подтверждает это наблюдение [20, 21]. Данный факт не учитывался в процитированных выше статьях. В этом разделе предлагается систематический метод учета возможных поправок к линейным траекториям с универсальным наклоном в V,A,S,P каналах. Полученный анзац для мезонного спектра масс и вычетов сшит затем с ОР, что дает ряд ограничений на мезонные параметры. В конечном итоге, результаты фитированы на экспериментальные данные [19–21].

1.2 Ток-токовые корреляторы и правила сумм КХД

Рассмотрим двухточечные корреляторы V,A,S,P кварковых токов в пределе большого числа цветов КХД. С одной стороны, в силу конфайнмента, они насыщаются бесконечным числом узких мезонных резонансов, то есть они могут быть представлены в виде суммы по резонансным вкладам с фиксированным спином J и массами $m_J(n)$, $n = 0, 1, \ldots$,

$$\Pi^J(Q^2) = \int d^4x \exp(iQx)\langle\bar{q}\Gamma q(x)\bar{q}\Gamma q(0)\rangle_{\text{planar}} = \sum_n \frac{Z_J(n)}{Q^2 + m_J^2(n)} + D_0^J + D_1^J Q^2, \quad (1)$$

$$J \equiv S, P, V, A; \qquad \Gamma = i, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5; \qquad D_0, D_1 = const.$$

Здесь последние два члена представляют пертурбативный вклад с константами вычитания D_0 и D_1. С другой стороны, их высокоэнергетическая асимптотика даётся теорией возмущений и ОР [30, 109]. В киральном пределе[3]

$$\Pi^V(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}\right)\ln\frac{\mu^2}{Q^2} + \frac{\alpha_s}{12\pi}\cdot\frac{\langle(G^a_{\mu\nu})^2\rangle}{Q^4} - \frac{28}{9}\pi\alpha_s\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{Q^6}, \quad (2)$$

$$\Pi^A(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}\right)\ln\frac{\mu^2}{Q^2} + \frac{\alpha_s}{12\pi}\cdot\frac{\langle(G^a_{\mu\nu})^2\rangle}{Q^4} + \frac{44}{9}\pi\alpha_s\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{Q^6}, \quad (3)$$

$$\Pi^S(Q^2) = -\frac{3}{8\pi^2}\left(1+\frac{11\alpha_s}{3\pi}\right)Q^2\ln\frac{\mu^2}{Q^2} + \frac{\alpha_s}{8\pi}\cdot\frac{\langle(G^a_{\mu\nu})^2\rangle}{Q^2} - \frac{22}{3}\pi\alpha_s\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{Q^4}, \quad (4)$$

$$\Pi^P(Q^2) = -\frac{3}{8\pi^2}\left(1+\frac{11\alpha_s}{3\pi}\right)Q^2\ln\frac{\mu^2}{Q^2} + \frac{\alpha_s}{8\pi}\cdot\frac{\langle(G^a_{\mu\nu})^2\rangle}{Q^2} + \frac{14}{3}\pi\alpha_s\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{Q^4}, \quad (5)$$

---

[3] В работе [110] был введен член, соответствующий глюонному конденсату размерности 2 λ^2 (эффективная "масса глюона"). Такой конденсат не может быть образован локальным калибровочно-инвариантным оператором [111–114]. С другой стороны, данный конденсат мало влияет на фиты мезонных параметров (см. обсуждения в Приложении А.1). Мы его не будем учитывать.

где мы определили

$$\Pi_{\mu\nu}^{V,A}(Q^2) \equiv \left(-\delta_{\mu\nu}Q^2 + Q_\mu Q_\nu\right)\Pi^{V,A}(Q^2)\,. \tag{6}$$

Здесь была использована гипотеза вакуумного насыщения для 4-х фермионного конденсата [30] в пределе большого числа цветов. В выражениях (2)-(5) $\langle (G_{\mu\nu}^a)^2\rangle$ и $\langle \bar{q}q\rangle$ являются глюонным и кварковым конденсатом соответственно. Константа нормировки μ возникает в результате аддитивной перенормировки бесконечных сумм в уравнении (1). α_s является константой связи КХД на масштабе нарушения киральной симметрии (НКС), примерно 1 ГэВ.

Как следует из уравнений (2)-(5), разности корреляторов противоположной чётности быстро убывают при больших импульсах,

$$\Pi^V(Q^2) - \Pi^A(Q^2) = -8\pi\alpha_s\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{Q^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^8}\right), \tag{7}$$

$$\Pi^S(Q^2) - \Pi^P(Q^2) = -12\pi\alpha_s\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{Q^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^6}\right). \tag{8}$$

Отсюда непосредственно видно, что кварковый конденсат $\langle\bar{q}q\rangle$ является параметром порядка НКС в КХД.

Разлагая левую часть уравнения (1) по обратным степеням квадрата евклидова импульса Q^2 и сравнивая с (2)-(5), получаем по три правила сумм в каждом канале (мы не учитываем конденсаты размерности восемь и более). Если иметь дело с конечным числом резонансов, то данное разложение следует непосредственно (см., например, [115–117]). В случае бесконечного числа резонансов, суммы в (1) суммируются (при данном анзаце для $m^2(n)$) с использованием формулы Эйлера-Маклорена или ψ-функции, оба метода эквивалентны. Здесь нужно отметить, что, вообще говоря, суммирование и разложение по $1/Q^2$ в расходящихся суммах не являются коммутативными операциями.

Правила сумм, полученные таким образом, представляют определенные ограничения на параметры спектра масс мезонов. Эту информацию можно извлечь и сравнить с феноменологией, чему и посвящены следующие параграфы. В данном анализе, мы не будем учитывать аномальных размерностей операторов и вытекающих из них логарифмических поправок в правилах сумм.

1.3 Векторные и аксиально-векторные резонансы

В случае V и A мезонов, вычеты $Z_{V,A}(n)$ в уравнении (1) имеют следующую структуру:

$$Z_{V,A}(n) = 2F^2_{V,A}(n), \tag{9}$$

где величины $F_{V,A}(n)$ являются константами распада, параметризующие матричные элементы соответствующих токов

$$\langle 0|j^\mu_{\rm em}(0)|V(\epsilon,k,n)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} eF_V(n)m_V(n)\epsilon^\mu, \tag{10}$$

$$\langle 0|A^\mu(0)|A(\epsilon,k,n)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} eF_A(n)m_A(n)\epsilon^\mu. \tag{11}$$

Здесь k – импульс мезона, ϵ^μ – вектор поляризации и e – заряд электрона. Константы $F_V(n)$ могут быть получены из электромагнитного распада векторных мезонов,

$$\Gamma_{V\to e^+e^-}(n) = \frac{4\pi\alpha^2 F^2_V(n)}{3m_V(n)}, \tag{12}$$

где α есть постоянная тонкой структуры. Константы $F_A(n)$ связаны с ширинами некоторых радиационных распадов. К сожалению, аксиальный сектор плохо изучен, за исключением реакций, включающих основное состояние (a_1-мезон). Нам известно два примера [1, 62]:

$$\Gamma_{\tau\to a_1\nu_\tau} = \frac{G^2_F m^3_\tau F^2_{a_1}}{16\pi}\left(1-\frac{m^2_{a_1}}{m^2_\tau}\right)\left(1+\frac{2m^2_{a_1}}{m^2_\tau}\right), \tag{13}$$

и

$$\Gamma_{a_1\to\pi\gamma} = \frac{\alpha F^2_{a_1} m_{a_1}}{24 f^2_\pi}\left(1-\frac{m^2_\pi}{m^2_{a_1}}\right)^3. \tag{14}$$

где G_F является константой Ферми, m_τ есть масса τ-лептона, а f_π – константа слабого распада пиона.

Введем обычный линейный анзац для спектра масс мезонов ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$m^2_{V,A}(n) = M^2_{V,A} + a_{V,A}n\,; \qquad F^2_{V,A}(n) = const \equiv F^2_{V,A}, \tag{15}$$

с постоянными пересечениями (интерсептами) $M_{V,A}^2$ и наклонами $a_{V,A}$. Для вычисления бесконечной суммы в уравнении (1) применим формулу Эйлера-Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(0)+f(N)] + \\ \frac{B_1}{2!}[f'(N)-f'(0)] - \frac{B_2}{4!}[f'''(N)-f'''(0)] + \ldots + \\ (-1)^k \frac{B_{k+1}}{(2k+2)!}[f^{(2k+1)}(N) - f^{(2k+1)}(0)] + \ldots\,, \quad (16)$$

где $B_1 = 1/6\,, B_2 = 1/30\,, \ldots$ представляют числа Бернулли. Разлагая получившееся выражение по степеням Q^{-2} и сравнивая с ОР (2), (3), приходим к набору асимптотических правил сумм.

Поскольку ряды не являются абсолютно сходящимися (члены в них ведут себя как $\sim 1/n$), нужно ввести регуляризацию[4]. Мы будем обрезать бесконечные суммы, рассматривая только N первых членов. Это влечёт за собой обрезание по импульсу $\Lambda^2_{\mathrm{cut;V,A}} \equiv M_{V,A}^2 + a_{V,A}N_{V,A} \simeq a_{V,A}N_{V,A}$. Так как мы идентифицируем партнеры по четности для каждого V- и A-мезона и не хотим искусственно нарушать киральную симметрию обрезанием, числа учтенных состояний N_V и N_A должны быть равны, $N_V = N_A$. С другой стороны, соответствующие обрезания по импульсам в ОР также совпадают в V и A каналах при кирально-симметричной регуляризации[5], так что $\Lambda_{\mathrm{cut;V}} = \Lambda_{\mathrm{cut;A}}$ (см. также похожие аргументы в работе [35]). Следовательно, для естественной реализации киральной симметрии, наклоны радиальных реджевских траекторий должны быть равны, $a_V = a_A$. Для сшивки с ОР (2) и (3), нужно сделать аддитивную перенормировку путем вычитания бесконечных констант $D_0^{V,A}$. Чтобы не нарушить киральную симметрию, вычитание должно быть одинаковым для партнёров по чётности, $D_0^V = D_0^A$. Это ведёт

[4]Другой способ улучшения сходимости состоит в дифференцировании по Q^2. Мы им воспользуемся ниже для сшивки с КХД.

[5]Заметим, что обрезания по импульсам в ОР является спорным с точки зрения сохранения калибровочной инвариантности, однако оно очевидно калибровочно инвариантно в сумме по резонансным вкладам (1). Таким образом, возникает необходимость использовать разные регуляризации с обеих сторон, однако после перенормировки с помощью констант $D_0^{V,A}$, лидирующий логарифмический член однозначен.

к цепочке равенств

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{N_c}{16\pi^2}=\frac{2F_V^2}{a_V}=\frac{2F_A^2}{a_A}. \tag{17}$$

Отметим, что из моделей адронных струн следует $a_V = a_A \equiv a$ (соотношение $a_V = a_A$ не выполняется в работах [33, 37], где был проделан похожий анализ для ЛА.) Отсюда заключаем равенство $F_V = F_A$. Заметим, что предполагается предел $N \to \infty$ или, эквивалентно, $\Lambda_{\text{cut}} \to \infty$. Данное обстоятельство позволяет нам пренебречь вкладами вида $Q^2/\Lambda_{\text{cut}}^2$ или $m^2/\Lambda_{\text{cut}}^2$.

На этом заканчиваются следствия, которые можно извлечь из асимптотических правил сумм для индивидуальных V и A каналов. Нелидирующие члены являются неоднозначными из-за присутствия логарифма. К счастью, этот логарифм отсутствует в разностях корреляционных функций, а именно

$$\Pi^V(Q^2)-\Pi^A(Q^2)=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{F_V^2(n)}{Q^2+m_V^2(n)}-\frac{F_A^2(n)}{Q^2+m_A^2(n)}\right). \tag{18}$$

Данная разность (и эквивалентная ей для S,P) быстро сходится при больших импульсах. Лидирующий вклад ведёт себя как $\mathcal{O}(1/Q^6)$: весь пертурбативный и чисто глюонный вклады сокращаются в разности. Для индивидуальных правил сумм, перед сшивкой ОР с радиальными реджевскими траекториями, мы будем дифференцировать по Q^2.

Быстрая сходимость разности корреляторов была использована, среди прочих, в работе [34], где были предложены следующие обобщения правил сумм Вайнберга [118]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(F_V^2(n)m_V^{2i}(n)-F_A^2(n)m_A^{2i}(n)\right)=C^{(i)},\qquad i=0,1, \tag{19}$$

$$C^{(0)}=f_\pi^2,\qquad C^{(1)}=0.$$

Следует подчеркнуть, что в разности (19) суммирование идёт по киральным парам. Это становится важным, когда нужно обрезать по конечному числу состояний N. Если регуляризация наложена так, что киральный партнёр для какого-то резонанса исчезает, киральная симметрия будет явно нарушена регуляризацией.

Именно поэтому крайне важно правильно идентифицировать киральный партнёр. Эта проблема не существенна в V,A случае, но является серьёзной в S,P каналах.

Из второго правила сумм ($i = 1$) непосредственно вытекает, что если $F_A = F_V$ и $a_A = a_V$, то $M_A = M_V$. Таким образом, в рамках ЛА спектры векторных и аксиально-векторных мезонов вырождены в полном противоречии с экспериментальными данными (даже после поправки на ненулевую токовую массу кварка, которая не учитывается в данном анализе). Более того, первое правило сумм ($i = 0$) влечёт $f_\pi = 0$, что также несовместимо с феноменологией. Поскольку f_π можно интерпретировать как параметр порядка НКС, то можно сделать вывод, что ЛА соответствует модели струны, которая имеет много общего с КХД, но одна существенная черта отсутствует, а именно, ЛА соответствовал бы адронной струне без НКС[6]. Отметим, что сходимость бесконечных сумм в уравнении (19) также требует накладывания равенства наклонов $a_V = a_A$, интерсептов (пересечений) $M_V = M_A$ и констант распада $F_V = F_A$. Для выхода из данной трудности было предложено рассматривать основные VA состояния — ρ и a_1 мезоны — как изолированные резонансы. Эта модель только грубо удовлетворяет существующей спектроскопии VA мезонов и не воспроизводит физические значения конденсатов [33]. Однако, предложенный анзац не противоречит правилам сумм при высоких энергиях. Очевидно, что подобный выход является весьма искусственным и не может быть оправдан никакой адронной моделью струн.

В данном разделе будет показано, что анзацы, предложенные в [33, 34], могут быть улучшены путем введения определенных нелинейных поправок к линейным траекториям (15). Проблема здесь состоит в том, что произвольные анзацы для $m^2(n)$ и $F^2(n)$ приводят к появлению вкладов, отсутствующих в стандартном ОР

[6] Амплитуда Ловеласа-Шапиро даёт интерсепт траекторий, соответствующий адлеровскому нулю, который требуется киральной симметрией. Однако траектории остаются эквидистантными для нижних состояний, что несовместимо с КХД, т.е. данная амплитуда не может являться корректной адронной струной. Попытка сформулировать согласованную картину струны, распространяющейся в фоне с нарушенной киральной симметрией, была предпринята в работе [106, 107].

(по крайней мере, в первом порядке теории возмущений, который мы рассматриваем), а именно вкладов с дробными или нечетными степенями Q, а также вкладов вида $Q^{-2k}\ln\frac{\Lambda^2_{\rm cut}}{Q^2}$. Сокращение таких членов порядок за порядком путем надлежащей подгонки параметров приводит обратно к линейному анзацу (15).

1.4 Правила сумм и отклонения от линейных траекторий

Нашей целью является построение класса параметризаций, который не приводит к нежелательным вкладам. А именно, наш анзац должен воспроизводить логарифм партонной модели и содержать только обратные степени квадрата большого импульса Q^2 помимо логарифма. Логарифм партонной модели и нежелательные вклады появляются из-за интегрирования в уравнении (16) (мы опускаем индексы V,A):

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{F^2(n)}{Q^2+m^2(n)}=\int_0^N\frac{F^2(x)\,dx}{Q^2+m^2(x)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^2}\right). \tag{20}$$

Очевидно, что логарифм может появиться только от интегрирования. Для этого мы потребуем следующее:

$$\int\frac{F^2(x)\,dx}{Q^2+m^2(x)}+D_0=C\ln\!\left(\frac{Q^2+m^2(x)}{\mu^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^2}\right), \tag{21}$$

где C – константа из ОР (2) и (3), D_0 – константа вычитания и μ – масштаб нормировки.

Дифференцируя уравнение (21) по x, легко увидеть, что оба требования удовлетворяются только если:

$$F^2(x)=t\,(x)\,\frac{dm^2(x)}{dx}\,,\quad t\,(x)=C+\Delta t\,(x)\ , \tag{22}$$

где $\Delta t\,(x)$ представляет убывающую функцию, которую нужно определить. Если не рассматривать эффективный заряд (бегущую константу связи), а ограничиться только первым порядком теории возмущений при некотором масштабе энергий, то функция $\Delta t\,(x)$ не должна содержать никаких логарифмов и других неполиномиальных по Q^{-2} членов. Таким образом, прямое разложение интеграла:

$$\int_0^{m^2(N)} \frac{\Delta t\,(x)\,d\left(m^2(x)\right)}{Q^2+m^2(x)} = \sum_{k>0} t_k \left(\frac{1}{Q^2}\right)^k,$$

где

$$t_k = \int_0^{m^2(N)} \Delta t\,(x) \left(-m^2(x)\right)^{k-1} d\left(m^2(x)\right), \tag{23}$$

должно быть определено в любом порядке. Сходимость интеграла в (23) для любого k возможна, если функция $\Delta t\,(x)$ спадает как экспонента некоторой степени x (или быстрее). Таким образом, т.к. мы не имеем никаких аргументов, основанных на динамике, функция $t\,(x)$ может быть выбрана в простейшей форме:

$$\Delta t\,(x) = A_F e^{-B_F x}\,, \qquad B_F > 0\,, \tag{24}$$

с параметрами A_F и B_F. Если задан анзац для $m^2(n)$, то уравнение (22) вместе с (24) дает условие согласованности с ОР. Ясно, что обычный линейный анзац (15) является простым частным случаем уравнения (22). Любое обобщение анзаца (15) должно также удовлетворять условию (22). Поправки к линейным траекториям, предложенные в упомянутых работах [35, 36], не удовлетворяют данному требованию, т.е. они не могут быть сшиты с ОР.

Рассмотрим обобщение правил сумм (19) на случай любого i:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(F_V^2(n) m_V^{2i}(n) - F_A^2(n) m_A^{2i}(n)\right) = C^{(i)}, \qquad i = 0, 1, \ldots\,, \tag{25}$$

где $C^{(i)}$ означают соответствующие конденсаты. Для абсолютной сходимости (25) при данном i нужно иметь:

$$F_V^2(n) - F_A^2(n) \sim \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \qquad \alpha > i, \tag{26}$$

$$m_V^2(n) - m_A^2(n) \sim \frac{1}{n^{\beta}}, \qquad \beta > i. \tag{27}$$

Обсудим теперь поправки к массам в (15):

$$m_{V,A}^2(n) = M_{V,A}^2 + a\,n + \delta_{V,A}(n)\,. \tag{28}$$

Следовательно, для сходимости при любом i должно иметь место равенство $M_V = M_A \equiv M$ и, по крайней мере, экспоненциальное убывание $\delta_{V,A}(n)$.

Суммируя эти соображения, можно предложить простейший анзац, удовлетворяющий всем вышеперечисленным требованиям (помня, что это только одна из возможностей):

$$m^2_{V,A}(n) = M^2 + an + A^{V,A}_m e^{-B_m n}, \tag{29}$$

$$F^2_{V,A}(n) = a\left(C + A^{V,A}_F e^{-B_F n}\right), \tag{30}$$

$$C = \frac{1}{8\pi^2}\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right), \qquad B_m > 0, \qquad B_F > 0, \tag{31}$$

с некоторыми параметрами $A^{V,A}_{m,F}$, $B_{m,F}$. Мы не знаем динамики, ответственной за появление этих экспоненциальных поправок. Однако для нас кажется разумным предположить, что для масс эта динамика определяется, главным образом, глюонным сектором и поэтому не зависит от аромата. Таким образом, мы будем считать показатель экспоненты B_m одинаковым для всех каналов. По этой же причине мы будем считать B_F не зависящем от чётности. Отметим также, что в уравнении (22) достаточно удержать только линейную по n часть в $m^2(n)$.

В дальнейшем мы следуем пертурбативному подходу и удерживаем в правилах сумм только члены, линейные по экспоненциально малым поправкам. Произведения экспонент превышают точность нашей простой (одноэкспоненциальной) параметризации: эти произведения будут считаться "next-to-next-to-leading"поправками к уравнениям (29) и (30). Помня о точности нашего подхода, при сшивке ОР с суммами резонансов, мы будем удерживать только пертурбативный логарифм и первый непертурбативный вклад $\mathcal{O}(1/Q^4)$ в V и A каналы по отдельности и лидирующую (непертурбативную) поправку $\mathcal{O}(1/Q^6)$ в разности $\Pi^V(Q^2) - \Pi^A(Q^2)$.

Чтобы не иметь дела с ненужными бесконечными константами, рассмотрим первую производную V и A корреляторов. Вводя обозначения для линейной части

$$\bar{m}^2(n) \equiv M^2 + an, \tag{32}$$

и используя выражения (9) и (29)-(31), имеем (индексы V, A

опущены для краткости)

$$\frac{d\Pi(Q^2)}{dQ^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a\left(C + A_F e^{-B_F n}\right)}{\left(Q^2 + \bar{m}^2(n) + A_m e^{-B_m n}\right)^2}. \tag{33}$$

Экспоненциальные поправки не являются малыми для основных состояний (в среднем, порядка 50%). Мы не будем применять наш пертурбативный подход для таких состояний. Отделяя основные состояния и удерживая в остатке только линейные части по экспоненциальным поправкам, получаем для (33):

$$-\frac{1}{2}\frac{d\Pi(Q^2)}{dQ^2} \simeq \frac{a(C + A_F)}{\left(Q^2 + M^2 + A_m\right)^2}+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{aC}{\left(Q^2 + \bar{m}^2(n)\right)^2} + \frac{aA_F e^{-B_F n}}{\left(Q^2 + \bar{m}^2(n)\right)^2} - \frac{2aCA_m e^{-B_m n}}{\left(Q^2 + \bar{m}^2(n)\right)^3}\right\} \tag{34}$$

В правой части уравнения (34) имеются три суммы. Первая сумма представляет производную от ψ-функции, которая имеет стандартное асимптотическое разложение при больших Q^2. Во второй и третьей суммах можно поменять местами суммирование по n и разложение по Q^{-2} благодаря абсолютной сходимости в любом порядке этого разложения. Окончательные выражения для правил сумм представлены в Приложениях A.2 и A.3. (уравнения (A.9)-(A.13)).

Решение этих уравнений будет рассмотрено после обсуждения скалярного сектора. Кроме того, нужно учесть так называемые D-волновые векторные мезоны, см. Приложение A.4.

В качестве ещё одного аргумента в пользу необходимости нелинейных поправок, рассмотрим предел восстановления киральной симметрии $\langle\bar{q}q\rangle \to 0$ и $f_\pi \to 0$. Как следует из уравнений (A.9), (A.10), в случае ЛА, соответствующее решение $M^2 = \frac{1}{2}a$ даёт отрицательное значение для глюонного конденсата в уравнениях (A.11), (A.12), что ведёт к нестабильности вакуумной энергии [119–121] и, следовательно, к появлению тахионов. В этом смысле ЛА противоречит общим принципам, даже в пределе восстановления киральной симметрии. Самосогласованный анзац может быть только нелинейным.

1.5 Скалярные и псевдоскалярные резонансы

Скалярный сектор отличается от векторного и требует некоторых модификаций. Благодаря поперечности (6), VA-корреляторы требовали только одного вычитания в (1). Для SP-корреляторов требуется два вычитания. Принимая определение[7]

$$Z_{S,P}(n) \equiv 2G^2_{S,P}(n)m^2_{S,P}(n), \tag{35}$$

аналог условия (21) в SP-случае принимает форму

$$\int \frac{G^2(x)m^2(x)\,dx}{Q^2+m^2(x)} + D_0 + D_1Q^2 = \\ -\bar{C}Q^2\ln\left(\frac{Q^2+m^2(x)}{\mu^2}\right) + \dots\,, \tag{36}$$

где $\bar{C} > 0$ и D_0, D_1 являются константами вычитания. Сделаем следующую перенормировку. Сумму по резонансам можно переписать в виде

$$\Pi(Q^2) = 2\sum_n \frac{G^2(n)m^2(n)}{Q^2+m^2(n)} + D_0 + D_1Q^2 \\ = \left[\sum_n 2G^2(n) + D_0\right] - Q^2\left[\sum_n \frac{2G^2(n)}{Q^2+m^2(n)} - D_1\right]. \tag{37}$$

Первое слагаемое в правой части (37) представляет собой бесконечную константу и должна быть перенормирована кирально-симметричным образом,

$$\sum_n 2G^2(n) + D_0 = \tilde{D}_0\,, \tag{38}$$

где $\tilde{D}_0$ является разным для S и P каналов. Тогда мы имеем

$$\int \frac{Q^2G^2(x)\,dx}{Q^2+m^2(x)} - \frac{1}{2}D_1Q^2 = \bar{C}Q^2\ln\left(\frac{Q^2+m^2(x)}{\mu^2}\right) + \dots\,. \tag{39}$$

[7]Данная формула не работает в случае π-мезона если мы его положим на радиальную траекторию. Для соответствующего вычета мы примем выражение из алгебры токов: $Z_\pi = 2\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{f_\pi^2}$. Поскольку мы в любом случае отделяем нижнее состояние, это не затронет последующий анализ. Альтернативный способ — обобщить уравнение (35) с помощью постоянного сдвига в $Z_{S,P}(n)$ для всех резонансов на величину Z_π. Однако, такая модификация вводит неприемлимо большое значение для конденсата размерности два в ОР (см. обсуждения в Приложении A.1). На основании известных теоретических и феноменологических оценок [110–112,123,124], мы положим этот конденсат равным нулю.

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, которые привели к уравнению (22), получаем в скалярном случае

$$G^2_{S,P}(n) = a\left(\bar{C} + A^{S,P}_G e^{-B_G n}\right), \qquad B_G > 0, \tag{40}$$

где

$$\bar{C} = \frac{3}{16\pi^2}\left(1 + \frac{11\alpha_s}{3\pi}\right). \tag{41}$$

Следуя тем же аргументам относительно параметра B_m, как и в предыдущем параграфе, мы предлагаем следующую параметризацию S, P масс

$$m^2_{S,P}(n) = \bar{M}^2 + an + A^{S,P}_m e^{-B_m n}. \tag{42}$$

Выведем теперь асимптотические правила сумм. Для того, чтобы избежать бесконечных членов, рассмотрим вторую производную S, P-корреляторов. Используя (32), (35), (40) и (42), можно написать

$$\frac{d^2\Pi(Q^2)}{(dQ^2)^2} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\tilde{m}^2(n)\left(\bar{C} + A_G e^{-B_G n}\right)}{\left(Q^2 + \tilde{m}^2(n) + A_m e^{-B_m n}\right)^3}, \tag{43}$$

где введено обозначение $\tilde{m}^2(n) \equiv \bar{M}^2 + an$ для линейной части S, P траектории. Отделяя первый член в сумме и удерживая только лидирующий вклад по экспоненциальным поправкам, получаем

$$\frac{1}{4}\frac{d^2\Pi(Q^2)}{(dQ^2)^2} \simeq \frac{a(\bar{C} + A_G)}{\left(Q^2 + \bar{M}^2 + A_m\right)^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a\bar{C}\tilde{m}^2(n)}{\left(Q^2 + \tilde{m}^2(n)\right)^3} + \frac{a\tilde{m}^2(n) A_G e^{-B_G n}}{\left(Q^2 + \tilde{m}^2(n)\right)^3} - \frac{3a\bar{C}\tilde{m}^2(n) A_m e^{-B_m n}}{\left(Q^2 + \tilde{m}^2(n)\right)^4}\right\} \tag{44}$$

Дальнейшая схема вычислений совпадает с векторным случаем.

Для правильного суммирования, нужно решить какие частицы являются киральными партнерами. Наиболее реалистичными представляются следующие две возможности: а) π-мезон принадлежит радиальной реджевской траектории и является киральным партнером легчайшего скалярного мезона, б) будучи голдстоуновской частицей, пион не принадлежит радиальной реджевской траектории и, следовательно, легчайший скалярный мезоно является киральным партнером $\pi'(1300)$-мезона. В случае а), эффективной низкоэнергетической теорией была бы линейная σ-модель, а случай б) соответствовал бы нелинейной σ-модели. Мы проверим оба варианта. Соответствующие правила сумм представлены в Приложении А.2.

1.6 Детали фитов и результаты

Пример фитов приведён в Приложении А.6, в данном параграфе мы дадим технические комментарии. Для того, чтобы сделать численные фиты, нужно фиксировать некоторые внешние параметры. Этими параметрами являются: конденсаты $\langle\bar{q}q\rangle$ и $\langle G^2\rangle$, константы f_π и α_s, пионный вычет $Z_\pi = 2\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{f_\pi^2}$ (соотношение из алгебры токов) и общий наклон a. Численные значения для всех параметров будем брать на масштабе НКС, примерно 1 ГэВ, они представлены в Приложении А.5. В частности, значение $f_\pi \approx 103$ МэВ отличается от общепринятой величины при низких энергиях [122] и соответствует сшивке ОР с суммами по резонансам на масштабе НКС (см. [125] и приведённые там ссылки).

В V и A каналах мы будем рассматривать только изовекторные нестранные состояния, т.е. спектры ρ и a_1 мезонов. Пять асимптотических правил сумм содержат семь спектральных параметров, подлежащих фитированию: M, $B_{m,F}$, $A_m^{V,A}$ и $A_F^{V,A}$. Таким образом, нам нужны два дополнительных входных параметра, которыми мы выберем массы основных состояний ρ и a_1. Лучший фит достигается при выборе массы a_1 около 1200 МэВ, что хорошо согласуется с экспериментом. Заметим также, что масса a_1 оказывается очень чувствительной к вариациям f_π, например, понижая значение f_π на 3 МэВ (т.е. до 100 МэВ), масса a_1 понижается до 1180 МэВ.

Дадим комментарий к некоторым числам в Таблице 9 Приложения А.6. Возможным кандидатом на состояние с массой $m_V(2)$ является $\rho(1900)$-мезон [19]. Однако ширина этого состояния на порядок меньше, чем ширины других векторных мезонов, что делает его кандидатом на гибридное состояние (гибриды и глюболы не лежат на радиальных реджевских траекториях для кваркониев в пределе больших N_c). Таким образом, мы не кладем данный резонанс на траекторию.

К сожалению, мы не можем сравнить с экспериментом вычеты возбужденных состояний. Возможным исключением является векторный канал благодаря соотношению (12). Например, наш анзац предсказывает: $\Gamma_{\rho(1450)\to e^+e^-} = 2.9$ КэВ. Соответствующая ширина $\Gamma_{V\to e^+e^-}$ плохо известна и не упоминается в Particle Data [19]. Однако можно сравнить результаты с другими независимыми модельными оценками. Соответствующие числа мы нашли в работе [1]: $\Gamma_{\rho(1450)\to e^+e^-} = 0.4$ КэВ, и [126, 127]: $\Gamma_{\rho(1450)\to e^+e^-} = 3.5$ КэВ.

Обсудим теперь D-волновые векторные мезоны. Введение этих состояний влечет за собой появление трёх новых параметров в асимптотических правилах сумм: M_D, A_D и B_D. Первый из них может быть фиксирован массой $\rho(1700)$-мезона. Можно также фиксировать, скажем, $F_V(0)$ и $F_D(0)$. Среднее от существующих оценок на электромагнитную ширину $\rho(1700)$-мезона ($\Gamma_{\rho(1700)\to e^+e^-} = 0.1$ KeV [1] и $\Gamma_{\rho(1700)\to e^+e^-} = 2.7$ KeV [126, 127]) даёт[8] довольно большое значение для $F_D(0)$, порядка 60 МэВ. Нам не удалось найти приемлемого объяснения для такой большой величины вычета основного состояния D-волнового векторного мезона. Наши оценки показали, что $F_D(0)$ (т.е., A_D) должны быть на два порядка меньше, чем получено в предыдущем анализе. В этом случае, вклад D-волновых векторных мезонов в физические величины оказывается меньше точности приближения большого числа цветов.

В S,P каналах ситуация более сложная. С одной стороны, в пределе большого числа цветов можно было бы ожидать восстановления $U(1)_A$ симметрии, связывающей изотриплетные псевдоскалярные и скалярные состояния, т.е. пионы ($I = 1$) с a_0 ($I = 1$) мезонами и их радиальные возбуждения. С

[8]Строго говоря, уравнение (12) может быть применено только к S-волновым векторным мезонам из-за локальности векторного тока в (10). Однако, в релятивистской теории ситуация меняется [1], вследствие чего переходы (10) для D-волновых векторных мезонов и (11) для аксиально-векторных резонансов (которые являются P-волновыми состояниями) становятся возможными. Более того, в приближении больших N_c уравнения (10), (11) хорошо определены даже в релятивистской теории, т.к. резонансы являются узкими. Мы используем (12) для грубой оценки связи D-волновых векторных мезонов с e^+e^--аннигиляцией.

другой стороны, возможно восстановление $SU(2)_L \times SU(2)_R$ симметрии, связывающей пионы ($I = 1$) с f_0 ($I = 0$) в их основных и возбуждённых состояниях. Оба сценария не противоречат друг другу, если предположить вырожденность a_0 и f_0. В принципе, можно идентифицировать [128] f_0 с $f_0(980)$ из PDG [19]. Однако унитаризованные фиты данных по пионному рассеянию [128, 129], по-видимому, указывают на динамическое происхождение $a_0(980)$. Таким образом, чтобы иметь дело с хорошо установленными состояниями в S,P каналах, в данной работе мы ограничимся анализом асимптотических правил сумм, связывающих изовекторный псевдоскалярный канал (т.е. пионы) с изоскалярным каналом (т.е. f_0-состояния). Нужно держать в голове, конечно, что введение странных кварков и переход от $SU(2)$ к $SU(3)$ может внести заметные изменения в скалярный сектор.

В секторе скаляров мы рассмотрели две возможности, а именно случаи а) и б), упомянутые в конце предыдущего параграфа. Случай а) обозначим "π-in", имея под этим ввиду, что пионы и легчайшие скаляры включены в реджевскую траекторию. Здесь мы имеем семь спектральных параметров: $\bar{M}$, $B_{m,G}$, $A_m^{S,P}$ и $A_G^{S,P}$, которые связаны тремя асимптотическими правилами сумм. Как было отмечено выше, B_m универсален для всех каналов. В качестве трёх дополнительных связей выберем: $m_S(0) = 1$ ГэВ, $m_P(0) = 0$ и $m_P(1) = 1.3$ ГэВ. Это предполагает, что пион и изоскаляр являются киральными партнёрами. Пользующаяся популярностью линейная σ-модель часто требует гораздо более лёгкого скаляра с массой около 600 МэВ. Однако, наш фит говорит в пользу более тяжёлого скалярного кваркония, который даёт реалистичное значение для киральной константы L_8, в согласии с выводами работ [128, 129]. Численные результаты представлены в Приложении А.6.

В случае б), π-мезон не лежит на радиальной траектории Редже, т.е. предположено, что голдстоуновский бозон должен от траектории отщепляться. Данную возможность обозначим как "π-out". Согласно нашим фитам (масса легчайшего скалярного состояния здесь также положена 1 ГэВ), главным качественным отличием между линейным и нелинейным случаем состоит в том, что первый предсказывает существование скалярного мезона с массой около 1.44 ГэВ (существует изосинглетный скалярный резонанс с массой 1.5 ГэВ, но он обычно считается кандидатом на глюбол), в то время как второй не предсказывает скалярного кваркония в этом регионе масс.

Подчеркнём ещё раз, что наш анализ в S,P каналах выполнен для $SU(2)$ мультиплетов, включающих псевдоскалярный и изосинглетный скалярный мезоны. Мы пренебрегли токовыми массами кварков, используя киральный предел. Ситуация может быть существенно другой для изотриплетных скаляров и для $SU(3)$ мультиплетов. В частности, мезон $a_0(980)$ (изотриплет) может оказаться динамическим резонансом, который отщепляется в пределе больших N_c, в то время как $a_0(1450)$ являться доминантным кварконием в данном секторе [131].

Величины $G_P(n)$ связаны с соответствующими константами слабого распада $F_P(n)$ посредством соотношения

$$F_P(n) = \frac{2m_q G_P(n)}{m_P(n)}. \tag{45}$$

В частности, принимая среднее значение m_q для токовых масс u- и d-кварков равным 6 МэВ, получаем следующие оценки для $F_{\pi(1300)}$: $F_P(1) = 1.7$ МэВ ("π-in") и $F_P(0) = 1.9$ МэВ ("π-out"). Обе оценки не противоречат известным теоретическим предсказаниям, сделанным в работах [132–134], меньше по величине оценок из правил сумм при конечных энергиях [41], и больше, чем предсказания нелокальной кварковой модели, рассмотренной в работе [15].

Интересно отметить, что в рамках погрешности порядка 10%, первые две киральные пары резонансов почти полностью насыщают киральную константу[9] L_{10}, введённую в работе [136]. Но это не так для электромагнитной разности масс Δm_π: здесь, в случае наших фитов, нужно удержать примерно семь пар. Причина заключается в том, что данная величина очень чувствительна к нарушению асимптотических правил сумм с глюонным конденсатом (строго говоря, разности этих правил

[9] Аналитические формулы для киральных констант L_8, L_{10} а также для Δm_π, приведены в Приложении А.5.

сумм): если нужно вычислить вклад первых N пар V и A резонансов в Δm_π, нужно работать именно с этим числом резонансов в правилах сумм с самого начала [69].

2 Кварковый конденсат и отклонения от струноподобного поведения мезонных спектров

2.1 Введение

Как было отмечено во введении к диссертации, широко распространено мнение, что КХД и теория бозонных струн тесно связаны. В последней спектр квадратов масс мезонов $M^2(n)$ линеен относительно номера радиального возбуждения n. Феноменологический анализ экспериментальных данных показывает, что эта картина, по крайней мере, качественно действительно имеет место [20, 21]. Тем не менее, в реальном мире существуют заметные отклонения от линейных траекторий, способ описания которых был предложен в предыдущем разделе. Возникает естественный вопрос: какая динамика стоит за этими отклонениями от струнной модели? Частично, отклонения могут быть вызваны смешиванием резонансов и пороговыми эффектами. Мы работаем в планарном пределе и, следовательно, данные явления у нас исключены. Однако, даже в таком пределе линейный спектр ожидается только при достаточно большом n, как это имеет место в двухмерной КХД в пределе большого числа цветов — модели 'т Хофта [28, 29].

В данном разделе предлагается и анализируется гипотеза, что, по крайней мере, в пределе больших N_c отклонения от линейного спектра масс возникают вследствие динамического нарушения киральной симметрии в КХД при низких энергиях [54].

Удобным инструментом для теоретического анализа являются двухточечные корреляторы кварковых токов (1), которые мы рассмотрим для случая векторных и аксиально-векторных мезонов. Используя правила сумм ВКС для легких нестранных VA-мезонов, проанализируем сначала следствия сделанной гипотезы для линейного спектра масс, а затем рассмотрим полиномиальную модель поправок к линейным траекториям.

2.2 Линейный спектр масс

Как было отмечено выше, если все квантовые числа фиксированы, мезонный спектр при струнном описании имеет линейную параметризацию:

$$M_J^2(n) = m_J^2 + \mu^2 n, \qquad F_J^2 = const, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{46}$$

где m_J^2 есть интерсепт, μ^2 представляет собой универсальный наклон, а n является номером радиального возбуждения. Согласно сделанной гипотезе, поправки к спектру (46) пропорциональны кварковому конденсату. В данном параграфе мы не будем их рассматривать. Таким образом, двухточечный коррелятор принимает форму:

$$\Pi^J(Q^2) = \frac{2f_\pi^2}{Q^2}\delta_{A,J} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2F_J^2}{Q^2 + m_J^2 + \mu^2 n} = \\ \frac{2f_\pi^2}{Q^2}\delta_{A,J} - \frac{2F_J^2}{\mu^2}\,\psi\left(\frac{Q^2 + m_J^2}{\mu^2}\right), \tag{47}$$

где несущественные (бесконечные) константы сокращены, а $\delta_{A,J} = 1$ для $J = A$ и равно нулю в противном случае. ψ-функция имеет асимптотическое представление при $z \gg 1$:

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2nz^{2n}}. \tag{48}$$

Здесь B_{2n} обозначают числа Бернулли.

Сравнивая разложение по $1/Q^2$ (48) в (47) с ОР (2), (3), приходим к следующим правилам сумм ВКС (для простоты мы не будем учитывать однопетлевую поправку к партонному логарифму):

$$\frac{1}{8\pi^2} = \frac{F_J^2}{\mu^2}, \tag{49}$$

$$f_\pi^2\delta_{A,J} = F_J^2\left(\frac{m_J^2}{\mu^2} - \frac{1}{2}\right), \tag{50}$$

$$\frac{\alpha_s}{12\pi}\langle G^2\rangle = F_J^2\mu^2\left(\frac{m_J^4}{\mu^4} - \frac{m_J^2}{\mu^2} + \frac{1}{6}\right), \tag{51}$$

$$0 = -\frac{2}{3}F_J^2\mu^4\left(\frac{m_J^6}{\mu^6} - \frac{3}{2}\frac{m_J^4}{\mu^4} + \frac{1}{2}\frac{m_J^2}{\mu^2}\right). \tag{52}$$

Левая часть уравнения (52) положена равной нулю в силу сделанной гипотезы: параметры линейного спектра масс (46) не зависят от кваркового конденсата, который появляется в левой части (52) только после учета поправок к спектру (46). Эта факторизация является ключевым моментом в данном анализе.

Положим $m_J^2 = x\mu^2$. Уравнение (52) имеет решения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1$. Как следует из (50), решение x_2 соответствует векторному каналу, а для аксиально-векторного остается только одна возможность — решение x_3. Решение x_1, по-видимому, относится к псевдоскалярному каналу, который мы здесь не рассматриваем.

Из (49), (50) получаем для констант распада и наклона[10]:

$$F_J = \sqrt{2}f_\pi\,, \qquad \mu = 4\pi f_\pi\,. \tag{53}$$

Таким образом, весь спектр VA мезонов параметризуется только одной константой f_π. Следуя данной выше классификации решений, получаем ($n = 0, 1, \dots$):

$$\begin{aligned} M_V^2(n) &= 16\pi^2 f_\pi^2(1/2 + n), \\ M_A^2(n) &= 16\pi^2 f_\pi^2(1 + n). \end{aligned} \tag{54}$$

Отметим два замечательных свойства спектра (54): величина массы ρ-мезона, $M_\rho = 2\sqrt{2}\,\pi f_\pi$, что является весьма успешным предсказанием [137], и естественное обобщение формулы Вайнберга [118]: ($M_{a_1} = \sqrt{2}M_\rho$)

$$M_A^2(n) = M_V^2(n) + M_\rho^2. \tag{55}$$

n	1	2	3	4
$M_V(n)$	800 (769.8 ± 0.8)	1390 (1465 ± 25)	1790	2120 (2149 ± 17)
$M_A(n)$	1130 (1230 ± 40)	1600 (1640 ± 40)	1960	2260
$\mu = 1130\,(1090 \div 1140)$ [20],	$F_{a_1} = 130\,(123 \pm 25)$,	$F_\rho = 130\,(154 \pm 8)$		

Таблица 1: Линейный спектр масс (в МэВ) для $f_\pi = 90$ МэВ. Известные экспериментальные значения [19] приведены в скобках.

Сравнение модельных оценок и экспериментальных данных представлено в таблице 1. Полученные результаты хорошо согласуются в пределах приближения больших N_c.

Следующая из уравнения (51) оценка на величину кваркового конденсата превосходит соответствующее феноменологическое значение, $\frac{\alpha_s}{12\pi}\langle G^2\rangle = (360\,\text{МэВ}\,)^4$, в аксиально-векторном канале, $\frac{\alpha_s}{12\pi}\langle G^2\rangle = 64\pi^2 f_\pi^4 = (450\,\text{МэВ})^4$, и дает отрицательное значение в векторном случае. Трудность с глюонным конденсатом в правиле сумм (51) известна (см., например, [33]). В рамках представленной схемы данная проблема может быть преодолена путем введения некоторых нелинейных поправок к спектру (46).

2.3 Нелинейный спектр масс

Рассмотрим следующий анзац для спектра масс мезонов:

$$M_J^2(n) = m_J^2 + \mu^2 n + \frac{f_\pi^2 d_J}{(n+1)^{k_J}}, \qquad k_J > 2. \tag{56}$$

Согласно сделанной гипотезе, последнее слагаемое в (56) (где для ясности выделен размерный параметр) представляет собой убывающую по n поправку к линейному спектру, появившуюся вследствие нарушения киральной симметрии. Обозначая этот вклад как δ, можно написать (индекс J опущен):

$$\sum_n \frac{F^2}{Q^2 + m^2 + \mu^2 n + \delta} = \sum_n \frac{F^2}{Q^2 + m^2 + \mu^2 n} - \sum_n \frac{F^2 \delta}{(Q^2 + m^2 + \mu^2 n)(Q^2 + m^2 + \mu^2 n + \delta)}. \tag{57}$$

[10] Здесь и далее мы не будем следить за явной зависимостью физических величин от числа цветов N_c. В частности, множитель $\sqrt{3/N_c}$ для наклона μ в уравнении (53) опущен.

Первое слагаемое в правой части (57) может быть обработано как в предыдущем параграфе. Во втором слагаемом суммирование по n и разложение по $1/Q^2$ могут быть переставлены благодаря абсолютной сходимости (не менее, чем вплоть до $\mathcal{O}(1/Q^6)$).

Рассмотрим аксиально-векторный канал. Правила сумм (49), (50), (52) решены в нулевом порядке по конденсатному разложению. В силу уравнений (3), (56), в первом порядке этого разложения правило сумм (52) имеет вид:

$$d_A = \frac{11\pi\alpha_s}{8\pi^2\zeta(k_A-1)}\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{f_\pi^6} + \mathcal{O}\left(\frac{\langle\bar{q}q\rangle^4}{f_\pi^{12}}\right), \tag{58}$$

где $\zeta(x)$ есть дзета-функция Римана. Наложим условие выполнения правила сумм (51) в первом порядке конденсатного разложения. Это дает уравнение на параметр k_A:

$$\frac{1}{f_\pi^4}\frac{\alpha_s}{\pi}\langle G^2\rangle = 64\pi^2 - 48\zeta(k_A)d_A\,. \tag{59}$$

В векторном канале соответствующие уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered} d_V = -\frac{7\pi\alpha_s}{2\pi^2\left[2\zeta(k_V-1)-\zeta(k_V)\right]}\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{f_\pi^6} + \mathcal{O}\left(\frac{\langle\bar{q}q\rangle^4}{f_\pi^{12}}\right), \\ \frac{1}{f_\pi^4}\frac{\alpha_s}{\pi}\langle G^2\rangle = -32\pi^2 - 48\zeta(k_V)d_V\,. \end{gathered} \tag{60}$$

Для входных параметров $f_\pi = 90$ МэВ, $\langle\bar{q}q\rangle = -(240\,\text{МэВ})^3$, $\frac{\alpha_s}{\pi}\langle G^2\rangle = (360\,\text{МэВ})^4$, $\alpha_s = 0.3$ численные вычисления дают $k_A \approx k_V \approx 2.1$, а также показывают, что члены, содержащие кварковый конденсат, действительно являются малыми параметрами (их вклад численно меньше, чем точность счета по большим N_c). Представленное решение для поправок понижает массу ρ-мезона на 40 МэВ и увеличивает массу a_1-мезона на 20 МэВ. Массы радиальных возбуждений при этом практически не меняются.

В данном подходе формула Вайнберга имеет поправку, которая при сделанных фитах принимает вид:

$$M_{a_1}^2 - 2M_\rho^2 \approx \frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{20f_\pi^4}, \tag{61}$$

т.е. в этой модели отклонение от соотношения Вайнберга является параметром порядка нарушения киральной симметрии в КХД.

На первый взгляд может показаться, что представленное решение для поправки в спектре (56) дает патологию в следующем порядке OPE: второе слагаемое в правой части (57) расходится, начиная с $\mathcal{O}(1/Q^8)$. Однако, такое суждение, вообще говоря, неверно: рассмотрение следующего порядка означает добавление еще одного правила сумм (а именно, при Q^{-8}), то есть введение нового уравнения в систему. Для самосогласованности нам тогда неизбежно надо ввести новый параметр в поправке к линейному спектру масс и решать получившуюся систему для нового набора параметров.

Отметим также, что в рассмотренной модели константы распада выбраны постоянными, то есть не удовлетворяют сформулированному ранее условию (22). В принципе, предложенный анзац можно исправить, но это значительно усложнит вид правил сумм. Мы выбрали данный анзац по соображениям максимальной простоты модели. Возникающие при этом трудности с аналитическим видом OPE не являются здесь принципиальной проблемой — они относятся к тому "хвосту" операторного разложения, который в вычислениях не учитывался.

Выводы к Главе I

В данной главе рассмотрена проблема совместного рассмотрения ("сшивки") резонансной части двухточечных корреляторов VASP токов с их OP для случая бесконечного числа резонансов с универсальным наклоном. Анализ был выполнен для легких нестранных мезонов в приближении большого числа цветов и киральном пределе. Суммируем основные результаты, полученные в первой части главы:

1) Корректная сшивка с OP невозможна в рамках линейной параметризации спектра масс.

2) Сходимость обобщенных правил сумм Вайнберга требует универсальности наклонов и интерсептов для масс киральных партнеров.

3) Должны существовать отклонения от линейного спектра масс, параметризующие нарушение киральной симметрии. Эти отклонения экспоненциально (или быстрее) убывают с ростом номера радиального возбуждения.
4) Существуют также отклонения от соотношения для мезонных вычетов (констант распада) $F^2(n)$ (для констант $G^2(n)$ в скалярном случае). Аналитическая структура ОР также налагает экспоненциальное (или быстрее) убывание на эти отклонения с ростом n.
5) Для достаточно тяжёлых состояний, происходит отщепление D-волновых векторных мезонов от асимптотических правил сумм. Данный факт предполагает экспоненциальное (или быстрее) убывание соответствующих констант распада $F_D^2(n)$.
6) Наши результаты, по-видимому, исключают интерпретацию состояния $\sigma(600)$ как легчайшего кваркония и указывают на нелинейную реализацию киральной симметрии с массой легчайшего скаляра около 1 ГэВ, киральным партнёром которого является $\pi'(1300)$.
7) В качестве побочного продукта нашего анализа, вычислены киральные константы L_8 и L_{10}, а также электромагнитная разность масс пионов Δm_π. Результаты оказались в хорошем согласии с феноменологией.

К сожалению, мы не знаем внутренней динамики, которая порождает экспоненциальные вклады в мезонные массы и вычеты. Можно предположить, что эти отклонения от струнной картины параметризуют нарушение киральной симметрии в КХД [106, 107] и, следовательно, должны быть пропорциональны степеням кваркового конденсата $\langle\bar{q}q\rangle$ [54]. Один из возможных вариантов развития этой идеи представлен в следующем разделе главы, где была предложена соответствующая модель и схема счета. В этой схеме кварковый конденсат рассматривается как малый параметр, по степеням которого можно разлагать. Правило сумм при Q^{-6}, чувствительное к нарушению киральной симметрии, дает тогда набор решений для интерсептов (в нулевом порядке конденсатного разложения). Правило сумм при Q^{-2} позволяет классифицировать эти решения. Правило сумм при Q^0 дает значения вычетов, а правило сумм при Q^{-2}

в аксиально-векторном канале позволяет определить величину универсального наклона. В итоге, линейный спектр масс оказывается параметризован только одной константой f_π, при этом хорошо удовлетворяя известной феноменологии. Правило сумм при Q^{-4} служит для проверки решений. Было обнаружено, что это правило сумм не может быть удовлетворено без нелинейных поправок к струноподобному спектру масс. Эти поправки оказались довольно малыми, однако они делают правила сумм самосогласованными. Таким образом, предложена модель, в которой струноподобная часть спектра КХД и часть, возникшая вследствие нарушения киральной симметрии, являются естественным образом факторизованы. Такой подход оказывается альтернативной точкой зрения на асимптотическое поведение спектра масс VA-мезонов по сравнению с идеологией, рассмотренной в первой части главы: здесь V- и A-траектории имеют постоянное расщепление при любой энергии. Похожий результат следует также из работ [39–42].

Глава II

3 Электромагнитное расщепление масс π-мезонов

3.1 Введение

Во введении к диссертации указывалось, что главный вклад в расщепление масс π-мезонов имеет электромагнитную природу, и при этом существуют различные способы вычисления вклада электромагнитных взаимодействий в эту разность [57–68]. Один из простых способов для вычисления данной величины в главном порядке по электромагнитной константе связи α был предложен в [56], где она вычислялась на основе алгебры токов с помощью правил сумм Вайнберга [118], причем последние насыщались одним векторным $\rho(770)$ и одним аксиально-векторным $a_1(1260)$-мезонами. В то же время из таблицы мировых данных PDG [19] (см. также [20, 21]) известен ряд тяжелых резонансов с квантовыми числами $\rho(770)$-мезона — $\rho(1450)$, $\rho(2150)$, которые на языке потенциальных кварковых моделей являются радиальными возбуждениями $\rho(770)$-мезона. В аксиально-векторном канале также возможно существование радиальных возбуждений $a_1(1260)$-резонанса, хотя их массы пока еще не определены однозначно из экспериментов. В частности, косвенным указанием на их существование является результат линейной реализации киральной симметрии, в соответствии с которой, каждый V-мезон должен иметь своего кирального партнера по четности. Таким образом возникает вопрос: каков вклад высших VA-резонансов в электромагнитную разность масс $\Delta m_\pi|_{\rm em}$ π-мезонов?

В настоящей главе исследуется возможность учета вклада первых радиальных VA возбуждений в электромагнитную разность масс $\Delta m_\pi|_{\rm em}$ π-мезонов [10, 69]. Мы будем использовать модификацию соответствующей формулы, выведенной в [56]. При этом рассматриваются два способа. В первом из них учитывается третье правило сумм ВКС, а во втором оно не используется [69].

3.2 Электромагнитное расщепление масс π-мезонов

Электромагнитное расщепление масс π-мезонов $\Delta m_\pi|_{\rm em}$, в киральном пределе определяется известной формулой [56, 62, 65, 141]:

$$(m^2_{\pi^+} - m^2_{\pi^0})|_{\rm em} = \frac{2e^2 C}{f^2_\pi}\,, \tag{62}$$

где f_π есть константа слабого распада π-мезона, а константа C связана с разностью векторного и аксиально-векторного корреляторов:

$$C = -\frac{1}{8\pi^2}\cdot\frac{3}{4}\int\limits_0^\infty dp^2\cdot p^2[\Pi^V(p^2) - \Pi^A(p^2)]. \tag{63}$$

Первые два правила сумм Вайнберга обеспечивают сходимость интеграла (63) на ультрафиолетовом пределе. В результате можно получить, что:

$$(m^2_{\pi^+} - m^2_{\pi^0})|_{\rm em} = \frac{3}{4}\frac{\alpha}{\pi f^2_\pi}\sum_{k=1}^\infty\left\{f^2_{A,k}m^4_{A,k}\ln m^2_{A,k} - f^2_{V,k}m^4_{V,k}\ln m^2_{V,k}\right\}. \tag{64}$$

В данном разделе мы переопределили константы распада (9),

$$F_{V,A} = m_{V,A} f_{V,A}. \tag{65}$$

Подставляя в (64) двухрезонансный анзац ($k = 1$) для VA-корреляторов, приходим к результату [56]:

$$\Delta m_\pi|^{(2)}_{\rm em} \equiv (m_{\pi^+} - m_{\pi^0})|^{(2)}_{\rm em} = \frac{3\alpha}{4\pi(m_{\pi^+} + m_{\pi^0})}\frac{m^2_{a_1}m^2_\rho}{m^2_{a_1} - m^2_\rho}\ln\frac{m^2_{a_1}}{m^2_\rho}. \tag{66}$$

Если использовать соотношение Вайнберга $m_{a_1} = \sqrt{2}\,m_\rho$, то $\Delta m_\pi|^{(2)}_{\rm em} = 5.21$ МэВ. Экспериментальное значение [19] $(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})|_{\rm exp} = 4.59$ МэВ. В действительности, соотношение Вайнберга не точное, а подстановка в (66) экспериментальной величины массы a_1-мезона $m_{a_1} = 1230$ МэВ дает оценку

$\Delta m_\pi|_{\rm em}^{(2)} = 5.79$ МэВ (относительное расхождение с экспериментом — 26%). Отметим: здесь нужно также учесть и то, что в разности $m_{\pi^+} - m_{\pi^0}$ имеются еще и другие вклады, в частности, обусловленные нарушением изоспиновой симметрии, то есть неравенством масс u- и d-кварков [135, 142, 143] в КХД. Суммарная величина этих вкладов имеет оценку [135, 136]: $\Delta m_\pi|_{\text{КХД}} = 0.17 \pm 0.03$ МэВ. Вклад следующих порядков разложения по $1/N_c$ не превышает 7%, как это следует из [68, 141]. Электрослабые взаимодействия вносят вклад менее 1% [144]. Таким образом, вклад только от электромагнитных взаимодействий эффективно оказывается:

$$\Delta m_\pi|_{\rm em} = 4.42 \pm 0.03 \text{ МэВ}\,, \tag{67}$$

и сравнивать результаты расчетов мы будем с (67) (как это делается, например, в [63, 65]). Таким образом, относительное расхождение результата формулы (66) с (67) для двухрезонансного анзаца составляет 31%. В следующем разделе мы оценим эту разницу, учитывая вклады высших мезонных резонансов в векторном и аксиально-векторном каналах.

3.3 Учет вклада высших VA-резонансов в электромагнитное расщепление масс π-мезонов

Вычислим электромагнитную разность масс π-мезонов $\Delta m_\pi|_{\rm em}$ в случае с двумя векторными и двумя аксиально-векторными мезонными резонансами, т.е. в рамках 4-резонансного анзаца. В (66) использование правил сумм Вайнберга позволило исключить параметры f_ρ и f_{a_1}. В 4-резонансном случае мы будем иметь дело с тремя правилами сумм восстановления киральной симметрии, где четыре неизвестных параметра: f_ρ, f_{a_1}, $f_{\rho'}$, $f_{a_1'}$. Задачу можно решить самосогласованным образом, используя приближенное соотношение $m_{a_1'} \gtrsim m_{\rho'}$, которое следует из свойств спектра масс, полученного в предыдущей главе. Введем параметр $\delta_m \equiv \frac{m_{a_1'}^2 - m_{\rho'}^2}{m_{\rho'}^2} \ll 1$. Насыщая корреляторы в (63) четырьмя резонансами и ограничиваясь в вычислениях первой степенью δ_m, приходим к $\Delta m_\pi|_{\rm em}^{(4)}$:

$$(m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2)|_{\rm em}^{(4)} \simeq \frac{3\alpha}{4\pi f_\pi^2} \left\{ f_{a_1}^2 m_{a_1}^4 \ln m_{a_1}^2 - \right. \\ \left. f_\rho^2 m_\rho^4 \ln m_\rho^2 - \delta_f m_{\rho'}^4 \ln m_{\rho'}^2 + \epsilon m_\rho^2 (1 + 2 \ln m_\rho^2) \right\}, \quad (68)$$

где неизвестные параметры f_ρ^2, $f_{a_1}^2$ и $\delta_f \equiv f_{\rho'}^2 - f_{a_1'}^2$ находятся из правил сумм ВКС в 4-резонансном случае, которые выглядят теперь следующим образом:

$$\begin{aligned} m_\rho^2 f_\rho^2 - m_{a_1}^2 f_{a_1}^2 + m_{\rho'}^2 \delta_f &= f_\pi^2 + \epsilon\,, \\ m_\rho^4 f_\rho^2 - m_{a_1}^4 f_{a_1}^2 + m_{\rho'}^4 \delta_f &= 2 m_{\rho'}^2 \epsilon\,, \\ m_\rho^6 f_\rho^2 - m_{a_1}^6 f_{a_1}^2 + m_{\rho'}^6 \delta_f &= -4 \langle \bar{q} q \rangle^2 + 3 m_{\rho'}^4 \epsilon\,, \end{aligned} \quad (69)$$

а $\epsilon \equiv f_{a_1'}^2 m_{\rho'}^2 \delta_m$.

Используя экспериментальные значения: $m_\rho = 770$ МэВ, $m_{a_1} = 1230 \pm 40$ МэВ, $m_{\rho'} = 1465 \pm 25$ МэВ, $f_\pi = 93$ МэВ, а также имея в виду среднее значение кваркового конденсата $\langle \bar{q} q \rangle = -235 \pm 15$ (МэВ)^3 и малость параметра ϵ, можно получить из (68) и (69):

$$f_\rho \approx 0.18\,, \qquad f_{a_1} \approx 0.11\,, \qquad f_{\rho'}^2 - f_{a_1'}^2 \approx 0.0034\,, \quad (70)$$

а для электромагнитной разности масс π-мезонов:

$$\Delta m_\pi|_{\rm em}^{(4)} \approx 3.85 \pm 0.16 \text{ МэВ}. \quad (71)$$

Учет поправки на ненулевое значение кваркового конденсата улучшает результат для $\Delta m_\pi|_{\rm em}^{(4)}$ на 5%, и для данного анзаца относительное расхождение с (67) составляет 13%. Отметим, что увеличение значения кваркового конденсата ведёт к увеличению $\Delta m_\pi|_{\rm em}^{(4)}$ (например, при $\langle \bar{q} q \rangle = -300$ (МэВ)^3, $\Delta m_\pi|_{\rm em}^{(4)} = 4.42$ МэВ), а использование для f_π значения, которое она имеет в киральном пределе, $f_\pi = 87$ МэВ [135,136], меняет результат менее чем на 1%. Изменение же масс VA-резонансов при переходе к этому пределу весьма мало [68].

Из данных работы [62] следует, что $f_\rho = 0.20 \pm 0.01$ (из распада $\rho^0 \to e^+ e^-$); $f_{a_1} = 0.10 \pm 0.02$ (из распада $a_1 \to \pi\gamma$). Константу $f_{\rho'}$ пока не удалось извлечь из эксперимента, поскольку электромагнитный распад ρ'-мезона сильно подавлен адронными каналами распада, тем не менее из (70) следует нижняя оценка: $f_{\rho'} \gtrsim 0.06$. Численные результаты для f_ρ, f_{a_1} в данном расчете совпадают с оценками работ [145, 146].

Мы можем также вычислить и киральную константу L_{10} эффективного кирального лагранжиана [135, 136], которая определяется среднеквадратичным зарядовым радиусом π-мезона $\langle r_\pi^2 \rangle$ и аксиально-векторным пионным формфактором F_A распада $\pi \to e\nu\gamma$ (см., например, [147]). Используя соотношение:

$$L_{10} = -\frac{1}{16}\frac{d}{dp^2}\left(p^2\left(\Pi^V(p^2) - \Pi^A(p^2)\right)\right)_{p^2=0}, \tag{72}$$

а также (1) и (9), нетрудно получить для L_{10} [150]:

$$L_{10} = \frac{1}{4}\left(\sum_n f_{A,n}^2 - \sum_n f_{V,n}^2\right), \tag{73}$$

что приводит в случае для $n = 1, 2$ к оценке константы $L_{10} \approx -6.0 \times 10^{-3}$, которая согласуется с принятой феноменологической величиной [148] из адронных τ-распадов: $L_{10}|_{\text{phen}} = (-5.5 \pm 0.7) \cdot 10^{-3}$ (см. также [149]).

Рассмотрим, как будет работать вышеприведенная схема расчета $\Delta m_\pi|_{\text{em}}$ при учете в правилах сумм ВКС новых резонансов. В силу ВКС при высоких энергиях можно ожидать, что если выполняется $m_{a_1'}^2 - m_{\rho'}^2 \ll m_{\rho'}^2$, то тем более выполняется неравенство $m_{a_1''}^2 - m_{\rho''}^2 \ll m_{\rho''}^2$. А поскольку масса $m_{\rho''}$ известна, то в системе (69) появляется только одна новая переменная $f_{\rho''}^2 - f_{a_1''}^2$. В качестве дополнительного условия можно положить константу f_{a_1} равной ее экспериментальному значению: $f_{a_1} \approx 0.10$. Тогда численное решение получившейся системы дает: $\Delta m_\pi|_{\text{em}}^{(6)} \approx 3.94$ МэВ (относительное расхождение с (67) составляет 11%), $f_\rho \approx 0.18$, $f_{\rho'}^2 - f_{a_1'}^2 \approx 0.0023$ (и, как следствие, $f_{\rho'} \gtrsim 0.05$), $f_{\rho''}^2 - f_{a_1''}^2 \approx 0.0003$, $L_{10} \approx -6.2 \times 10^{-3}$. Видно, что добавление высших резонансов в электромагнитную разность масс для π-мезонов улучшает результат, приближая его к экспериментальному значению.

Можно оценить вклад высших резонансов в (64) и другим способом, не используя третьего правила сумм ВКС, а именно, принимая во внимание в (64) неравенство:

$$\frac{m_{A,k}^2 - m_{V,k}^2}{m_{V,k}^2} \ll 1, \qquad k > 1\,, \tag{74}$$

которое является следствием ВКС при высоких энергиях, получим:

$$\sum_{k=2}^{n} \left(m_{A,k}^4 f_{A,k}^2 \ln m_{A,k}^2 - m_{V,k}^4 f_{V,k}^2 \ln m_{V,k}^2\right) \simeq$$

$$\simeq (m_\rho^4 f_\rho^2 - m_{a_1}^4 f_{a_1}^2) \ln \bar{m}_{V,n}^2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{m_{A,k}^2}{m_{V,k}^2} - 1\right) m_{A,k}^4 f_{A,k}^2, \tag{75}$$

где мы ввели усредненную массу $\bar{m}_{V,n}$ в смысле:

$$\sum_{k=2}^{n} \left(m_{V,k}^4 f_{V,k}^2 - m_{A,k}^4 f_{A,k}^2\right) \ln m_{V,k}^2 \equiv$$

$$\ln \bar{m}_{V,n}^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \left(m_{V,k}^4 f_{V,k}^2 - m_{A,k}^4 f_{A,k}^2\right). \tag{76}$$

При сделанных предположениях и принятых в работе значениях спектральных характеристик для VA-мезонов, второе слагаемое в (75) на два-три порядка меньше первого (по крайней мере, если n невелико). Поэтому им в дальнейшем мы можем пренебречь. Формулу (64) можно переписать как:

$$\Delta m_\pi\big|_{\mathrm{em}}^{(n)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha}{\pi f_\pi^2 (m_{\pi^+} + m_{\pi^0})} \times$$

$$\left\{(m_{a_1}^4 f_{a_1}^2 \ln m_{a_1}^2 - m_\rho^4 f_\rho^2 \ln m_\rho^2) - (m_{a_1}^4 f_{a_1}^2 - m_\rho^4 f_\rho^2) \ln \bar{m}_{V,n}^2\right\}. \tag{77}$$

Второе слагаемое в (77) (имеющее множитель $\ln \bar{m}_{V,n}^2$) является добавкой к (66) (формула (66) записана в виде, где константы f_ρ и f_{a_1} исключены с помощью одноканальных правил сумм ВКС). В случае точного выполнения 2-го одноканального правила сумм (19), это слагаемое исчезает.

Если мы предполагаем достаточно хорошую сходимость правил сумм ВКС (такую, чтобы учет в них резонансов с $k > 2$ не приводил к существенным изменениям определяемых из них спектральных характеристик резонансов с $k \leq 2$), то в нашем приближении величина $\bar{m}_{V,n}$ на практике очень мало отличается от $m_{\rho'}$. Таким образом, мы можем положить $\ln \bar{m}_{V,n} \simeq \ln m_{\rho'}$, и обобщение для формулы (66) тогда принимает вид:

$$\overline{\Delta m_\pi}|_{\mathrm{em}} \simeq \frac{3}{4}\frac{\alpha}{\pi f_\pi^2 (m_{\pi^+} + m_{\pi^0})} \left\{ m_\rho^4 f_\rho^2 \ln \frac{m_{\rho'}^2}{m_\rho^2} - m_{a_1}^4 f_{a_1}^2 \ln \frac{m_{\rho'}^2}{m_{a_1}^2} \right\}, \quad (78)$$

где черта означает, что мы используем приближение усредненной массы для высших мезонных резонансов. В отличие от предыдущего метода, в (78) нет зависимости от кваркового конденсата.

Из вывода формулы (78) следует, что мы должны подставлять те значения f_ρ и f_{a_1}, которые они имеют в рассматриваемом анзаце с данным числом учтенных резонансов (так как должны выполняться правила сумм ВКС). Например, для 4-резонансного анзаца $f_\rho \approx 0.18$, $f_{a_1} \approx 0.11$, и соотношение (78) дает при этом ответ, почти совпадающий с ответом (71), но без учета кваркового конденсата $\overline{\Delta m_\pi}|_{\mathrm{em}}^{(4)} = 3.64$ МэВ, что уже является улучшением по сравнению с одноканальным случаем. Кроме того, преимущество формулы (78) перед (66) очевидно и в том случае, что если мы подставим в них экспериментальные значения f_ρ, f_{a_1} и проварьируем в пределах экспериментальной погрешности величины: $f_\rho = 0.20 \pm 0.01$, $f_{a_1} = 0.10 \pm 0.02$ и $m_{a_1} = 1230 \pm 40$ МэВ, тогда формула (66) (точнее, формула (64) при $k = 1$) дает абсурдный результат: $\Delta m_\pi|_{\mathrm{em}} = 102^{+160}_{-120}$ МэВ, связанный, главным образом, с плохим выполнением одноканальных правил сумм Вайнберга. В то же время ответ формулы (78) оказывается вполне приемлемым: $\overline{\Delta m_\pi}|_{\mathrm{em}} = 7.4 \pm 3.3$ МэВ. Таким образом, второе слагаемое в (77) на практике того же порядка, что и первое, и близко к нему по величине, а учет высших резонансов является важным. Из формулы (77) можно ожидать, что при переходе от 4-резонансного анзаца к 6-резонансному и т.д. поправка растет уже медленно и причем в нужную сторону, т.к. учет высших резонансов с $k > 2$ эффективно приводит к незначительному увеличению усредненной массы $\bar{m}_{V,n}$, а соответствующая добавка входит в (77) с отрицательным знаком. В итоге, переход от 2-

резонансного анзаца к 4-резонансному меняет результат в нужную сторону, а учет вклада высших резонансов ($k > 2$), хотя и улучшает результат, но дает лишь малую поправку.

4 Максимальная кварк-адронная дуальность для линейного спектра

4.1 Введение

Тридцать лет назад Мигдал [74] рассмотрел задачу об аппроксимации пертурбативной асимптотики двухточечного векторного коррелятора (так называемый логарифм партонной модели) бесконечной суммой полюсов наилучшим способом в смысле минимальности отклонений. Полученный спектр оказался линейным по массам с экспоненциально малыми поправками к пертурбативному логарифму. Похожий результат был недавно переоткрыт в рамках АдС/КХД подхода [75]. В настоящее время, накоплено много теоретических и феноменологических указаний на то, что с хорошей точностью спектр является линейным по квадратам масс, т.е. имеет струноподобную форму. Кроме того, согласно операторному разложению для двухточечных корреляторов [30], поправки к пертурбативному логарифму должны спадать полиномиально, а не экспоненциально. С другой стороны, насыщая двухточечные корреляторы линейным спектром по квадратам масс, можно корректно воспроизвести аналитическую структуру ОР (полиномиальные поправки) с неизчезающими вычетами (константы в асимптотике). Возникает интересный вопрос: какой линейный спектр для квадратов масс интерполирует асимптотику корреляторов наилучшим образом? Ответ на этот вопрос является важным для моделей адронных струн и для голографических методов. В данном разделе мы предлагаем решение задачи в рамках правил сумм КХД в пределе большого числа цветов [28, 29]. Будет показано, что свойства линейного спектра и ОР полностью определяются свойствами полиномов Бернулли. Именно этот факт позволяет решить задачу [76]. В случае векторных мезонов, решение оказывается в точности спектром дуальной амплитуды Ловеласа-Шапиро

(ЛШ) [151–153].

4.2 Правила сумм для линейного спектра

Правила сумм для линейного спектра уже обсуждались в разделе 2, здесь мы выведем явное выражение для всех возможных правил сумм. Вкратце, ОР для двухточечного векторного коррелятора имеет следующую структуру,

$$\Pi(Q^2) \xrightarrow[Q^2\to\infty]{} C_0 \ln\frac{\mu^2}{Q^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{Q^{2k}}. \tag{79}$$

Коэффициэнты C_k слабо зависят от масштаба μ и евклидова импульса Q^2 и могут быть вычислены пертурбативно. С другой стороны, в планарном пределе коррелятор насыщается бесконечной суммой по полюсам, что для линейного спектра означает

$$\Pi(Q^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2F^2}{Q^2+an+m^2} = -\frac{2F^2}{a}\,\psi\left(\frac{Q^2+m^2}{a}\right) + \text{Const}, \tag{80}$$

где ψ-функция есть производная гамма-функции. Введём обозначения

$$z \equiv \frac{Q^2}{a}, \qquad x \equiv \frac{m^2}{a}. \tag{81}$$

ψ-имеет следующее асимптотическое представление при большом аргументе

$$\psi(z+x) = \ln(z+x) - \frac{1}{2(z+x)} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(z+x)^{2k}}, \tag{82}$$

Здесь B_{2k} означают числа Бернулли (см. Приложение Б.1). Разлагая уравнение (82) при $z \gg x$, приходим к выражению (см. Приложение Б.2)

$$\psi(z+x) = \ln z - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k B_k(x)}{kz^k}, \tag{83}$$

где $B_k(x)$ являются полиномами Бернулли. Мы не нашли разложения (83) в математических справочниках, поэтому приводим вывод в Приложении Б.2. Это разложение полностью определяет ОР для линейного спектра через полиномы Бернулли и наоборот. А именно, приравнивая разложения (79) и (83), приходим к

$$\frac{2F^2}{a}\ln\frac{a}{Q^2}+2F^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{k-1}B_k(x)}{kQ^{2k}}+\text{Const}=\frac{N_c}{12\pi^2}\ln\frac{\mu^2}{Q^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{Q^{2k}}. \tag{84}$$

Логарифмы можно всегда сделать равными подходящим выбором константы. Тогда

$$F^2=\frac{N_c a}{24\pi^2}, \tag{85}$$

и общая структура правил сумм для линейного спектра имеет вид

$$C_k=\frac{(-1)^k N_c a^k B_k(x)}{12\pi^2 k}. \tag{86}$$

Таким образом, слабая зависимость от μ и Q^2 коэффициентов C_k заменена константой.

Правила сумм, рассмотренные в работах [32, 34–36, 51, 54, 55, 154–156] фактически являются частными случаями компактного выражения (86) для $k = 1, 2, 3$ с точностью до добавления изолированных резонансов [11]. Мы ожидаем, что этим правилам сумм можно доверять для $k \lesssim 7$ по причине сходимости ненулевых (т.е. чётных) чисел Бернулли только до B_6, см. их значения (Б.3) п Приложнии Б.1. После этого числа расходятся ввиду асимптотической природы разложения.

В качестве примера рассмотрим векторный случай. Первые три правила сумм (86) выглядят как (см. разложение (2))

$$0 = x-1/2, \tag{87}$$

$$\frac{\alpha_s\langle G^2\rangle}{12\pi F^2 a} = x^2-x+1/6, \tag{88}$$

$$-\frac{2\xi^V\pi\alpha_s\langle\bar{q}q\rangle^2}{3F^2a^2} = x\left(x-1/2\right)\left(x-1\right), \tag{89}$$

где F^2 даётся выражением (85). А первом правиле сумм (87), левая часть равна нулю благодаря отсутствию локального калибровочно-инвариантного конденсата размерности два в ОР.

[11] Подобные выражения были выведены другим способом в работе [37].

Рассмотрим величину в левой части уравнения (89), где F^2 подставлено из (85),

$$\epsilon \equiv -\frac{16\pi^3 \xi^V \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{N_c a^3}, \tag{90}$$

(напомним, что хотя α_s и кварковый конденсат зависят от масштаба нормировки, эта зависимость практически пренебрежима в комбинации $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2$). Далее мы будем интересоваться решением $x = 1/2$, соответствующим $\langle \bar{q}q \rangle = 0$. Величина ϵ сдвигает это решение,

$$x = \frac{1}{2} + \delta. \tag{91}$$

Оценим величину этого сдвига, появляющегося из-за ненулевой величины кваркового конденсата. Из соотношения Гелл-Манна–Оакеса–Реннера

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -(m_u + m_d)\langle \bar{q}q \rangle, \tag{92}$$

со стандартными входными величинами (предполагается масштаб НКС, $1 \div 1.2$ GeV) $m_u + m_d \approx 12$ МэВ, $f_\pi \approx 92.4$ МэВ и $m_\pi \approx 135$ МэВ получаем $\langle \bar{q}q \rangle \approx -(235\,\text{МэВ})^3$. Константа связи КХД на том же масштабе равна $\alpha_s \approx 0.5$. Последней величиной, которая нам нужна, является наклон a. Если мы примем усреднённое значение $a \approx 1.14$ ГэВ^2 из компиляции [22], тогда из уравнения (90) получим: $\epsilon \approx 0.07$. Подставляя (91) в правую часть (89) и пренебрегая членом $\mathcal{O}(\delta^3)$, приходим к

$$\delta \simeq -4\epsilon. \tag{93}$$

Отсюда видно, что в реальном мире поправки имеют величину $\delta \approx -0.3$.

Наш последующий анализ верен, строго говоря, для малых поправок, $|\delta| \ll 0.5$, т.е. либо а пределе достаточно малого кваркового конденсата либо в пределе достаточно большого наклона. Последнее означает, что основное состояние сильно отделено от первого радиального возбуждения. Тем не менее, можно надеяться, что анализ имеет отношение к реальному миру: если рассмотреть планарный предел КХД, поправки

$\mathcal{O}(1/N_c) = \mathcal{O}(1/3)$ считаются малыми, и это оказывается хорошим приближением к реальности. В нашем случае, относительная величина поправок сравнима с поправками по $1/N_c$. Держа это в голове, мы возьмём решение $x = 1/2$ в качестве отправной точки в нашем анализе.

4.3 Максимально дуальный спектр

Хорошо известно, что линейный спектр можно сделать дуальным теории возмущений в одной петле со свободными кварками в смысле воспроизведения логарифма партонной модели в уравнении (84). Однако, в такой теории возмущений отсутствуют степенные поправки, в то время, как мы не можем их избежать, насыщая корреляторы линейным спектром. Поэтому представляется интересным найти такой анзац для линейного спектра, который минимизирует степенные поправки. Мы будем называть такой анзац максимально дуальным спектром.

Прежде всего заметим, что из отсутствия конденсата размерности два, соответствующего $C_1 = 0$ в уравнении (86), следует решение $x = 1/2$. Свойство (Б.8) даёт тогда $C_{2k+1} = 0$. Таким образом, половина степенных поправок автоматически зануляется. В частности, $C_3 \sim \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 = 0$, т.е. отсутствует НКС. Это хороший знак, поскольку теория возмущений не знает о НКС. Соотношение (Б.7) показывает, однако, что нулевые значения конденсатов C_{2k+1} соответствуют экстремумам C_{2k} и наоборот. Следовательно, невозможно удалить все степенные поправки. В КХД это могло бы означать, даже если бы киральная симметрия не была бы спонтанно нарушена ($\langle \bar{q}q \rangle = 0$), некоторые непертурбативные конденсаты существовали бы. Предположительно, они являются глюонными конденсатами с чётными степенями по глюонным полям, символически $\langle G^{2k} \rangle$. Следует обратить внимание на отрицательный знак у глюонного конденсата, даваемый уравнением (88) для $x = 1/2$, который указывает (если кварк-адронная дуальность здесь верна), что полученный спектр не может быть спектром реальных резонансов, для моделирования последнего нужно ввести некоторые поправки. Величина глюонного конденсата является очень чувствительной к таким поправкам. Данный факт может быть использован для нахождения поправок к массам и вычетам, которые согласованы с фактическими величинами конденсатов в ОР [51]. В данном разделе мы будем интересоваться анзацем, минимизирующим степенные поправки в ОР.

Как было сказано выше, минимизируя половину степенных поправок, неизбежно максимизируется другая половина. Сформулируем теперь проблему минимизации строго. Нам будет удобно измерять конденсаты в уравнении (86) в единицах наклона a, так что $C_k \sim \frac{B_k(x)}{k}$. Рассмотрим первые N правил сумм. Определим максимально дуальный спектр как анзац, дающий абсолютный минимум сумме

$$S(x) \equiv \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{B_k(x)}{k} \right)^2 . \tag{94}$$

Следовательно, нужно решить уравнение

$$\frac{dS(x)}{dx} = 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} B_k(x) B_{k-1}(x), \tag{95}$$

и подставить решение в

$$\frac{d^2S(x)}{dx^2} = 2 \sum_{k=1}^{N} \left(B_{k-1}^2(x) + \frac{k-1}{k} B_k(x) B_{k-2}(x) \right), \tag{96}$$

для проверки знака. Здесь было использовано соотношение (Б.7). Решение проблемы минимизации оказывается зависящем от N. Для $N < 16$ минимум достигается при $x = 1/2$. Для $N \geqslant 16$ и нечётных значениях, минимум такой же, однако для чётных N получаем $x \xrightarrow[N\to\infty]{} \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, т.е. корни $B_{2k}(x)$ в асимптотике (см. уравнение (Б.11)). Однако, как указано выше, мы не можем доверять правилам сумм при $N > 7$ поскольку начинается расходимость асимптотических рядов. По этой причине, начиная с некоторого N, последний член даёт главный вклад в приведённые выше суммы и, следовательно, полностью определяет их свойства. Таким образом, мы приходим к нашему главному выводу: *Максимально дуальным спектром* *для векторных мезонов является*

$$m^2(n) = a(n + 1/2). \tag{97}$$

Это не что иное как спектр амплитуды ЛШ для векторных состояний. В действительности, такое же заключение следует из любого выбора критерия минимальности вида

$$S^r(x) \equiv \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{B_k(x)}{k} \right|^r, \qquad r > 0. \tag{98}$$

Максимально дуальный спектр (97) является кирально симметричным в том смысле, что параметры порядка НКС, $\langle \bar{q}q \rangle$ и f_π, автоматически равны нулю в силу уравнений (87) и (89). Это неудивительно, так как теория возмущений явным образом кирально симметрична.

4.4 Поправки к линейному спектру

Линейный спектр является аппроксимацией. В реальности имеются поправки как к массам, $m^2(n) = a(n + x) + \Delta(n)$, так и к вычетам $F^2(n)$. Гладкая функция $\Delta(n)$ вряд ли существует в природе. Даже в гораздо более простом случае двумерной КХД в пределе больших N_c — модели 'т Хофта [157–159] — спектр получается численно в результате решения задачи на собственные значения весьма нетривиального интегрального уравнения. В результате спектр получается линейным лишь асимптотически, а физические массы имеют кажущиеся случайными отклонения от асимптотической формы. В реальном мире должно происходить нечто подобное. Можно, конечно, попытаться интерполировать эти отклонения некой гладкой функцией $\Delta(n)$. В первой главе были представлены аргументы, что для самосогласованности правил сумм отклонения должны убывать по n экспоненциально или даже быстрее. Альтернативные способ демонстрации этого аргумента представлен в Приложении Б.3. Однако, самосогласованность правил сумм допускает также не гладкие по n поправки к массам и вычетам. Такие состояния вставляются "руками"с помощью δ-функции, что будет рассмотрено в данном параграфе.

Отделённое состояние даёт следующий вклад в правила сумм

$$\frac{F_l^2}{Q^2+m_l^2} = F_l^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j m_l^{2j}}{Q^{2(j+1)}}, \tag{99}$$

где индекс l нумерует эти состояния. Каждый индивидуальный вклад, вообще говоря, очень большой по сравнению с типичными значенями конденсатов, стоящими со стороны ОР. С другой стороны, линейный анзац является хорошим приближением. Таким образом, чтобы не испортить правила сумм, разумно потребовать приближённого равенства фактической суммы этих вкладов и суммы вкладов от тех же состояний в случае их линейной параметризации, то есть мы требуем дуальности между фактическим спектром и линейным в смысле приближённого совпадения их разложений при большом евклидовом импульсе. Обозначим такую аппроксимацию знаком "$\simeq$". Отделим теперь первые k состояний. Тогда имеем

$$\sum_{l=0}^{k} F_l^2 m_l^{2i} \simeq \sum_{l=0}^{k} F^2 (l+x)^i, \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{100}$$

Удобно параметризовать отклонения от линейного спектра с помощью дилатаций,

$$F_l^2 = \lambda_l F^2, \tag{101}$$

$$m_l^2 = \Lambda_l a(l+x). \tag{102}$$

Когда $\lambda_l = \Lambda_l = 1$, отклонений нет. Требование дуальности (100) выглядит в этом случае следующим образом

$$\sum_{l=0}^{k} \lambda_l (\Lambda_l)^i (l+x)^i \simeq \sum_{l=0}^{k} (l+x)^i, \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{103}$$

Для аксиально-векторных мезонов, первое правило сумм из соотношения (103) имеет дополнительный полюс при $Q^2 = 0$, появляющийся в силу ЧСАТ благодаря наличию безмассового пиона. Это правило сумм имеет вид

$$\frac{f_\pi^2}{F^2} + \sum_{l=0}^{k} \lambda_l^A \simeq k. \tag{104}$$

Отделим первый векторный (ρ-мезон) и первый аксиально-векторный (a_1-мезон) мезоны и предположим, что только эти состояния подвержены сильному влиянию явления НКС, поскольку их массы близки к $\Lambda_{\text{НКС}}$. Имеем тогда для правил сумм с индексами $i = 0, 1$,

$$1 \simeq \lambda_\rho, \tag{105}$$

$$1 \simeq \frac{f_\pi^2}{F^2} + \lambda_{a_1}, \tag{106}$$

$$1 \simeq \lambda_{\rho,a_1}\Lambda_{\rho,a_1}. \tag{107}$$

Кроме того, эти соотношения дополняются уравнением (85) и решением для интерсепта, $x = 1/2$, последнее означает дуальность между реальным спектром и максимально дуальным.

Нарушение киральной симметрии влечёт за собой некоторые соотношения между спектральными параметрами основных состояний, который независимо выполняются во многих реалистичных моделях и находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. В сущности, они являются следствием приближения "один резонанс + континуум". Это следующие соотношения

$$F_\rho^2 \approx 2f_\pi^2, \tag{108}$$

$$m_{a_1}^2 \approx 2m_\rho^2, \tag{109}$$

$$m_\rho^2 \approx \frac{24\pi^2}{N_c} f_\pi^2. \tag{110}$$

Первое из них есть соотношение КСФР [160, 161]. Второе было впервые получено Вайнбергом в рамках спектральных правил сумм [118], используя соотношение КСФР (108). Впоследствии стало ясно, что эта формула выражает факт максимального смешивания продольной компоненты a_1-мезона с пионом после НКС, в то время как для векторного и скалярного состояний подобного смешивания не происходит [187, 188]. Первый вывод третьего соотношения (110) был предложен в рамках борелевских правил сумм [137]. В настоящее время оно понимается как следствие векторной доминантности и обычно имеет место в моделях, воспроизводящих это свойство (см., например, [162]).

Мы также должны воспроизвести соотношения (108)-(110). Обычно считается, что планарные правила сумм не могут полностью определить спектр масс. Это связано с тем фактом, что ОР является асимптотическим разложением для корреляторов, поэтому правила сумм могут дать только некоторые соотношения и ограничения. Для получения предсказаний, нужна дополнительная информация. Прежде всего заметим, что постулируя одно из соотношений (108)-(110), два других автоматически воспроизводятся из правил сумм (105)-(107), давая дополнительно соотношение для наклона,

$$a \simeq 2m_\rho^2 \simeq \frac{48\pi^2}{N_c} f_\pi^2, \tag{111}$$

и для аксиально-векторной константы распада $F_{a_1} \simeq f_\pi$. Для параметров дилатаций это означает следующее: $\lambda_\rho \simeq \Lambda_\rho \simeq 1$, $\lambda_{a_1} \simeq 1/2$ и $\Lambda_{a_1} \simeq 2$. Таким образом, в нашем приближении, массы и вычеты ρ-мезона не изменяются после НКС. Важно отметить, что полученный наклон совпадает с наклоном спектра амплитуды ЛШ, т.е. в уравнении (97) мы имеем не просто спектр типа ЛШ, а в точности этот спектр!

Однако в аксиально-векторном канале правила сумм с индексами $i > 1$ теперь нарушены. В частности, при $i = 2$ появляется вклад $2f_\pi^2 m_{a_1}^4$, дающий конденсат $\pi\alpha_s\langle\bar{q}q\rangle^2 \approx (4f_\pi)^6$. Таким образом, мы воспроизводим вывод работы [117]: *спонтанное НКС с $f_\pi^2 \neq 0$ в КХД в пределе больших N_c необходимо влечёт существование ненулевого локального параметра порядка*, который был сделан из анализа правил сумм с конечным числом резонансов. В нашем случае, этот вывод следует для бесконечного числа состояний, что более согласовано с пределом больших N_c, причём важные соотношения (108)-(110) являются выполненными.

В принципе, можно было бы добавить ещё резонансов и получить более хорошее согласование с экспериментом или точнее воспроизвести величины конденсатов. Однако, в этом случае нельзя независимо проверить теоретическую самосогласованность, поскольку аналог соотношений (108)-(110) для, скажем, анзаца "2 резонанса + континуум"неизвестен.

В действительности, для воспроизведения соотношений (108)-(110) не нужно никаких дополнительных предположений. В силу гипотезы ЧСАТ, они автоматически следуют, если отделить первый аксиально-векторный мезон. А именно, как показано в первой главе, пренебрегая экспоненциально малыми поправками и возможными вкладами от высших порядков теории возмущений [52, 53, 163], вычеты даются формулой (см. также Приложение Б.3)

$$F^2(n) = c\frac{dm^2(n)}{dn}, \tag{112}$$

где множитель c определяется коэффициентом перед пертурбативным логарифмом (85), $c = N_c/(24\pi^2)$. Отделим первое состояние от линейного спектра,

$$m^2(n) = a\left[n + x + \varepsilon\delta(n)\right], \tag{113}$$

где $\delta(n)$ означает δ-функцию. Так как производная линейной функции равна соответствующим конечным разностям, имеем из уравнения (112) для малых вариаций

$$F^2(n) = c\left[m^2(n+1) - m^2(n)\right] \simeq ca\left[1 - \varepsilon\delta(n)\right]. \tag{114}$$

Следовательно, даже без правил сумм видно, что при увеличении массы основного состояния, его константа распада уменьшается,

$$\frac{\delta m^2(0)}{\delta F^2(0)} \simeq -\frac{1}{c}. \tag{115}$$

Теперь напишем то же самое для аксиально-векторных мезонов. Спектр (113) будет иметь вид

$$m_{a_1}^2(n) = a\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\Lambda_{a_1} - 1}{2}\delta(n)\right). \tag{116}$$

Вспоминая уравнение (114), приходим к

$$\lambda_{a_1} \simeq 1 + \frac{1}{2}(1 - \Lambda_{a_1}). \tag{117}$$

Система уравнений (117) и (107) имеет два решения, $\{\lambda_{a_1}, \Lambda_{a_1}\} = \{1, 1\}, \{1/2, 2\}$. Последнее появляется только если есть дополнительный вклад 1/2 в первое правило сумм (106).

Отождествляя этот вклад с пионным полюсом в силу ЧСАТ, все вышеперечисленные соотношения немедленно следуют. Таким образом, увеличение массы аксиально-векторного мезона (по сравнению с векторным) и появление пионного полюса глубоко связаны. Уравнение (117) приводит также к дополнительному ограничению: $m_{a_1} < \sqrt{3}\, m_\rho$.

4.5 Правила сумм с конечным числом состояний

В этом параграфе мы отклонимся от главной линии и рассмотрим случай правил сумм с конечным числом состояний. Существует популярный метод работы с правилами сумм такого рода — так называемый подход правил сумм с конечной энергией (ПСКЭ) (см., например, обзор [167]). Вкратце, идея состоит в отделении нескольких (обычно одного) узких резонансов и наложении обрезания при некотором значении энергии, при этом заменяя остаток пертурбативным континуумом КХД. Эти правила сумм обычно довольно хорошо работают для разности корреляторов, скажем $\Pi^V(Q^2) - \Pi^A(Q^2)$, но для индивидуальных корреляторов они выполняются плохо. Причина заключается в том, что замена бесконечного числа состояний обрезанием является грубой интерполяцией. В результате происходит быстрый рост величины конденсатов, $C_k \sim \sum F^2(n) m^{2(k-1)}(n)$, который нереально компенсировать выбором обрезания одновременно для всех правил сумм при $k > 2$. На практике конденсаты, скажем $C_3 \sim \alpha_s \langle \bar{q} q \rangle^2$, гораздо меньше (на два порядка), чем даже первый член, $\sim F^2(0) m^4(0)$ в рассматриваемом случае. Следовательно, реалистичные конденсаты могут появиться только после тонких сокращений. Полученные тогда предсказания вряд ли могут быть устойчивыми по отношению к вариациям параметров.

Мы предлагаем другой тип интерполяции, который свободен от этого недостатка. Предполагая линейность спектра, можно просуммировать по резонансам и придти к правилам сумм (86). Затем рассмотрим правую часть уравнения (86) в качестве интерполирующей функции для вклада от конечного числа состояний, фитируя параметры F^2, a и x. В частности, выбор величины x возле корней $B_3(x)$ естественным образом даёт малое значение для конденсата C_3. Такие правила сумм автоматически являются перенормированными в ходе процедуры суммирования, в результате зависимость от обрезания исчезает. Мы ожидаем, что эти правила сумм должны работать при $k > 2$ в соотношении (86), когда корни $B_k(x)$ на интервале $[0,1]$ близки к их асимптотическим значениям.

Продемонстрируем пример использования таких правил сумм. Рассмотрим третье правило,

$$C_3(x) \sim x(x-1/2)(x-1), \tag{118}$$

и предположим однорезонансное насыщение. Поскольку в реальности величина $C_3(x)$ мала по сравнению с типичными значениями, даваемыми правой частью соотношения (118) (т.е. адронной частью), её можно ввести слегка варьируя x возле корней правой части уравнения (118): $x \to x+\varepsilon$. Тогда

$$C_3(1/2+\varepsilon) \sim -\frac{\varepsilon}{4}, \qquad C_3(\{1,0\}+\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon}{2}. \tag{119}$$

Таким образом,

$$\frac{C_3(1/2+\varepsilon)}{C_3(\{1,0\}+\varepsilon)} \sim -\frac{1}{2}, \tag{120}$$

В то время как из ОР (155) имеем

$$\frac{C_3^V}{C_3^A} = \frac{\xi^V}{\xi^A} = -\frac{7}{11}. \tag{121}$$

Мы не заботимся о точных числах в соотношении (120), так как не варьировали F^2 и a. Для нас важен знак в соотношениях (120) и (121). Отрицательный знак возможен только когда $x_\rho \simeq 1/2$ и $x_{a_1} \simeq 1$ (нефизическая возможность $x_{a_1} \simeq 0$ не рассматривается). Следовательно, из одного только третьего правила сумм следует формула Вайнберга (109). Таким образом, рассматриваемые правила сумм работают в той области разложения, где обычные не являются верными при однорезонансном насыщении. Комбинируя это соотношение с правилами сумм Вайнберга или с ПСКЭ при $k = 1, 2$, приходим к утверждению, являющимся обратным утверждению предыдущего параграфа: *в КХД в пределе больших*

N_c *спонтанное НКС с ненулевыми локальными параметрами порядка необходимо влечёт существование* $f_\pi^2 \neq 0$ (теорема типа Колемана-Виттена [164]).

Можно рассмотреть произвольное количество состояний в соотношении (118), т.е. считать правую часть аппроксимацией для произвольного числа узких резонансов. Это приведёт к спектру

$$\begin{aligned} m_V^2(n) &= 2m_\rho^2(1/2+n), \\ m_A^2(n) &= 2m_\rho^2(1+n), \end{aligned} \tag{122}$$

совпадающему со спектром (54). Таким образом, правила сумм (86) могут быть использованы для конечного числа состояний, интерполируя адронные вклады для $k > 2$. Они дополняют ПСКЭ для $k = 1, 2$. Комбинация этих двух типов правил сумм позволяет успешно описывать спектр лёгких мезонов при низких и промежуточных энергиях.

5 Соотношение между кварковым и глюонным конденсатами

В правилах сумм Шифмана-Вайнштейна-Захарова [30] кварковый $\langle\bar{q}q\rangle$ и глюонный $\langle G^2\rangle$ конденсаты считаются независимыми входными параметрами, характеризующие вакуум КХД. Однако для тяжёлых кварков существует соотношение [30]

$$\langle\bar{Q}Q\rangle = -\frac{1}{12m_Q}\frac{\alpha_s}{\pi}\langle G^2\rangle + \mathcal{O}(m_Q^{-3}). \tag{123}$$

В секторе лёгких кварков, которым мы интересуемся, подобного разложения нет. Существует, правда, низкоэнергетическая теорема [165]

$$\frac{d}{dm_q}\frac{\alpha_s}{\pi}\langle G^2\rangle = -\frac{24\langle\bar{q}q\rangle}{\frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f}. \tag{124}$$

Эта формула не позволяет вычислить значение, скажем, глюонного конденсата при заданном значении кваркового. В работе [166] была предпринята попытка соотнести эти значения, но проведённый анализ привел к слишком большой оценке на значение токовых масс лёгких кварков. В данном разделе мы покажем, что правила сумм КХД в пределе большого числа цветов [28, 29] в лидирующем порядке теории возмущений дают определённое соотношение между этими конденсатами при некоторых предположениях о мезонном спектре [70].

Мы будем использовать обозначения и нормировки Раздела 1 с единственной разницей: нам удобно сделать равной размерность скалярной части векторных корреляторов со скалярными корреляторами, что достигается простым переносом множителя Q^2 в $\Pi^{V,A}(Q^2)$. Тогда имеем для разности векторного и аксиально-векторного корреляторов,

$$\Pi^V(Q^2) - \Pi^A(Q^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^4}\right). \tag{125}$$

Хорошо известно, что если основные состояния дают главный вклад в разность (125), то разлагая при больших Q^2 приходим ко второму правилу сумм Вайнберга,

$$F_\rho^2 m_\rho^2 - F_{a_1}^2 m_{a_1}^2 = 0. \tag{126}$$

Кроме того, если рассмотреть ОР для дивергенций V,A корреляторов [30, 109], то получается первое правило сумм Вайнберга,

$$F_\rho^2 - F_{a_1}^2 - f_\pi^2 = 0, \tag{127}$$

Константа f_π появляется благодаря ЧСАТ. Вайнберг вывел эти эти правила сумм до изобретения приближения больших N_c в своей работе [118], где он затем использовал соотношение КСФР,

$$F_\rho^2 = 2 f_\pi^2 \tag{128}$$

, и пришёл к своей знаменитой формуле, $m_{a_1}^2 = 2m_\rho^2$. В рамках приближения больших N_c, предположение о доминантности основных состояний в разности (125) эквивалентен требованию, чтобы остаток суммы был дуален пертурбативному континууму КХД. Данное предположение было широко использовано в так называемых правилах сумм при конечной энергии (см., например, обзор [167]). Так как в планарном пределе имеются только резонансы, было бы более естественным сказать, что такая дуальность означает

$$m_V(n) = m_A(n), \quad n > 0. \tag{129}$$

Действительно, соотношение (129) приближённо выполняется в феноменологии, отклонения от него в пределах точности счёта по большим N_c (D-волновые векторные мезоны не рассматриваются, поскольку они отщепляются от правил сумм [51]).

Применим такую же логику к скалярному и псевдоскалярному корреляторам [7]. Обозначим массы и вычеты основных состояний как

$$m_{S,P}(0) \equiv m_{S,P} \qquad G_{S,P}(0) \equiv G_{S,P}. \tag{130}$$

Аналогом уравнения (126) будет:

$$G_S^2 m_S^2 - \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{f_\pi^2} = 0. \tag{131}$$

Теперь заметим, что в разности перенормированных корреляторов

$$\Pi^{S,P}(Q^2) - \frac{3}{2}\Pi^{V,A}(Q^2) = \frac{\alpha_s}{4\pi}\frac{\langle G^2 \rangle}{Q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^4}\right), \tag{132}$$

Вклад от теории возмущений сокращается. Формула (132) содержит четыре соотношения, три из них являются линейно зависимыми. Потребуем универсальности начала пертурбативного континуума для векторов и скаляров, что в резонансном представлении означает следующее обобщение соотношения (129)

$$m_V(n) = m_A(n) = m_S(n) = m_P(n), \quad n > 0. \tag{133}$$

Это равенство также выполнено в феноменологии в пределах точности метода больших N_c. Кроме того, оно подтверждается правилами сумм КХД, если пренебречь малыми поправками к линейному спектру масс для радиальных возбуждений [55].

Рассмотрим случай V-S (остальные линейно зависимы). Учитывая только основные состояния в уравнении (132), имеем правило сумм

$$G_S^2 m_S^2 - \frac{3}{2}F_\rho^2 m_\rho^2 = \frac{\alpha_s}{8\pi}\langle G^2 \rangle. \tag{134}$$

Теперь мы можем исключить неизвестную величину $G_S m_S$ из уравнений (131) и (134). Используя соотношение КСФР (128), получаем

$$3f_\pi^2 m_\rho^2 + \frac{1}{8}\frac{\alpha_s}{\pi}\langle G^2 \rangle = \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{f_\pi^2}. \tag{135}$$

Подставляя в уравнение (135) феноменологические значения $f_\pi = 87\,\mathrm{MeV}$ (величина, которую эта константа имеет в киральном пределе [135, 136]), $m_\rho = 776$ MeV и $\frac{\alpha_s}{\pi}\langle G^2\rangle = (360\,\mathrm{MeV})^4$, приходим к $\langle\bar{q}q\rangle \approx -(220\,\mathrm{MeV})^3$, т.е. примерно к стандартному значению кваркового конденсата. Таким образом, формула (135) даёт правильное соотношение между четырьмя важными величинами. Результат довольно слабо изменяется при учёте поправок от теории возмущений, которые довольно велики в скалярном секторе. Например, учёт следующего порядка по теории возмущений ведёт к незначительному изменению оценки на кварковый конденсат, $\langle\bar{q}q\rangle \approx -(230\,\mathrm{MeV})^3$.

6 Вычисление аксиальной константы

Конституэнтная кварковая модель (ККМ) Джоржи и Манохара [72] (часто называемая киральной кварковой моделью) была весьма успешной в описании сильных взаимодействий при низких энергиях, давая начало многочисленным обобщениям и новым приложениям (см., например, [168]). Философия, лежащая в основе этой модели, знакома из различных областей физики — это идея перегруппировки физических степеней свободы при определённом масштабе энергии. Предложенный сценарий предполагает, что в интервале энергий между масштабом НКС, $\Lambda_{\text{НКС}} \simeq 1-1.2$ GeV, и масштабом конфайнмента, $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 100-300$ MeV, почти безмассовые сильно взаимодействующие ($\alpha_s(\Lambda_{\text{QCD}}) > 1$) кварки, входящие в лагранжиан КХД, эффективно перегруппируются в тяжёлые слабо взаимодействующие ($\alpha_s(\Lambda_{\text{QCD}}) \simeq 0.28$) конституэнтные кварки с эффективной массой $m \simeq 300-350$ MeV. Одновременно, взаимодействие фундаментальных кварков и глюонов ниже $\Lambda_{\text{НКС}}$ трансформируется во взаимодействие конституэнтных кварков с голдстоуновскими бозонами НКС — пионами, — и, возможно, с низкоэнергетическими глюонами. Например, $SU(2)_L$ ток эффективной ККМ [72] имеет вид

$$j_{\mu,L}^{\text{ККМ}} = \bar{\psi}\gamma_\mu(1 - g_A\gamma_5)\vec{\tau}\psi + \text{члены с } \pi, \tag{136}$$

в то время как тем же током в лагранжиане КХД выше $\Lambda_{\text{НКС}}$ является

$$j_{\mu,L}^{\text{QCD}} = \bar{\psi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\vec{\tau}\psi. \tag{137}$$

Мы ограничимся двухфлейворным сектором, так что $\vec{\tau}$ означает изоспиновые матрицы Паули. Важно подчеркнуть, что, вообще говоря, кварковые и глюонные поля, в лагранжиане ККМ не те же самые, что в лагранжиане КХД. Пренебрегая токовой массой кварка, как фундаментальная, так и эффективная теория кирально инвариантна, однако, в отличие от фундаментальной теории, киральная симметрия реализована нелинейно в эффективной теории, так что точнее было бы говорить не о нарушении киральной симметрии, а об изменении её реализации ниже масштаба $\Lambda_{\text{НКС}}$.

В данном разделе мы затронем вопрос вычисления аксиальной константы g_A, присутствующей в токе (136). Эта константа крайне важна в феноменологии, так как $SU(2)_L$ ток (136) взаимодействует с W-бозоном, приводя к некоторым полулептонным распадам. Используя волновые функции нерелятивистской кварковой модели, g_A можно соотнести [72] с аксиальной константой G_A, которая параметризует амплитуду β-распада нуклона,

$$g_A = \frac{3}{5}G_A. \tag{138}$$

Беря современное экспериментальное значение для аксиальной константы [19], $G_A \approx 1.27$ (см. также пример вычисления из правил сумм [73]), соотношение (138) даёт оценку $g_A \approx 0.76$.

Как было отмечено в оригинальной работе [72], g_A должно в принципе вычисляться из КХД, хотя и сложным непертурбативным образом, относительно которого нет никаких идей. В настоящее время существуют только оценки, полученные в рамках эффективных моделей и аналога правил сумм Адлера-Вайсбергера для кварк-пионного рассеяния, (см. краткий обзор [169], а также [170, 171]).

Мы по-другому взглянем на проблему. Идея состоит в том, чтобы сравнить корреляторы V и A токов в фундаментальной и эффективной теориях. Хотя наши рассуждения отчасти будут эвристическими, они приведут к определённой численной оценке для g_A [71].

Отправной точкой является ожидание, что интервалы по энергиям, в которых применимы ККМ и пертурбативная КХД, должны перекрываются на некотором промежутке, и именно там предсказания обеих теорий должны совпадать, т.е. эти теории можно "сшить"(подобные идеи сшивки были использованы в различных эффективных моделях, см., например, работы [7, 8, 11, 12, 14, 168, 172, 173]). Оценим масштаб сшивки. ККМ И КХД по-разному интерпретируют пионы: в КХД они представляют из себя кварк-антикварковые пары, в то время как в ККМ пионы являются фундаментальными полями. Ожидается (см., например, [171]), что простая киральная кварковая модель применима ниже масштаба массы ρ-мезона $\mu < m_\rho$, $m_\rho = 775.5$ MeV [19], в то время как в промежуточном интервале энергий $m_\rho < \mu < \Lambda_{\text{НКС}}$ надо учитывать высшие производные по пионному полю и, возможно, ρ и σ мезоны и длинно-волновые глюоны как явные степени свободы. Поэтому представляется разумным использовать этот промежуточный интервал для сшивки с КХД. С другой стороны, ОР позволяет расширить интервал применимости пертурбативной КХД до энергий ниже $\Lambda_{\text{НКС}}$, вплоть до масштаба $\mu \simeq m_\rho$ [30]. Таким образом, мы приходим к заключению, что интервал сшивки должен быть $m_\rho < \mu < \Lambda_{\text{НКС}}$.

Рассмотрим почти свободные конституэнтные кварки, взаимодействующие посредством низкоэнергетических глюонов, забыв на время про пионные взаимодействия. Тогда $SU(2)$ V и A кварковые токи приобретают простой вид,

$$j_{\mu,V}^{\text{ККМ}} = \bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\psi, \qquad j_{\mu,A}^{\text{ККМ}} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi. \tag{139}$$

Построим двухточечные корреляторы этих токов,

$$\Pi_{\mu\nu,J}^{\text{ККМ}}(q^2) = \int d^4x\, e^{-iqx} \left\langle j_{\mu,J}^{\text{ККМ}}(x) j_{\nu,J}^{\text{ККМ}}(0) \right\rangle, \tag{140}$$

здесь $J = V, A$. Поскольку эффективная константа связи в ККМ считается малой, можно оценить V и A корреляторы (140) путём стандартного однопетлевого вычисления для поляризационной функции. Таким образом, пишем

$$\Pi^{\text{ККМ}}_{\mu\nu,V}(q^2) \sim \int d^4p\, \mathrm{tr} \frac{\gamma_\mu}{\frac{\not{q}}{2} + \not{p} - m_{\text{con}}} \frac{\gamma_\nu}{\frac{\not{q}}{2} - \not{p} - m_{\text{con}}}, \tag{141}$$

$$\Pi^{\text{ККМ}}_{\mu\nu,A}(q^2) \sim \int d^4p\, \mathrm{tr} \frac{\gamma_\mu\gamma_5}{\frac{\not{q}}{2} + \not{p} - m_{\text{con}}} \frac{\gamma_\nu\gamma_5}{\frac{\not{q}}{2} - \not{p} - m_{\text{con}}}, \tag{142}$$

где m_{con} есть конституэнтная масса кварка. Беря след и вычитая квадратичные по обрезанию члены, получаем

$$\Pi^{\text{ККМ}}_{\mu\nu,V}(q^2) \sim \left\{ \left(-\delta_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu\right) F_- + q_\mu q_\nu F_+ \right\} I(q^2), \tag{143}$$

$$\Pi^{\text{ККМ}}_{\mu\nu,A}(q^2) \sim \left\{ \left(-\delta_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu\right) F_+ + q_\mu q_\nu F_- \right\} I(q^2), \tag{144}$$

где

$$F_\pm = 1 \pm \frac{4m^2_{\text{con}}}{q^2}, \tag{145}$$

$$I(q^2) = \int d^4p \frac{1}{\left(\frac{q}{2} + p\right)^2 - m^2_{\text{con}}} \frac{1}{\left(\frac{q}{2} - p\right)^2 - m^2_{\text{con}}}. \tag{146}$$

Чтобы сравнить эти выражения с ОР в КХД, нужно совершить виковский поворот и рассмотреть только поперечную часть $\Pi^{\text{ККМ}}_{J\perp}(q^2)$,

$$\Pi^{\text{ККМ}}_{V\perp}(Q^2) \sim \left(1 - \frac{4m^2_{\text{con}}}{Q^2}\right) I(Q^2), \tag{147}$$

$$\Pi^{\text{ККМ}}_{A\perp}(Q^2) \sim \left(1 + \frac{4m^2_{\text{con}}}{Q^2}\right) I(Q^2). \tag{148}$$

Видно, что V и A корреляторы равны в пределе точной киральной симметрии, $m_{\text{con}} \to 0$, и в пределе асимптотической киральной симметрии, $Q^2 \to \infty$. В пределе исчезающего евклидова импульса, $Q^2 \to 0$, они равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Подобное изменение знака можно трактовать как сигнал изменения реализации киральной симметрии при низких энергиях. Второе слагаемое в уравнениях (147) и (148) возникает вследствие НКС, оно разное для V и A каналов, обозначим его как $\Pi^{\text{ККМ}}_{\text{НКС},J}(Q^2)$. Для нас будет интересно отношение

$$\frac{\Pi^{\text{ККМ}}_{\text{НКС},V}(Q^2)}{\Pi^{\text{ККМ}}_{\text{НКС},A}(Q^2)} = -1. \tag{149}$$

Включение пионных взаимодействий должно внести поправку, так как производные пионного поля входят в аксиально-векторный ток, более того, в интервале сшивки, $m_\rho < \mu < \Lambda_{\text{НКС}}$, высшие производные по пионному полю могут стать существенными. Однако, такие производные войдут в продольную часть корреляторов и в киральном пределе не должны сильно затрагивать поперечную часть. Поскольку мы работаем с поперечными частями, для наших целей можно пренебречь пионными членами в токе (136). Более того, мы осуществляем сшивку в пределе большого числа цветов [28, 29], поэтому тот же предел должен подразумеваться в ККМ, что даёт подавление возможных мультичастичных вкладов в ток (136). Таким образом, остаточный эффект сильных взаимодействий сводится к перенормировке аксиально-векторного тока (множитель g_A в уравнении (136)). В этом состоит наше первое предположение.

Второе предположение касается конкретной реализации этой перенормировки. Мы предлагаем альтернативную интерпретацию для происхождения аксиальной константы g_A в уравнении (136). В КХД V и A токи строятся из одних и тех же кварковых спиноров, в эффективной же теории совсем неочевидно, что можно так делать. Аксиально-векторный сектор сильно связан с пионными взаимодействиями, которые могут привести к тому, что нужно использовать другие кварковые спиноры в A-канале, будем обозначать это штрихом. Тот факт, что ККМ хорошо работает в феноменологии, указывает, что, пренебрегая прямыми пионными вкладами, действие A'-тока можно имитировать действием A-тока (построенном из тех же кварковых спиноров, что и V-ток), если мы примем следующее ренормализационное предписание: $A = g_A A'$. $V - A$ ток в КХД, уравнение (137), превращается в $V - g_A A'$ ток ниже масштаба $\Lambda_{\text{НКС}}$. Идентичное обозначение для кварковых спиноров в векторной и аксиально-векторной частях тока (136) должны тогда пониматься символически.

В поддержку этой гипотезы можно дать следующий качественный аргумент. Если конституэнтные кварки почти свободны, то соответствующий левый нуклонный ток, по идее, должен подвергнуться той же перенормировке. Нуклонный аналог $j^N_{\mu,L}$ левого кваркового тока (136) входит в амплитуду β-распада нуклона и может быть переписан в виде

$$j^N_{\mu,L} = \bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 - G_A \gamma_5) \psi_n. \qquad (150)$$

Этот ток построен следуя фермиевской $V - A$ теории слабых взаимодействий. Следовательно, изначально имеется $V - A'$ ток, но затем в вычислениях используются одни и те же спиноры $\psi_{p,n}$ для векторной и аксиально-векторной частей, т.е. работают с адронным током $V - g_A^{-1} A$. Таким образом, мы ожидаем $g_A \approx G_A^{-1} \approx 0.79$, что является разумным (заметим, что из соотношения (138) мы бы формально имели $g_A = \sqrt{0.6} \approx 0.77$, что также неплохо). Если наша гипотеза верна, то данная нумерология не случайна.

Итак, вышеприведённые рассуждения ведут к следующему заключению: в формуле (149) мы имели разные спиноры с числителе и знаменателе. Если мы хотим сравнивать корреляторы, вычисленные с одинаковыми спинорами, скажем с теми, что входят в векторный ток (будем называть их голыми спинорами), то мы должны перенормировать A-коррелятор следующим образом,

$$\Pi^{\text{ККМ}}_{\text{НКС},A}(Q^2) \to g_A^{-2} \Pi^{\text{ККМ}}_{\text{НКС},A}(Q^2). \qquad (151)$$

Эта перенормировка эффективно учитывает вклад пионных взаимодействий.

Сформулируем теперь наше условие сшивки ККМ с КХД в интервале $m_\rho < \mu < \Lambda_{\text{НКС}}$, где, как ожидается, обе теории описывают одну и ту же физику, связанную с НКС. Мы требуем, что *голый* кварковый спинор лагранжиане ККМ можно заменить спинором из лагранжиана КХД при $m_\rho < \mu < \Lambda_{\text{НКС}}$ с вытекающим равенством для операторов кварковых токов,

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \psi |^{\text{bare}}_{\text{ККМ}} \simeq \bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \psi |_{\text{КХД}}, \qquad (152)$$

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \psi |^{\text{bare}}_{\text{ККМ}} \simeq \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \psi |_{\text{КХД}}. \qquad (153)$$

Мы также требуем, что такая же идентификация верна между фундаментальными глюонными полями лагранжиана КХД и длинноволновыми глюонами ККМ. Тогда соотношения (149) и (151) ведут к

$$\frac{\Pi^{\text{КХД}}_{\text{НКС},V}(Q^2)}{\Pi^{\text{КХД}}_{\text{НКС},A}(Q^2)} \simeq -g_A^2. \tag{154}$$

Теперь проблема состоит в том, чтобы найти $\Pi^{\text{КХД}}_{\text{НКС},J}(Q^2)$, т.е. части соответствующих корреляторов КХД, которые появляются благодаря НКС. Решение этой задачи известно в эвклидовой области методом ОР [30]. Принимая киральный предел и предел больших N_c [28, 29], ОР для $\Pi^{\text{КХД}}_{\mu\nu,J}(q^2)$ в однопетлевом приближении при большом эвклидовом импульсе Q имеет вид (выпишем ещё раз),

$$\begin{aligned}\Pi^{\text{КХД}}_{J\perp}(Q^2) &= \frac{N_c}{12\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}\right)\ln\frac{\mu^2}{Q^2}+\frac{\alpha_s}{12\pi}\frac{\langle G^2\rangle}{Q^4} \\ &\quad +\frac{4\pi\xi_J\alpha_s}{9}\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{Q^6}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^8}\right),\end{aligned} \tag{155}$$

где

$$\xi_V=-7, \qquad \xi_A=11, \tag{156}$$

и мы определили

$$\Pi^{\text{КХД}}_{\mu\nu,J}(Q^2)=\left(-\delta_{\mu\nu}Q^2+Q_\mu Q_\nu\right)\Pi^{\text{КХД}}_{J\perp}(Q^2). \tag{157}$$

Символы $\langle G^2\rangle$ и $\langle\bar{q}q\rangle$ обозначают глюонный и кварковый конденсат соответственно. Степенное разложение (2) явно демонстрирует, что эффекты НКС проявляются, начиная со вклада $\mathcal{O}(1/Q^6)$. Это согласуется с нашим модельным вычислением — разлагая уравнения (147) и (148) при больших Q^2, получаем такое же поведение для вкладов от НКС. Часть $\Pi^{\text{КХД}}_{J\perp}(Q^2)$, которая отражает лидирующие вклады от НКС (более точно, вклады, которые являются разными для V и A каналов), $\Pi^{\text{КХД}}_{\text{НКС},J}(Q^2)$, явно следует из выражения (2),

$$\Pi^{\text{КХД}}_{\text{НКС},J}(Q^2)=\frac{4\pi\xi_J\alpha_s}{9}\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{Q^6}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^8}\right). \tag{158}$$

Это соотношение даёт

$$\frac{\Pi^{\text{КХД}}_{\text{НКС},V}(Q^2)}{\Pi^{\text{КХД}}_{\text{НКС},A}(Q^2)}=\frac{\xi_V}{\xi_A}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^2}\right). \tag{159}$$

Собирая уравнения (154), (159) и (156), получаем наш конечный результат,

$$g_A^2 \simeq \frac{7}{11}, \tag{160}$$

который приводит к численному значению $g_A \approx 0.80$ в хорошем согласии с существующими феноменологическими оценками.

Полученное значение требует комментария относительно поведения g_A в пределе больших N_c. В литературе существует разногласие в вопросе о том, является ли $g_A = 1$ в этом пределе или нет (см. дискуссии в работах [169–171]). Наша оценка с самого начала предполагала данный предел и использовала его в ОР (2) — факторизованная форма числителя в $\mathcal{O}(1/Q^6)$ имеет место в силу гипотезы вакуумного насыщения, которая оправдана только в пределе большого числа цветов [30], в нём же брались значения коэффициэнтов (156). Таким образом, мы приходим к заключению, что отклонения g_A от единицы не является артефактом поправок по $\mathcal{O}(1/N_c)$, по крайней мере в представленном подходе.

Выводы к Главе II

В разделе 3 представлены два способа учета высших мезонных резонансов — как векторных $(\rho', \rho'', ...)$, так и аксиально-векторных $(a_1', ...)$ — в расчете электромагнитной разности масс π-мезонов $\Delta m_\pi|_{\text{em}}$. Подходы основаны на идее восстановления киральной симметрии при высоких энергиях, а также операторном разложении для корреляторов векторной и аксиально-векторной кварковых плотностей. Все расчеты были проведены в киральном пределе, в приближении большого числа цветов N_c, а также при использовании асимптотической свободы КХД.

В первом случае вычисление $\Delta m_\pi|_{\text{em}}$ проводится в 4-х резонансном приближении, где кроме ρ- и a_1-мезонов учитываются также их первые возбуждения — ρ'- и a_1'-мезоны. В расчете также делается предположение $m_{a_1'} \gtrsim m_{\rho'}$, которое ожидается в силу асимптотического восстановления киральной симметрии при высоких энергиях. В результате, для электромагнитной разности масс π-мезонов получена оценка: $\Delta m_\pi|_{\rm em}^{(4)} \approx 3.85 \pm 0.16$ МэВ, которая улучшает соответствие теоретического предсказания и экспериментального значения $\Delta m_\pi|_{\rm exp} = 4.42 \pm 0.03$ МэВ (где учтена поправка на нарушение изоспиновой симметрии) на 18%. Выведены также оценки на электромагнитные константы распада ρ^0 и a_1-мезонов $f_\rho \approx 0.18$, $f_{a_1} \approx 0.11$, которые неплохо согласуются с оценками [62, 145, 146], полученными из различных модельных подходов. Расчет киральной константы L_{10} эффективного кирального лагранжиана [135, 136] дает значение: $L_{10} \approx -6.0 \times 10^{-3}$, которое удовлетворяет экспериментальным данным из адронных τ-распадов [148]. Кроме того, показано, что учет следующих резонансов улучшает результат, но лишь незначительно, порядка нескольких процентов.

Второй подход представляет собой обобщение формулы (66) для $\Delta m_\pi|_{\rm em}^{(2)}$ на высшие резонансы. При этом оказывается, что, во-первых, когда мы используем экспериментальные значения для масс и констант распада ρ- и a_1-мезонов, то обобщенная формула (78) работает лучше формулы (64) в одноканальном ($k = 1$) случае. Во-вторых, из обобщенной формулы (77) видно, что учет ρ'- и a_1'-мезонов заметно меняет результат в лучшую сторону, а учет высших резонансов ($k > 2$) ведёт только к его незначительному улучшению.

В разделе 4 решена задача о линейном спектре, максимально дуальном теории возмущений. Им оказался спектр дуальной амплитуды Ловеласа-Шапиро. Из условия того, что фактический спектр ведёт себя как максимально дуальный в смысле насыщения правил сумм, получены различные известные соотношения и утверждения. Кроме того представлен альтернативный вывод формулы Вайнберга в рамках невайнберговского правила сумм для линейного спектра, а также предложен альтернативный вывод экспоненциальной малости поправок к линейному спектру масс.

В разделе 5, с помощью правил сумм КХД, выведено соотношение между массой ρ-мезона, константой слабого распада π-мезона, кварковым и глюонным конденсатами.

В разделе 6 приведён новый способ вычисления аксиальной константы конституэнтной кварковой модели. Мы рассмотрели поперечные части векторного и аксиально-векторного корреляторов и выделили лидирующие вклады, идущие от спонтанного нарушения киральной симметрии, которые являются разными для векторного и аксиально-векторного каналов. В конституэнтной кварковой модели, отношение этих вкладов равно -1, в то время как в КХД в пределе больших N_c оно равно $-7/11$. Мы предположили, что разница появляется главным образом от того, что векторный и аксиально-векторный ток в КХД, j_μ^V и j_μ^A, построены из одинаковых кварковых спиноров, тогда как в конституэнтной кварковой модели это не так, и разница в спинорах может быть эффективно учтена перенормировкой тока j_μ^A, $j_\mu^A|_{\rm ren} = g_A^{-1} j_\mu^A|_{\rm bare}$. При этом по умолчанию в двухточечном корреляторе $\langle j_\mu^A j_\nu^A \rangle$ использовался перенормированный ток, что и привело к разнице результатов. Корректная сшивка с КХД должна делаться с помощью неперенормированных токов для избежания двойного учёта непертурбативных эффектов. Таким образом, аксиально-векторный коррелятор конституэнтной кварковой модели должен умножаться на g_A^{-2} при сшивке с КХД. Это наблюдение приводит к соотношению для аксиальной константы: $g_A^2 \simeq 7/11$.

Глава III

7 Обоснование широкой динамической симметрии в спектре мезонов

7.1 Введение

Изучение адронных резонансов является крайне важным для исследования сильных взаимодействий. Поскольку стабильная адронная материя состоит из лёгких u и d-кварков, образованные из них резонансы представляют особый интерес. Хорошо известно, что массы u и d-кварков весьма малы (порядка 5 МэВ) по сравнению с типичными массами адронов (порядка 1000 МэВ). Таким образом, с хорошей точностью ими можно пренебречь. Лагранжиан сильных взаимодействий в киральном пределе является кирально-инвариантным. Однако киральная $SU(2)_L \times SU(2)_R$ инвариантность не является симметрией физического вакуума, что приводит к спонтанному нарушению киральной симметрии (НКС) до векторной изоспиновой подгруппы $SU(2)_V$ и возникновению безмассовых голдстоуновских бозонов — π-мезонов. По этой причине киральная симметрия не видна в адронном спектре, скажем, массы векторного $\rho(770)$-мезона и аксиально-векторного $a_1(1230)$-мезона сильно отличаются. Другим примером нарушенной симметрии сильных взаимодействий является аксиальная $U(1)_A$ симметрия, нарушенная аксиальной аномалией, которая приводит к значительному увеличению массы η'-мезона. Однако, все эти примеры относятся только к основным состояниям, в то время как с более тяжёлыми радиальными и орбитальными возбуждениями дело может обстоять совсем иначе. С одной стороны, эффекты нарушения киральной и аксиальной симметрий могут оказаться несущественными для высших возбуждений, и поэтому можно ожидать постепенного восстановления данных симметрий в верхней части спектра, с другой стороны, можно ожидать появления какой-нибудь новой динамической симметрии. В настоящей главе мы покажем, что если верить современным экспериментальным данным Crystal Barrel Collaboration [21, 22], то второе ожидание действительно имеет место, а именно спектр лёгких мезонов приближённо описывается формулой $m^2(n, J) \sim n + J$, где n является радиальным квантовым числом, а J — спином [79]. Это типичный спектр, даваемый струнами типа Намбу-Гото и возникающий в дуальной амплитуде Венециано.

7.2 Экспериментальный спектр

Радиальные и орбитальные возбуждения мезонов были плохо известны во времена быстрого развития КХД в 70-е годы. На сегодняшний день, экспериментальные данные собранные в компиляции Particle Data Group (PDG) [19], содержат список из небольшого числа хорошо установленных возбуждённых резонансов в секторе лёгких нестранных мезонов (обозначим эти состояния $\bar{n}n$) ниже энергии 1.9 ГэВ. При более высоких энергиях, PDG перечисляет всего несколько подтверждённых резонансов и множество неподтверждённых состояний. В настоящее время трудно делать какие-либо заключения об общей структуре спектра мезонных возбуждений, основываясь только на хорошо установленных состояниях из PDG. Чтобы попытаться вскрыть эту структуру, мы предлагаем следующий путь: хорошо установленные состояния можно дополнить анализом большого числа не столь хорошо подтверждённых резонансов. Как это обычно происходит в большом статистическом ансамбле, можно надеяться, что возможные ошибки в разных каналах компенсируют друг друга, давая в итоге устойчивую картину, которую можно описать некоторыми усреднёнными характеристиками.

Так как PDG цитирует очень много неподтверждённых состояний, то в поиске спектральных закономерностей легко запутаться. Поэтому весьма желательно жёстко придерживаться некоторых разумных принципов. Во-первых, для достоверности мы будем рассматривать только те состояния, которые наблюдались как минимум в двух различных реакциях. Во-вторых, при энергиях выше 1.9 ГэВ мы будем использовать только данные Crystal Barrel Collaboration по протон-антипротонной ($\bar{p}p$) аннигиляции на лету. Современный обзор этих данных представлен в работе [22]. Причинами этого выбора являются следующие:

1. Это единственный эксперимент, который систематически изучал область энергий 1.9-2.4 ГэВ на предмет поиска резонансов. Покрытие этой области другими экспериментами весьма ограничено.

2. Как правило, состояния независимо наблюдались в разных каналах, т.е. они довольно надёжны. Причина, по которой большинство из них цитируется в PDG в разделе "Другие лёгкие безфлейворные мезоны", состоит в том, что PDG требует подтверждения от независимого эксперимента.

3. Как давно было осознанно [174], мезонные резонансы обильно появляются именно в $\bar{N}N$-реакциях, потому что мезоны имеют квантовые числа $\bar{N}N$-системы. Доминирующая роль этой системы в динамике мезонных состояний делает данные, полученные из $\bar{N}N$-реакций, довольно надёжными.

4. Возможная примесь странных мезонов является серьёзной проблемой для любой классификации лёгких нестранных мезонов. Особенностью $\bar{p}p$ аннигиляции является то, что рождение $\bar{s}s$ компоненты сильно подавлено. Следовательно, весьма естественно ожидать, что рождённые состояния, за исключением редких случаев, являются истинными $\bar{n}n$-мезонами.

5. Полученный спектр (впервые систематизированный в работе [20]) оказался в полном согласии со старыми ожиданиями из моделей адронных струн и из дуальных амплитуд [151–153]. А именно,

   (a) линейность реджевских траекторий;

   (b) эквидистантность дочерних траекторий Редже (линейность радиальных траекторий Редже), как следствие — приближённая универсальность наклонов траекторий;

(c) пересечение пионной траектории приблизительно равно 0, а ρ-мезонной — 1/2;

(d) наклон радиальной траектории Редже составляет примерно $2m_\rho^2$, что согласуется с дуальными амплитудами и с решёточными вычислениями (см., например, работу [175]).

6. Для выявления общих свойств спектра, предпочтительно использовать данные индивидуального эксперимента. Только после этого получившуюся картину можно сравнивать с тем, что даёт другой систематический эксперимент. В таком сравнении может обнаружиться глобальный сдвиг данных, но качественная картина не портится. Если же сначала проводить усреднение по данным (как это делается в PDG), то быстро накапливаются ошибки, которые могут сделать конечную картину весьма неоднозначной. В качестве примера можно привести лёгкие нестранные барионы: если использовать данные отдельных систематических экспериментов по поискам барионных резонансов (например, цитируемых в PDG под именами "Cutkosky"или "Hoehler"), то кластеризация состояний по спину и чётности явно видна. Если же взять усреднённые данные из PDG, то явление кластеризации становится довольно спорным. Конкретный пример этого продемонстрирован в Приложении B (см. подробное обсуждение в обзоре [78]).

После этих общих аргументов, перейдём к анализу. Как сказано выше, мы не рассматриваем состояния с большой примесью странного кварка (обычно это ясно по каналам основных распадов). Мы не включаем в анализ также резонансы, которые наблюдались только в одной реакции, хотя многие из них хорошо подходят на роль отсутствующих состояний на мезонных траекториях. В обзоре [22] такими состояниями являются: $\omega(2205)$, $a_1(1930)$, $a_1(2270)$, $a_2(1950)$, $a_2(2175)$, $\omega_4(2250)$, $b_5(2500)$ и $f_6(2485)$. По той же причине не включены в рассмотрение $h_1(1595)$ и $b_1(1620)$. Мы не используем $\pi_2(1880)$ и $\eta_2(1870)$, которые обсуждаются в [22] и вряд ли являются $\bar{n}n$-состояниями. По тем же соображениям опущен $f_0(2100)$, цитируемый в компиляции [22], который либо глюлол, либо $\bar{s}s$-состояние, сильно смешанное с $\bar{n}n$. Очень узкий $\rho(1900)$, упоминаемый в PDG [19] (в списке неподтверждённых состояний) также не рассматривается, т.к. есть много сомнений, что это реальный резонанс. Единственными хорошо подтверждёнными состояниями в PDG, которые не вписываются в кварковую модель, являются π_1-мезоны, а именно $\pi_1(1400)$ и $\pi_1(1600)$. Резонанс $\pi_1(2015)$ был виден в двух реакциях. Мы решили включить их анализ, поскольку, по крайней мере, первые два из них довольно хорошо изучены (см., например, работу [176] по теоретическому изучению схем их обнаружения в экспериментах). Мы также включили $f_0(980)$ и $a_0(980)$, хотя природа этих состояний противоречива, предположительно они имеют большую примесь странного кварка (см., например, замечание по скалярным мезонам в PDG [19]). Причина этого будет объяснена ниже. $\eta(547)$-мезон имеет большую примесь странной компоненты. Тем не менее, эта примесь, по-видимому, не является доминантной в соответствующих радиальных возбуждениях. Поэтому η-мезон также рассмотрен.

Объясним, как мы будем представлять данные. Во-первых, при релятивистском описании бозонов, имеют дело с массами в квадрате, которые появляются в мультиплетах, в теориях Редже, струн и т.д., поэтому описание в терминах этих величины наиболее естественно. Во-вторых, будет нагляднее нормализовать все массы на одну типичную массу. На наш взгляд, наилучшим кандидатом на нормировку является масса ρ-мезона.

Итоговая картина мезонного спектра, вытекающая из нашего анализа, представлена на рис. 1. Соответствующие экспериментальные данные приводятся в таблице 2.

Хорошо видно, что спектр группируется (кластеризуется) возле некоторых значений энергий [22,77]. Похожее явление имеет место в лёгких нестранных барионах [177, 178]. Кластеризация происходит возле 1.33, 1.70, 2.00 и 2.27 GeV. Некоторые каналы имеют дополнительные состояния, обозначенные на рис. 1 незаштрихованными кружками и полосками. Они возникают в силу того, что в этих каналах возможно рождение резонансов с различным орбитальным моментом кварков, что приводит к удвоению соответствующих радиальных траекторий Редже [20]. Для $\rho-$ и f_2-мезонов имеются поляризационные данные, позволяющие отделить S-волновые состояния от D-волновых и P-волновые от F-волновых соответственно [22]. Для других каналов это разделение предварительно, и требуются новые эксперименты.

В таблице 2 для кластеров приводятся средняя масса $\bar{M}$ и средняя полная ширина распада $\bar{\Gamma}$, которые определяются как

$$\bar{M} \equiv \sqrt{\frac{1}{k}\sum_k m_k^2}, \qquad \bar{\Gamma} \equiv \frac{1}{k}\sum_k \Gamma_k, \tag{161}$$

где индекс k пробегает по всем состояниям в кластере. Правила усреднения довольно естественны: наблюдаемыми величинами являются m_k^2 (как сказано выше) и Γ_k. Данные для $\bar{M}$ и $\bar{\Gamma}$ представлены в форме ("ср."означает "среднее")

$$\bar{M}, \bar{\Gamma} = \text{ср. значение} \pm \text{ср.-квад. отклонение} \pm \text{ср. эксп. ошибка}$$

Нужно подчеркнуть, что положения кластеров являются весьма устойчивыми благодаря тому, что включено большое количество состояний. Например, выше 1.9 ГэВ можно рассмотреть только те состояния из компиляции [22], которые имеют максимальный рейтинг надёжности (рейтинг 4^* по классификации, принятой в [22]). Данные резонансы требуют наблюдения трёх или более сильно-выраженных, безошибочных пиков и очень хорошего разрешения по массам. Их надёжность практически эквивалентна надёжности состояний из основного списка PDG. Существует 6 таких состояний в третьем кластере и 8 в четвёртом. Можно проверить, что если рассмотреть только эти резонансы, то положения кластеров не поменяются (т.е. изменение положения будет составлять менее, чем 0.01 ГэВ при нашей точности).

Кластеры описывают поведение спектра как целого (соответствующие обсуждения для случая лёгких нестранных барионов приведены в работе [179–182]). С хорошей точностью они эквидистантны, следовательно, их можно параметризовать линейной функцией. Для данных на рис. 1 фитирование даёт

$$M^2(n) = an + b, \;\; n = 1, 2, 3, 4; \quad a \approx 1.13, \, b \approx 0.63, \tag{162}$$

где $M^2(n)$ есть положение n-го кластера в ГэВ^2. Наклон a в спектре кластеров (162) является средним наклоном радиальных реджевских траекторий. Его численное значение совпадает с тем, что было найдено в компиляции [22]: $a = 1.14 \pm 0.013$. Параметр b средним пересечением (интерсептом) радиальных реджевских траекторий. В работах [20, 22] эта величина не была оценена, но для нас она будет важна, что будет видно ниже.

Оценим, на сколько изменится спектр кластеров, уравнение (162), если исключить данные Crystal Barrel (последние два кластера). Тогда имеются только два ярко выраженных кластера. Параметризация двух точек линейной функцией выглядит сомнительной, так что мы рассмотрим нижние состояния ρ и ω мезонов как две составляющих первого кластера возле 0.78 ГэВ. В пользу этого предположения заметим, что фит (162) предсказывает при $n = 0$ кластер возле 0.79 ГэВ. Имеем тогда

$$M^2_{\text{PDG}}(n) = an + b, \;\; n = 0, 1, 2; \quad a \approx 1.14, \, b \approx 0.61. \tag{163}$$

Спектры кластеров (162) и (163) оказываются весьма близки. Таким образом, PDG содержит достаточно данных для обоснования явления кластеризации. Данные Crystal Barrel дают яркое подтверждение наблюдаемым закономерностям мезонного спектра.

В заключение параграфа сделаем следующее замечание. Гипотеза о том, что мезоны должны появляться в виде "башен"состояний (аналогия с башнями очевидна из рис. 1) была высказана в рамках теории Редже до появления КХД [174] для объяснения отсутствия пиков назад в реакциях упругого рассеяния $\pi^+\pi^-$, π^+K^-, K^+K^-. Также была высказана надежда на то, что дальнейшее изучение $\bar{N}N$ реакций даст решающий тест в пользу существования этих башен. Эксперимент Crystal Barrel по $\bar{p}p$ аннигиляции можно рассматривать как такой тест.

7.3 Обсуждение данных

Хорошо известно, что свойства любой квантовой системы приближаются к классическим, если квантовые числа, определяющие стационарные состояния данной системы, достаточно велики (см., например, [183]). В нашем случае, этими квантовыми числами являются спин J и номер радиального возбуждения n. Валентные кварки в возбуждениях лёгких адронов имеют в среднем очень большие энергии, следовательно, они практически "не чувствуют"непертурбативной структуры глюонного вакуума КХД, которая является причиной НКС (см. соответствующие обсуждения в работе [155] и ссылки там же). Из этих качественных соображений можно ожидать восстановления полной киральной симметрии $U(2) \times U(2)$ в спектре радиальных возбуждений лёгких мезонов, что вело бы к вырождению по массам состояний внутри киральных мультиплетов. Различные аспекты этого предположения широко обсуждались в литературе [32, 51, 55, 77, 184]. Однако оказывается, что с той же самой точностью наблюдаемое вырождение масс гораздо шире, чем предсказывается восстановлением киральной и аксиальной симметрий лагранжиана КХД, так как эти симметрии не могут объяснить вырождения состояний с разным спином. Видимо, мы наблюдаем какую-то широкую симметрию динамического происхождения.

Как видно из рис. 1 и таблицы 2, чем тяжелее резонансы, тем сильнее явление кластеризации. Оценим скорость кластеризации. При этом нужно соблюдать некоторую осторожность. Такая оценка имеет смысл только если отклонения от среднего значения существенно больше, чем экспериментальные ошибки. Это имеет место для первого и второго кластера, где отклонения в $3 \div 4$ раза больше усреднённых экспериментальных погрешностей. Для третьего кластера разница составляет лишь в 2 раза. Таким образом, для наших целей могут служить лишь первый и второй кластеры, основанные на данных PDG. Данные Crystal Barrel будут использоваться для качественной проверки.

Эквидистантный спектр кластеров, включающий отклонения, можно записать в форме

$$M(n) = \sqrt{an + b} \pm \delta(n). \tag{164}$$

Теперь мы должны интерполировать отклонение $\delta(n)$ некоторой гладкой функцией. У нас нет никаких надёжных теоретических предпосылок относительно вида этой функции. В литературе можно найти лишь различные оценки на скорость восстановления киральной симметрии. В работах [51, 55] было аргументировано, что отклонения экспоненциально убывают, в то время как в работе [155] была предложена модель с полиномиальным убыванием. Рассмотрим обе возможности для $\delta(n)$,

$$\delta_{\mathrm{e}}(n) \sim \frac{e^{-\beta_{\mathrm{e}} n}}{\sqrt{n+1}}, \qquad \delta_{\mathrm{p}}(n) \sim (n+1)^{-\beta_{\mathrm{p}} n}. \tag{165}$$

В первом анзаце мы ввели квадратный корень, чтобы иметь экспоненциальную поправку для квадрата массы. Беря соответствующие числа из таблицы 2, $\delta(1) \approx 89$ МэВ, $\delta(2) \approx 56$ МэВ, приходим к следующим оценкам

$$\beta_{\mathrm{e}} \approx 0.26, \qquad \beta_{\mathrm{p}} \approx 1.14. \tag{166}$$

Итоговые предсказания для экспоненциального и полиномиального отклонений (в МэВ): $\delta_{\mathrm{e}}(3) \approx 37$, $\delta_{\mathrm{e}}(4) \approx 26$, $\delta_{\mathrm{p}}(3) \approx 40$, $\delta_{\mathrm{p}}(4) \approx 31$, тогда как экспериментально $\delta(3) \approx 40$, $\delta(4) \approx 37$. Видно, что полиномиальный анзац работает несколько лучше. Существующий уровень экспериментальной точности всё же не позволяет убедительно указать, какой из анзацев предпочтительней.

Рассмотрим состояния $f_0(980)$ и $a_0(980)$, природа которых вызывает много споров в литературе. Большое количество феноменологических аргументов (см. работу [186] и приводимые там ссылки) указывает на то, что эти мезоны являются $\bar{n}n$-состояниями с большой примесью $\bar{s}s$-компоненты, которая сдвигает их массы почти до $\bar{K}K$ порога. Анализ различных реакций (см. [186] и ссылки там же) даёт оценку на странную компоненту у $f_0(980)$ в районе 60-70%. Эта оценка может быть легко получена теоретически. НКС не приводит к смешиванию векторных и скалярных мезонов [187, 188]. Если под последним понимать $f_0(980)$, тогда мы должны иметь $m_\rho^2 = m_{f_0}^2$. Поскольку ρ-мезон является чистым $\bar{n}n$ состоянием, оценка на количество $\bar{s}s$ примеси в $f_0(980)$ немедленно следует: $(m_{f_0}^2 - m_\rho^2)/m_\rho^2 \approx 0.6$ (напоминаем, что во всех формулах мы имеем дело с (массой)^2). Ситуация с $a_0(980)$ оказывается аналогичной.

Данная оценка не проливает свет на механизм возникновения странной компоненты, не исключено, что для $f_0(980)$ и $a_0(980)$ этот механизм разный. Она лишь численно демонстрирует согласие с гипотезой о том, что данные мезоны являются истинными кварк-антикварковыми скалярными состояниями. Таким образом, если "выключить"странные кварки, то самый нижний кластер около 0.78 ГэВ состоял бы из четырёх мезонов: $\rho(770)$, $\omega(782)$, $f_0(980)$ и $a_0(980)$. Именно поэтому последние две частицы были включены в наш анализ. Как было отмечено выше, этот кластер согласуется с формулой (162) при $n = 0$.

7.4 Анализ ширин распада

Кластеры мезонных резонансов имеют не только устойчивые положения при некоторых эквидистантных значениях энергии, но и устойчивые усреднённые ширины распада, которые показаны в таблице 2. В данном параграфе мы обсудим возможную физику этого явления.

Широко распространено мнение, что лёгкие мезоны можно рассматривать как эффективную адронную струну с релятивистскими кварками на концах. Предположение состоит в том, что трубку хромоэлектрического поля между кварком и антикварком можно эффективно описывать как струну. Из этой качественной картины следует следующее поведение полной ширины распада [189]: $\Gamma(n) = Bm(n)$, где $B = \mathcal{O}(1/N_c)$ является универсальной константой. Изначально данное соотношение было выведено для высоких возбуждений, где оправданно применение квазиклассики. Имея этот результат, рассмотрим поведение усреднённой ширины в кластере, а именно введём число $B(N)$, определённое как

$$B(N) \equiv \frac{\bar{\Gamma}(N)}{\bar{M}(N)}. \tag{167}$$

Для $N = 1, 2, 3, 4$ соответствующие значения приведены в таблице 1.

Желательно иметь также оценку на $B(0)$. Здесь, однако, нужна большая осторожность, так как усреднение ширин для основных состояний не должно быть таким же, как для возбуждённых. Прежде всего, мы не будем рассматривать $f_0(980)$ и $a_0(980)$, потому что большая примесь странного кварка должна сильно изменить их ширину распада. Также надо отметить, что полная ширина у $\omega(782)$-мезона, $\Gamma = 8.49 \pm 0.08$ МэВ, почти в 18 раз меньше, чем у $\rho(770)$-мезона, $\Gamma = 150.3 \pm 1.6$ МэВ. Причина в том, что распад $\omega \to \pi\pi$ сильно подавлен в случае векторного изосинглета, доминирующим распадом является $\omega \to \pi\pi\pi$, имеющий гораздо меньшее фазовое пространство. Первое радиальное возбуждение ω-мезона, $\omega(1420)$-мезон, избегает этого, распадаясь на $\rho\pi$. Данное явление не имеет отношения к нашему предмету, поэтому мы исключим ω-мезон из усреднения. В итоге остаётся только ρ-мезон, который приводит к оценке

$$B(0) = \Gamma_\rho / m_\rho = 0.194. \tag{168}$$

Интересно отметить, что это число было предложено в работе [32] в качестве догадки, призванной оценить константу B в реальном мире. Неожиданным образом она оказалась близка к численной оценке B в модели 'т Хофта (КХД в двух измерениях в пределе большого числа цветов [157–159]), сделанной в [32].

В итоге, наш анализ даёт следующие оценки (см. таблицу 2)

$$B(0) \approx B(1) \approx 0.2, \quad B(2) \approx B(3) \approx B(4) \approx 0.1. \tag{169}$$

Таким образом, догадка, высказанная в [32], оказывается также верной для следующего кластера ($N = 1$). Однако затем наблюдается скачок вниз примерно в два раза. Данные Crystal Barrel, которые мы использовали для оценки $B(3)$ и $B(4)$, подтверждают этот скачок. Возникает вопрос его физической интерпретации. Посмотрев на состояния в кластерах, можно сделать следующие заключения: (а) кластер $N = 1$ состоит, главным образом, из основных состояний; (б) мезоны в кластерах $N = 0, 1$ предпочитают распадаться на две частицы [19]; (в) мезоны в кластерах $N > 1$ предпочитают распадаться на три или четыре частицы [19]. Природа последнего явления представляется загадочной. Именно оно ведёт к сокращению фазового пространства для распадов. Как это представить в терминах эффективной адронной струны? В простейшем случае открытой струны можно было бы предположить, например, что струна одновременно рвётся в двух точках, образуя три новые частицы. Это $\mathcal{O}(1/N_c^2)$ эффект. Возникает вопрос, почему данный эффект мог бы стать доминантным? Более правдоподобное предположение состоит в том, что распад струны является каскадным процессом в случае возбуждённых состояний, и промежуточные стадии этого процесса трудно засечь экспериментально. Константа B получается тогда меньше.

Таким образом, стабильность чисел в (169) может служить аргументом в пользу эффективного струнного описания, однако это описание должно быть разным для основных и возбуждённых состояний.

В заключение отметим, что если рассматривать индивидуальные каналы, то результат (169) едва ли может быть получен. В этом отношении модель т' Хофта даёт поучительный пример. Она имеет так мало степеней свободы для возбуждений основного состояния, что каждый кластер состоит только из одного мезона. В результате величина $B(n)$ имеет кажущиеся случайными флуктуации вокруг постоянного значения, что явно видно при вычислении ширин первых нескольких сотен радиальных возбуждений [32,49]. Имея дело только с несколькими первыми состояниями, это асимптотическое значение не может быть получено. В четырёх измерениях ситуация в определённом смысле легче — множественность состояний в каждом кластере значительно сглаживает флуктуации после усреднения. Благодаря этому обстоятельству, уже первые несколько кластеров способны дать хорошую оценку на асимптотическое значение для B.

Рис. 1: Спектр лёгких нестранных мезонов из компиляций [19] и [22] (для последних двух кластеров) в единицах $m^2_{\rho(770)}$. Указаны экспериментальные погрешности. Кружки стоят в тех случаях, когда ошибки незначительны. Незаштрихованные кружки и полоски обозначают дополнительные состояния (см. текст). Пунктирные линии отмечают средний квадрат массы в каждом кластере. Массы использованных резонансов приведены в таблице 2. Массы легчайших состояний, не указанных в таблице 2, следующие (в МэВ): π: 140; f_0: 980 ± 10; η: 547.75 ± 0.12; a_0: 984.7 ± 1.2; ρ: 775.8 ± 0.5; ω: 782.59 ± 0.11.

Таблица 2: Массы и ширины (в МэВ) состояний на рис. 1. Указаны экспериментальные погрешности.

	$m(1)$	$\Gamma(1)$	$m(2)$	$\Gamma(2)$	$m(3)$	$\Gamma(3)$	$m(4)$	$\Gamma(4)$
π	1300 ± 100	$200 - 600$	1812 ± 14	207 ± 13	2070 ± 35	310^{+100}_{-50}	2360 ± 25	310^{+100}_{-50}
f_0	$1200 - 1500$	$200 - 500$	1770 ± 12	220 ± 40	2020 ± 38	405 ± 40	2337 ± 14	217 ± 33
η	1294 ± 4	55 ± 5	1760 ± 11	60 ± 16	2010^{+35}_{-60}	270 ± 60	2285 ± 20	325 ± 30
a_0	1474 ± 19	265 ± 13			2025 ± 30	300 ± 25		
ρ	1465 ± 25	400 ± 60	1720 ± 20	250 ± 100	2000 ± 30 2110 ± 35	260 ± 45 230 ± 50	2265 ± 40	325 ± 80
a_1	1230 ± 40	$250 - 600$	1647 ± 22	254 ± 27				
ω	$1400 - 1450$	$180 - 250$	1670 ± 30	315 ± 35	1960 ± 25	195 ± 60		
f_1	1281.8 ± 0.6	24.1 ± 1.1			1971 ± 15	240 ± 25	2310 ± 60	255 ± 70
h_1	1170 ± 20	360 ± 40			1965 ± 45	345 ± 75	2215 ± 40	325 ± 55
b_1	1229.5 ± 3.2	142 ± 9			1960 ± 35	230 ± 50	2240 ± 35	320 ± 85
π_1	1376 ± 17	300 ± 40	1653^{+18}_{-15}	225^{+45}_{-28}	2013 ± 25	230 ± 105		
f_2	1275 ± 1	$185.1^{+3.5}_{-2.6}$	1638 ± 6	99^{+28}_{-24}	1934 ± 20 2001 ± 10	271 ± 25 312 ± 32	2240 ± 15 2293 ± 13	241 ± 30 216 ± 37
π_2			1672 ± 3	259 ± 9	2005 ± 15	200 ± 40	2245 ± 60	320^{+100}_{-40}
η_2			1617 ± 5	181 ± 11	2030 ± 16	205 ± 18	2267 ± 14	290 ± 50
a_2	1318.3 ± 0.6	107 ± 5	1732 ± 16	194 ± 40	2030 ± 20	205 ± 30	2255 ± 20	230 ± 15
ρ_2					1940 ± 40	155 ± 40	2225 ± 35	335^{+100}_{-50}
ω_2					1975 ± 20	175 ± 25	2195 ± 30	225 ± 40
f_3					2048 ± 8	213 ± 34	2303 ± 15	214 ± 29
ω_3			1667 ± 4	168 ± 10	1945 ± 20	115 ± 22	2255 ± 15 2285 ± 60	175 ± 30 230 ± 40
ρ_3			1688 ± 2.1	161 ± 10	1982 ± 14	188 ± 24	2260 ± 20	160 ± 25
a_3					2031 ± 12	150 ± 18	2275 ± 35	350^{+100}_{-50}
h_3					2025 ± 20	145 ± 30	2275 ± 25	190 ± 45
b_3					2032 ± 12	117 ± 11	2245 ± 50	320 ± 70
π_4							2250 ± 15	215 ± 25
f_4					2018 ± 6	182 ± 7	2283 ± 17	310 ± 25
ρ_4							2230 ± 25	210 ± 30
a_4					2005^{+25}_{-45}	180 ± 30	2255 ± 40	330^{+110}_{-50}
η_4							2328 ± 38	240 ± 90
ω_5							2250 ± 70	320 ± 95
ρ_5							2300 ± 45	260 ± 75
$\bar{M}$	$1325 \pm 89 \pm 31$		$1697 \pm 56 \pm 12$		$2004 \pm 40 \pm 24$		$2269 \pm 37 \pm 32$	
$\bar{\Gamma}$		$248 \pm 132 \pm 57$		$199 \pm 66 \pm 29$		$224 \pm 69 \pm 38$		$266 \pm 56 \pm 53$
$\bar{\Gamma}/\bar{M}$		0.187		0.117		0.112		0.117

8 Феноменологическое описание новой динамической симметрии

8.1 Введение

В данном разделе мы дадим интерпретацию широкой симметрии, о которой шла речь выше [87]. Эта тематика широко обсуждалась в литературе [77–81], и попытки понять и объяснить наблюдаемую картину вырождения масс лёгких мезонов активно продолжаются.

Спектральные симметрии составных систем обычно трудно предвидеть исходя из фундаментальной теории. Поэтому вырождение спектра на рис. 1 вряд ли можно получить напрямую из КХД, скорее нужно изучать внутреннее строение состояний. Наиболее естественной моделью для описания наблюдаемого спектра является адронная струна с линейно растущим потенциалом. Она приводит к спектру типа

$$M^2 = a(L + bn + c), \tag{170}$$

где L есть угловой момент струны, n — радиальное квантовое число, a и b являются константами, характеризующими угловой и радиальный наклоны. Так как спин кварка равен $\frac{1}{2}$, кварк-антикварковая пара может находиться либо в синглетном ($s = 0$), либо в триплетном ($s = 1$) состоянии. Угловой момент L связан с полным спином J обычным квантовомеханическим правилом сложения моментов,

$$\begin{aligned} s = 0: \quad J &= L, \\ s = 1: \quad J &= L, L \pm 1 \quad (\text{for}\, L = 0: \ J = L + 1). \end{aligned} \tag{171}$$

Существуют различные модельные подходы к квантованию вращающейся квазиклассической струны, что приводит к модельной зависимости параметров b и c. Параметр b обычно лежит в интервале $1 \leq b \leq 2$ [24–27]. Когда он принимает целые значения $b = 1$ и $b = 2$, возникают специфические спектральные вырождения при разных (L, n): типа гармонического осциллятора при $b = 2$ и кулоновского типа при $b = 1$. Недавно было предложено [80], что в реальности $b = 1$. Мы проверим это предположение, используя имеющиеся экспериментальные данные. В итоге будет получена форма струноподобного спектра, наиболее согласованная с феноменологией. Этот анализ является важным для построения моделей адронных струн, АдС/КХД метода и других подходов к описанию спектров.

Перед тем, как перейти к анализу, дадим ещё некоторые комментарии к физике, описываемой соотношением (170). Обсудим сначала интерсепт a_C. В случае бесспиновых кварков, его физическая интерпретация следует из нерелятивистской квантовой механики: это энергия нулевых осцилляций кварков в мезоне, которые появляются из-за соотношения неопределённостей. В реальности, однако, спин-спиновые взаимодействия кварков могут дать значительный вклад в массу S-волнового мезона, где спиновые волновые функции кварка и антикварка имеют максимальную область перекрытия.

При взгляде на спектр (170) (вместе с уравнением (171)), часто возникает следующее возражение: внутренний угловой момент и спин не могут быть разделены в релятивистских системах, поэтому почему мы можем этим формулам доверять? Однако есть аргументы в пользу того, что спин-орбитальные корреляции сильно подавлены в возбуждённых адронах [80, 81, 193–196]. В этом случае квантовомеханические правила для классификации составных систем, по-видимому, можно применять. В действительности, давно известно, что нерелятивистская классификация лёгких мезонов довольно хорошо работает [20, 197]. Для нас важно то, что эта классификация предсказывает удвоение состояний в тех каналах, где резонанс может образоваться при разных угловых моментах. Например, векторные мезоны могут иметь $L = 0$ или $L = 2$ (так называемые S- и D-волновые состояния в терминах нерелятивистской спектроскопии), следовательно, происходит удвоение состояний. Экспериментально это удвоение хорошо видно. На практике разделение резонансов на состояния с разным угловым моментом осуществляется с помощью поляризационных данных. В эксперименте Crystal Barrel хорошее разделение было получено для состояний с $(C, I) = (+1, 0), (-1, 1)$ [21, 22]. Для других каналов, где также ожидается удвоение состояний, чёткого разделения получено не было. Отметим также, что рассматриваемый спектр можно привести к явно релятивистскому виду, используя соотношения (171),

$$M^2(J,n) \sim J + n + c. \tag{172}$$

Однако в этом случае константа c уже не является универсальной.

Другое возражение основано на решёточных вычислениях, которые обычно предсказывают разрыв струны в статическом потенциале между двумя кварками на расстояниях порядка 1–1.5 fm. В потенциальных моделях это явление обычно имитируют с помощью экранированного линейного потенциала (см., например, [198]). В этой связи следует напомнить, что силы, возникающие в КХД, можно моделировать статическими потенциалами только для тяжёлых кварков. Экстраполяция этих результатов на сектор лёгких кварков, вообще говоря, не оправдана, поскольку нестатические вклады, скажем, члены, зависящие от скорости, могут стать весьма существенными или даже доминирующими для ультрарелятивистских кварков.

8.2 Феноменологический анализ

Используя имеющуюся экспериментальную информацию, оценим константы в соотношении (170). Как уже обсуждалось, Particle Data [19] содержит мало надёжно установленных лёгких мезонов тяжелее 1.9 ГэВ, поэтому при больших энергиях (точнее, при 1.9–2.4 ГэВ) будем использовать результаты, полученные коллаборацией Crystal Barrel по протон-антипротонной аннигиляции на лету [21, 22]. В Particle Data они содержатся в разделе "Further States".

Возьмём за основу анализ, выполненный в предыдущем разделе. Для полноты, добавим состояния, имеющие одну звезду по рейтингу компиляции [22], а также резонансы $\rho(1900)$ и $h_1(1595)$. Мы исключим π_1-состояния, поскольку им нельзя приписать определённых квантовых чисел (L,n) в рамках стандартной кварковой модели (хотя соответствующие состояния с массами 1376 ± 17, 1653^{+18}_{-15} и 2013 ± 25 МэВ очень хорошо вписываются в кластерную структуру спектра). В итоге, все резонансы, используемые в настоящем анализе, представлены в таблице 3.

Присвоим теперь каждому состоянию определённые числа (L, n). Для некоторых мезонов определённое значение углового момента L диктуется квантовыми числами кварк-антикварковой пары. Например, аксиально-векторные мезоны могут иметь только $L = 1$. Для других мезонов возможны два разных значения L, например для векторных резонансов возможны как $L = 0$ так и $L = 2$. Возникает проблема разделения этих состояний. Как уже упоминалось, для мезонов с $(C, I) = (+1, 0)$, $(-1, 1)$ проблема во многих случаях решается имеющимися поляризационными данными [22]. Для тех случаев, когда таких данных нет, воспользуемся следующим принципом: состояния с большим L имеют больший центробежный барьер, что делает их несколько более тяжёлыми. Наша классификация состояний по паре чисел (L, n) представлена в таблице 4. Читая данные в этой таблице по диагонали (для удобства мы ввели рамки), легко увидеть вырожденность состояний с одинаковым $L + n$, в точности как предсказывается соотношением (170) если $b = 1$. Эти данные визуализированы на рис. 2, где отчётливо видны образующиеся при фиксированном $L + n$ кластеры состояний.

Проведём количественную оценку нашего наблюдения. Для этой цели используем следующую процедуру. Сначала вычислим среднеквадратичное значение массы для каждой ячейки таблицы 4. Результат представлен в таблице 5. Потом, предполагая параметризацию спектра, диктуемую уравнением (170),

$$M^2(L, n) = AL + Bn + C, \tag{173}$$

найдём наилучший фит на плоскости $M^2(L, n)$ методом наименьших квадратов, беря данные из таблицы 5. Мы не ожидаем, что для $(0, 0)$-состояний параметризация (173) оправдана, поэтому исключим их из фита. Рассмотрим три случая фитирования: для полного спектра $(\bar{M}^2)$, для спектра S-волновых состояний $(\bar{M}_s^2)$ и для спектра состояний с $L > 0$ $(\bar{M}_{ns}^2)$. Результаты представлены в таблице 6.

Таблица 3: Массы (в МэВ) состояний из компиляций [19] и [22]. Указаны экспериментальные погрешности. Каждая колонка соответствует кластеру на рис. 2.

π	135	1300 ± 100	1812 ± 14	2070 ± 35	2360 ± 25
η		1294 ± 4	1760 ± 11	2010^{+35}_{-60}	2285 ± 20
ω	782.65 ± 0.12	$1400 \div 1450$	1670 ± 30	1960 ± 25	2205 ± 30 2295 ± 50
ρ	775.5 ± 0.4	1459 ± 11	1720 ± 20	$1900 \pm ?$ 2000 ± 30	2110 ± 35 2265 ± 40
f_0		$1200 \div 1500$	1770 ± 12	2020 ± 38	2337 ± 14
a_0		1474 ± 19		2025 ± 30	
a_1		1230 ± 40	1647 ± 22	1930^{+30}_{-70}	2270^{+55}_{-40}
f_1		1281.8 ± 0.6		1971 ± 15	2310 ± 60
h_1		1170 ± 20	1595 ± 20	1965 ± 45	2215 ± 40
b_1		1229.5 ± 3.2	1620 ± 15	1960 ± 35	2240 ± 35
f_2		1275.4 ± 1.1	1638 ± 6	1934 ± 20 2001 ± 10	2240 ± 15 2293 ± 13
a_2		1318.3 ± 0.6	1732 ± 16	1950 ± 40 2030 ± 20	2175 ± 40 2255 ± 20
π_2			1672.4 ± 3.2	2005 ± 15	2245 ± 60
η_2			1617 ± 5	2030 ± 16	2267 ± 14
ω_3			1667 ± 4	1945 ± 20	2255 ± 15 2285 ± 60
ρ_3			1688.8 ± 2.1	1982 ± 14	2300^{+50}_{-80} 2260 ± 20
ω_2				1975 ± 20	2195 ± 30
ρ_2				1940 ± 40	2225 ± 35
f_3				2048 ± 8	2303 ± 15
a_3				2031 ± 12	2275 ± 35
h_3				2025 ± 20	2275 ± 25
b_3				2032 ± 12	2245 ± 50
a_4				2005^{+25}_{-45}	2255 ± 40
f_4				2018 ± 6	2283 ± 17
ω_4					2250 ± 30
ρ_4					2230 ± 25
π_4					2250 ± 15
η_4					2328 ± 38
ω_5					2250 ± 70
ρ_5					2300 ± 45

Таблица 4: Классификация лёгких нестранных мезонов по значениям чисел (L, n). Состояния с наименьшим уровнем надёжности (одна звезда согласно [22]) и относительно которых есть подозрения, что они действительно нестранные мезоны, отмечены знаком вопроса.

$L \backslash n$	0	1	2	3	4
0	$\pi(140)$ $\rho(770)$ $\omega(780)$	$\pi(1300)$ $\rho(1450)(?)$ $\omega(1420)(?)$ $\eta(1295)$	$\pi(1800)$ $\eta(1760)$	$\pi(2070)$ $\rho(1900)(?)$ $\eta(2010)$	$\pi(2360)$ $\rho(2150)$ $\omega(2205)(?)$ $\eta(2285)$
1	$f_0(1370)$ $a_0(1450)(?)$ $a_1(1260)$ $f_1(1285)$ $b_1(1230)$ $h_1(1170)$ $a_2(1320)$ $f_2(1275)$	$f_0(1770)$ $a_1(1640)$ $b_1(1620)(?)$ $h_1(1595)(?)$ $a_2(1680)$ $f_2(1640)$	$f_0(2020)$ $a_0(2025)$ $a_1(1930)(?)$ $f_1(1971)$ $b_1(1960)$ $h_1(1965)$ $a_2(1950)(?)$ $f_2(1934)$	$f_0(2337)$ $a_1(2270)(?)$ $f_1(2310)$ $b_1(2240)$ $h_1(2215)$ $a_2(2175)(?)$ $f_2(2240)$	
2	$\rho(1700)$ $\omega(1650)$ $\pi_2(1670)$ $\eta_2(1645)$ $\rho_3(1690)$ $\omega_3(1670)$	$\rho(2000)$ $\omega(1960)$ $\pi_2(2005)$ $\eta_2(2030)$ $\rho_2(1940)$ $\omega_2(1975)$ $\rho_3(1982)$ $\omega_3(1945)$	$\rho(2265)$ $\omega(2295)(?)$ $\pi_2(2245)$ $\eta_2(2267)$ $\rho_2(2225)$ $\omega_2(2195)$ $\rho_3(2300)(?)$ $\omega_3(2285)$		
3	$f_2(2001)$ $a_2(2030)$ $f_3(2048)$ $a_3(2031)$ $b_3(2032)$ $h_3(2025)$ $f_4(2018)$ $a_4(2005)$	$f_2(2293)$ $a_2(2255)$ $f_3(2303)$ $a_3(2275)$ $b_3(2245)$ $h_3(2275)$ $f_4(2283)$ $a_4(2255)$			
4	$\rho_3(2260)$ $\omega_3(2255)$ $\rho_4(2230)$ $\omega_4(2250)(?)$ $\pi_4(2250)$ $\eta_4(2328)$ $\rho_5(2300)$ $\omega_5(2250)$				

Рис. 2: Спектр лёгких нестранных мезонов в единицах $M^2_{\rho(770)}$. Данные взяты из таблицы 3. Указаны экспериментальные погрешности. В случае, если ими можно пренебречь, стоят кружки. Пунктирные линии отмечают средний квадрат массы в каждом кластере. Незаштрихованные полоски и кружки обозначают состояния, отмеченные знаком вопроса в таблице 4. Стрелки указывают на состояния с $J > 0$, не имеющие партнёров по чётности (киральные синглеты).

Таблица 5: Среднеквадратичные значения для (L, n)-блоков таблицы 4 (в МэВ).

$L \backslash n$	0	1	2	3	4
0	—	$\boxed{1373}$	1780	$\boxed{1995}$	2242
1	$\boxed{1294}$	1668	$\boxed{1970}$	2256	
2	1673	$\boxed{1980}$	2260		
3	$\boxed{2024}$	2273			
4	2266				

Таблица 6: Спектр, полученный методом наименьших квадратов (в ГэВ^2). Последняя колонка показывает предсказываемую массу основного состояния (в ГэВ).

	$AL + Bn + C$	$a(L + bn + c)$	$\sqrt{C}$
$\bar{M}^2$	$1.103L + 1.102n + 0.686$	$1.103(L + n + 0.622)$	0.828
$\bar{M}^2_{ns}$	$1.178L + 1.135n + 0.473$	$1.178(L + 0.963n + 0.402)$	0.688
$\bar{M}^2_s$	$1.023n + 0.957$	$1.023(n + 0.935)$	0.978

Таким образом, наш феноменологический анализ подтверждает закон

$$M^2(L, n) \sim L + n \tag{174}$$

для спектра мезонов, составленных из u и d кварков. Результат естественно получен в рамках рассмотренного способа присвоения чисел (L, n) мезонным резонансам, который не является единственным. Действительно, как видно из таблицы 4 и/или рис. 2, приписывание некоторых S-волновых состояний какому-то определённому кластеру неоднозначно, поэтому эти состояния можно перетасовать в ячейках таблицы 4. Однако, поскольку статистический вес этих состояний относительно мал, данная неопределённость мало влияет на результат. Исключение состояний с одной звездой также слабо влияет на фит. В любом случае, значение параметра b в уравнении Eq. (170) с высоким уровнем доверия лежит в интервале

$$0.9 < b < 1.1, \tag{175}$$

т.е. оно согласуется с $b = 1$ в пределах экспериментальных погрешностей.

Рис. 3: Классификация состояний с $J = L$ и их партнёров по P-чётности. Вырожденные массы лежат на горизонтальных линиях. Пунктирные линии символически обозначают масштаб нарушения киральной симметрии, ниже которого данная классификация не работает. Здесь n есть "главное квантовое число", $n = L + n_{\text{рад}} + 1$.

Примерно с той же точностью, как в вырождении внутри (L, n)-мультиплетов, имеет место вырождение между изосинглетами и изотриплетами, что позволяет объединить эти две феноменологические симметрии. Получающаяся картина вырождения масс показана на рис. 3 и рис. 4, на которых вырожденные массы лежат н горизонтальных линиях. Соединив эти две картинки по осям M^2 и по пунктирным линиям и повернув одну из них на 90°, получим полную картину возникающей симметрии — вырожденные массы будут лежать на соответствующих плоскостях.

8.3 Обсуждения

Спектр (174) (точнее, его релятивистская форма (172)) был впервые получен в рамках старых дуальных амплитуд [23, 151–153]. Позже было осознанно, что он является естественным свойством открытой релятивистской струны типа Намбу-Гото, так как частоты колебательного и вращательного движений струны совпадают (см., например, [199]). Недавно спектральный закон (174) был воспроизведён в рамках АдС/КХД

Рис. 4: Классификация состояний с $J = L \pm 1$ и их партнёров по PC-чётности.

подхода [85,94]. Существующие потенциальные кварковые модели неспособны воспроизвести этот закон, что было показано в работе [83]. Попытка связать существование "главного квантового числа"$L + n + 1$ с конфайнментом, реализованным через закон площадей для вильсоновских петель, была предпринята в работе [200].

В последней колонке таблицы 6 мы приводим экстраполяцию полученного спектра к массе $(0,0)$-мезонов для $L = 0$ и $L > 0$ состояний. Экспериментальные массы $\rho(770)$ и $\omega(782)$ мезонов лежат примерно посередине. Это могло бы означать, что в основном состоянии векторного канала S- и D-волновые компоненты сильно смешаны. С другой стороны, это могло бы быть следствием интенсивного спин-спинового взаимодействия кварк-антикварковой пары.

Когда имеется феноменологический фит, возникает интересный вопрос: какая из предложенных моделей адронных струн имеет наилучшее согласие с экспериментом? На наш взгляд, такая модель была введена в работе [27]. Во-первых, она воспроизводит соотношение (172). Во-вторых, для мезонов с $L = J + 1$ эта модель (если убрать используемое в ней условие квантования $J = L + \frac{1}{2}$) даёт интерсепт, близкий к реальности: $c = \frac{5}{12} \approx 0.417$.

Обсудим широко обсуждающийся в последние десять лет вопрос асимптотического восстановления киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых лёгких адронов. Глядя на рис. 2, можно заметить следующую особенность: все состояния на нижних траекториях Редже (ρ, ω, f_2 и a_2 траектории) не имеют киральных партнёров. На рис. 2 эти состояния находятся на вершинах кластеров и отмечены стрелками. Данный факт противоречит сценарию эффективного восстановления киральной симметрии [81], в котором каждый лёгкий адрон должен иметь кирального партнёра (имеется ввиду частица с тем же спином, но с другой пространственной чётностью) с близкой массой (принадлежать тому же кластеру) при достаточно высоких энергиях возбуждения, начиная примерно с 1.7 ГэВ. Тем временем это явление является естественным следствием нерелятивистского струноподобного спектра, даваемого формулой (174): поскольку чётность кварк-антикварковой системы определяется как

$$P = (-1)^{L+1}, \tag{176}$$

состояния с разной чётностью имеют разный орбитальный момент L, в результате чего основное ($n = 0$) состояние с наименьшим L не может иметь партнёра по чётности с такой же массой. Например, основные состояния ρ- и a_1-мезонов не могут быть вырожденными потому что в (L, n)-классификации первое из них есть $(0, 0)$, а второе — $(1, 0)$, в итоге главное квантовое число $L + n + 1$, определяющее массу, является разным. Этот эффект потом последовательно повторяется для высших спинов. Резонансы, принадлежащие лидирующим траектория Редже, обычно имеют наилучшее экспериментальное разрешение. Таким образом, гипотеза эффективного восстановления киральной симметрии не работает в наиболее надёжно установленной части спектра.

8.4 Свойства новых нестранных мезонов ниже 2.4 ГэВ

Выше было установлено, что объединение данных компиляций [19] и [22], приводит к кластерной структуре спектра, в которой массы лёгких нестранных мезонов группируются возле определённых значений $M(N)$ (в МэВ, см. таблицу 2 или 3): $M(0) \approx 785$, $M(1) \approx 1325 \pm 90$, $M(2) \approx 1700 \pm 60$ $M(3) \approx 2000 \pm 40$, $M(4) \approx 2270 \pm 40$. Имея эти цифры и данные о средних ширинах в кластере, можно на основе (L, n)-классификации предсказать массы, ширины и квантовые числа новых резонансов, которые, вероятно, предстоит открыть в будущих экспериментах [88]. Ниже мы перечисляем эти новые состояния отдельно для каждого интервала масс и указываем на возможные кандидаты из имеющихся данных.

1. В интервале энергий 1700 ± 60 МэВ должны находиться новые резонансы a_0, f_1, ρ_2, ω_2, а также по второму ρ и ω мезону. Их ширины примерно $\Gamma = 200 \pm 70$ МэВ. Состояние $X(1650)$, имеющее квантовые числа $I^G(J^{PC}) = 0^-(?^{?-})$, которое цитирует PDG [19], является кандидатом на предсказываемые ω или ω_2 мезон. Состояние $X(1750)$ с $I^G(J^{PC}) =?^?(1^{--})$ [19] — кандидат на ω или ρ мезон.

2. В интервале энергий 2000 ± 40 МэВ должен находиться второй ω мезон. Его ширина примерно $\Gamma = 220 \pm 70$ МэВ. Состояние $X(1975)$ с $I^G(J^{PC}) =?^?(?^{??})$, упоминаемое в PDG [19], могло бы быть кандидатом на этот ω мезон.

3. В интервале энергий 2270 ± 40 МэВ должен быть новый a_0 мезон. Его ширина приблизительно $\Gamma = 270 \pm 60$ МэВ. Состояния $X(2210)$ и $X(2340)$ с $I^G(J^{PC}) =?^?(?^{??})$ [19] являются возможными кандидатами.

Таким образом, нерелятивистская классификация по схеме $n^{2s+1}L_J$, основанная на уравнении (170) с $b = 1$, предсказывает 8 новых нестранных мезона в интервале энергий 1.6-2.3 ГэВ.

Рассмотрим теперь предсказания, даваемые гипотезой восстановления киральной симметрии (ВКС) в рамках идей кластеризации. Очевидно, что все 8 состояний, перечисленные выше, также должны следовать из этого сценария, если ВКС имеет место выше 1.7 ГэВ. Перечислим другие состояния, предсказываемые ВКС.

1. 1700 ± 60 МэВ. Ожидается появление партнёров по чётности у ρ_3 и ω_3 мезонов — новые a_3 and f_3 мезоны соответственно. Если ВКС ведёт к киральным мультиплётам,

описанным в работе [81] $[(1,0)\oplus(0,1)$ и $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ представления $SU(2)_L\times SU(2)_R)]$, тогда мы должны ожидать вторые ρ_3 и ω_3 мезоны и их $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ киральные партнёры, h_3 и b_3 мезоны.

2. 2000 ± 40 МэВ. Ожидается появление партнёров по чётности у a_4 и f_4 мезонов — новые состояния ρ_4 и ω_4, а также мезоны, заполняющие представление $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$: вторые a_4 и f_4, их киральные партнёры η_4 и π_4, и вторые ρ_3 и ω_3.

3. 2270 ± 40 МэВ. Ожидается появление партнёров по чётности у ρ_5 и ω_5 мезонов — новые состояния a_5 и f_5, а также мезоны, заполняющие представление $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$: вторые ρ_5 и ω_5, их киральные партнёры h_5 и b_5, и вторые a_4 и f_4.

В итоге, сценарий ВКС ведёт к гораздо более богатому спектру не обнаруженных состояний (30 резонансов). Будущие эксперименты по спектроскопии должны показать какой из сценариев более адекватен.

Выводы к Главе III

Мы предложили новую схему классификации для лёгких нестранных мезонов, которая полностью объясняет наблюдаемое вырождение масс. Она основана на эмпирическим наблюдении, что спектр масс подчиняется закону $M^2(L,n)\sim L+n$, который был проверен, используя современные экспериментальные данные Particle Data Group [19] и эксперимента Crystal Barrel [22]. Точность предсказаний в предложенных (L,n) мультиплетах примерно такая же, как в унитарной $SU(3)_f$ симметрии. Классификация выглядит наиболее естественно в терминах углового момента L кварк-антикварковой пары, хотя может быть переформулирована в терминах наблюдаемого спина.

Спектр лёгких мезонных возбуждений зависит только от двух входных параметров — универсального наклона и интерсепта (пересечения), что является следствием предположения о независимости спектра от других квантовых чисел (изоспин, C и P чётности). После фиксации физических значений обоих параметров, спектр даёт 100 состояний ниже 2.4 ГэВ, которые даны в таблице 4. За исключением некоторых редких случаев, например, пионов, согласие с экспериментальными данными из Particle Data Group [19] и Crystal Barrel [22] является весьма хорошим. Предсказано 8 новых состояний, которые пока нигде не наблюдались. Показано, что гипотеза восстановления киральной симметрии в спектре высоколежащих возбуждений вряд ли реализуется в природе из-за отсутствия киральных партнёров для резонансов, лежащих на главных реджевских траекториях, и предсказания нереалистично большого количества новых состояний ниже 2.4 ГэВ (30 резонансов).

Проделанный анализ свидетельствует в пользу того, что квазиклассическая модель адронных струн является наиболее естественным методом для описания спектра лёгких мезонов. Был численно продемонстрирован новый аргумент в пользу струнного описания — полная ширина распада, в среднем, пропорциональна массе распадающейся частицы. Кроме того, отношение интерсепта к наклону в глобальном спектре оказалось близким к половине, что хорошо согласуется с квазиклассическим приближением.

Глава IV

9 Голографические модели, описывающие конечное число резонансов с реджевским спектром

9.1 Введение

Недавно голографические модели, мотивированные КХД, были успешно применены для описания непертурбативной физики сильных взаимодействий [93–96]. Поэтому дальнейшие исследования в этой области (часто называемой AdS/КХД-подходом) могут оказаться весьма перспективными, независимо от того, имеют ли отношение возникающие модели к оригинальной идее АдС/КТП соответствия [89] или нет.

Гипотеза Малдасены [89] оказалась весьма плодотворной в попытке связать фундаментальные теории струн в низкоэнергетическом приближении с сильносвязанными четырёхмерными конформными теориями поля, определёнными на границе пространства АдС [90,91]. Поскольку метод АдС/КТП позволяет получить теоретический контроль над калибровочными теориями в режиме сильной связи, следующим естественным шагом в его развитии является обобщение данного метода на физические калибровочные теории, такие как КХД. Данная идея была реализована, хотя и во многом спекулятивно, в так называемых AdS/КХД-моделях (см., например, краткий обзор [85]). Этот подход имеет дело с планарным пределом КХД, $N_c \to \infty$, т.е. его применимость к реальной физике с самого начала имеет довольно сильные ограничения (см. обсуждения в работе [201]). Как следствие, спектр мезонов в AdS/КХД-моделях состоит из бесконечного числа бесконечно узких состояний, в то время как экспериментально видны лишь несколько состояний в каждом канале, они имеют конечную ширину и дискретный спектр постепенно сливается с континуумом. Поэтому одним из следующих шагов в развитии голографического подхода должна быть разработка моделей, описывающих конечное число адронов, сливающихся в итоге с континуумом. В данном разделе мы построим класс AdS/КХД-моделей, обладающих этим свойством [98].

Перед тем как начать наш анализ, сделаем несколько вводных пояснений относительно принципа построения голографических моделей для КХД. Предполагается, что сильные взаимодействия при низких и промежуточных энергиях описываются некоторой пятимерной теорией, находящейся в режиме слабой связи. Из последнего следует применимость квазиклассических методов для пятимерной теории, а также то, что в ней часто можно ограничиться лишь квадратичными по полям членами в лагранжиане. Действие для такой теории пишется в виде

$$S = \int d^4x dz \sqrt{g}\, F(z) \mathcal{L}, \tag{177}$$

где лагранжиан $\mathcal{L}$ и пятимерный фон $F(z)$ зависят от модели (последнего может и не быть), а метрика обычно выбирается анти-де ситтеровской (по крайней мере, в ультрафиолетовой области), по аналогии с примером дуальности, приведённым Малдасеной для одной из четырёхмерных теорий поля [89]. Следуя процедуре, предложенной в работах [90, 91], действие (177), вычисленное на определённом решении уравнения движения, определяет порождающий функционал для корреляторов, которые затем легко находятся. Полюса двухточечных корреляторов дают спектры четырёхмерных возбуждений с квантовыми числами, определяемыми полями в лагранжиане $\mathcal{L}$. Если интересуемся только спектром, то его можно вычислить более простым способом: вводя параметризацию для пятимерных полей (лоренцевы индексы опускаем)

$$\varphi(x, z) = e^{ipx} \varphi(z), \tag{178}$$

находим из уравнения движения собственные значения p^2, которые соответствуют квадратам масс, так как p по смыслу есть обычный четырёхмерный импульс.

Для метрики Анти-де Ситтера стандартно используется следующая параметризация:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dx_\mu dx^\mu - dz^2), \qquad z > 0. \tag{179}$$

Пятая пространственноподобная координата z называется голографической и имеет физическую интерпретацию обратного масштаба энергии. Поясним это утверждение. По определению, пятимерное пространство Анти-де Ситтера есть следующая гиперповерхность в плоском шестимерном пространстве с двумя времениподобными координатами τ и x_0:

$$\tau^2 + y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = R^2. \tag{180}$$

Вводя новые координаты $u = \tau + y_4$ и $v = \tau - y_4$, гиперповерхность (180) переписывается как

$$uv - y_\mu^2 = R^2, \tag{181}$$

а метрика становится

$$ds^2 = dudv + dy_\mu dy^\mu. \tag{182}$$

Пользуясь (181), можно исключить в выражении (182) координату v. Вводя затем опять новые координаты

$$z = \frac{R^2}{u}, \qquad x_\mu = \frac{z}{R} y_\mu, \tag{183}$$

приходим к метрике (179). Отметим, что координаты x_μ в решении (178) отличаются от изначальных координат y_μ и связаны с последними преобразованием (183). Возникает вопрос, почему сопряжённые им переменные p_μ должны тогда трактоваться как компоненты обычного четырёх-импульса? Дело в том, что оператор импульса $p_x = -i\partial_x$ действует на функции от x также как $\frac{R}{z}p_y$, поэтому имеем

$$e^{ip_x x} = e^{i\frac{R}{z}p_y\frac{z}{R}y} = e^{ip_y y}, \tag{184}$$

и, таким образом, плоскую волну в x-пространстве можно заменить на плоскую волну в изначальном y-пространстве. Из равенства (184) становится понятным и физический смысл голографической координаты z: двигая её, мы перемасштабируем четырёхмерные координаты и импульсы, причём большим z соответствуют большие значения координат и малые значения импульсов, а малым z — наоборот. Поэтому предел $z \to 0$ есть ультрафиолетовый предел теории, а $z \to \infty$ — инфракрасный.

9.2 Формулировка проблемы

Одна из главных задач непертурбативной КХД состоит в описании спектра лёгких адронов. Мы будем интересоваться только лёгкими мезонами, так как их спектр хорошо определён в пределе большого числа цветов. Наиболее изученными мезонными резонансами являются ρ-мезоны [19]. Только в этом секторе есть достаточно данных для более-менее надёжных фитов, по этой причиные мы ограничимся ρ-мезонами.

Константа связи КХД α_s зависит от масштаба энергии, что делает вряд ли возможным точно следовать принципам АдС/КТП соответствия в поиске дуальной модели для реальной КХД, тем не менее, можно попытаться максимально использовать их. Согласно усреднённому фиту [19], величина α_s на масштабе массы ρ-мезона составляет $\alpha_s(0.776 \text{ ГэВ}) \approx 0.71$, на масштабе массы первого радиального возбуждения ρ-мезона: $\alpha_s(1.465 \text{ ГэВ}) \approx 0.35$, на масштабе массы самого тяжёлого из известных возбуждений: $\alpha_s(2.300 \text{ ГэВ}) \approx 0.28$. Отсюда видно, что в интервале энергий, где расположены все известные лёгкие векторные резонансы, изменение α_s довольно мало (порядка 20%). С другой стороны, теория находится в режиме достаточно сильной связи (существуют резонансы), следовательно можно ожидать, что слабосвязанные голографические теории, дуальные КХД, могут в данном интервале существовать в каком-то приближённом смысле. При более низких энергиях, КХД находится в режиме сильной связи, при этом α_s весьма быстро меняется (см., однако, недавние указания на существование инфракрасной фиксированной точки [202], предполагающей $\frac{\alpha_s}{\pi} \lesssim 1$), а при более высоких энергиях, КХД приближённо становится масштабно-инвариантной, при этом имеет место режим слабой связи в силу асимптотической свободы, то есть в обоих случаях принципы АдС/КТП соответствия сильно нарушены. Таким образом, мы будем голографически описывать резонансную область, которая ограничена инфракрасным (IR), Λ_{IR}, и ультрафиолетовым (UV), Λ_{UV}, обрезаниями. Введение UV-обрезания, отделяющего резонансную область от начала пертурбативного континуума, является весьма важным в нашем подходе и отличает рассматриваемые модели от других АдС/КХД моделей, существующих в литературе. В так называемых моделях с жёсткой стенкой [92–94], IR-обрезание фиксируется вручную для моделирования конфайнмента, в нашем же случае эффективное IR-обрезание возникнет существенно другим образом.

Рассматривая КХД с калибровочной группой $SU(N_c)$, где N_c конечно и произвольно, нужно ответить на следующий вопрос: сколько резонансов следует учесть? Вопрос нетривиален, потому что, вообще говоря, обрезание Λ_{UV} зависит от N_c. Однако можно привести простой аргумент, что если спектр квадратов масс линеен, $m_n^2 \sim \mu^2 n$, то число учтённых резонансов должно быть пропорционально N_c. Рассмотрим стандартную брейт-вигнеровскую параметризацию резонансных амплитуд, в ней реальная ширина есть $\Gamma_n m_n$, и если эта величина становится равной расстоянию между квадратами масс соседних резонансов, $\Gamma_n m_n \sim \mu^2$, то это можно считать слиянием резонансов с континуумом. С другой стороны, согласно моделям квазиклассической струны [155], $\Gamma_n \sim m_n/N_c$, следовательно, $\Gamma_n m_n \sim m_n^2/N_c \sim \mu^2 n/N_c$ и мы получаем $n_{\max} \sim N_c$. Верность данного аргумента является важной для дальнейшего анализа.

9.3 Построение модели

Чтобы продвинуться в голографическом описании реальной физики адронов, обычно идут по пути обобщения наиболее успешных голографических моделей. Есть два взаимодополняющих пути для таких обобщений: либо вводя новые операторы/поля, следуя принципам АдС/КТП соответствия, либо модифицируя метрику пятимерного фона. Первый путь, по-видимому, более самосогласован, но в то же время более сложен и отчасти неоднозначен. Второй выглядит более произвольным, но одновременно и более простым, по этой причине мы пойдём по второму пути в надежде, что полученные результаты будут потом оправданы альтернативными способами.

Простейшее пятимерное действие, описывающее спектр векторных мезонов, имеет вид [94]

$$S = \int d^5x \sqrt{g} \left(-\frac{1}{4g_5^2} F_{MN} F^{MN} \right), \tag{185}$$

где $g = |\det g_{MN}|$ и $F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$. Вообще говоря, в пятимерии мы должны иметь теорию Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(N_f)$ [94], однако для вычисления спектра масс удерживают только квадратичные по полям члены, так что абелевой части F_{MN} достаточно для наших целей. IR граничным условием является конечность действия при $z = \infty$. Метрика параметризована следующим образом,

$$g_{MN} dx^M dx^N = e^{2A(z)} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu), \tag{186}$$

здесь $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Уравнение движения для действия (185) обладает решением для струнных мод $V_M(x, z)$, которые считаются дуальными физическим состояниям калибровочной теории. Фиксируя калибровку $V_z = 0$, соответствующее уравнение сводится к

$$\partial_z (e^A \partial_z v_n) + q^2 e^A v_n = 0, \tag{187}$$

где v_n должны быть нормируемыми решениями для 4D поперечных компонент V_μ^T, которые существуют только для дискретных значений 4D импульса $q^2 = m_n^2$. После подстановки

$$v_n = e^{-A/2} \psi_n, \tag{188}$$

уравнение (187) принимает форму уравнения Шрёдингера,

$$-\psi_n'' + U(z)\psi = m_n^2 \psi_n, \tag{189}$$

с потенциалом

$$U(z) = \frac{1}{4}(A')^2 + \frac{1}{2}A''. \tag{190}$$

Таким образом, спектр 4D калибровочной теории и метрика дуальной 5D теории (плюс граничные условия) связаны между собой формой потенциала (190). Пятая координата z считается обратным энергетическим масштабом: $Q \sim 1/z$. Разобьём потенциал $U(z)$ на UV и IR части,

$$U(z) = U_{\mathrm{UV}}(z) + U_{\mathrm{IR}}(z), \tag{191}$$

где $U(z) \xrightarrow[z\to 0]{} U_{\text{UV}}(z)$ и $U(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} U_{\text{IR}}(z)$.

Как следует из принципа АдС/КТП соответствия, векторная волновая функция должна иметь UV-асимптотику $\psi(z) \xrightarrow[z\to 0]{} z^2$ [92], что диктует $U_{\text{UV}}(z) \xrightarrow[z\to 0]{} z^{-2}$. Обычно выбирают $U_{\text{UV}}(z) = 3/(4z^2)$, что даёт $e^{2A(z)} = z^{-2}$. Конформная изометрия метрики отражает конформное поведение КХД в ультрафиолетовой области. Конформная инвариантность может быть нарушена двумя способами — либо накладывая жесткое обрезание z_{IR} [92–94] (получающийся в моделях с жесткой стенкой спектр $m_n \sim n$ не является реджевским) либо вводя нетривиальный $U_{\text{IR}}(z)$. Чтобы получить желаемое поведение $m_n^2 \sim n$, нужно иметь $U_{\text{IR}}(z) \sim z^2$, по крайней мере при $z \to \infty$, т.е. потенциал типа линейного осциллятора. Эта идея была реализована в моделях с мягкой стенкой [96] путём введения поля дилатона в действие (185).

Мы хотим иметь спектр осцилляторного типа при малых n и конечное число дискретных уровней энергии. Как известно, для этого требуется введение ангармоничности при больших z. Общая форма спектра, даваемая такими ангармоническими потенциалами может быть выведена модельно-независимо из анализа ангармонических поправок,

$$U_{\text{IR}}(z) = \omega^2 z^2 + \alpha z^3 + \beta z^4, \tag{192}$$

где мы учли член $\mathcal{O}(z^4)$, так как первая ангармоническая поправка, идущая от члена $\mathcal{O}(z^3)$, исчезает [190]. На время мы пренебрежём UV вкладом $U_{\text{UV}}(z)$ (он будет обсуждаться ниже).

Рассматривая ангармонические поправки как возмущения, получаем из уравнения (189) спектр [190]

$$m_n^2 = 2\omega(n+1/2) - \gamma(n+1/2)^2 + \text{const}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{193}$$

в котором

$$\gamma = \frac{3}{2\omega^2}\left(\frac{5}{2\omega^2}\alpha^2 - \beta\right). \tag{194}$$

Отсюда непосредственно видно, что мы имеем спектр осцилляторного типа при малых n, если $|\gamma| \ll \omega$, и конечное число уровней энергии, если $\gamma > 0$. Независимость массы мезона от N_c налагает $\omega = \mathcal{O}(N_c^0)$. Для того чтобы число состояний было пропорционально N_c, мы должны иметь $\gamma = \mathcal{O}(1/N_c)$, т.е. нелинейные поправки к спектру не являются лидирующими в счёте по большим N_c.

Рассмотрим теперь влияние UV области, вводя $U_{\text{UV}}(z) = \varepsilon/z^2$, $\varepsilon \to 0$. Граничное условие для осцилляторной волновой функции, $\psi(\infty) = 0$, дополняется тогда условием $\psi(\delta) = 0$, $\delta \to 0$. В результате чётные уровни в спектре (193) исчезают, имеются только $n = 1, 3, \ldots$. Заменяя n на

$$k = n/2 - 1/2, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{195}$$

лидирующий по N_c вклад в массу даётся выражением

$$m_k^2 \simeq 4\omega(k + 3/4) + \text{const}. \tag{196}$$

Сдвиг ε ведёт к сдвигу вверх уровней энергии (см., например, конкретный пример для $\varepsilon = 3/4$ в работе [96]), в итоге некоторые из самых верхних уровней могут исчезнуть. Всё это, однако, не меняет общих выводов о качественном поведении спектра.

Мы предполагаем такую форму потенциалов, чтобы не было возможности для квантового туннелирования в глубоко-инфракрасную область, $z \to \infty$. Вместе с требованием конечности дискретных уровней энергии, это ведёт следующей общей форме потенциалов: они выглядят как потенциальная яма (с правой стенкой в форме z^2) при сравнительно малых z и постепенно переходят в плато при больших z, $U_{\text{IR}}(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \Lambda_{\text{UV}}^2$, см. рис. 5. Асимптотическое поведение метрики следует из уравнения (190):

$$A(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \pm 2\Lambda_{\text{UV}} z \tag{197}$$

(см. уравнение (186)). Чтобы иметь конечное действие, мы должны выбрать знак минус. Число дискретных уровней энергии определяется величиной обрезания Λ_{UV}, выше которого (плюс произвольная константа) имеем континуум, а также "шириной"потенциала, который мы ассоциируем с IR-обрезанием Λ_{IR}. Как упоминалось выше, увеличение множителя перед $U_{\text{UV}}(z)$ ведёт к сдвигу вверх уровней энергии, в результате некоторые из наиболее возбуждённых состояний могут исчезнуть. Величина Λ_{IR}

Рис. 5: Общая форма обсуждаемых голографических потенциалов в условных единицах.

определяет (с точностью до предположительно малой константы) эффективное IR-обрезание z_{IR} в координатном пространстве: в окрестности z_{IR} потенциальная яма меняет вид z^2 на плато.

9.4 Сравнение с экспериментом

Сравним наши предложения с экспериментом. Particle Data [19] в разделе "Лёгкие бесфлейворные мезоны"сообщает о пяти ρ-мезонах: $\rho(770)$, $\rho(1450)$, $\rho(1700)$, $\rho(1900)$ и $\rho(2150)$, последние два состояния опущены из основного списка, но мы включим их в наш фит, поскольку они независимо наблюдались несколькими коллаборациями. Беря экспериментальные значения масс этих резонансов с известными погрешностями, мы можем интерполировать их кривой

$$m_n^2 = An^2 + Bn + C \tag{198}$$

по методу наименьших квадратов и оценить погрешность полученных параметров. Результатом является функция (в ГэВ^2)

$$m_n^2 \approx (-0.09 \pm 0.02)n^2 + (1.30 \pm 0.08)n + (0.71 \pm 0.02). \tag{199}$$

В разделе "Другие лёгкие бесфлейворные мезоны"Particle Data [19] сообщает о других двух ρ-мезонах: $\rho(2000)$ и $\rho(2270)$. Первый из них был виден только одной коллаборацией, по этой причине мы его не рассматриваем. Второй независимо наблюдался двумя коллаборациями, его масса в хорошем согласии с фитом (199).

Первые три резонанса являются наиболее надёжными, поэтому разумно также продемонстрировать фит, основанный только на этих трёх состояниях,

$$m_n^2 \approx (-0.37 \pm 0.10)n^2 + (1.91 \pm 0.18)n + 0.06. \tag{200}$$

Таким образом, нелинейная поправка к спектру находится в качественном согласии с нашим анализом как по величине, так и по знаку. Имея фит (199), можно получать численные значения для параметров ангармонических потенциалов.

9.5 Частная модель

Для оценки типичных значений входных параметров, рассмотрим следующий пример потенциала, имеющего форму "потенциальная яма плюс плато",

$$U(z) = \Lambda_{\mathrm{UV}}^2 \left(1 - e^{-\Lambda_{\mathrm{IR}}(z-z_0)}\right)^2 + C, \tag{201}$$

где C константа. Это известный потенциал Морса [204], который широко использовался для описания вибраций ядер (возле z_0) в двухатомной молекуле. В нашем случае, сдвигом $z_0 > 0$ мы можем имитировать $U_{\mathrm{UV}}(z)$ в области применимости рассматриваемых моделей, поэтому потенциал (201) является хорошей интерполяцией для описанного выше класса потенциалов. Этот потенциал точно решаем, его спектр [204]

$$m_n^2 = 2\Lambda_{\mathrm{UV}}\Lambda_{\mathrm{IR}}(n + 1/2) - \Lambda_{\mathrm{IR}}^2(n + 1/2)^2 + C, \tag{202}$$

$$0 \le n \le \frac{\Lambda_{\mathrm{UV}}}{\Lambda_{\mathrm{IR}}} - \frac{1}{2}. \tag{203}$$

Используя фит (199), получаем численные значения параметров: $\Lambda_{\mathrm{UV}} \approx 2.34$ ГэВ, $\Lambda_{\mathrm{IR}} \approx 0.30$ ГэВ, $C \approx 0.04$ ГэВ^2. Имеем тогда семь резонансов с массами (в ГэВ)

$$m_n = \{0.84, 1.39, 1.72, 1.96, 2.12, 2.24, 2.31\}. \qquad (204)$$

Согласно нашим предыдущим обсуждениям, скейлинг по N_c обрезаний следующий: $\Lambda_{\text{UV}} = \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$, $\Lambda_{\text{IR}} = \mathcal{O}(1/\sqrt{N_c})$. Интересно отметить, что в лидирующем порядке по N_c масса основного состояния (пренебрегая малым C) есть геометрическое среднее обрезаний.

Потенциал (201) можно сделать представителем нашего класса потенциалов если мы положим $z_0 = 0$ и добавим $U_{\text{UV}}(z) = \varepsilon/z^2$, однако аналитического решения для возникающей модели неизвестно. При достаточно малых ε и предполагая $\Lambda_{\text{UV}} \gg \Lambda_{\text{IR}}$, получим, что в этом случае дискретные уровни энергии расположены в потенциальной яме при $z_{\text{UV}} < z < z_{\text{IR}}$, где $z_{\text{UV}} \simeq \sqrt{\varepsilon}/\Lambda_{\text{UV}}$, $z_{\text{IR}} \simeq 1/\Lambda_{\text{IR}}$. При выборе $\varepsilon = 3/4$, волновые функции $v_n(z)$, в которых n достаточно мало (т.е. имеется почти линейный спектр) близки к волновым функциям, найденным в работе [96].

9.6 Обсуждения

Предложенный класс АдС/КХД моделей сочетает в себе сильные стороны как голографических моделей с жёсткой стенкой, так и с мягкой: подобно моделям с жёсткой стенкой, есть (эффективное) IR-обрезание, связанное с конфайнментом и нет искусственного дилатона, чьё физическое происхождение непонятно, с другой стороны, как и в моделях с мягкой стенкой, имеется приблизительно линейный спектр и отсутствие неоднозначности в выборе IR граничных условий. Однако, если мы включим поля высших спинов предложенным в работе [96] способом, то дилатона, по-видимому, не избежать, если хотим иметь универсальный наклон траекторий для всех спинов J и соотношение $m^2_{n,S} \sim n + J$, которое, как показано в предыдущей главе, хорошо описывает экспериментальные данные. Форма дилатона будет в нашем случае другой: с точнотью до множителя перед экспонентой, она будет выглядеть как e^{-z}, вместо e^{-z^2}, полученной в работе [96].

Следует отметить, что константа связи g_5, входящая в действие (185), может быть получена сшивкой высокоэнергетической асимптотики двухточечных корреляторов КХД тем же способом, что использовался в статье [94] (в случае конечного числа резонансов, для этого нужно рассмотреть правила сумм с конечной энергией [167]). Мы полагаем, однако, что такая сшивка осуществляется вне области применимости обсуждаемых моделей.

Важным результатом введённых моделей является то, что спектр сгущается при высоких энергиях, т.е. радиальные реджевские траектории загибаются вниз, и дискретный спектр кончается в районе точки нулевого наклона. В рамках моделей адронных струн, этот эффект обычно интерпретируется как разрыв струны, следовательно, предложенные модели способны описать этот эффект: с точностью до модельно-зависимой константы, натяжение струны в нашей схеме имеет вид (см. уравнение (202))

$$\sigma \sim \Lambda_{\mathrm{UV}}\Lambda_{\mathrm{IR}}(1 - tn - t) = \mathcal{O}(N_c^0), \tag{205}$$

где

$$t = \Lambda_{\mathrm{IR}}/(2\Lambda_{\mathrm{UV}}) = \mathcal{O}(1/N_c), \tag{206}$$

т.е. σ является константой только в пределе большого числа цветов.

Проблема нелинейных поправок к струноподобному спектру обсуждалась в первой главе в контексте правил сумм КХД в планарном пределе [51, 155], в частности было предложено, что такие поправки экспоненциально малы, e^{-bn} с $b > 0$ [51]. Если предположить скейлинг $b = \mathcal{O}(1/\sqrt{N_c})$ и разложить экспоненту в ряд, считая b малым параметром, то форма экспоненциальной поправки будет совместна с полученным в данном разделе результатом.

В минимальной версии рассмотренный класс моделей имеет 3 входных параметра в голографическом потенциале: произвольная константа и множители перед гармоническим и ангармоническим членами в (мы можем положить $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ в уравнении (192) без изменения вытекающих следствий). Это довольно много, поскольку экспериментально известно всего несколько состояний в каждом канале. Заметим, однако, что последние два параметра, по-видимому, должны быть универсальными для всех каналов, следовательно, добавляя новые каналы в модель, появляется только один новый параметр на канал — новая произвольная константа — или даже меньше в силу спектральных вырождений [88], то есть такие модели будут более предсказательными, если описывать сразу много видов мезонов.

Введение UV-обрезания Λ_{UV} могло бы решить следующую концептуальную проблему в обосновании АдС/КХД моделей: пятимерное действие предполагается локальным, т.е. вклады высших производных считаются подавленными. Однако не понятно какой масштаб должен подавлять эти вклады. В рамках АдС/КХД моделей, предложенных в данном разделе, можно спекулировать о том, что подавление производится степенями $1/\Lambda_{\mathrm{UV}}$.

Из физического смысла и численных оценок IR-обрезания Λ_{IR}, появляется соблазн сопоставить эту величину с $\Lambda_{\text{КХД}}$, как в моделях с жёсткой стенкой [93]. Однако, согласно общему убеждению, $\Lambda_{\text{КХД}}$ практически не зависит от N_c, что даёт скейлинг $m_n = \mathcal{O}(N_c^0)$ для масс мезонов. В нашем же случае, ситуация более сложная: хотя $\Lambda_{\mathrm{IR}} = \mathcal{O}(1/\sqrt{N_c})$, скейлинговое поведение $m_n^2 \sim \Lambda_{\mathrm{IR}}\Lambda_{\mathrm{UV}} = \mathcal{O}(N_c^0)$ имеет место благодаря существованию UV-обрезания $\Lambda_{\mathrm{UV}} = \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$, поэтому мы должны предположить

$$\Lambda_{\text{КХД}}^2 \sim \Lambda_{\mathrm{IR}}\Lambda_{\mathrm{UV}}. \tag{207}$$

Если рассматриваемые модели действительно отражают реальную КХД, то впервые имеем дело с ситуацией, когда можно узнать что-то качественно новое о КХД из АдС/КХД моделей. В частности, наш предыдущий анализ предлагает следующий механизм для появления $\Lambda_{\text{КХД}}$ в воображаемом аналитическом решении для КХД: вводятся IR и UV обрезания и предел $\Lambda_{\mathrm{IR}} \to 0$, $\Lambda_{\mathrm{UV}} \to \infty$ берётся так, чтобы произведение $\Lambda_{\mathrm{IR}}\Lambda_{\mathrm{UV}}$ оставалось конечным, и именно оно ассоциируется с $\Lambda_{\text{КХД}}^2$, которое определяет массовый масштаб в теории с безмассовыми кварками. Рассматривая же эффективные теории КХД, работают с конечным Λ_{UV} и ненулевым Λ_{IR}, которые являются входными параметрами теории. Именно эта идеология лежит в основе предложенных в данном разделе голографических моделей.

10 Эффективная пятимерная модель для лёгких адронных возбуждений

10.1 Введение

АдС/КХД модели являются гипотетическими конструкциями, поскольку на самом деле неизвестно как надо искать голографическую дуальную модель для реальной КХД. На практике просто заимствуются рецепты из оригинальной идеи АдС/КТП соответствия без каких-либо доказательств. По этой причине имеет смысл "разведать"также альтернативные пути для построения пятимерных эффективных теорий для сильных взаимодействий. Вероятно главный урок, который мы извлекли из голографического подхода, заключается в том, что в таких эффективных теориях пятая координата играет роль обратного масштаба энергии (см. также обсуждения в работе [99]). Другим интересным предположением является существование дуальности (соответствия) между 4D операторами и 5D полями. В данном разделе мы примем оба этих предположения, но предложим совершенно другой механизм для генерации масс, который более естественный для теории поля (по сути, хиггсовский механизм): вместо моделирования спектра в виде калуца-клейновских возбуждений 5D полей, определённых в искривлённом компактном 5D пространстве, мы рассмотрим 5D поля в плоском бесконечном пространстве, взаимодействующие со скалярным полем, которое имеет ненулевое вакуумное среднее, зависящее от пятой координаты, т.е. от масштаба энергии. Это скалярное поле предполагается дуальным глюонному оператору $G_{\mu\nu}^2$. Такая конструкция моделирует масштабную аномалию в КХД и генерирует дискретный спектр адронов с конечным числом состояний, переходящий в континуум [100, 101].

Мы будем рассматривать нашу модель как эффективную теорию поля, которая применима ниже некоторого масштаба энергии, скажем ниже 2.5 GeV, где наблюдаются лёгкие мезоны [19]. В рамках такой идеологии, нам не обязательно иметь метрику АдС в UV пределе, так как мы не будем делать сшивки с UV асимптотикой корреляторов КХД. Мы рассмотрим простейшую возможность — плоскую метрику. Кроме того, в духе многих эффективных теорий, наша модель предполагается применимой только на древесном уровне даже в режиме сильной связи.

10.2 Вакуумный сектор

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x_\mu, z)$, $\mu = 0,1,2,3$, распространяющееся в пяти измерениях, где пятая пространственная координата z играет роль обратного масштаба энергии, $0 \leq z < \infty$. Предположим, что это поле дуально глюонному оператору $G^2_{\mu\nu}$. Последний, как известно, приобретает ненулевое вакуумное среднее $\langle G^2_{\mu\nu}\rangle$, которое является причиной аномалии в следе тензора энергии-импульса [210],

$$4\varepsilon_{\text{vac}} = \langle \Theta^\mu_\mu \rangle_{\text{н.ч.}} = \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s}\langle G^2_{\mu\nu}\rangle_{\text{н.ч.}} + \mathcal{O}(\alpha) + \cdots . \tag{208}$$

где ε_{vac} обозначает вакуумную энергию, н.ч. расшифровывается как "непертурбативная часть"и слагаемое $\mathcal{O}(\alpha)$ есть вклад от поляризации кварков. Предположим, что адроны приобретают наблюдаемые массы благодаря взаимодействию с полем φ. Принимая плоскую метрику с сигнатурой $\eta_{AB} = (1,-1,-1,-1,-1)$, постулируем следующее действие для вакуумного сектора модели ($A = 0,1,2,3,4$)

$$S_{\text{vac}} = \int d^4x dz \left(\frac{1}{2}\partial_A\varphi\partial^A\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\right). \tag{209}$$

Перемасштабируя поля и координаты,

$$x \to \frac{x}{m}, \qquad \varphi \to \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\varphi, \tag{210}$$

действие (209) переписывается в терминах безразмерных величин

$$S_{\text{vac}} = \frac{1}{\lambda m}\int d^4x dz \left(\frac{1}{2}\partial_A\varphi\partial^A\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi^4\right). \tag{211}$$

Расстояния и константа связи λ измеряются теперь в единицах $1/m$, которые будут в дальнейшем подразумеваться. По предположению, самодействие слабое, $\lambda m \ll 1$, следовательно, можно применить квазиклассический анализ.

Классическим уравнением движения является

$$\partial_\mu^2\varphi - \partial_z^2\varphi - \varphi(1-\varphi^2) = 0. \tag{212}$$

Мы предполагаем, что вакуумное среднее φ_{vac} не зависит от обычных пространственно-временных координат, $\varphi(x_\mu, z) = \varphi(z)$. Уравнение (212) имеет тогда решение типа кинка [211]

$$\varphi_{\text{vac}} = \pm\tanh(z/\sqrt{2}). \tag{213}$$

Мы выбираем знак плюс. Решение (213) нарушает трансляционную инвариантность вдоль оси z, делая таким образом различные масштабы энергии неэквивалентными. Этот эффект важен при достаточно больших z, т.е. при малых энергиях, при высоких энергиях эффект становится пренебрежимо мал. Данная теоретическая конструкция моделирует масштабную аномалию в КХД [210], где зависимость решения φ_{vac} от пятой координаты интерпретируется как наличие аномальной размерности у оператора $G_{\mu\nu}^2$.

Найдём частицеподобные возбуждения вакуумного состояния. Подставляя $\varphi = \varphi + \varepsilon$ в уравнение (212), удерживая затем только линейные по ε вклады и предполагая анзац $\varepsilon(x_\mu, z) = e^{ipx}\varepsilon(z)$, где $p^2 = M^2$ есть обычный четырёхмерный импульс, определяющий физическую массу M, получаем следующее уравнение на дискретный спектр масс,

$$\left(-\partial_z^2 + 3\tanh^2(z/\sqrt{2}) - 1\right)\varepsilon_n = M_n^2\varepsilon_n. \tag{214}$$

Это одномерное уравнение Шрёдингера имеет два нормируемых состояния (мы опускаем нормировочные множители):

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\cosh^2(z/\sqrt{2})}, \qquad M_0^2 = 0; \tag{215}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tanh(z/\sqrt{2})}{\cosh(z/\sqrt{2})}, \qquad M_1^2 = \frac{3}{2}. \tag{216}$$

Континуум начинается при $p^2 = 2$. Нулевая мода ε_0 соответствует голдстоуновскому бозону спонтанно нарушенной трансляционной инвариантности вдоль оси z. Данная "дилатонная"мода локализована при высоких энергиях, $z \to 0$, где масштабная инвариантность асимптотически восстанавливается. Интересной особенностью модели является существование массивной моды, локализованной возле $z_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{arctanh}(1/\sqrt{2}) \approx 1.25$ и которую можно сопоставить со скалярным глюболом согласно физическому смыслу поля φ.

10.3 Введение бозонов

Рассмотрим безмассовый бозон H, взаимодействующий с вакуумным полем φ. Это взаимодействие должно сгенерировать ненулевую массу у бозона. Мы изучим простейшую ситуацию: соответствующее действие квадратично по H, при этом решение будем искать в рамках анзаца $H(x_\mu, z) = H(x_\mu)H(z)$, который позволяет получить частицеподобные возбуждения. Так как поле H должно быть нормируемым, можно проинтегрировать по z и придти к 4D эффективному действию. Мы не будем вводить взаимодействие бозонов с градиентами скалярного поля φ, поскольку такие вершины, хотя и могли бы играть роль при высоких энергиях, не важны для генерации массы при низких энергиях.

Для простоты, мы проведём анализ только для случая скалярного мезона Φ, взаимодействующего с вакуумным полем φ, при желании этот анализ нетрудно обобщить на более высокие спины. Итак, действие имеет вид:

$$S_{\mathrm{bos}} = \int d^4x dz \left(\frac{1}{2} \partial_A \Phi \partial^A \Phi - \frac{G}{2} \varphi^2 \Phi^2 \right). \tag{217}$$

Делая перемасштабирование (210) и $\Phi \to m^{3/2}\Phi$, соответствующий лагранжиан выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{bos}} = \frac{1}{2} \left(\partial_A \Phi \partial^A \Phi - \frac{G}{\lambda} \varphi^2 \Phi^2 \right). \tag{218}$$

Таким образом, интенсивность взаимодействия бозона со скалярным полем φ определяется безразмерной константой

G/λ. Найдём частицеподобные возбуждения $\Phi(x_\mu, z) = e^{ipx} f(z)$, $p^2 = M^2$ над вакуумным фоном (213). Классическое уравнение движения представляет собой одномерное уравнение Шрёдингера

$$\left(-\partial_z^2 + \frac{G}{\lambda} \tanh^2(z/\sqrt{2})\right) f_n = M_n^2 f_n, \tag{219}$$

которое определяет дискретный спектр

$$M_n^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8G}{\lambda}}\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right], \tag{220}$$

$$\begin{aligned} f_n = {} & \cosh^{n-s}(z/\sqrt{2}) \times \\ & F\left[-n, 2s+1-n, s+1-n, \frac{1-\tanh(z/\sqrt{2})}{2}\right] \end{aligned} \tag{221}$$

где F обозначает гипергеометрическую функцию и

$$s = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8G}{\lambda}} - 1\right), \tag{222}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n < s. \tag{223}$$

Непрерывный спектр начинается при $n = s$. Радиальные возбуждения $n > 0$ возникают при $G/\lambda > 1$, их число контролируется величиной константы взаимодействия G/λ. Интересной особенностью полученного спектра является его реджевская форма, $M_n^2 \sim n$, в режиме сильной связи, $G/\lambda \gg 1$.

Поучительно проинтегрировать по z в действии (217). Учитывая уравнение движения (219) и нормировку дискретных состояний,

$$\int_0^\infty f_n(z) f_{n'}(z) dz = \delta_{nn'}, \tag{224}$$

приходим к четырёхмерному лагранжиану

$$\mathcal{L}^{(4)}_{\text{bos}} = \frac{1}{2}\sum_n \left(\partial_\mu \tilde{\Phi}_n \partial^\mu \tilde{\Phi}_n - M_n^2 \tilde{\Phi}_n^2\right), \tag{225}$$

где мы определили $\Phi(x_\mu, z) = \tilde{\Phi}(x_\mu) f(z)$ и пренебрегли вкладом континуума. Таким образом, данная теория 5D безмассового бозона, взаимодействующего с вакуумным полем, описывает набор свободных массивных 4D бозонов. Так как КХД в пределе больших N_c является теорией бесконечного количества свободных узких мезонов [28, 29] с предположительно реджевским спектром, предел сильной связи, $G/\lambda \to \infty$, соответствует в модели пределу $N_c \to \infty$ в КХД.

Отметим, что при обобщении рассматриваемой модели на частицы спина единица, векторные состояния окажутся вырожденными с аксиально-векторными: наклон соответствующих траекторий ожидается универсальным, следовательно, мы не можем снять вырождения путём введения разных констант взаимодействия со скалярным полем φ. Как и в случае голографических моделей, проблема решается просто — достаточно заменить обычную производную в действии (209) на ковариантную, содержащую взаимодействие с аксиально-векторным полем [94].

Затронем вкратце численные предсказания. К сожалению, существующие данные по скалярным мезонам весьма противоречивы [19]. Можно однако показать, что в рамках нашей модели, спектр векторных мезонов (для аксиально-векторных требуются модификации, учитывающие нарушение киральной симметрии) такой же, как у скалярных состояний, поскольку метрика является плоской. Нужный нам фит экспериментальных данных приведён ранее в выражении (199). Найдём отношение интерсепта к линейному наклону, C/B, которое важно в феноменологии. Из фита (199) следует $(C/B)_{\text{exp}} = 0.55 \pm 0.05$. Используя перемасштабирование (210), можно всегда переопределить массы на произвольный общий множитель. Сравнивая наклоны A и B в уравнениях (220) и (199), имеем $\sqrt{1 + 8G/\lambda} = 15.4 \pm 4.1$ что даёт $(C/B)_{\text{theor}} = 0.53 \pm 0.01$ для уравнения (220). В результате мы видим, что предсказание модели для C/B замечательно близко к феноменологическому значению для векторных мезонов, лежащих на радиальной ρ-мезонной траектории.

10.4 Введение фермионов

Рассмотрим безмассовые фермионы, взаимодействующие со скалярным полем φ. Следуя стандартной процедуре введения фермионов в пятимерном пространстве, напишем простейшее действие

$$S_{\rm ferm} = \int d^4x dz \left(i\bar{\Psi}\Gamma^A \partial_A \Psi - h\varphi \bar{\Psi}\Psi \right), \tag{226}$$

где ψ является четырёхкомпонентным спинором и $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, $\Gamma^4 = -i\gamma^5$, здесь γ^μ, γ^5 — обычные матрицы Дирака. Данный выбор даёт пятимерное представление алгебры Клиффорда, $\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB}$. После перемасштабирования (210) и $\psi \to m^2\psi$, соответствующий лагранжиан есть

$$\mathcal{L}_{\rm ferm} = i\bar{\Psi}\Gamma^A \partial_A \Psi - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \varphi \bar{\Psi}\Psi. \tag{227}$$

Интенсивность взаимодействия фермиона с полем φ определяется безразмерной константой $h/\sqrt{\lambda}$. Найдём частицеподобные возбуждения над вакуумом (213). Предполагая факторизацию $\Psi_{L,R}(x_\mu, z) = e^{ipx} U_{L,R}(z)$ для левых и правых компонент $\gamma_5 \Psi_{L,R} = \pm \Psi_{L,R}$, получаем уравнение на спектр,

$$\left(\pm\partial_z + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \tanh(z/\sqrt{2}) \right) U_{L,R} = M U_{L,R}. \tag{228}$$

При $z \geq 0$, уравнение (228) даёт нормируемую нулевую моду, описывающую левый фермион [212],

$$M = 0, \qquad U_L = \cosh^{-\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{\lambda}}}(z/\sqrt{2}), \qquad U_R = 0. \tag{229}$$

Эта мода локализована возле $z = 0$. Если бы мы рассмотрели область $z < 0$, то ситуация была бы противоположной: нормируемое решение описывает безмассовый правый фермион. Данная особенность согласуется с интерпретацией решений уравнения Дирака с отрицательной энергией как античастиц. С другой стороны, имеется асимптотическое решение

$$z \to \infty : \qquad M = \frac{h}{\sqrt{\lambda}}, \qquad U_{L,R} = C_{L,R}. \tag{230}$$

Здесь $C_{L,R}$ обозначают константы.

Генерацию массы у рассматриваемого фермиона можно непосредственно увидеть, проинтегрировав по z. Вводя параметризацию

$$\Psi(x_\mu, z) = s(z)\psi(x_\mu), \qquad \int_0^\infty s^2(z)dz = 1, \tag{231}$$

интегрируем по z (нулевая мода не даст вклада) и приходим к эффективному 4D лаграгжиану

$$\mathcal{L}^{(4)}_{\text{ferm}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \mathcal{M})\psi, \tag{232}$$

с

$$\mathcal{M} = \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty s^2(z)\tanh(z/\sqrt{2})dz. \tag{233}$$

Отсюда видно, что $\mathcal{M} < h/\sqrt{\lambda}$ и главный вклад в эффективную массу $\mathcal{M}$ идёт от интегрирования по достаточно большим z, т.е. по области низких энергий.

Итак, уравнение (228) описывает безмассовый левый фермион, который локализован только при больших энергиях, при низких энергиях его волновая функция экспоненциально подавлена, что можно интерпретировать как конфайнмент. В пределе нулевой энергии, $z \to \infty$, безмассовый фермион исчезает, и вместо него возникает массивный фермион, который выглядит наподобие кинка, распространяющегося как частица. Представляется естественным ассоциировать данное решение с лёгким кварком, поскольку согласно КХД он является безмассовым и левым при высоких энергиях и, по всей видимости, приобретает конституэнтную массу при низких энергиях. После интегрирования по энергиям, нулевая мода теряется, и модель описывает массивный фермион.

10.5 Обсуждения

Предложенная феноменологическая модель может послужить основой для построения разнообразных эффективных теорий для КХД. Мы рассмотрели приложение модели к вычислению масс бозонов и к взаимодействию фундаментальных кварков с полем, имитирующем физический вакуум сильных взаимодействий.

Следующим естественным приложением предложенного подхода является описание спектра барионов. Другой линией исследований могло бы стать вычисление динамической информации, зашифрованной в корреляционных функциях, и связанное с этим нахождение связей на параметры из правил сумм КХД в приближении узких резонансов.

Модель имеет естественное ограничение по применимости — она должна рассматриваться как эффективная модель, применимая ниже определённого энергетического масштаба. Поскольку модель обладает только одним массивным возбуждением, которое можно сопоставить со скалярным глюболом, данный масштаб естественно ассоциировать с ожидаемой массой второго скалярного глюбола, около 2.5 GeV. Так как этот масштаб примерно совпадает с началом непрерывного спектра в секторе лёгких мезонов, модель способна описать весь имеющийся спектр этих мезонов. Как и в случае всех эффективных теорий, модель не имеет строго доказанного отношения к КХД, а скорее отражает важную часть физики сильных взаимодействий при низких и промежуточных энергиях.

11 Голографические модели как пятимерная запись феноменологии правил сумм планарной КХД

11.1 Мотивация и формулировка проблемы

За последние несколько лет многочисленные попытки применить идеи АдС/КТП соответствия [89, 90] к КХД сформировали быстро развивающуюся область исследований в современной теории поля и феноменологии. Главные усилия сконцентрированы на описании спектров масс адронов и глюболов, нарушения киральной симметрии и связанной с этим всем феноменологии [85, 92–98, 205–207, 209, 213–254], хотя область применения теперь гораздо шире. Голографические модели интересны как язык, который позволяет на единой основе обсуждать разнообразные подходы к моделированию взаимодействий и спектральных характеристик лёгких адронов, систем с одним лёгким и одним тяжёлым кварком, адронные формфакторы, фазовую диаграмму КХД и другие феноменологические аспекты, которые традиционно были предметами исследований для разных комьюнити. Это объединяющее свойство поднимает на повестку дня важные вопросы — почему же всё-таки АдС/КХД модели столь успешны в описании непертурбативной физики сильных взаимодействий и как голографическое описание связано с другими известным феноменологическими методами? В настоящее время имеется множество статей, посвящённых приложениям голографических идей, но есть острый дефицит работ, которые бы пытались ответить на эти вопросы[12]. В данном параграфе мы попытаемся частично пролить свет на проблему с помощью переписывания планарной КХД в фиксированном канале в виде пятимерной теории свободного поля [104, 105], что позволит получить модели, весьма сходные с голографическими моделями, используемыми в так называемом подходе "bottom-up".

АдС/КХД модели существенно основаны на идентификации 4D калуца-клейновских (КК) гармоник 5D поля с бесконечным набором бесцветных свободных мезонных состояний, ожидаемых в КХД в пределе больших N_c [28, 29]. Такая идентификация может представлять удобный математический приём: любое поле $\varphi(\vec{x}, z)$, определённое в компактном 5D пространстве, можно разложить на 4D-гармоники, $\varphi(\vec{x}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z)\psi_n(\vec{x})$, которые есть 4D-поля с массами, диктуемыми топологией 5D-пространства. Поэтому мы можем переписать бесконечный набор 4D-полей $\psi_n(\vec{x})$ с одинаковыми квантовыми числами и с данным спектром масс m_n как единое 5D-поле $\varphi(\vec{x}, z)$, распространяющееся в подходящем фоне. Разлагая это поле на 4D-гармоники с нормируемыми коэффициэнтными функциями $\varphi_n(z)$, зависимость от пятой координаты z может быть проинтегрирована и мы вернёмся тогда обратно к изначальному действию для 4D полей $\psi_n(\vec{x})$. Гипотеза АдС/КТП соответствия, однако, имеет гораздо более богатое динамическое

[12] Вероятным кандидатом является работа [254], где было численно продемонстрировано, что феноменология мезонов спина 1 в рамках моделей с жёсткой стенкой слабо зависит от выбора метрики, однако метрика АдС минимизирует отклонения от экспериментальных данных.

содержание, чем просто КК-переписывание, — она постулирует точное соответствие между порождающим функционалом корреляторов функций Грина 4D-теории и эффективным действием 5D-теории, в котором ультрафиолетовые граничные значения 5D-полей идентифицируются с источниками для 4D-теории [90, 91]. Вопрос заключается в том, возможно ли модифицировать КК-переписывание таким образом, чтобы оно моделировало голографическое соответствие? Ответ оказывается положительным, что продемонстрировано в параграфе 12.2. Идея состоит в том, что при определённых пятимерных фонах невозможно придти к простому свободному действию для 4D-полей $\psi_n(\vec{x})$ после интегрирования по z, так как получается также неисчезающий граничный член, который можно идентифицировать с источником полей $\psi_n(\vec{x})$. Эта идентификация даёт тот же результат для корреляторов, что и голографические модели.

В параграфе 12.3, мы проанализируем все ситуации, при которых возникают простые реджеподобные спектры из пятимерных фонов. Затем, в параграфе 12.4, будет выбран наиболее разумный вариант, основываясь на требованиях воспроизведения аналитической структуры двухточечных корреляторов и ожидаемой в феноменологии формы реджевского спектра. Этот вариант оказывается ни чем иным как моделью с мягкой стенкой [96].

Описание нарушения киральной симметрии является одной из наиболее обсуждаемых проблем в голографическом подходе [94, 95, 205, 207, 227]. В параграфе 12.5, мы предлагаем модификацию схемы, предложенной в работах [94, 95], которая допускает включение этого феномена в наш подход.

В заключительном параграфе 12.6 обсуждается взаимосвязь голографического подхода "bottom-up"и феноменологии правил сумм КХД в пределе большого числа цветов, а также трудности, возникающие в попытке связать его с какой-либо фундаментальной теорией поля в высших измерениях.

11.2 Вывод моделей, подобных голографическим, через калуца-клейновскую редукцию

По отношению к числу цветов N_c массы мезонов ведут себя как $m \sim N_c^0$, а их полные ширины распадов как $\Gamma \sim N_c^{-1}$. Поскольку мезонные массы слабо меняются как функции N_c, в задачах вычисления спектра часто полезно перейти к пределу больших N_c. В экстремальном случае $N_c \to \infty$ мезоны являются бесконечно узкими и невзаимодействующими, кроме того, они возникают в виде бесконечного набора состояний с фиксированными квантовыми числами [28, 29]. Такой набор полностью насыщает двухточечную корреляционную функцию кварковых токов с квантовыми числами, соответствующими данному набору. С помощью формализма функционального интеграла, эту ситуацию можно формально описать следующим действием,

$$I_{[\mathcal{O}_J]} = (-1)^J \int d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\partial_\mu \phi_J^{(n)} \partial^\mu \phi^J_{(n)} - m^2_{n,J} \phi_J^{(n)} \phi^J_{(n)} + \phi^J_{(n)} \mathcal{O}_J^{(n)} \Big), \quad (234)$$

где мы включили константы связи с внешними источниками, которые стоят в соответствующем порождающем функционале связных корреляторов. Здесь $\phi_J \doteq \phi_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_J}$, $\mu_i = 0, 1, 2, 3$ с сигнатурой $(+ - --)$, соответствует полю мезона спина J, чьи квантовые числа I, G, P, C не специфицируются, а $\mathcal{O}_J^{(n)}$ есть источник, который можно представить в виде

$$\mathcal{O}_J^{(n)} = F_n^{(J)} \mathcal{O}_J, \quad (235)$$

где $F_n^{(J)}$ являются константами распада, определёнными посредством

$$\langle 0 | \mathcal{O}_J^{(n)} | \phi_J^{(n)} \rangle = F_n^{(J)} \varepsilon_J \quad (236)$$

для мезона $\phi_J^{(n)}$ с "поляризацией"ε_J, а $\mathcal{O}_J$ есть общий источник, с которым состояния $\phi^J_{(n)}$ связаны "константой связи"$F_n^{(J)}$. В случае полей высших спинов, $J > 1$, в действии (234) появляются дополнительные квадратичные члены, они не влияют на конечные выводы и будут опущены. Представление (235) следует из требования получить в конечном счёте стандартную форму для двухточечных корреляторов, а именно, интегрируя формально по полям ϕ_J в порождающем функционале

$$Z[\mathcal{O}_J] = \int D\phi_J e^{I[\mathcal{O}_J]}, \tag{237}$$

и дважды дифференцируя по $\mathcal{O}_J$, приходим к сумме мезонных полюсов,

$$\langle \mathcal{O}_J(q)\mathcal{O}_J(-q)\rangle \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(F_n^{(J)})^2}{q^2 - m_{n,J}^2 + i\varepsilon}, \tag{238}$$

для двухточечных корреляторов в импульсном представлении. Следуя стандартной технике описания свободных массивных бозонов высших спинов, тензор ϕ_J является симметричным и бесследовым, $\phi^{\mu}_{\mu\ldots} = 0$, чтобы давать неприводимое $(\frac{1}{2}J, \frac{1}{2}J)$ представление однородной группы Лоренца (или, эквивалентно, положительность энергии), и кроме того удовлетворяет вспомогательному условию $\partial^{\mu}\phi_{\mu\ldots} = 0$, которое обеспечивает требуемое число физических степеней свободы $2J+1$.

Мы не будем рассматривать барионы, поскольку их массы ведут себя как $m \sim N_c$, то есть они не являются узкими в пределе больших N_c. Барионы, вероятно, возникают в виде солитонных объектов в данном пределе [29], наши дальнейшие рассуждения определённо не применимы к такому случаю.

Итак, перепишем действие (234) в виде действия для некоторой свободной пятимерной теории, которая не обязательно ковариантна по отношению к пятой координате z. Для начала рассмотрим следующую форму записи,

$$S_{5\mathrm{D}} = (-1)^J \int d^4x\, dz f_1(z) \left(\partial_M \varphi_J \partial^M \varphi^J - m_J^2 f_2(z) \varphi_J \varphi^J\right), \tag{239}$$

где $M = 0,1,2,3,4$, $\varphi_J = \varphi_J(x,z)$, а $f_1(z)$, $f_2(z)$ являются пока неизвестными функциями пятой пространственной координаты z. Потребуем, чтобы действие (239) было инвариантным относительно пятимерных общековариантных преобразований в пределе $|z| \to 0$. Это влечёт за собой два основных следствия. Во-первых,

$$f_1(z) = e^{\Phi(z)} \sqrt{|\det G_{MN}|} = e^{\Phi(z)} a^5(z), \tag{240}$$

где G_{MN} есть метрический тензор, определённый в метрике

$$ds^2 = a^2(z)(dx_\mu dx^\mu - dz^2), \tag{241}$$

а возможные отклонения от 5D-ковариантности при ненулевом $|z|$ параметризуются общим множителем $e^{\Phi(z)}$, который соответствует дилатонному фону в АдС/КХД-моделях. Во-вторых, нужно учесть правило для сворачивания индексов, например,

$$\partial_M \varphi_J \partial^M \varphi^J = \partial_M \varphi_{M_1 \ldots M_J} \partial_{M'} \varphi_{M'_1 \ldots M'_J} G^{MM'} G^{M_1 M'_1} \ldots G^{M_J M'_J}, \tag{242}$$

где

$$G^{MN} = G^{-1}_{MN} = a^{-2}(z) \eta^{MN}. \tag{243}$$

В итоге действие имеет форму

$$S_{5\mathrm{D}} = (-1)^J \int d^4x \, dz e^{\Phi(z)} a^{-2J+3}(z) \left\{ (\partial_\mu \varphi_J)^2 - (\partial_z \varphi_J)^2 \right. \\ \left. - m_J^2 a^2(z) \varphi_J^2 \right\}. \tag{244}$$

Мы будем считать поля с ненулевым спином калибровочными и используем свободу в выборе калибровки для перехода к такой калибровке, в которой отсутствуют дополнительные квадратичные члены, появляющиеся при описании полей высших спинов. Для пространства АдС (по крайней мере, в УФ пределе), это аксиальная калибровка [96, 255],

$$\varphi_{z\ldots} = 0, \tag{245}$$

которая будет в дальнейшем подразумеваться.

Рассмотрим теперь задачу Штурма-Лиувилля (ШЛ)

$$-\partial_z [g_J(z) \partial_z \varphi_n^{(J)}(z)] + g_J(z) a^2(z) m_J^2 \varphi_n^{(J)}(z) = m_{n,J}^2 g_J(z) \varphi_n^{(J)}(z). \tag{246}$$

с

$$g_J(z) = e^{\Phi(z)} a^{-2J+3}(z). \tag{247}$$

Общие результаты теории ШЛ напоминаются в Приложении Д.1. Уравнение (246) является уравнением движения для действия (244) в калибровке (245), если принять

$$\varphi(x,z) = e^{iq_n x} \varphi_n(z), \qquad q_n^2 = m_n^2. \tag{248}$$

Соотношение (248) обычно интерпретируется как струнное возбуждение, соответствующее четырёхмерной частице с импульсом q_n. Мы не будем использовать эту интерпретацию, а вместо неё рассмотрим общую математическую задачу: при данном спектре $m^2_{n,J}$ в действии (234), найти функции $g_J(z)$ и $a(z)$, которые, будучи подставленными в (246), давали бы спектр $m^2_{n,J}$ как собственные значения некоторой задачи ШЛ. Это составляет главный промежуточный шаг в переписывании действия (234) как теории свободного пятимерного поля.

При выполнении условий, сформулированных в Приложении Д.1, задача ШЛ (246) имеет решения $\varphi_n^{(J)}(z)$, которые нормированы следующим образом

$$\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} g_J(z)\varphi_m^{(J)}(z)\varphi_n^{(J)}(z)dz = \delta_{mn}, \tag{249}$$

и образуют полный набор функций, следовательно, функцию $\varphi_J(x,z)$ в действии (244) можно разложить по 4D гармоникам,

$$\varphi_J(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_J^{(n)}(x)\varphi_n^{(J)}(z). \tag{250}$$

Подставим разложение (250) в действие (244),

$$S_{5\mathrm{D}} = (-1)^J \int d^4x\, dz g_J(z) \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big\{ \varphi_m^{(J)}\varphi_n^{(J)}\partial_\mu\phi_J^{(m)}\partial_\mu\phi_J^{(n)} \\ -\phi_J^{(m)}\phi_J^{(n)}\partial_z\varphi_m^{(J)}\partial_z\varphi_n^{(J)} - m_J^2 a^2(z)\varphi_m^{(J)}\varphi_n^{(J)}\phi_J^{(m)}\phi_J^{(n)} \Big\}, \tag{251}$$

где было использовано обозначение (247). Интегрируя по частям и пользуясь (246), второе слагаемое в действии (251) можно переписать так (опуская общий множитель $-\phi_J^{(m)}\phi_J^{(n)}$)

$$\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz g_J(z)\partial_z\varphi_m^{(J)}\partial_z\varphi_n^{(J)} = \varphi_m^{(J)} g_J(z)\partial_z\varphi_n^{(J)}\Big|_{z_{\min}}^{z_{\max}} \\ + \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz\varphi_m^{(J)}\varphi_n^{(J)} g_J(z)\left(m^2_{n,J} - a^2(z)m_J^2\right). \tag{252}$$

Теперь проинтегрируем по z в действии (251) с помощью (249) и (252), в результате получим

$$S_{5\mathrm{D}} = (-1)^J \int d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\partial^\mu \phi^J_{(n)}\right)^2 - m^2_{n,J} \left(\phi^J_{(n)}\right)^2 \right.$$
$$\left. - \phi^J_{(n)} g_J(z) \partial_z \varphi^{(J)}_n \varphi_J(x,z) \Big|^{z_{\max}}_{z_{\min}} \right\}, \quad (253)$$

с функцией $\varphi_J(x,z)$, даваемой (250). Действие (253) имеет вид действия (234), при отождествлении

$$\mathcal{O}^{(n)}_J = -g_J(z) \partial_z \varphi^{(J)}_n \varphi_J(x,z) \Big|^{z_{\max}}_{z_{\min}} . \quad (254)$$

Если $\mathcal{O}^{(n)}_J = 0$, тогда мы просто переписали четырёхмерное действие через пятимерное, используя КК-редукцию. Но мы хотим иметь точное соответствие между 4D действием (234) и 5D действием (244), то есть $\mathcal{O}^{(n)}_J \neq 0$. Выбирая $\beta = 0$ или $\beta = \pi/2$ в граничном условии (Д.3) (см. Приложение Д.1), можно занулить члены при $z = z_{\max}$ в выражении (254). Заметим мимоходом, что первая возможность реализована в голографических моделях с мягкой стенкой [96], где $z_{\max} \to \infty$, в то время как вторая — в моделях с жёсткой стенкой [93–95], где $z_{\max}$ является ИК обрезанием. Таким образом,

$$\mathcal{O}^{(n)}_J = \lim_{z \to z_{\min}+0} g_J(z) \partial_z \varphi^{(J)}_n(z) \varphi_J(x,z). \quad (255)$$

Голографические модели соответствуют случаю $\alpha = 0$ в граничном условии (Д.2), то есть $\varphi^{(J)}_n(z_{\min}) = 0$. Однако, если функция $a(z)$, определяющая метрику (241), не ограничена при $z_{\min}$, тогда мы не можем брать предел $z = z_{\min}$, потому что условия теоремы ШЛ оказываются нарушенными в предельной точке (см. Приложение Д.1). Голографические модели как раз подпадают под этот случай, поскольку метрика при $z \to z_{\min}$ является АдС, $a(z) \sim 1/z$, $z \geq 0$, следовательно, функция $a(z)$ имеет простой полюс при $z_{\min} = 0$. По этой причине мы должны удерживать граничный член (255), считая его частью модели. Именно это обстоятельство позволяет моделировать голографическое соответствие. С другой стороны, как видно из выражений (246) и (247), последнее утверждение верно для (асимптотической) метрики АдС только при $-2J + 3 > 0$ то есть для $J=0$ и $J=1$. В случае $J \geq 2$ имеем $\mathcal{O}_J^{(n)}=0$, другими словами, имеем обычное КК-переписывание 4D действия через 5D действие. Таким образом, моделирование голографического принципа оправдано только для скалярных и векторных мезонов.

Одним из основных предположений голографического подхода является отождествление граничного значения 5D поля $\lim_{z \to z_{\min}+0} \varphi_J(x,z)$ с источником для 4D полей мезонов. Как следует из выражений (235) и (255), мы должны тогда считать величину

$$F_n^{(J)} = \lim_{z \to z_{\min}+0} g_J(z) \partial_z \varphi_n^{(J)}(z) \tag{256}$$

константой распада мезона $\phi_J^{(n)}$. Это воспроизводит результат работы [94] для векторных мезонов и обобщает его на случай произвольных спинов и метрик (с точностью до общего множителя, зависящего от нормировки полей).

Согласно физическому смыслу константы распада, величина (256) должна быть конечной ненулевой константой. Это простое наблюдение даёт жёсткое ограничение на самосогласованные модели. В качестве примера, положим в действии (244)

$$a(z) = z^{-k}, \qquad k > 0, \tag{257}$$

и посмотрим на физику возле $z_{\min}=0$; в этой области дилатонный фон не играет роли в голографических моделях, поэтому можно принять $\Phi(z)=0$. Нормируемые моды должны вести себя как

$$\varphi_n^{(J)}(z) \xrightarrow[z \to 0]{} z^{\alpha_J}, \qquad \alpha_J > 0. \tag{258}$$

Из уравнения (246) получаем условие самосогласованности, которое для $m_J=0$ имеет вид

$$\alpha_J = 1 + k(3-2J) > 0. \tag{259}$$

Подставляя (258) в (256) (пользуясь определением (247)), видим, что $F_n^{(J)} \sim z^0$ действительно константа. Однако в типичных голографических моделях используют пространство АдС, которое соответствует $k=1$ в (257), условие (259) даёт тогда $J<2$. Анализируя случай $m_J \neq 0$ в уравнении (246), нетрудно проверить, что при $0<k<1$

условие $\alpha > 0$, а при $k \geq 1$ условие $F_n^{(J)} \sim z^0$ выполнены только если $m_J = 0$, то есть получаем предыдущий случай. Таким образом, мы снова приходим к заключению, что пятимерное голографическо-подобное переписывание теории свободных резонансов не оправдано для полей высших спинов ($J \geq 2$). Кроме того, мы получаем дополнительное ограничение, что пятимерные скалярные и векторные поля должны быть безмассовыми.

Сравним теперь КК-подобные выкладки, проделанные выше, с техникой, используемой в стандартном голографическом подходе. В рамках последнего, действие (244) вычисляется на решении уравнения (246), которое бы дало в наших обозначениях

$$S_{5\mathrm{D}} = (-1)^J \int d^4x\, g_J(z) \partial_z \varphi^J \varphi_J \,|_{z=z_{\min}} . \tag{260}$$

Далее, отождествляя граничное значение $\varphi_J(x,z)$ с источником $\mathcal{O}_J$, дважды дифференцируя выражение (260) по этому источнику и используя спектральное представление для функции Грина уравнения (246),

$$G^{(J)}(z,z';q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(J)}(z')\varphi_n^{(J)}(z)}{q^2 - m_{n,J}^2 + i\varepsilon}, \tag{261}$$

приходим к такой же сумме по мезонным полюсам, как в выражении (238). Именно это совпадение делает возможным моделировать голографическую дуальность [90, 91]

$$Z_{4\mathrm{D}}[\mathcal{O}_J] = S_{5\mathrm{D}}[\varphi^J(x,z_{\min})] \quad \text{при} \quad \varphi^J(x,z_{\min}) = \mathcal{O}_J \tag{262}$$

на уровне двухточечных корреляционных функций в приближении классической теории поля.

Отметим, что мы не нуждались в типичной для голографических моделей интерпретации пятой координаты z как обратного масштаба энергии.

11.3 Реджевский спектр

Теория и экспериментальные данные [20, 22] указывают на то, что спектр лёгких мезонов должен иметь реджевскую форму,

$$m_{n,J}^2 \simeq An + BJ + C, \tag{263}$$

где A, B, C являются параметрами, J есть спин, а n означаете "радиальное"квантовое число, которое нумерует состояния с идентичными квантовыми числами, лежащие на дочерних траекториях. Кроме того, ожидается $A \approx B$, то есть поведение

$$m_{n,J}^2 \sim n + J, \tag{264}$$

обсуждению которого была посвящена третья глава. В данном параграфе, мы систематически исследуем условия, при которых получается реджевский спектр.

Для дальнейшего анализа удобно переписать уравнение (246) в виде уравнения Шрёдингера. С этой целью сделаем подстановку (ниже мы опускаем индекс (J) и обозначение зависимости от z)

$$\varphi_n = e^{-\Phi/2} a^{J-3/2} \psi_n. \tag{265}$$

В результате получим

$$-\psi_n'' + U\psi_n = m_n^2 \psi_n, \tag{266}$$

$$U = \frac{\Phi''}{2} + \left(\frac{\Phi'}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - J\right) \frac{\Phi' a' + a'' + \left(\frac{1}{2} - J\right)\frac{(a')^2}{a}}{a} + a^2 m_J^2, \tag{267}$$

где штрих означает производную по z. Как следует из структуры голографического потенциала U, линейная зависимость $m_n^2 \sim n$ имеет место если $U \sim z^2$, по крайней мере, для больших z, то есть получаем осцилляторный тип потенциала. С другой стороны, реджевское поведение $m_{n,J}^2 \sim J$ выполняется в случае наличия такого сдвига по энергии (квадрату массы в рассматриваемых моделях) $m_n^2 \sim n + C(J)$, что $C(J) \sim J$. Пользуясь формулами Приложения Д.2, легко увидеть, что оба условия могут быть одновременно выполнены при многих выборах функций $\Phi(z)$ и $a(z)$ в потенциале (267). Эту свободу можно сильно ограничить, если принять следующие упрощающие предположения:

(а) Функции Φ и a, то есть форма дилатона и метрика на голографическом языке, не зависят от спина[13] J;

(б) Функции e^{Φ} и a являются непрерывными и дифференцируемыми на интервале $(0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$ (в зависимости от модели);

[13]Хотя в литературе существуют спекуляции по этому поводу [85].

(в) Не лидирующие по J и n поправки к реджевскому спектру отсутствуют[14].

При этих предположениях мы можем классифицировать все возможные модели, дающие реджевский спектр.

Наиболее важный класс моделей, который мы будем называть моделями типа **I**, соответствует выбору,

I: $\Phi = \pm\lambda^2 z^2$; $a = (R/z)^k$, где $0 < z < \infty$.
Параметры λ и R имеют размерности массы и обратной массы, соответственно. Без потери общности, можно положить $\lambda = 1$ и $R = 1$. Уравнение (266)-(267) принимает тогда вид

$$-\psi_n'' + \left\{ z^2 \pm \left[k\left(2J-3\right)+1\right] + \frac{\left[k\left(J-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}}{z^2} + \frac{m_J^2}{z^{2k}} \right\} \psi_n = m_n^2 \psi_n. \quad (268)$$

Нормируемые решения уравнения (268) для различных случаев приведены ниже (см. Приложение Д.2).

IA$^+$: $\Phi = z^2$; $a = z^{-k}$, $k > 1$; $m_J = 0$.
Спектр:

$$m_n^2 = 4(n+1) + 2(|\xi_{k,J}| + \xi_{k,J}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (269)$$

где

$$\xi_{k,J} = k\left(J - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}. \quad (270)$$

Собственные функции (см. обозначение (265)):

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n!}{(|\xi_{k,J}| + n)!}} e^{-z^2} z^{|\xi_{k,J}| - \xi_{k,J}} L_n^{|\xi_{k,J}|}(z^2). \quad (271)$$

Спектр отсутствует при

$$\frac{3}{2} < J < \frac{1}{k} + \frac{3}{2}. \quad (272)$$

Ограничение (272) означает, что если $1 < k < 2$, то нет конечного дискретного спектра для состояний спина $J = 2$. Случай $k = 2$

[14] Как обсуждалось в первой главе, в реальности это не так. Однако форма этих поправок экспериментально не известна, она является модельно-зависимой, и мы хотели бы убрать подобную модельную зависимость из нашего анализа.

является особым, уравнение (268) тогда принимает вид

$$-\psi_n'' + \left(z^2+3\right)\psi_n = m_n^2\psi_n, \tag{273}$$

что формально приводит к спектру масс и собственных функций, даваемых уравнениями (Д.8) и (Д.9). Однако мы должны помнить, что, во-первых, из-за полюса в метрике, задача ШЛ определена на интервале $0 < z < \infty$, тогда как собственные функции (Д.9) нормированы на интервале $-\infty < z < \infty$, а во-вторых, мы должны иметь $\varphi_n(0) = 0$, то есть в (Д.9) нужно отобрать только нечётные по n состояния. В итоге приходим к спектру

$$J,k=2: \qquad m_{2l+1}^2 = 4(l+3), \qquad l = 0,1,2,\ldots, \tag{274}$$

и нормированным собственным функциям

$$J,k=2: \qquad \varphi_{2l+1} = \frac{\pi^{-1/4}}{2^{l+1}}\sqrt{\frac{1}{(2l+1)!}}e^{-z^2}z^{-1}H_{2l+1}(z). \tag{275}$$

IA$^-$: $\Phi = -z^2$; $a = z^{-k}$, $k > 1$; $m_J = 0$.
Уравнение (268) даёт спектр:

$$m_n^2 = 4(n+1) + 2(|\xi_{k,J}| - \xi_{k,J}), \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{276}$$

и собственные функции:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n!}{(|\xi_{k,J}|+n)!}}z^{|\xi_{k,J}|-\xi_{k,J}}L_n^{|\xi_{k,J}|}(z^2). \tag{277}$$

Как и ранее, спектр мезонов спина $J = 2$ отсутствует при $1 < k < 2$, а для $k = 2$ имеет вид:

$$J,k=2: \qquad m_{2l+1}^2 = 4l, \qquad l = 0,1,2,\ldots, \tag{278}$$

$$J,k=2: \qquad \varphi_{2l+1} = \frac{\pi^{-1/4}}{2^{l+1}}\sqrt{\frac{1}{(2l+1)!}}z^{-1}H_{2l+1}(z). \tag{279}$$

IB$^+$: $\Phi = z^2$; $a = 1/z$.
Уравнение (268) принимает форму

$$-\psi_n'' + \left\{z^2 + 2(J-1) + \frac{(J-2)^2 + m_J^2 - 1/4}{z^2}\right\}\psi_n = m_n^2\psi_n. \tag{280}$$

Спектр:

$$m_n^2 = 4n + 2(\xi_J + J), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{281}$$

где

$$\xi_J = \sqrt{(J-2)^2 + m_J^2}. \tag{282}$$

Собственные функции:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n!}{(\xi_J + n)!}} e^{-z^2} z^{\xi_J + 2 - J} L_n^{\xi_J}(z^2). \tag{283}$$

Спектр отсутствует при $0 \leq \xi_J < 1/2$ и представляет особый случай для $\xi_J = 1/2$, который можно вывести также, как в модели IA для любого конкретного значения m_J^2.

IB$^-$: $\Phi = -z^2$; $a = 1/z$.

Уравнением (268) является

$$-\psi_n'' + \left\{ z^2 - 2(J-1) + \frac{(J-2)^2 + m_J^2 - 1/4}{z^2} \right\} \psi_n = m_n^2 \psi_n. \tag{284}$$

Спектр:

$$m_n^2 = 4(n+1) + 2(\xi_J - J), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{285}$$

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n!}{(\xi_J + n)!}} z^{\xi_J + 2 - J} L_n^{\xi_J}(z^2). \tag{286}$$

Как и ранее, спектр отсутствует при $0 \leq \xi_J < 1/2$ и принимает специальный вид при $\xi_J = 1/2$.

IC$^\pm$: $\Phi = \pm z^2$; $a = z^{-k}$, $0 < k < 1$.

В случае $m_J = 0$, модель выглядит как IA$^\pm$ за одним важным отличием: интервал запрещённых спинов (272) теперь шире, в пределе $k \to +0$ описаны могут быть только скалярные и векторные моды. В случае $m_J \neq 0$, аналитические решения не известны, предположительно они нарушают наше предположение (в). При достаточно малых и больших z, решения приближённо даются случаем $m_J = 0$.

ID$^\pm$: $\Phi = \pm z^2$; $a = z^{-k}$, $k > 1$; $m_J \neq 0$.

Спектр выглядит как

$$m_n^2 = 4n \pm k(2J - 3) + 1 + \ldots, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{287}$$

где поправки предположительно нарушают наше предположение (в). Собственные функции не известны, при достаточно большом z они приближённо даются моделью IA$^\pm$.

Второй класс моделей, который мы назовём моделями типа II, формально соответствует пределу $k = 0$ в моделях типа I, а именно

II: $\Phi = \pm\lambda^2 z^2$; $a = \text{const}$, где $-\infty < z < \infty$.
Без потери общности, мы можем положить $\lambda = 1$ и $a = 1$. Отметим, что абсолютное значение m_J^2 в потенциале (267) не фиксировано из-за свободы в выборе a. Модели типа II имеют два различных варианта, которые приведены ниже.

II$^+$: $\Phi = z^2$.
Спектр:

$$m_n^2 = 2(n+1) + m_J^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{288}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \pi^{-1/4} e^{-z^2} H_n(z). \tag{289}$$

II$^-$: $\Phi = -z^2$.
Спектр:

$$m_n^2 = 2n + m_J^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{290}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \pi^{-1/4} H_n(z). \tag{291}$$

Существует третий, довольно экзотический класс моделей, который соответствовал бы выбору $k = -1$ в моделях типа I, но с более широкой возможностью для выбора функции Φ,

III: $a = z/R$.
Модели типа III можно разделить на следующие подклассы.

IIIA$^\pm$: $\Phi = \pm\lambda^2 z^2$; $\lambda^4 + m_J^2/R^2 > 0$.
Уравнение (266) принимает вид:

$$-\psi_n'' + \left\{ \left(\lambda^4 + \frac{m_J^2}{R^2} \right) z^2 \pm 2\lambda^2 (2 - J) + \frac{(J-1)^2 - 1/4}{z^2} \right\} \psi_n = m_n^2 \psi_n. \tag{292}$$

Наклон реджевских траекторий включает 5D массу m_J, следовательно, она не должна зависеть от J. Без потери общности, мы можем положить $\lambda^4 + m_J^2/R^2 = 1$ и $R = 1$. Уравнение (292) не описывает векторные мезоны, для остальных мезонов, $J \neq 1$, спектр следующий:

$$m_n^2 = 4n + 2|J-1| + 2 \pm 2\lambda^2(2-J), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{293}$$

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n!}{(|J-1|+n)!}} e^{-\frac{1\pm\lambda^2}{2}z^2} z^{J-1+|J-1|} L_n^{|J-1|}(z^2). \tag{294}$$

Интересным частным случаем здесь является выбор $\lambda = 0$, который соответствует отсутствию дилатонного фона в голографических моделях, наклон реджевских траекторий тогда определяется квадратом универсальной 5D массы m_J^2.

IIIB: $\Phi = b \log(\lambda z)$; $(m_J/R)^2 > 0$.
Выбирая единицы $\lambda = 1$, уравнение (266) принимает форму

$$-\psi_n'' + \left\{ \left(\frac{m_J}{R}\right)^2 z^2 + \frac{(J-1-b)^2 + b - 1/4}{z^2} \right\} \psi_n = m_n^2 \psi_n. \tag{295}$$

Здесь наклон траекторий всегда определяется m_J^2. Полагая для простоты $(m_J/R)^2 = 1$, спектр имеет вид

$$m_n^2 = 4n + 2\xi_{J,b} + 2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{296}$$

где

$$\xi_{J,b} = \sqrt{(J-1-b)^2 + b}, \tag{297}$$

а собственные функции выглядят следующим образом,

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n!}{(\xi_{J,b}+n)!}} e^{-z^2/2} z^{J-1+\xi_{J,b}-b/2} L_n^{\xi_{J,b}}(z^2). \tag{298}$$

Эта модель описывает мезоны любого спина, если $b \geq (\sqrt{2}-1)/2$; при $b = (\sqrt{2}-1)/2$, спектр мезонов спина $J = 1$ даётся формулами (Д.8) и (Д.9) с той же оговоркой, что и для модели IA.

11.4 Выбор наиболее адекватной модели

Имея классификацию всех 5D моделей, ведущих к простым реджевским траекториям, мы можем наложить ряд критериев, которые бы позволили отобрать наиболее реалистичную модель. Наш первый критерий заключается в том, что модель должна описывать мезоны любых спинов единообразно, то есть без патологий при отдельных значениях спинов. На этом основании мы отбрасываем модели типа III и модель IC.

На рассматриваемые модели можно наложить условие выполнения кварк-адронной дуальности для векторных мезонов, обсуждавшейся во второй главе, что составляет наш второй критерий отбора. Покажем, что модели типа II не удовлетворяют этому критерию.

В рамках анализируемых моделей, условие дуальности (341) превращается в требование

$$\lim_{z\to 0}\left[g_1(z)\partial_z\varphi_n(z)\right]^2 \sim m_n^2\partial_n m_n^2, \qquad n\gg 1, \tag{299}$$

где левая часть представляет вычет (см. выражение (256)) с $g(0)=\text{const}$ в случае моделей типа II (см. обозначение (247)) и $\varphi_n(z)\sim H_n(z)$ (см. выражения (289) и (291)). Прежде всего, чтобы иметь ненулевые вычеты, мы должны определить модели типа II на интервале $0<z<\infty$, это изменяет нормировку волновых функций (289) и (291). В силу тождества

$$\partial_z H_n(z) = 2nH_{n-1}(z), \tag{300}$$

выживают только состояния с нечётным n: $n = 2l+1$, $l=0,1,2,\ldots$. Используя свойство

$$H_{2l}(0) = (-1)^l 2^l (2l-1)!!, \tag{301}$$

и реджевскую форму спектра, $m_n^2\sim n$, приходим к выражению

$$\left[\partial_z\varphi_{2l+1}(0)\right]^2 \sim m_{2l+1}^2 h_l, \qquad h_l = \frac{\left[(2l-1)!!\right]^2}{(2l)!}. \tag{302}$$

Величина h_l является убывающей функцией индекса l, тогда как она должна быть постоянной (по крайней мере, для больших l) для радиального реджевского спектра. Таким образом, условие дуальности (299) не выполняется.

Условие (299) ограничивает также возможные виды моделей типа I. Прежде всего, легко увидеть, что вычеты являются конечными и ненулевыми константами только если пятимерное векторное поле безмассовое. В этом случае (см. уравнение (270) и выражения для соответствующих волновых функций)

$$\lim_{z\to 0} g(z)\partial_z\varphi_n(z) \sim \sqrt{\frac{n!}{(n+\frac{k+1}{2})!}}L_n^{\frac{k+1}{2}}(0)$$

$$\sim \sqrt{\frac{n!}{(n+\frac{k+1}{2})!}}\binom{n+\frac{k+1}{2}}{n} \sim \sqrt{\frac{(n+\frac{k+1}{2})!}{n!}}. \quad (303)$$

Подставляя это выражение в условие дуальности (299), заключаем, что последнее имеет место только для $k = 1$, то есть для АдС фона в пределе $z \to +0$. Данная ситуация соответствует моделям IB с $m^2_{J=1} = 0$.

Нашим третьим критерием отбора будет требование иметь естественным образом спектр (264), в котором наклоны спиновых и радиальных траекторий совпадают. Нужно отметить интересный факт, что третий и второй критерии в значительной степени перекрываются. Например, форма спектра (264) сразу отбирает модели IB среди моделей типа I. Таким образом, *феноменологический спектр* (264) *и принцип кварк-адронной дуальности указывают на то, что АдС фон в пределе* $z \to +0$ *является единственно возможным для пятимерной реализации КХД в пределе больших* N_c.

Заметим далее, что спектр зависит от спина J не только по построению (благодаря ковариантному способу сворачивания лоренцевских индексов), но также через зависимость от J массы m_J пятимерного поля. Последняя зависимость обычно спекулятивно налагается руками, руководствуясь предписанию из АдС/КТП соответствия. Мы хотели бы минимизировать зависимость от выбора m_J на конечные результаты. В моделях типа II, спектр зависит от J полностью за счёт m^2_J, подобная "ручная"реализация реджевских траекторий выглядит крайне неестественной и поэтому не заслуживает серьёзного рассмотрения.

Третий критерий может быть полезным в выборе между моделями IB$^+$ и IB$^-$. Для того, чтобы иметь простой реджевский спектр (наше предположение (в))

$$m^2_{n,J} = 4(n+J+C), \quad (304)$$

где C является константой, а величина наклона определена выбором $\lambda = 1$ в дилатонном фоне $e^{\pm\lambda^2 z^2}$, мы должны наложить следующую зависимость 5D массы от спина J (см. выражения (281), (282) и (285)):

$$\mathrm{IB}^+: \qquad m_J^2 = 4J(C+1) + 4(C^2-1), \tag{305}$$

$$\mathrm{IB}^-: \qquad m_J^2 = 8J^2 + 4J(3C-2) + 4C(C-2). \tag{306}$$

Условие $m_{J=1}^2 = 0$, полученное выше, даёт для обоих случаев приемлемое решение $C = 0$, которое, однако, не является корректным для скаляров, $J = 0$, модели IB^-. Масса пятимерного поля следующая:

$$\mathrm{IB}^+: \qquad m_J^2 = 4(J-1), \tag{307}$$

$$\mathrm{IB}^-: \qquad m_J^2 = 8J(J-1), \qquad J > 0. \tag{308}$$

Оба выражения приводят к спектру

$$m_{n,J}^2 = 4(n+J), \qquad J > 0. \tag{309}$$

Спектр (309) оказывается также неправильным для скаляров модели IB^+, потому что уравнение (280) не имеет в этом случае конечного дискретного спектра, то есть когда $m_{J=0}^2 = -4$ согласно выражению (307). Таким образом, скаляры представляют особый случай в моделях IB и поэтому должны быть проанализированы отдельно. Будет довольно естественным дополнить выражения (307) и (308) следующим условием

$$m_{J=0}^2 = 0, \tag{310}$$

поскольку скаляры тогда имеют хорошо определённые вычеты[15]. Условие (310) ведёт к следующему спектру скалярных мезонов:

$$\mathrm{IB}^+: \qquad m_{n,0}^2 = 4(n+1), \tag{311}$$

$$\mathrm{IB}^-: \qquad m_{n,0}^2 = 4(n+2), \tag{312}$$

то есть скаляры вырождены с векторами мезонами в модели IB^+ и с $J = 2$ тензорными мезонами в модели IB^-.

[15]Благодаря случайному совпадению этого требования с выражением (308) в случае $J = 0$, условие (310) можно наложить только на модель IB^+.

Рассмотрим теперь влияние массы m_J пятимерного поля на результаты модели IB. Для этой цели просто положим $m_J = 0$, спектры тогда следующие:

$$\mathrm{IB}^+: \qquad m^2_{n,J<2} = 4(n+1), \tag{313}$$

$$m^2_{n,J\geq 2} = 4(n+J-1); \tag{314}$$

$$\mathrm{IB}^-: \qquad m^2_{n,J<2} = 4(n+2-J), \tag{315}$$

$$m^2_{n,J\geq 2} = 4n. \tag{316}$$

Отсюда видно, что влияние m_J довольно слабое в модели IB^+, тогда как в модели IB^- оно оказывается решающим. Согласно нашему третьему критерию, модель IB^+ выглядит поэтому более привлекательной с феноменологической точки зрения. Это заключение, однако, может ввести в заблуждение, если мы попытаемся связать рассматриваемый феноменологический подход с теорией свободных полей высших спинов, распространяющихся в пространстве AdS_5, поскольку массовый коэффициент там ведёт себя как $J^2 - J - 4$ (см., например, работы [255, 256] и содержащиеся в них ссылки), что больше похоже на модель IB^-, однако это выходит за рамки нашего исследования.

Сравним наши результаты с предположениями, используемыми в голографических моделях. Согласно принципу АдС/КТП соответствия, каждый оператор $\mathcal{O}_J(x)$ 4D теории поля соответствует полю $\varphi_J(x,z)$ 5D теории с массой m_J, определяемой соотношением [90, 91]

$$m_J^2 = (\Delta_J - J)(\Delta_J + J - 4), \tag{317}$$

где Δ_J есть каноническая размерность оператора $\mathcal{O}_J(x)$. Можно построить два типа минимальных интерполирующих операторов, которые описывают мезоны в КХД,

$$\mathcal{O}_J^{t=2} = \bar{q}(\gamma_5)\gamma_{\{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_J\}}q, \tag{318}$$

$$\mathcal{O}_J^{t=3} = \bar{q}(\gamma_5)D_{\{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_J\}}q, \tag{319}$$

где t обозначает твист, $t = \Delta - J$. Если мы ограничимся операторами с минимальным твистом (стандартное первое приближение в КХД), тогда $\Delta_J = J + 2$, следовательно, согласно предписанию (317), приходим в точности к соотношению (307)! Однако, операторы минимального твиста не могут интерполировать скалярные мезоны, в этом случае используют интерполятор (319), который даёт $\Delta_0 = 3$, следовательно, $m^2_{J=0} = -3$. Это не противоречит нашему анализу, в котором скалярный случай был также особым. Мы бы тогда получили для модели IB$^+$:

$$m^2_{J=0} = -3: \qquad m^2_{n,0} = 4(n + 1/2). \tag{320}$$

Феноменология должна указать нам, какой из спектров скаляров является более предпочтительным, (311) или (320). Если спектр (311) оказывается более адекватным экспериментальной ситуации, тогда, в рамках голографического подхода, для скаляров нужно, по-видимому, использовать интерполятор (318), то есть свернуть индексы и интерполировать скаляры оператором твиста четыре $\mathcal{O}^{t=4}_{J=0} = \bar{q}(\gamma_5)\gamma_\mu D_\mu q$, таким образом, $\Delta_0 = 4$ и $m^2_{J=0} = 0$ согласно (317). Дело однако осложняется тем, что, во-первых, этот интерполятор эквивалентен[16] $\mathcal{O}^{t=4}_{J=0} = m_q\bar{q}(\gamma_5)q$ благодаря уравнениям движения КХД, по этой причине им пренебрегают в киральном пределе, $m_q = 0$, во-вторых, можно построить чисто глюонный интерполятор твиста четыре $\mathcal{O}^{t=4}_{J=0} = \alpha_s G^2_{\mu\nu}$, что сильно осложняет различимость кварк-антикварковых состояний от глюболов в изоскалярном скалярном канале в рамках голографического подхода.

Предположение об АдС фоне в пределе $z \to 0$, которое используется в АдС/КХД моделях, полностью согласуется с нашими результатами, как было отмечено выше.

Спектр (309) был впервые получен в голографической модели работы [96]. Отметим, что знак дилатонного фона в той модели был другим (по нашей классификации, соответствовал модели IB$^-$), это привело бы к другому спектру в нашем подходе, который совпадал бы с (309) только для векторных мезонов (достаточно сравнить (281) с (285)). Причина этого различия лежит в разном способе введения полей высших спинов[17] в работе [96]. Согласно недавним аргументам [249,250], основанным

---

[16] Пренебрегая аксиальной аномалией в изоскалярном псевдоскалярном канале, которая подавлена в пределе больших N_c.

[17] Мы ввели поля высших спинов простейшим образом, как в работе [248]. Однако в этой

на реализации конфайнмента в струнной модели, дилатонный фон должен быть положительным в АдС/КХД моделях с мягкой стенкой, то есть наиболее самосогласованной моделью является модель IB$^+$ в нашей классификации. Мы пришли к такому же заключению без использования струнных аргументов.

11.5 Нарушение киральной симметрии

В данном параграфе мы попытаемся обрисовать схему описания нарушения киральной симметрии (НКС), которая совместима с нашим подходом пятимерного голографическо-подобного формулирования планарной КХД.

Прежде всего, поскольку у нас нет кварков, модель микроскопического описания НКС построить нельзя. Самое большее, что можно сделать, это описать следствия НКС на адронном уровне. Первым таким следствием является феноменологический факт, что массы партнёров по чётности, которые, по идее, должны принадлежать одному киральному мультиплету, являются разными. Следовательно, нужно ввести механизм для такого расщепления масс. В пятимерной теории поля киральной симметрии не существует, поскольку в пяти измерениях нет аналога матрицы γ_5, поэтому НКС можно смоделировать только косвенным образом посредством отчасти разного описания состояний с одинаковым спином, но противоположной чётностью. Мы ограничимся только векторным и скалярным секторами.

Второе следствие НКС заключается в появлении безмассовых (в киральном пределе) псевдоскалярных мезонов вследствие теоремы Голдстоуна. Оба следствия НКС должны описываться в рамках единого механизма, который объяснял бы, например, почему соотношение $m_\pi = 0$ естественным образом связано с $m_{a_1}^2 \gtrsim 2m_\rho^2$ (вместо $m_{a_1} = m_\rho$, ожидаемом при линейной реализации киральной симметрии). Простейший механизм такого рода, который используют в голографических моделях и который мы также рассмотрим, заимствуется из низкоэнергетических

работе (и в аналогичных ей) спин адрона затем разделён на орбитальный момент кварк-антикварковой пары и собственный спин кварков, в то время как мы не используем это модельное предположение.

эффективных теорий поля: вводится скалярное поле X, которое приобретает ненулевое вакуумное ожидание $X_0(z)$ и взаимодействует с аксиально-векторным полем A_μ через ковариантную производную [94, 95],

$$S_{\text{НКС}} = \int d^4x \int dz \sqrt{|G_{MN}|} e^{\Phi(z)} \left(|D_M X|^2 - m_X^2 |X|^2 \right), \qquad (321)$$

где

$$D_M X = \partial_M X - i g_5 A_M X. \qquad (322)$$

Как обычно, достаточно ограничиться квадратичной по полям частью в действии (321), так как уравнения движения могут давать ненулевое вакуумное ожидание уже в этом случае, когда пространство искривлено. Это упрощение очень удобно для нас, поскольку позволяет легко проинтегрировать по z и увидеть эквивалентную 4D эффективную теорию. Уравнение движения, определяющее вакуумное ожидание X_0, является ни чем иным как уравнением задачи ШЛ (246) для безмассавых скалярных частиц. Согласно предписанию, основанному на АдС/КТП соответствии [257], решение должно вести себя при $z = 0$ как

$$X_0(z)|_{z\to 0} = C_1 z + C_2 z^3, \qquad (323)$$

где C_1 сопоставляется с токовой массой кварка, $C_1 \sim m_q$, а C_2 — с кварковым конденсатом, $C_2 \sim \langle \bar{q} q \rangle$. Подобная интерпретация подразумевает каким-то образом хорошо установленное соответствие модели с КХД. Поскольку мы не имеем такого соответствия, то было бы более честным сказать, что введение безмассовой скалярной частицы можно соотнести со спонтанным появлением двух параметров порядка с массовой размерностью 1 и 3, и это обстоятельство можно использовать для моделирования НКС.

Легко установить общее условие самосогласованности для такого описания НКС. Подставляя $\varphi = X = z^h$ в уравнение (246) с $a(z) = z^{-k}$ и нулевой правой частью ($k > 0$, $h > 0$), удерживая затем главный вклад при $z \to 0$, получаем

$$m_X^2 z^{h-5k} = h(h - 1 - 3k) z^{h-3k-2}, \qquad (324)$$

что немедленно даёт $k = 1$, то есть *данный дизайн НКС возможен при* $m_X^2 \neq 0$ *только в случае АдС фона при* $z \to 0$. Вторым условием является $m_X^2 = h(h-4)$, которое как для $h = 1$, так и для $h = 3$ приводит к $m_X^2 = -3$ в согласии с предписанием (317) при $\Delta_0 = 3$. Случай $m_X^2 = 0$ будет кратко проанализирован позже.

Тот факт, что пион не принадлежит соответствующей линейной псевдоскалярной траектории и должен рассматриваться отдельно, находится в согласии с феноменологией, что обсуждалось в первой главе. Однако решение $X_0(z)$ ненормируемо во всех известных голографических моделях. Это является серьёзной проблемой для нашего подхода, поскольку мы не можем проинтегрировать по z и увидеть 4D теорию, которую хотим переписать в 5D терминах. Выход может состоять в следующем. Уравнение движения для X представляет линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое, следовательно, имеет два независимых решения,

$$X_0(z) = C_1 X_1(z) + C_2 X_2(z). \tag{325}$$

Решение $X_1(z)$ портит нормируемость при $z \to 0$, тогда как (в моделях с мягкой стенкой) $X_2(z)$ портит при $z \to \infty$. Мы не видим причин почему $X_0(z)$ должно иметь везде непрерывную производную. Принимая это во внимание, можно построить следующее нормируемое решение,

$$X_0(z) = C_2 X_2(z)|_{z \leq z_0} + C_1 X_1(z)|_{z > z_0} \tag{326}$$

с условием непрерывности

$$C_1 X_1(z_0) = C_2 X_2(z_0). \tag{327}$$

Другое ограничение на входные параметры вытекает из нормировки (249),

$$C_2^2 \int_{z_{\min}}^{z_0} g_0(z) X_2^2(z) dz + C_1^2 \int_{z_0}^{z_{\max}} g_0(z) X_1^2(z) dz = 1. \tag{328}$$

Система уравнений (327), (328) позволяет исключить два из трёх параметров C_1, C_2, z_0.

Если z ассоциируется с обратным масштабом энергии, то выглядит естественным интерпретировать z_0^{-1} как масштаб НКС, $\Lambda_{\text{НКС}} \simeq 4\pi f_\pi \approx 1 \div 1.2$ ГэВ. Как известно, физика сильных взаимодействий является существенно разной ниже $\Lambda_{\text{НКС}}$ и выше

$\Lambda_{\text{НКС}}$, эффективное появление данного масштаба представляет, по сути, третье следствие НКС в КХД. Описание этого следствие НКС отсутствует в известных АдС/КХД моделях.

Рассмотрим конкретный пример — модель IB$^+$, которая была выбрана в предыдущем параграфе в качестве наиболее согласованной. Соответствующее решение $X_0(z)$ известно [250]:

$$X_1(z) = ze^{-z^2}U(-1/2, 0; z^2), \tag{329}$$

$$X_2(z) = z^3e^{-z^2}M(1/2, 2; z^2), \tag{330}$$

где U и M обозначают соответственно функции Куммера U и M. Они имеют следующие асимптотики:

$$X_1(z) \xrightarrow[z\to 0]{} z/\sqrt{\pi}, \qquad X_1(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} z^2e^{-z^2}, \tag{331}$$

$$X_2(z) \xrightarrow[z\to 0]{} z^3, \qquad X_2(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 1/\sqrt{\pi}. \tag{332}$$

Условие непрерывности (327) принимает вид:

$$C_1U(-1/2, 0; z_0^2) = C_2z_0^2M(1/2, 2; z_0^2), \tag{333}$$

тогда как нормировка (328) даёт:

$$C_2^2\int_0^{z_0} z^3e^{-z^2}M^2(1/2, 2; z^2)dz + C_1^2\int_{z_0}^{\infty} z^{-1}e^{-z^2}U^2(-1/2, 0; z^2)dz = 1. \tag{334}$$

Решение правил сумм (343) приводит к важному соотношению для наклона мезонных траекторий, $a \simeq \Lambda_{\text{НКС}}^2$. Отождествление z_0 с $\Lambda_{\text{НКС}}^{-1}$ означает в наших единицах для z, что $z_0 = 1/2$. Численное решение системы уравнений (333), (334): $C_1 \approx \pm 1.2$, $C_2 \approx \pm 3.5$.

Подстановка решения (326) обратно в действие (321) даёт вакуумную энергию. Как следует из асимптотики (332), плотность вакуумной энергии ε_{vac} будет логарифмически расходится при $z = 0$,

$$\varepsilon_{\text{vac}} = 9C_2^2\log z|_{z\to 0} + \text{const}. \tag{335}$$

Вычитая расходимость в выражении (335), получаем перенормированную плотность вакуумной энергии. В представленном выше численном примере она будет

$$\varepsilon_{\text{vac}}^{(\text{ren})} \approx -29.3|_{z\le 0.5} + 3.2|_{z>0.5} = -26.1. \tag{336}$$

Отрицательная величина для $\varepsilon_{\text{vac}}^{(\text{ren})}$ согласуется с тем, что ожидается в глюодинамике [258, 259].

Сравнивая предписание (323) с решением (326) и асимптотикой (332), можно на голографическом языке сказать, что НКС смоделирована в киральном пределе. Это является самосогласованным, поскольку мы изначально предполагали существование безмассовой скалярной частицы.

Рассмотрим случай векторных мезонов. Прежде всего отметим, что сделанный выше трюк не позволяет ввести безмассовых векторных частиц — нетрудно проверить, что хотя ненормируемые безмассовые решения для мезонов спина 1 существуют, оба являются ненормируемыми при $z \to 0$. Таким образом, мы защищены от появления безмассовых векторных бозонов.

Аксиально-векторный сектор является традиционным местом для моделирования физики НКС. Мы не будем вдаваться в построение моделей этого рода (наиболее популярный способ заключается в введении продольной компоненты для A_M и пионного поля $\boldsymbol{\pi}$ путём выбора параметризации $X = X_0 e^{i2\boldsymbol{\pi}}$), поскольку в киральном пределе это, по-видимому, не принесёт новых интересных результатов. Важным следствием члена (321) в действии является вызываемый им сдвиг масс аксиально-векторных мезонов из-за взаимодействия с вакуумным ожиданием X_0 через ковариантную производную (322). В рамках модели IB$^+$, новый спектр масс можно получить путём подстановки $m_J^2 \to m_J^2 + g_5^2 X_0^2(z)$ в уравнение (280). Хотя точного аналитического решения неизвестно, ясно, что массы будут увеличены, так как дополнительный вклад в потенциал уравнения Шрёдингера (280) всегда положителен. Кроме того, из решения (326) и асимптотик (331), (332) следует, что голографический потенциал в уравнении (280) будет иметь вид (учитывая $m_{J=1}^2 = 0$):

$$U|_{z \gg z_0} = z^2 \left(1 + g_5^2 C_1^2 e^{-2z^2}\right) + \frac{3}{4z^2}, \tag{337}$$

$$U|_{z \ll z_0} = z^2 \left(1 + g_5^2 C_2^2 z^2\right) + \frac{3}{4z^2}. \tag{338}$$

Это поведение демонстрирует, что спектр аксиально-векторных состояний быстро приближается к спектру векторных мезонов, а аксиально-векторные константы распада становятся хорошо определёнными в пределе высоких энергий. Скорость такого "восстановления киральной симметрии"экспоненциальная, что согласуется с результатами первой главы. Данная качественная особенность отличается от предыдущих результатов, полученных в голографических моделях с мягкой стенкой [205,250], в которых разность квадратов масс V и A мезонов стремится к константе, а аксиально-векторные вычеты не могут быть определены из выражения (256). Нужно отметить, что описанное поведение не противоречит отсутствию восстановления киральной симметрии, показанному в третьей главе. А именно, мезоны на главных траекториях Редже не имеют партнёров по чётности, при этом вырождение спектров имеет форму:

$$m^-_{n+1,J} \approx m^+_{n,J} \quad (J \text{ uneven}); \qquad m^+_{n+1,J} \approx m^-_{n,J} \quad (J \text{ even}), \quad (339)$$

где $\pm$ относится к пространственной чётности. Нашу модель можно легко приспособить к такому сценарию.

Неприятной особенностью представленного описания НКС является расходимость пионного вычета согласно формуле (256). Если бы мы имели конечное значение для вычета пиона F_π, то могли бы сопоставить его с соответствующим выражением из алгебры токов, $F_\pi = \frac{\langle\bar{q}q\rangle}{f_\pi}$ (напоминаем, что $\langle 0|J_A|\pi\rangle \sim f_\pi$, тогда как $\langle 0|J_P|\pi\rangle \sim F_\pi$, где J_P является псевдоскалярным током). Как было показано ранее, соотношение (256) приводит к конечным вычетам для скалярных и векторных частиц только в случае $m_J = 0$. Для скалярного поля в АдС фоне при $z \to 0$ это означает $X(z) \sim z^4$, что согласуется с выражением (324). Нетрудно найти соответствующее вакуумное ожидание $X_0(z)$, интегрируя уравнение (246) в случае $m_J = 0$, $m_{n,J} = 0$. Для модели IB$^+$, результатом является

$$m_J = 0: \qquad X_0(z) = C\left[e^{-z^2}(z^2+1) - 1\right], \quad (340)$$

где C есть константа. Однако решение (340) не является нормируемым. Кроме того, как и в сценариях [205, 250], оно ведёт при достаточно большом z к эффективной 5D массе

$m_{J=1}^2 = g_5^2 C^2$ у аксиально-векторных мезонов, следовательно, аксиально-векторные вычеты больше не могут быть вычислены, исходя из выражения (256). Это вряд ли является разумной альтернативой. Таким образом, полностью самосогласованное описание НКС остаётся открытым вопросом.

11.6 Заключительные замечания

В первой главе мы показали, что для воспроизведения пертурбативного логарифма в двухточечном корреляторе посредством бесконечного числа мезонных полюсов, нужно выполнение условия кварк-адронной дуальности (в нормировке для вычетов, используемом в данном разделе):

$$F_n^2 \sim m_n^2 \partial_n m_n^2. \tag{341}$$

Далее, в случае линейного спектра,

$$m_{V,A;n}^2 = a(n + b_{V,A;n}), \tag{342}$$

мы нашли приближённое решение:

$$b_V = 1/2, \qquad b_A = 1, \qquad a = 48\pi^2 f_\pi^2 / N_c, \tag{343}$$

где разность $b_A - b_V$ появилась вследствие динамики НКС.

Возвращаясь к голографическим моделям, отметим, что спектр (309), возникающий в моделях с мягкой стенкой, в действительности, не описывает ρ и ω мезоны, скорее он соответствует аксиально-векторным мезонам. Мы не знаем естественного способа получения получения интерсепта $b_V = 1/2$ в рамках голографического подхода и/или техники, представленной в предыдущих параграфах, если только не наложено дополнительных спекулятивных предположений [85, 249]. Как следует из наших предыдущих рассуждений, корректный векторный спектр должен естественным образом следовать из успешной реализации динамики НКС в голографических моделях.

Наш анализ склоняет нас к мысли, что так называемый голографический подход "bottom-up"может представлять просто альтернативный математический язык для выражения феноменологии, описываемой планарными правилами сумм КХД с практически тем же числом входных параметров и вытекающей точностью. Это непосредственно видно из нашего вывода пятимерных моделей, совпадающих с голографическими, по крайней мере, в смысле описания спектров. По сути, проблема нахождения спектра, наиболее удовлетворяющего правилам сумм, переформулирована в голографическом подходе в проблему нахождения наиболее подходящего пятимерного фона и граничных условий на пятимерные поля, которые дают нужный спектр в результате решения задачи Штурма-Лиувилля. Последующая феноменология весьма схожа. Например, пион вводится посредством гипотезы частичного сохранения аксиального тока, и из обоих методов следует, что его вряд ли принадлежит псевдоскалярной радиальной траектории Редже.

Разработанный пятимерный подход предлагает также новый способ описания нарушения киральной симметрии. Связанные с этим попытки попытки нельзя рассматривать как альтернативный язык для выражения сшивки низкоэнергетических эффективных теорий поля для сильных взаимодействий с правилами сумм КХД (см., например, работы [7, 8, 11, 12, 14, 172, 173, 260–266]), однако они близки по духу. Различие состоит в том, что эффективные модели имеют дело только с основными состояниями мезонов (в редких случаях, также с первыми радиальными возбуждениями), тогда как пятимерные модели способны описать влияние НКС на весь спектр радиальных возбуждений. Другое различие состоит в том, что существующие голографические описания НКС нельзя рассматривать с четырёхмерной точки зрения. Мы предложили способ визуализации пятимерного описания НКС в четырёхмерных терминах.

Мы не рассматривали явное введение кварков и бегущей константы связи КХД, поскольку без знания механизма конфайнмента, по крайней мере, в планарном пределе КХД, любые попытки такого рода весьма спекулятивны.

Нужно подчеркнуть, что рассмотренный пятимерный подход является полностью феноменологическим и вряд ли может быть соотнесён с какой-либо строгой теорией поля в пространстве с дополнительными измерениями. Прежде всего, мы игнорировали все давние проблемы с описанием частиц высших спинов. Если бы мы ввели гравитационную динамику, которая давала бы нужную нам метрику, то столкнулись бы с проблемой гравитационного взаимодействия полей высших спинов — такой теории попросту не существует. По этой причине, мы полагаем, бессмысленно обсуждать обратную реакцию метрики на конденсацию скалярного поля и вводить соответствующие поправки к нашей схеме, а также адресовать другие вопросы касательно отношения к самосогласованной теории с дополнительными измерениями пространства, пока не решён ряд фундаментальных проблем в теории поля.

Выводы к Главе IV

В данной главе были предложены два пятимерных подхода к приближённому описанию реджевского спектра с конечным числом состояний на радиальных траекториях Редже, при этом пятая координата имеет физический смысл обратного масштаба энергии. Также подробно проанализирована связь голографического подхода с планарными правилами сумм КХД.

Первый подход представляет собой класс АдС/КХД моделей с ангармоническими поправками в голографическом потенциале. Предположив, что число различимых резонансов линейно зависит от N_c, были получены поправки к реджевскому спектру, ведущие себя как $1/N_c$. Была также предложена точнорешаемая модель, интерполирующая введённый класс АдС/КХД моделей, и показано хорошее согласие с феноменологией в векторном канале. Важной чертой оказывается эффективное наличие двух обрезаний — ультрафиолетового и инфракрасного, причём наклон радиальных реджевских траекторий определяется произведением этих обрезаний. Это говорит о том, что дискретный спектр масс в равной степени определяется ультрафиолетовым и инфракрасным секторами теории. Не исключено, что нечто подобное происходит и в реальной КХД.

Второй подход можно интерпретировать как пятимерную модель для глюонного вакуума КХД и возбуждений над ним. Вакуум моделируется самодействующим скалярным полем, которое считается дуальным глюонному оператору $G_{\mu\nu}^2$. Вследствие заложенной динамики, оно приобретает ненулевое вакуумное среднее, нарушающее трансляционную инвариантность вдоль пятой координаты. Этот эффект имитирует масштабную аномалию в КХД. Модель предсказывает массивное возбуждение вакуумного поля, которое естественно сопоставить со скалярным глюболом. Когда безмассовые мезоны взаимодействуют с вакуумным полем, они приобретают массы, причём спектр всегда конечен и в режиме сильной связи становится реджевским. При введении в модель безмассовых фермионов, в пределе высоких энергий локализуются только безмассовые левые фермионы, в пределе же низких энергий, они приобретают динамическую массу. Поэтому эти фермионы естественно сопоставить с фундаментальными кварками.

В последнем разделе главы мы затронули проблему теоретического обоснования голографического подхода в применении к спектроскопии мезонов. Феноменологию, описываемую в пределе большого числа цветов КХД, можно компактно переписать в терминах феноменологической пятимерной теории, а именно, бесконечное число узких мезонных состояний, взаимодействующих с внешним источником, может быть формально представлено как одно пятимерное поле, распространяющееся в подходящем фоне. Это позволяет заменить порой длинные манипуляции с бесконечными рядами мезонных полюсов компактными операциями с пятимерным полем, что представляет определённый операционный прогресс. Однако современные пятимерные модели включают разнообразные спекулятивные предположения, заимствованные из АдС/КТП соответствия, экстраполяция которых на реальную КХД часто выглядит необоснованной. Мы явно продемонстрировали, что пятимерные модели для планарной КХД, совпадающие с голографическими при описании спектра мезонов, можно вывести, исходя из ряда требований феноменологической самосогласованности, не привлекая идеи из голографического подхода. Эти модели представляют просто иной математический язык для выражения реджевской феноменологии в рамках планарных правил сумм КХД.

Глава V

12 Реджевский спектр из голографической модели с жесткой стенкой

12.1 Введение

Как упоминалось в предыдущем разделе, голографические модели оказались довольно успешными в описании непертурбативной КХД [93–96]. В частности, многие важные аспекты киральной динамики можно воспроизвести в рамках простейшей модели с жёсткой стенкой [94]. Однако спектр возбуждённых мезонов в этих моделях [93–95] ведёт себя как $m_n \sim n$, что не согласуется с реджевским спектром, $m_n^2 \sim n$, ожидаемым в КХД. Для решения этой проблемы был придуман пятимерный дилатонный фон — так называемая модель с мягкой стенкой [96]. Описание нарушения киральной симметрии в этой модели оказалось более сложным (см., например, обсуждения в работе [205]). Кроме того, физический смысл дилатонного фона непонятен. Наклон траекторий определяет массы адронов, следовательно, сам наклон определяется механизмом конфайнмента. Авторы работы [96] предложили, что квадратичный дилатон (именно он даёт реджевский спектр) мог бы отражать тахионную конденсацию замкнутых струн, поскольку этот процесс часто считается дуальным конфайнменту в калибровочных теориях. В работе [206] было далее предложено, что тахион замкнутых струн можно голографически сопоставить с конденсатом размерности 2, чья роль в различных аспектах непертурбативной физики сильных взаимодействий широко обсуждалась в литературе (см., например, работы [110–112]). Это предположение можно развить в более общую идею, что вместо "игры"с метрикой, некоторые важные аспекты конфайнмента можно ввести в АдС/КХД модели путём учёта локальных конденсатов. Важной чертой данной программы является то, что локальные конденсаты нужно вводить динамически, в противоположность геометрическому подходу работы [207], где они вводились через модификацию метрики.

В данном разделе мы предлагаем простой и естественный способ введения локальных конденсатов в АдС/КХД модели [97]. Мы рассмотрим векторные мезоны в рамках простейшей голографической модели с жёсткой стенкой (отчасти подобный, но гораздо более сложный анализ для глюболов был выполнен в работе [206]). Будет показано как возникает реджевский спектр при не очень больших энергиях, причём наклон траекторий определяется конденсатом размерности 2. Последнее обстоятельство вызывает беспокойство, поскольку такого локального калибровочно-инвариантного конденсата нет в стандартном операторном разложении [30]. Если считать этот конденсат нелокальным, то возникает конфликт с принципом АдС/КТП соответствия: голографические поля можно сопоставлять только локальным калибровочно-инвариантным операторам теории поля. Мы нашли простое решение этой проблемы — путём определённой модификации граничных условий для соответствующих дуальных голографических полей, наклон можно сделать выражающимся через обычный глюонный конденсат размерности 4.

12.2 Общая схема

Мы рассмотрим случай изоскалярных вектрных мезонов (ω-мезоны), который может быть непосредственно обобщён на другие виды мезонов. Чтобы отобрать операторы, которые важны при вычислении масс резонансов, будем ориентироваться на ОР двухточечных корреляторов кварковых токов при большом эвклидовом импульсе Q. Выпишем ещё раз его структуру [30] (лоренцевы индексы опущены)

$$\Pi(Q^2) = C_0 \log\frac{\Lambda^2}{Q^2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\langle \mathcal{O}_{2k}\rangle}{Q^{2k}}, \tag{344}$$

здесь $\mathcal{O}_{2k}$ обозначают локальные калибровочно-инвариантные операторы с канонической размерностью $2k$ (одному k могут соответствовать несколько операторов), а C_k являются константами, вычисляемыми по теории возмущений. Вакуумные ожидания операторов с правой стороны соотношения (344) определяют массы мезонов, что особенно видно в пределе большого числа цветов, где левая часть соотношения (344) представляет сумму по резонансным полюсам. Следуя стандартной процедуре вычисления масс в рамках правил сумм КХД [30], мы должны удержать только несколько первых вкладов в правой части соотношения (344).

Обсудим нужные нам операторы. Первый член в правой части (344) является пертурбативным вкладом, следовательно, он нам неинтересен. Локальный калибровочно-инвариантный оператор размерности 2 отсутствует в стандартном ОР [30], тем не менее он широко обсуждался в литературе [110–112], поскольку эффективное формирование соответствующего конденсата $\langle A_\mu^2\rangle$ может оказаться весьма важным в глюодинамке и приводить к богатой феноменологии. Кроме того, такая квадратичная поправка часто связывается со вкладом ренормалонов (см., например, обсуждения в работе [208]). По этим причинам мы попробуем включить данный оператор в наш анализ. В вакуумное среднее $\langle\mathcal{O}_4\rangle$ дают вклад конденсаты $m_q\langle\bar{q}q\rangle$ и $\alpha_s\langle G_{\mu\nu}^2\rangle$. Оба не имеют аномальных размерностей (по крайней мере, в одной петле). Относительный вклад $m_q\langle\bar{q}q\rangle$ очень мал, мы его опустим, принимая киральный предел $m_q = 0$. Дальнейшие вклады и их конкретная структура в асимптотическом разложении (344) не важны для наших целей.

Согласно принципам АдС/КТП соответствия, мы должны связать каждый оператор $\mathcal{O}(x)$ с полем $\varphi(x,z)$ некоторой пятимерной теории, причём масса поля $\varphi(x,z)$ определяется соотношением [90, 91]

$$m_5^2 = (\Delta - J)(\Delta + J - 4), \tag{345}$$

где Δ есть каноническая размерность оператора $\mathcal{O}(x)$, а J — спин.

В нашем случае поле векторное, интерполируется оператором тока $\bar{q}\gamma_\mu q$. Соответствующее 5D поле обозначим V_M. Имеем $J = 1$, $\Delta = 3$, следовательно, $(m_5)_V^2 = 0$. Кроме того, существует бесконечный набор операторов $\langle\mathcal{O}_{2k}\rangle$ (пренебрежём тем фактом, что, вообще говоря, каждому k соответствует конечное число разных операторов). Сопоставляемые им 5D скалярные поля X_{2k}

имеют $J = 0$, $\Delta = 2k$, следовательно,

$$(m_5)^2_{2k} = 4k(k-2). \tag{346}$$

Действием теории, описывающей векторные мезоны, является

$$S = \int d^4x\, dz \sqrt{g}\, \mathrm{Tr} \left\{ \sum_k \left(|DX_{2k}|^2 - (m_5)^2_{2k} |X_{2k}|^2 \right) - \frac{1}{4} F^2_{MN} \right\}, \tag{347}$$

где

$$D_M X_{2k} = \partial_M X_{2k} - i g_5 V_M X_{2k}, \tag{348}$$

$$F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M. \tag{349}$$

Как обычно, голографическая координата z соответствует обратному масштабу энергии, $z \sim 1/Q$. Вакуумные средние полей X определяются классическими решениями, удовлетворяющими UV граничным условиям. Так как в пределе очень высоких энергий вакуум КХД пертурбативный, т.е. нет конденсатов, представляется естественным наложить следующее UV граничное условие:

$$X_{2k}(x, z = 0) = 0. \tag{350}$$

Пока не будем накладывать никакой IR границы (обсуждается ниже), которая определяет масштаб, до которого пренебрегают бегом константы связи КХД. Мы полагаем, что при рассмотрении ренорминвариантных (или почти ренорминвариантных) величин, как это имеет место в настоящем анализе, проблема бегущей константы несущественна.

Чтобы получить конкретную модель, нужно выбрать метрику, тогда классические решения для $\langle X_{2k} \rangle$ образуют "потенциал"для векторного поля V_M, фиксируя затем калибровку и граничные условия, можно вычислить спектр масс.

12.3 Модель

Мы рассмотрим простейшую метрику, используемую в моделях с жёсткой стенкой — метрику анти-де Ситтера [94],

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dx_\mu dx^\mu - dz^2), \tag{351}$$

где для простоты положено $R = 1$ для радиуса пространства АдС. Зафиксируем аксиальную калибровку $V_z = 0$. Нормируемые решения v_n, $V_M^n(x,z) = V_\mu^n(x) v_n(z)$, уравнения движения для поперечных компонент V_μ^T существуют только для дискретных значений 4D импульса $q^2 = m_n^2$,

$$\partial_z \left(\frac{1}{z} \partial_z v_n \right) + \frac{m_n^2 v_n}{z} = \frac{2 g_5^2}{z^3} v_n \sum_k \langle X_{2k} \rangle^2, \tag{352}$$

где $\langle X_{2k} \rangle$ есть решения уравнения

$$\frac{1}{z^3} \partial_\mu \partial^\mu X_{2k} - \partial_z \left(\frac{1}{z^3} \partial_z X_{2k} \right) = -\frac{1}{z^5} (m_5)_{2k}^2 X_{2k}, \;\; k = 1, 2, \ldots \tag{353}$$

Мы ищем решения для $\langle X_{2k} \rangle$, которые являются функциями только z. Делая замену переменных $v_n = \sqrt{z} \psi_n$, система уравнений (352), (353) принимает вид

$$-\psi_n'' + \left(\frac{3}{4z^2} + \frac{2 g_5^2}{z^2} \sum_k \langle X_{2k} \rangle^2 \right) \psi_n = m_n^2 \psi_n, \tag{354}$$

$$z^2 X_{2k}'' - 3z X_{2k}' - (m_5)_{2k}^2 X_{2k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{355}$$

Уравнение (354) выглядит как уравнение Шрёдингера с потенциалом в скобках, определяемым из решений уравнений (355). Подставляя значения $(m_5)_{2k}^2$ из соотношения (346) в уравнения (355), получаем следующие решения, удовлетворяющие граничному условию (350),

$$\langle X_2 \rangle = c_2^{(1)} z^2 + c_2^{(2)} z^2 \log z, \tag{356}$$

$$\langle X_{2k} \rangle = c_{2k}^{(1)} z^{2k}, \qquad k = 2, 3, \ldots, \tag{357}$$

где $c_{2k}^{(i)}$ являются размерными константами.

Для того, чтобы иметь реджевский спектр, $m_n^2 \sim n$, потенциал в уравнении (354) должен быть осцилляторного типа, т.е. вести себя как z^2 при больших z. Это достигается, если мы положим $c_2^{(2)} = 0$ и пренебрежём вкладами операторов высших размерностей, $c_{2k}^{(1)} = 0$ при $k > 1$. Тогда получается спектр

$$m_n^2 = 4\sqrt{2}\, g_5 |c_2^{(1)}| n + \text{const}. \tag{358}$$

В частности, выбирая $c_2^{(1)} = (\sqrt{2}\,g_5)^{-1}$ в нужных единицах квадрата энергии, приходим к спектру, полученному в простейшей модели с мягкой стенкой [96]. Отметим также, что поскольку наклон $a = 4\sqrt{2}\,g_5|c_2^{(1)}|$ в уравнении (358) пропорционален натяжению струны σ, $a = 2\pi\sigma$, квадратичная поправка в ОР (344) оказывается также пропорциональной σ, что качественно воспроизводит результат работы [209].

Таким образом, в рамках данной голографической модели, первый непертурбативный вклад в двухточечные корреляторы, так называемый глюонный конденсат размерности 2, является ответственным за реджевское поведение спектра масс. Вклады же операторов более высокой размерности дают ангармонические (нелинейные) поправки к спектру.

12.4 Обсуждения

В некотором смысле, принцип АдС/КТП соответствия переводит асимптотическое разложение по Q^{-2} в ОР в асимптотическое разложение по z^4 в голографическом потенциале уравнения на спектр масс (354),

$$U(z) = \frac{3}{4z^2} + 2g_5^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{4k-2}. \tag{359}$$

В рамках правил сумм КХД [30], только первые несколько вкладов существенны при вычислении масс основных состояний мезонов. Принимая тот же принцип в рассматриваемой модели, мы должны также пренебречь высшими степенными поправками к спектру.

Мы пока не обсуждали IR граничные условия. Эффективная IR граница $z_{\rm IR}$ конечно должна существовать в модели, но в отличие от моделей с жёсткой стенкой, мы не накладываем специальных граничных условий при $z_{\rm IR}$ (граничные условия определены требованием иметь реджевский спектр), величина $z_{\rm IR}$ показывает в нашем случае область применимости модели. Например, подгонкой $z_{\rm IR}$ можно добиться доминантности осцилляторного вклада в уравнении (354) в нужном нам диапазоне изменения z. Имеем тогда приблизительно реджевский спектр для определённого числа возбуждённых мезонов, которые наблюдались экспериментально, описание же более тяжёлых возбуждений (не наблюдавшихся в экспериментах) находится тогда вне области применимости модели. Выражаясь более точно, контуром потенциальной ямы является $\mathcal{O}(z^2)$ при $z_{\min} < z < z_{\mathrm{IR}}$, где $z_{\min}$ есть минимум потенциала, и при $z = z_{\mathrm{IR}}$ имеем "жёсткую"стенку. Как следствие, спектр нормируемых мод примерно совпадает с осцилляторным, $m_n^2 \sim n$, при малых n и, после наложения соответствующих IR граничных условий, представляет нули функции Бесселя, $m_n \sim n$, при больших n, $m_n^2 > U(z_{\mathrm{IR}})$, где модель предполагается неприменимой.

Тематика, связанная с конденсатом размерности 2 является довольно спорной и спекулятивной. В связи с этим возникает вопрос можно ли так модифицировать модель, чтобы наклон траекторий не определялся этим конденсатом? Было бы более естественным ожидать, что наклон связан с обычным глюонным конденсатом, можно ли этого добиться? Ответ оказывается положительным. Глюонный конденсат, как известно, имеет большой вклад от теории возмущений (соответствующая степенная поправка появляется после суммирования ренормалонов). По этой причине UV граничное условие (350), по-видимому, не является корректным для скалярного поля, соответствующего глюонному оператору $\alpha_s G_{\mu\nu}^2$, его следует ослабить до

$$X_4(x, z = 0) = \text{const.} \tag{360}$$

В этом случае, решение уравнения (355) для $k = 2$ есть

$$\langle X_4 \rangle = c_4^{(1)} z^4 + c_4^{(2)}. \tag{361}$$

Подставляя его в уравнение (354), замечаем, что $\langle X_4 \rangle$ даёт вклад как в UV (происходящий от $c_4^{(2)}$), так и с IR (возникающий из $c_4^{(1)}$) часть потенциала, причём их интерференция представляет собой осцилляторный вклад, $\mathcal{O}(c_4^{(1)} c_4^{(2)} z^2)$, т.е.

$$m_n^2 \sim c_4^{(1)} c_4^{(2)} n + \dots \tag{362}$$

Данное обстоятельство являет собой голографическое выражение того факта, что глюонный конденсат кодирует в себе как пертурбативные, так и непертурбативные эффекты, что хорошо известно в феноменологии. Кроме того, мы наблюдаем своего рода реализацию АдС/КТП идеи: UV поведение 5D дуальной теории определяет низкоэнергетические свойства 4D теории на границе — наклон дискретного спектра масс в рассматриваемом случае.

Следует также отметить, что метрика может быть выбрана так, что наклон траекторий автоматически определяется только операторами размерности 4. В Приложении Г продемонстрировано, что это происходит в плоской метрике.

13 Ультрафиолетовое обрезание в модели с мягкой стенкой

13.1 Предварительные замечания

Выше мы рассмотрели некоторые пятимерные модели для спектра мезонов, содержащие ультрафиолетовое (УФ) обрезание. В данном разделе мы возвращаемся к этой тематике и, прежде всего, дадим ответ на следующий вопрос — что получается в результате введения УФ-обрезания в классическую модель с мягкой стенкой? Основным качественным изменением станет то, что спектр потеряет линейную реджевскую форму [103]. При этом он начинает лучше описывать аксиально-векторные мезоны, и хуже — векторные, что является одним из косвенных указаний на то, что стандартная модель с мягкой стенкой, в действительности, описывает аксиально-векторные мезоны (на это уже было указано в разделе 12.6). Обоснование этого утверждения будет затронуто в следующем разделе.

Поясним наш особый интерес к УФ-обрезанию. Как известно, фундаментальная теория сильных взаимодействий — квантовая хромодинамика — не поддаётся теоретическому анализу при низких энергиях из-за режима сильной связи. В то же время, этот режим определяет наиболее важные явления в КХД. По этой причине, давно стало общей практикой заменять низкоэнергетическую КХД эффективными теориями поля — сигма-модели, модель Намбу–Йона-Лазинио, киральная кварковая модель и другие. Они дают простое описание некоторых аспектов непертурбативной КХД и ведут к интересным соотношениям между физическими величинами, которые оказываются качественно или даже полуколичественно правильными. Несмотря на многочисленные усилия, доказать, что какая-то из эффективных моделей следует из КХД в низкоэнергетическом пределе, не удалось. Тем не менее, они продолжают играть роль интересной теоретической лаборатории для феноменологии сильных взаимодействий.

Голографический подход к сильным взаимодействиям можно рассматривать как очередную попытку переформулировать КХД в терминах асимптотических состояний, наблюдаемых экспериментально. Одним из слабых мест этого подхода является тот факт, что сшивка с КХД делается в УФ режиме, где КХД асимптотически свободна, следовательно, там не должно быть и заявленной дуальности. Поэтому применимость квазиклассического подхода к дуальной пятимерной теории становится спорной. Введение же УФ-обрезания исправляет этот концептуальный недостаток. При этом получающаяся пятимерная теория становится очень близкой по духу эффективным теориям поля.

Таким образом, становится интересным попробовать наложить УФ-обрезание на наиболее успешную голографическую модель, описывающую спектр резонансов, — модель с мягкой стенкой. Этот вопрос исследовался численно в работе [224]. Ниже мы решим данную задачу аналитически.

13.2 Модель с мягкой стенки и с УФ-обрезанием

Рассмотрим простейшую голографическую модель с мягкой стенкой [96], описывающую спектр векторных мезонов. Она задаётся действием

$$S = -\frac{1}{4g_5^2}\int d^4x\, dz\sqrt{g}\, e^{-\Lambda^2 z^2} F_{MN}F^{MN}, \tag{363}$$

где $F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$, $M, N = 0,1,2,3,4$, с метрикой Анти де-Ситтера ($\mu = 0,1,2,3$),

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left(dx_\mu^2 - dz^2\right); \quad 0 \le z < \infty. \tag{364}$$

Дилатонный фон $e^{-\Lambda^2 z^2}$ вводит массовый масштаб Λ, определяющий наклон линейного спектра масс нормируемых мод, $m_n^2 = 4\Lambda^2(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Введём УФ границу $z_{\rm UV}$, которая соответствует обратному масштабу начала сильной связи, около 1 ГэВ$^{-1}$. Без потери общности, мы можем отождествить обрезание $z_{\rm UV}$ с радиусом пространства АдС$_5$, $z_{\rm UV} = R$. Это означает, что интегрируя по голографической координате z,

$$\int_0^\infty dz = \int_0^R dz + \int_R^\infty dz, \tag{365}$$

мы вырезаем область $0 \leq z < R$, поскольку квазиклассическое приближение в этой области считаем неприменимым. В аксиальной калибровке, $V_z(x,z) = 0$, уравнение движения для четырёхмерного преобразования Фурье $V_\mu(q,z)$ поперечных компонент, $\partial_\mu V^\mu(x,z) = 0$, принимает форму

$$-\partial_z\left(\frac{e^{-\Lambda^2 z^2}}{z}\partial_z V_\mu(q,z)\right) = q^2\frac{e^{-\Lambda^2 z^2}}{z}V_\mu(q,z). \tag{366}$$

Полагая $V_\mu(q,z) = v(q,z)V_\mu^0(q)$, потребуем $v(q,R) = 1$; тогда источником для четырёхмерного векторного тока является $V_\mu^0(q)$. Решение уравнения (366), ограниченное при $z \to \infty$, есть

$$v(q,z) = \frac{U(-q^2/4\Lambda^2, 0, \Lambda^2 z^2)}{U(-q^2/4\Lambda^2, 0, \Lambda^2 R^2)}, \tag{367}$$

где U обозначает гипергеометрическую функцию Трихоми.

На этом решении, действие (363) имеет вид граничного члена

$$S = -\frac{R}{2g_5^2}\int d^4x\left(\frac{e^{-\Lambda^2 z^2}}{z}V_\mu\partial_z V^\mu\right)_{z=R}. \tag{368}$$

Согласно гипотезе АдС/КТП соответствия, векторная двухточечная корреляционная функция,

$$\int d^4x\, e^{iqx}\left\langle J_\mu(x)J_\nu(0)\right\rangle = (q_\mu q_\nu - q^2\eta_{\mu\nu})\Pi_V(Q^2); \quad Q^2 = -q^2, \tag{369}$$

даётся второй вариационной производной от действия (368) по источнику V^0_μ,

$$\Pi_V(Q^2) = -\frac{Re^{-\Lambda^2 z^2}}{g_5^2 Q^2}\, \frac{v\partial_z v}{z}\bigg|_{z=R}. \tag{370}$$

Используя нормировку $v(q,R) = 1$ и свойство $\partial_x U(a,0,x) = -aU(1+a,1,x)$, окончательно получаем:

$$\Pi_V(Q^2) = \frac{Re^{-\Lambda^2 R^2}}{2g_5^2}\frac{U(1+Q^2/4\Lambda^2,1,\Lambda^2 R^2)}{U(Q^2/4\Lambda^2,0,\Lambda^2 R^2)}. \tag{371}$$

Выражение (371) имеет полюса $q_n^2 = 4\Lambda^2 f_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, где $f_n \to n+1$ когда $\Lambda R \to 0$. При $\Lambda R > 0$, f_n стремится к эквидистантному поведению, $f_{n+1} - f_n \to 1$, только при достаточно больших n. Например, выбор $\Lambda R = 1$ ведёт к $f_n \approx 1.57, 2.84, 4.05, 5.22, 6.37, \ldots$. Теперь вычеты стремятся к нулю при $n \to \infty$. В пределе $\Lambda R \to 0$, все вычеты выражения $\frac{U(1+Q^2/4\Lambda^2,1,\Lambda^2R^2)}{U(Q^2/4\Lambda^2,0,\Lambda^2R^2)}$ стремятся к $4\Lambda^2$. Таким образом, принимая во внимание общий множитель в выражении (371), приходим к вычетам стандартной модели с мягкой стенкой,

$$\Pi_V^{(\mathrm{SW})}(Q^2) = \frac{R}{2g_5^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\Lambda^2}{Q^2+4\Lambda^2(n+1)} + \gamma - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \log(z^2\Lambda^2)\right]_{z\to 0} \tag{372}$$

Выражение (372) содержит два бесконечных члена, так как предел $\Lambda R = 0$ взят с самого начала. Они вычитаются в конечном ответе, тогда как у нас никаких вычитаний не возникает.

13.3 Нарушение киральной симметрии в "обрезанной"модели

Введение УФ-обрезания может решить проблему с естественным описанием нарушения киральной симметрии (НКС) в стандартной голографической модели с мягкой стенкой. Поясним суть проблемы. Простейший способ учёта эффекта НКС состоит во введение в действие свободного скалярного поля X [94, 95],

$$S_{\mathrm{CSB}} = \int d^4x\, dz \sqrt{g}\, e^{-\Lambda^2 z^2}\left(|\partial_M X|^2 + \frac{3}{R^2}|X|^2\right), \tag{373}$$

где фоновое поле $\frac{2}{z}X(z)$ соответствует кварковому оператору $\bar{q}q$, размерность Δ которого диктует массу этого скалярного поля, согласно соотношению $m^2R^2 = \Delta(\Delta - 4)$. В полной модели, обычные производные в действии (373) должны быть заменены ковариантными, что даёт взаимодействие поля $X(z)$ с векторными полями. Сейчас для нас это несущественно.

Согласно предписаниям АдС/КТП соответствия, скалярное поле $X(z)$, ответственное за НКС, должно иметь следующую УФ-асимптотику [257]:

$$X(z)_{z\to 0} \sim Mz + \Sigma z^3, \tag{374}$$

коэффициент M имеет тогда смысл массы кварка, а Σ — кваркового конденсата. Однако, уравнение движения для X, следующее из действия (373), имеет только одно решение, ограниченное при $z \to \infty$: $X(z) = zU(\frac{1}{2}, 0, \Lambda^2 z^2)$. Возле $z = 0$ оно раскладывается в ряд

$$X(z)_{z\to 0} \sim 2\Lambda z + \left(1 + \gamma - \log 4 + \log(\Lambda^2 z^2)\right)\Lambda^3 z^3, \tag{375}$$

где $\gamma \approx 0.577$ является постоянной Эйлера. Таким образом, Σ оказывается пропорциональным M. В реальной КХД этого не должно быть — кварковый конденсат не исчезает в киральном пределе. Поэтому в простейшей модели с мягкой стенкой корректно описать НКС не удаётся.

Наше наблюдение состоит в том, что, если предписание (374) приближённо имеет место для ненулевого $z = R$, получаемая пропорциональность как раз и ожидается в эффективном описании низкоэнергетической КХД — лёгкие кварки приобретают конституэнтную массу, $M \approx 320$ MeV, которая пропорциональна Σ. Например, в модели Намбу–Йона-Лазинио [267], выполняется соотношение $M = -2GN_f\Sigma + M_0$, где G есть четырёхфермионная константа связи, а M_0 — токовая масса кварка. По предположению, рассматриваемая голографическая модель с УФ-обрезанием тоже является низкоэнергетической теорией, точнее, она должна быть дуальна некоторой эффективной низкоэнергетической теории для КХД. Поэтому источником для кваркового оператора естественно считать конституэнтную массу кварка, а не токовую. Описание НКС становится тогда полностью самосогласованным.

Можно попытаться использовать соотношение (375) для грубой оценки величины ΛR. Умножая (375) на константу C и сравнивая с (374), получаем $C = \frac{M}{2\Lambda}$ и

$$\Sigma \simeq \frac{1}{2}\left(1+\gamma-\log 4+\log(\Lambda^2 R^2)\right) M\Lambda^2. \tag{376}$$

Полагая $\Lambda = 550$ МэВ из усреднённого фита на наклон $4\Lambda^2$ в спектрах векторных мезонов и $\Sigma = (-235\,\text{МэВ})^3$, приходим к оценке $\Lambda R \approx 0.8$, то есть $R \approx \frac{1}{0.7\,\text{ГэВ}}$. Грубо говоря, это означает, что модель определена ниже массы ρ-мезона.

Интересно также отметить формальное сходство между выражением (376) и соотношением для кваркового конденсата в модели Намбу–Йона-Лазинио с обрезанием по четырёхмерному импульсу Λ_{cut} [267]: $\Sigma \sim -M\Lambda_{\text{cut}}^2 + \mathcal{O}(M^3)$.

13.4 Сравнение с экспериментом

Проведём сравнение модели со спектром известных лёгких нестранных векторных мезонов. Ограничимся случаем изоспина единица. Спектр векторных мезонов в модели с мягкой стенкой имеет вид

$$m_n^2 = m_0^2(n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{377}$$

Удобно изображать его в единицах квадрата массы основного состояния:

$$m_n^2 = m_0^2\{1, 2, 3, 4, \ldots\}. \tag{378}$$

Согласно последним данным Particle Data, спектр ρ-мезонов следующий (в МэВ, погрешности опускаем): 776, 1465, 1720, $1900^{[?]}$, $2000^{[??]}$, $2149^{[?]}$, $2265^{[??]}$, где под знаком [?] имеются ввиду состояния, которые недостаточно надёжно установлены, а под знаком [??] — плохо установленные резонансы, наблюдавшиеся только одной коллаборацией. Запись в виде (378) выглядит так:

$$m_{\rho,n}^2 = m_\rho^2\{1, 3.6, 4.9, 6.0^{[?]}, 6.7^{[??]}, 7.7^{[?]}, 8.5^{[??]}\}. \tag{379}$$

Сравнение (379) с (378) не выявляет никакого сходства.

Рассмотрим спектр известных аксиально-векторных мезонов: 1230, $1640^{[?]}$, $1930^{[??]}$, $2265^{[??]}$. Запишем данные в виде (378):

$$m_{a_1,n}^2 = m_{a_1}^2\{1, 1.8^{[?]}, 2.5^{[??]}, 3.4^{[??]}\}. \tag{380}$$

Спектр (380) качественно похож на (378).

После введения УФ-обрезания, спектр зависит от безразмерной величины ΛR. При этом отношение квадратов первого и второго состояний становится меньше 2 (тем меньше, чем больше ΛR). Например, выбор $\Lambda R = 1$, рассмотренный выше, приводит к спектру:

$$m_n^2 = m_0^2\{1, 1.8, 2.6, 3.3, 4.1, \dots\}, \tag{381}$$

который весьма похож на спектр a_1-мезонов (380) не только качественно, но уже и количественно. Данное обстоятельство является косвенным указанием на то, что стандартная голографическая модель с мягкой стенкой наиболее пригодна для описания аксиально-векторного канала.

Отметим также, что следует проявлять осторожность при сравнении теоретических данных с экспериментальными по ρ-мезонам. Дело в том, что они могут быть двух видов — S-волновыми и D-волновыми. При этом релятивистские эффекты приводят к смешиванию их между собой. Выбор простейшего интерполятора $\bar{q}\gamma_\mu\tau^a q$ для тока ρ-мезонов, используемый в голографических моделях, данных эффектов не учитывает. Для более полного описания векторных мезонов нужно вводить оператор $\bar{q}D_\mu\tau^a q$, по иному преобразующийся при киральных вращениях [81]. В итоге, киральными партнёрами ρ-мезонов первого рода будут a_1-мезоны, описываемые интерполятором $\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5\tau^a q$, а ρ-мезонов второго рода — h_1-мезоны, которым сопоставляется интерполирующий ток $\bar{q}\gamma_5 D_\mu q$. В этом смысле, аксиально-векторный канал более "чистый"для сравнения с экспериментом.

14 Бесстеночная голографическая модель

14.1 Введение

В данном разделе будет предложена голографическая модель, в которой линейный спектр масс появляется благодаря конденсации некоторого скалярного поля, "живущего"внутри пространства АдС$_5$. Полученная модель будет одним из частных случаев моделей раздела 12. Однако, во-первых, модель будет выведена совершенно другим способом, что позволит по иному взглянуть на описываемую ей физику, во-вторых, нас будут интересовать в первую очередь корреляторы, а не спектр, — этот вопрос в разделе 12 не затрагивался.

В подходе "bottom-up", голографическая модель задаётся некоторым анзацем, который мотивируется почти исключительно феноменологией. Несмотря на весьма многочисленную литературу, появившуюся в последние годы, многие вопросы, связанные с теоретическим обоснованием таких моделей, остаются неясными. Одним из таких вопросов является происхождение и физический смысл дилатонного фона в моделях с мягкой стенкой. Соответствующий фон $e^{\pm\Lambda^2 z^2}$ (мы будем обозначать такие модели как $\mathrm{SW}^{\pm}$, от английского названия "soft wall") явным образом нарушает ковариантность вдоль пятой координаты z. В дуальной теории, такой фон должен возникать динамически в результате самосогласованного решения пятимерных уравнений Эйнштейна, чего получить пока не удалось[18]. Фон $e^{\pm\Lambda^2 z^2}$ обеспечивает реджевское линейное поведение спектра масс возбуждённых состояний, $m_n^2 \sim \Lambda^2 n$, одновременно вводя массовый масштаб Λ.

В настоящем разделе, мы попытаемся пролить свет на проблему путём явного переписывания модели SW в виде голографической модели с динамическим механизмом генерации масс, основанным на конденсации некоторого скалярного поля [102]. Оказывается, что получающаяся "бесстеночная"модель отличается от оригинальной SW-модели, являясь, в некотором смысле, средним от моделей SW^{+} и SW^{-}. Достоинством бесстеночной модели является автоматическое отсутствие конденсата размерности два в операторном разложении векторных корреляторов.

[18]Некоторый прогресс был достигнут в работе [268], где предложена модель с двумя пятимерными скалярными полями, гравитационная динамика которых приводила к подобному фону.

14.2 Вывод бесстеночной модели из модели с мягкой стенкой для векторных мезонов

Рассмотрим простейшее действие модели SW$^{\pm}$ для векторных мезонов в метрике АдС:

$$S = \int d^4x\, dz \sqrt{g}\, e^{\pm\Lambda^2 z^2} \left\{ -\frac{1}{4g_5^2} F_{MN} F^{MN} \right\}, \tag{382}$$

где $F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$, $M = 0, 1, 2, 3, 4$. Граничное значение $V_M(x, 0)$ интерпретируется как источник КХД оператора, интерполирующего векторные мезоны. В рассматриваемом простейшем случае — это оператор $\bar{q}\gamma_\mu q$, интерполирующий ω-мезоны.

Лоренцева инвариантность вдоль направления z в действии (382) явно нарушена из-за дилатонного фона. Попробуем убрать этот фон с помощью преобразования

$$V_M = e^{\mp\Lambda^2 z^2/2} \tilde{V}_M. \tag{383}$$

Действие становится эквивалентным следующему (в калибровке $V_z = 0$):

$$S = \int d^4x\, dz \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{4g_5^2} \tilde{F}_{MN} \tilde{F}^{MN} + \frac{\Lambda^4 z^4}{2R^2 g_5^2} \tilde{V}_M \tilde{V}^M \right\} \mp \frac{\Lambda^2 R}{2g_5^2} \int d^4x\, \tilde{V}_\mu^2 \Big|_{z=0}^{z=\infty}, \tag{384}$$

где вместо z-зависящего фона имеем теперь z-зависящий массовый член. Опуская граничный член (он исчезает на физических решениях, соответствующих массивным распространяющимся модам, поскольку они будут вести себя как $\tilde{V}_M \sim z^k e^{-\Lambda^2 z^2/2}$ с $k > 0$), действие (384) может рассматриваться как определение новой голографической модели в терминах поля $\tilde{V}_M$ (далее будем опускать тильду). z-зависящий массовый вклад нарушает инвариантность по отношению к локальным калибровочным преобразованиям поля $\tilde{V}_M$, что соответствует нарушению глобальной симметрии по ароматам в эквивалентной четырёхмерной теории, а также нарушению масштабной инвариантности (поскольку z имеет смысл обратного масштаба энергии). Существует калибровочно-инвариантный способ сформулировать модель: появление z-зависящего вклада можно трактовать как эффект конденсации некоторого скалярного поля, которое взаимодействует с векторным полем через ковариантную производную,

$$S = \int d^4x\, dz \sqrt{g} \left\{ |D_M \varphi|^2 - m_\varphi^2 \varphi^2 - \frac{1}{4g_5^2} F_{MN} F^{MN} \right\}, \qquad (385)$$

где $D_M = \partial_M - iV_M$. Действие (385) имеет структуру простейшей голографической модели, описывающей нарушение киральной симметрии [94, 95]. Отличие состоит в физической интерпретации скалярного поля φ. Уравнение движения для φ в отсутствии векторного поля V_M есть

$$-\partial_z \left(\frac{\partial_z \varphi}{z^3} \right) + \frac{m_\varphi^2 R^2 \varphi}{z^5} = 0. \qquad (386)$$

Чтобы уравнение движения для V_M совпадало с тем, что следует из действия (384), уравнение (386) должно иметь решение $\varphi_0 \sim z^2$. Это диктует $m_\varphi^2 R^2 = -4$. Из соотношения для массы скалярного поля в пространстве АдС$_5$, $m_5^2 R^2 = \Delta(\Delta - 4)$, видим, что поле φ соответствует оператору с канонической размерностью $\Delta = 2$. Такого локального калибровочно-инвариантного оператора в КХД не существует, хотя, как было отмечено ранее, в литературе есть много дискуссий о феноменологической необходимости подобного оператора для параметризации различных непертурбативных эффектов.

Следует отметить, что если бы мы описывали некалибровочные поля, введение оператора размерности два не обязательно. Например, можно написать следующую "бесстеночную"модель для скалярных мезонов

$$S = \int d^5x \sqrt{g} \left\{ (\partial_M S)^2 - m_s^2 S^2 - \lambda \tilde{\varphi} S^2 + (\partial_M \tilde{\varphi})^2 - m_{\tilde{\varphi}}^2 \tilde{\varphi}^2 \right\}. \qquad (387)$$

Уравнение движения для поля S даст линейный спектр масс, если поле $\tilde{\varphi}$ имеет вакуумное ожидание $\tilde{\varphi}_0 \sim z^4$. Согласно уравнению движения (386), это достигается при $m_\varphi^2 R^2 = 0$. Для канонической размерности $\tilde{\varphi}$ получаем тогда $\Delta = 4$. В киральном пределе, можно построить только один оператор с $\Delta = 4$: $G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu,a}$. В КХД, он приобретает ненулевое вакуумное ожидание — глюонный конденсат $\langle G^2\rangle$ — из-за которого возникает аномалия в следе тензора энергии-импульса. Поскольку пятая координата z имеет физический смысл обратного масштаба энергии, конденсация скалярного поля $\tilde{\varphi}$ дуально появлению ненулевого глюонного конденсата в КХД — оба эффекта делают различные масштабы энергии неэквивалентными. Тот факт, что аномалия является квантовым эффектом, в то время как нарушение масштабной инвариантности в голографической модели оказывается спонтанным, не должно быть удивительным, так как дуальная теория по предположению описывает *квазиклассически* квантовые эффекты в режиме сильной связи. Отметим, что поле $\tilde{\varphi}$ в точности соответствует дилатонному полю, рассмотренному в оригинальной работе Виттена [90] для демонстрации идеи АдС/КТП соответствия.

Согласно одному из АдС/КТП предписаний [257], решение классического уравнения движения для скалярного поля Φ, соответствующего оператору O, имеет следующую форму возле четырёхмерной границы $z \to 0$:

$$\Phi(x,z) \to z^{4-\Delta}\left[\Phi_0(x) + \mathcal{O}(z^2)\right] + z^{\Delta}\left[\frac{\langle O(x)\rangle}{2\Delta-4} + \mathcal{O}(z^2)\right], \quad (388)$$

где $\Phi_0(x)$ действует как источник для оператора $O(x)$, а $\langle O(x)\rangle$ обозначает вакуумное среднее этого оператора. Таким образом, для модели (387) имеем соответствие $\Lambda^4 \sim \langle G^2\rangle$. Точное решение для $\tilde{\varphi}_0$,

$$\tilde{\varphi}_0(z) = C_1 + C_2 z^4, \quad (389)$$

имеет форму (388). Константа C_2 задаёт наклон скалярной траектории, $C_2\lambda R^2 = \Lambda^4$, тогда как константа λC_1 перенормирует пятимерную массу m_s в действии (387). Любопытно отметить, что конденсат размерности два не является хорошо определённым объектом в соотношении (388).

14.3 Спектр масс и сшивка с операторным разложением

Спектр масс может быть вычислен стандартным образом, решая уравнение движения для поперечных компонент поля V_μ

в действии (385) (предполагается калибровка $V_z = 0$),

$$\left[-\frac{q^2 V_\mu(q,z)}{z} - \partial_z\left(\frac{\partial_z V_\mu(q,z)}{z}\right) + \Lambda^4 z V_\mu(q,z)\right]_\perp = 0, \qquad (390)$$

где $V_\mu(q,z)$ есть четырёхмерное Фурье-преобразование поля $V_\mu(x,z)$. По предположению, физические частицы соответствуют нормируемым решениям уравнения (390). Согласно теореме Штурма-Лиувилля, такие решения $v_n(z)$ существуют только для дискретных значений четыре-импульса q^2, которые сопоставляются с физическими массами m_n^2,

$$-\partial_z\left(z^{-1}\partial_z v_n\right) + \Lambda^4 z v_n = z^{-1} m_n^2 v_n. \qquad (391)$$

Соответствующие решения есть

$$m_n^2 = 4\Lambda^2(n+1), \qquad (392)$$

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2n!}{(n+1)!}}\, e^{-z^2\Lambda^2/2} z^2 \Lambda^2 L_n^1(z^2\Lambda^2). \qquad (393)$$

Спектр (392) совпадает со спектром моделей SW$^\pm$, однако экспоненциальный множитель в собственных функциях (393) отличается.

Альтернативным способом вычисления спектра является вычисление векторного двухточечного коррелятора — спектр есть положение его полюсов. Мы покажем вычисление в деталях, чтобы продемонстрировать возникающее различие между бесстеночной моделью и моделью с мягкой стенкой.

Напомним ещё раз, что двухточечная корреляционная функция векторных токов J_μ определяется как

$$\int d^4x e^{iqx}\langle J_\mu(x) J_\nu(0)\rangle = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\Pi_V(Q^2), \quad Q^2 = -q^2. \qquad (394)$$

Согласно рецепту АдС/КТП соответствия [90, 91], векторный двухточечный коррелятор даётся следующим соотношением [94],

$$\Pi_V(Q^2) = -\frac{R}{g_5^2 Q^2}\left[V(Q,z)\frac{\partial_z V(Q,z)}{z}\right]_{z\to 0}, \qquad (395)$$

где $V(Q,z)$ идёт от четырёхмерного Фурье-преобразования $V^M(Q,z) = V(Q,z)V_0^M(Q)$ для четырёхмерной поперечной части V^M и может быть найдено из уравнения движения,

$$-\partial_z \left(\frac{\partial_z V}{z} \right) + \Lambda^4 z V = -\frac{Q^2}{z} V, \tag{396}$$

с граничными условиями,

$$V(Q,0) = 1, \qquad V(Q,\infty) = 0. \tag{397}$$

Решением является

$$V(Q,z) = \Gamma\left(1 + \frac{Q^2}{4\Lambda^2}\right) e^{-z^2\Lambda^2/2} U\left(\frac{Q^2}{4\Lambda^2}, 0; z^2\Lambda^2\right), \tag{398}$$

где U есть функция Трихоми. Это решение отличается экспоненциальным множителем от соответствующего выражения в моделях с мягкой стенкой: в модели SW$^-$, этот множитель отсутствует, тогда как в модели SW$^+$ стоит множитель $e^{-z^2\Lambda^2}$. Таким образом, векторный пропагатор "из пространства на границу"$V(Q,z)$ бесстеночной модели представляет логарифмическое среднее аналогичных пропагаторов моделей SW$^-$ и SW$^+$. Такое же свойство имеют и волновые функции четырёхмерных дискретных мод (393). Возле границы, решение (398) имеет следующее разложение,

$$\begin{gathered} V(Q,z)_{z\to 0} = \left(1 - \frac{z^2\Lambda^2}{2} + \mathcal{O}(z^4\Lambda^4)\right) \times \\ \left\{1 + \frac{Q^2}{4\Lambda^2}\left[\log(z^2\Lambda^2) + \psi\left(1 + \frac{Q^2}{4\Lambda^2}\right) + 2\gamma - 1\right] z^2\Lambda^2 + \mathcal{O}(z^4\Lambda^4)\right\} \simeq \\ 1 + \left\{\frac{Q^2}{4\Lambda^2}\left[\log(z^2\Lambda^2) + \psi\left(1 + \frac{Q^2}{4\Lambda^2}\right) + 2\gamma - 1\right] - \frac{1}{2}\right\} z^2\Lambda^2, \end{gathered} \tag{399}$$

где выражение в первой строке появляется из экспоненциального множителя в (398). ψ-функцию можно представить как

$$\psi\left(1 + \frac{Q^2}{4\Lambda^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{Q^2}{4\Lambda^2} + k} - \gamma. \tag{400}$$

Подставляя теперь разложение (399) в соотношение (395) и используя представление (400), после вычитания контактных членов и переопределения $k = n+1$, приходим к окончательному ответу для векторного коррелятора,

$$\Pi_V(Q^2) = \frac{R}{2g_5^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\Lambda^2}{Q^2+4\Lambda^2(n+1)} + \frac{2\Lambda^2}{Q^2}\right]. \qquad (401)$$

Полюса $Q_n^2 = -m_n^2$ в сумме выражения (401) дают спектр масс (392). Как было сказано выше, этот спектр совпадает со спектром моделей SW$^{\pm}$ для векторных мезонов. В корреляторе (401) появляется безмассовый полюс, который мы обсудим в следующем параграфе.

Важной сопутствующей особенностью, связанной с появлением этого полюса, является то, что исправляется высокоэнергетическая асимптотика коррелятора. А именно, используя разложение

$$\psi\left(1+\frac{Q^2}{4\Lambda^2}\right)_{Q^2\to\infty} = \log\left(\frac{Q^2}{4\Lambda^2}\right) + \frac{2\Lambda^2}{Q^2} - \frac{4\Lambda^4}{3Q^4} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^8}{Q^8}\right), \quad (402)$$

получаем следующее асимптотическое поведение рассматриваемого коррелятора,

$$\Pi_V(Q^2)_{Q^2\to\infty} = \frac{R}{2g_5^2}\left[\log\left(\frac{4\Lambda^2}{Q^2}\right) + \frac{4\Lambda^4}{3Q^4} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^8}{Q^8}\right)\right]. \qquad (403)$$

Разложение (403) можно сопоставить с операторным разложением двухточечного коррелятора в правилах сумм [30],

$$\Pi_V(Q^2)_{Q^2\to\infty} = \frac{N_c}{24\pi^2}\log\left(\frac{\mu_{\text{ren}}^2}{Q^2}\right) + \frac{\alpha_s}{24\pi}\frac{\langle G^2\rangle}{Q^4} + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_{\text{ren}}^6}{Q^6}\right). \quad (404)$$

Сравнение коэффициентов при ведущих логарифмах даёт стандартный нормировочный множитель в пятимерном действии для векторного поля,

$$\frac{R}{g_5^2} = \frac{N_c}{12\pi^2}. \qquad (405)$$

Важной новой чертой бесстеночной модели становится отсутствие вклада $\mathcal{O}(Q^{-2})$ в разложении (403), как того требует операторное разложение (404). Это является следствием отсутствия локального калибровочно-инвариантного оператора размерности два в КХД. Сокращение вклада $\mathcal{O}(Q^{-2})$ происходит благодаря безмассовому полюсу в корреляторе (401). Посмотрев на (399), легко заметить, что полюсной член происходит из экспоненциального множителя. Из него видно, что в модели SW^- этот член не возникает, а в модели SW^+ он присутствует с удвоенным вычетом, по сравнению с бесстеночной моделью. Таким образом, как модель SW^-, так и SW^+, предсказывают ненулевой конденсат размерности два (равный по величине, но противоположный по знаку), чего в КХД мы не ожидаем:

$$\Pi_V(Q^2)^{\mathrm{SW}^\pm}_{Q^2\to\infty} = \frac{R}{2g_5^2}\left[\log\left(\frac{4\Lambda^2}{Q^2}\right) \pm \frac{2\Lambda^2}{Q^2} + \mathcal{O}\left(Q^{-4}\right)\right]. \qquad (406)$$

Этот конденсат в бесстеночной модели оказывается арифметическим средним конденсатов моделей SW^+ и SW^-, именно поэтому вклад $\mathcal{O}(Q^{-2})$ в бесстеночной модели исчезает.

14.4 Интерпретация безмассового полюса

Обсудим безмассовый полюс, появившийся в корреляторе (401). Подобный полюс возникает также в модели SW^+, но отсутствует в модели SW^-. Причина появления такого полюса подробно обсуждалась в работе [269]. Вкратце, суть состоит в том, что уравнение движения имеет безмассовое ненормируемое по Шрёдингеру решение, на котором однако действие модели SW^+ оказывается конечным. А конечность действия и есть признак реально распространяющейся моды, следовательно, она должна проявиться и в корреляторе. Такая же ситуация возникает у нас: уравнение движения (391) имеет безмассовое ненормируемое решение

$$V^S_\mu \sim e^{-z^2\Lambda^2/2}\partial_\mu\pi(x), \qquad \partial_\mu\partial^\mu\pi(x) = 0, \qquad (407)$$

на котором действие (385) конечно[19].

Из требования отсутствия безмассовой моды, в оригинальной работе [96] был сделан вывод, что модель SW^+ не является физической. Нам этот вывод кажется весьма спорным. Дело в том, что при построении феноменологических голографических

[19] Отметим также, что поверхностный член в действии (384), который мы отбросили, на безмассовом решении тоже даёт ненулевой вклад в действие.

моделей обычно пользуются логикой, заимствованно из низкоэнергетической эффективной теории поля. В эффективных моделях мы знаем, в какой момент руками вводим те или иные эффекты, например, нарушение киральной симметрии. В этом смысле, в процедуре построения этих моделей всё находится более-менее под теоретическим контролем. При построении же голографических моделей для КХД, такого контроля, вообще говоря, нет и действовать приходиться "вслепую". То есть, предъявляя тот или иной пятимерный анзац для описания адронов, мы не можем заранее сказать учитывает ли он, например, нарушение киральной симметрии и если да, то в какой степени. Всё это надо проверять. Далее, голографические модели, по своему замыслу, дают корреляторы. Уравнения же движения являются скорее способом найти полюса коррелятора без его явного вычисления. Из этого следует, что сравнивать с КХД прежде всего надо не спектры, а корреляторы. Как известно, аксиально-векторный коррелятор в КХД имеет пионный полюс, безмассовый в киральном пределе. Поэтому естественно предположить, что модель SW^+ изначально приспособлена для описания аксиально-векторного канала: имеется безмассовый полюс, а дающее его решение моделирует частичное сохранение аксиального тока в КХД.

Модель SW^+ не является физической по другой причине: она, также как и модель SW^-, предсказывает ненулевой конденсат размерности два. Согласно нашей точке зрения, это является следствием того, что, как сказано выше, при построении пятимерных моделей действуют "наугад": мы не можем прогнозируемым образом предъявить модель, в которой квадратичная поправка к логарифму в двухточечных корреляторах отсутствовала, а остальные поправки по обратным степеням квадрата импульса присутствовали. Оказывается, что бесстеночная модель, определяемая действием (385), этим свойством обладает. При этом смысл скалярного поля не ясен, так как соотношение (388) не определено для вакуумного среднего от оператора с канонической размерностью два.

Отметим ещё одно достоинство бесстеночной модели. Вычет в безмассовом полюсе в модели SW^+ равен вычетам массивных полюсов. Это не соответствует феноменологии — согласно планарным правилам сумм (рассмотренным в первых двух главах), безмассовый вычет должен быть в два раза меньше. Такой же результат получается и в бесстеночной модели (см. коррелятор (401)): сокращение конденсата размерности два сопровождается сдвигом безмассового вычета в нужную сторону, и он становится в два раза меньше.

Воспользовавшись логикой построения голографических моделей типа "bottom-up" [94, 95], можно явным образом продемонстрировать, что бесстеночная модель для векторных мезонов описывает дискретный спектр мод только в аксиальном канале. А именно, глобальной киральной симметрии $SU(2)_L \times SU(2)_R$ четырёхмерной теории в пятимерии соответствует локальная калибровочная теория $SU(2) \times SU(2)$ для левых и правых векторных полей $A^a_{L\mu}$ и $A^a_{R\mu}$, голографически соответствующих левым и правым векторным токам кварков $\bar{q}_L\gamma_\mu\tau^a q_L$ и $\bar{q}_R\gamma_\mu\tau^a q_R$. Левые и правые поля связаны с обычными векторными и аксиально-векторными полями как $V = A_L + A_R$, $A = A_L - A_R$. Действие (385) принимает форму (далее будем опускать лоренцевы индексы)

$$S = \int d^5x\sqrt{g}\left\{|D_M\varphi|^2 - m^2_\varphi\varphi^2 - \frac{F_L^2 + F_R^2}{4g_5^2}\right\}, \qquad (408)$$

где $A_{L,R} = A^a_{L,R}\tau^a$, а пространственная чётность (замена правых полей на левые и наоборот) определяет вид ковариантной производной: $D_M = \partial_M - i(A_L - A_R)$. Легко видеть, что квадратичная часть действия (408), определяющая спектр, имеет вид

$$S^{(2)} = \int d^5x\sqrt{g}\left\{|\partial_M\varphi - iA_M\varphi|^2 - m^2_\varphi\varphi^2 - \frac{F_A^2 + F_V^2}{8g_5^2}\right\}. \qquad (409)$$

Данное действие даёт дискретный струноподобный спектр для аксиально-векторных состояний, и сплошной — для векторных, что мы и хотели продемонстрировать. Рассмотренная выше модель (385) получается из (409) формальным отождествлением полей $A = V$.

14.5 Заключительные комментарии

Подведём итоги нашего анализа. Прежде всего, голографическая модель с положительным знаком дилатонного фона не является нефизической. Её дизайн более приспособлен для описания аксиально-векторного канала, тогда как модель с отрицательным дилатоном — для описания векторного канала. Обе модели имеют серьёзный недостаток — они предсказывают ненулевой конденсат размерности два в операторном разложении корреляторов. Оказывается, этот недостаток можно устранить, убрав дилатонный фон с помощью соответствующего переопределения полей. Получающаяся модель автоматически описывает дискретный спектр только аксиально-векторных мезонов, кроме того, положение безмассового вычета становиться как у реального пиона, чего не было в модели с положительно-определённым дилатоном.

К сожалению, имеющиеся экспериментальные данные по лёгким векторным мезонам не могут дать убедительного ответа о форме спектра их радиальных возбуждений. Однако, опыт планарных правил сумм и дуальных амплитуд недвусмысленно указывает на то, что спектр типа $m_n^2 \sim n+1$ характерен для аксиально-векторных мезонов, тогда как $m_n^2 \sim n+1/2$ — для векторных. Похоже, что феноменологии это действительно соответствует, хотя и довольно грубо. Голографические модели с мягкой стенкой дают спектр первого типа[20]. Это наблюдение заставляет заподозрить, что такие модели изначально лучше подходят для аксиально-векторных мезонов. Можно показать, что получить сдвиг $m_n^2 \sim n+1+c$, где $c \neq 0$, невозможно, оставаясь в рамках изначальных предположений, диктующих модель: надо либо искусственно вводить массу, зависящую от голографической координаты, либо отказываться от метрики АдС в пределе высоких энергий. В последнем случае, конкретный пример модели, дающий ожидаемый спектр векторных частиц, $c=-1/2$, был предложен в работе [270]. Примечательно, что коррелятор имеет тогда структуру амплитуды Венециано при

[20] В простейшем, то есть, точно решаемом случае. Различные модификации этих моделей, требующие численного расчёта, ведут к нелинейному спектру.

нулевом переданном импульсе. Возможно, это имеет глубокую причину.

Материал, посвящённый разбору вышеперечисленных вопросов, в настоящую диссертацию не включён.

Выводы к Главе V

В последней Главе диссертации рассмотрены различные способы генерации спектра мезонов, основанные на хиггсовском механизме, реализованном в голографических моделях. Также проанализированы следствия введения ультрафиолетового обрезания в голографические модели с мягкой стенкой.

В первом разделе Главы предложены модели, являющиеся обобщением голографических моделей с жёсткой стенкой. А именно, в них вводятся конденсаты, появляющиеся в операторном разложении корреляторов. Именно эффекты этих конденсатов меняют характер спектра при не слишком большом номере радиального возбуждения, делая спектр, во-первых, приближённо реджевским (таким образом, решая главную проблему моделей с жёсткой стенкой), во-вторых, появляется возможность иметь конечный спектр из-за возникающих ангармонических поправок в голографическом потенциале. Этот подход демонстрирует физическое происхождение ангармонических поправок, введённых в главе IV.

Во следующем разделе рассмотрено введение ультрафиолетового обрезания в стандартную модель с мягкой стенкой. Наличие такого обрезания делает спектр нелинейным. При этом он становится ближе к наблюдаемому спектру аксиально-векторных мезонов, и определённым выбором обрезания можно достичь очень хорошего согласования с феноменологией. Трактуя модель с ультрафиолетовым обрезанием как дуальный подход к низкоэнергетической эффективной теории для сильных взаимодействий, появляется возможность описать нарушение киральной симметрии в модели с отрицательным дилатонным фоном. А именно, предсказываемая моделью пропорциональность массы кварка и кваркового конденсата нужно интерпретировать как пропорциональность для массы конституэнтного кварка. Возникающее при этом соотношение весьма похоже на формулу для кваркового конденсата в модели Намбу–Йона-Лизинио.

Последний раздел Главы посвящён бесстеночной голографической модели. Она получается путём определённого переопределения полей стандартной модели с мягкой стенкой, при котором дилатонный фон исчезает. Взамен появляется эффективная масса, зависящая от голографической координаты. Её можно интерпретировать как конденсацию некоторого пятимерного скалярного поля, причём модель можно построить так, что калибровочная инвариантность сохраняется. Реджевский спектр масс появляется благодаря хиггсовскому механизму. При этом решается проблема конденсата размерности два в векторном корреляторе — в бесстеночной модели он автоматически исчезает. Одновременно с этим, вычет в безмассовом полюсе аксиально-векторного коррелятора принимает стандартное феноменологическое значение. Таким образом, для описания аксиального канала, предложенная бесстеночная модель подходит значительно лучше, чем стандартные голографические модели с мягкой стенкой.

Заключение

В Заключении кратко подведём итоги научной работы по теме диссертации.

Основной вывод главы I состоит в том, что учёт поправок к линейным траекториям на плоскости $m^2(n)$ (где n — номер радиального возбуждения) является необходимым не только в адронной феноменологии, но и с теоретической точки зрения, поскольку эти поправки позволяют достичь согласования асимптотического поведения двухточечных корреляторов с их операторным разложением в области промежуточных энергий. Предложенные в этой главе модели указывают на то, что наблюдаемые в эксперименте отклонения от линейного поведения спектра масс должны быть связаны со спонтанным нарушением киральной симметрии в КХД при низких энергиях, в то время как при высоких энергиях наблюдается струноподобное поведение спектров масс.

В главе II развиты различные приложения правил сумм КХД в планарном пределе. Показано, что вклад первых радиальных возбуждений векторных и аксиально-векторных мезонов в электромагнитную разность масс пионов оказывается довольно существенным при вычислении этой величины в резонансном подходе. Остальные возбуждения вносят поправку, которая меньше, чем точность расчётов при сделанных приближениях. Было выведено новое соотношение между массой ρ-мезона, константой слабого распада π-мезона, кварковым и глюонным конденсатами. Также был предложен новый способ вычисления аксиальной константы киральной кварковой модели. Кроме того, была решена задача о линейном спектре, максимально дуальном теории возмущений в смысле воспроизведения аналитической структуры двухточечных корреляторов в КХД. Им оказался спектр дуальной амплитуды Ловеласа-Шапиро.

Главный результат главы III состоит в открытии новой широкой симметрии в спектре лёгких нестранных мезонов. Была предложена (L,n) схема классификации для этих мезонов (где L есть угловой момент кварк-антикварковой пары), которая полностью объясняет наблюдаемое вырождение масс. Она основана на нашем наблюдении, что спектр масс подчиняется закону $M^2(L, n) \sim L + n$, который указывает на то, что в спектре лёгких мезонов возникает такое же "главное квантовое число", как в атоме водорода. Точность предсказаний в предложенных (L, n) мультиплетах эквивалентна точности унитарной $SU(3)_f$ симметрии. После фиксации двух входных параметров, предсказано 100 состояний ниже 2.4 ГэВ. За исключением некоторых редких случаев, например, пионов, согласие с экспериментальными данными является весьма хорошим. Предсказано 8 новых состояний, которые пока нигде не наблюдались. Показано, что гипотеза восстановления киральной симметрии в спектре высоколежащих возбуждений вряд ли реализуется в природе из-за систематического отсутствия киральных партнёров для резонансов, лежащих на главных реджевских траекториях, и предсказания нереалистично большого количества новых состояний ниже 2.4 ГэВ (30 резонансов). Проделанный анализ свидетельствует в пользу того, что квазиклассическая модель адронных струн является наиболее естественным методом для описания спектра лёгких мезонов. Был численно продемонстрирован новый аргумент в пользу струнного описания — полная ширина распада, в среднем, пропорциональна массе распадающейся частицы. Кроме того, отношение интерсепта к наклону в глобальном спектре оказалось близким к половине, что хорошо согласуется с квазиклассическим приближением.

В главе IV были предложены два пятимерных подхода к приближённому описанию реджевского спектра с конечным числом состояний на радиальных траекториях Редже, при этом пятая координата имеет физический смысл обратного масштаба энергии. Первый подход представляет собой класс АдС/КХД моделей с ангармоническими поправками в голографическом потенциале. Второй подход можно интерпретировать как пятимерную модель для глюонного вакуума КХД и возбуждений над ним. Вакуум моделируется самодействующим скалярным полем, которое, вследствие заложенной динамики, приобретает ненулевое вакуумное среднее, нарушающее трансляционную инвариантность вдоль пятой координаты. Этот эффект имитирует масштабную аномалию в КХД. Модель предсказывает массивное возбуждение вакуумного поля, которое естественно сопоставить со скалярным глюболом. Когда безмассовые мезоны взаимодействуют с вакуумным полем, они приобретают массы, причём спектр всегда конечен и в режиме сильной связи становится реджевским. В последней части главы затронута проблема обоснования голографического подхода в применении к спектроскопии мезонов. Продемонстрировано, что пятимерные модели для планарной КХД, совпадающие с голографическими при описании спектра мезонов, можно вывести, исходя из ряда требований феноменологической самосогласованности, не привлекая идей голографического подхода из теории струн. Эти модели представляют просто иной математический язык для выражения реджевской феноменологии в рамках планарных правил сумм КХД.

Глава V посвящена исследованию способов генерации спектра мезонов, основанных на хиггсовском механизме, в рамках голографического подхода, а также анализу следствий введения ультрафиолетового обрезания в голографические модели с мягкой стенкой. Предложено ввести эффекты конденсатов, появляющиеся в операторном разложении корреляторов. Именно они меняют характер спектра при не слишком большом номере радиального возбуждения, делая спектр, во-первых, приближённо реджевским, во-вторых, появляется возможность иметь конечный спектр из-за возникающих ангармонических поправок в голографическом потенциале. Этот подход демонстрирует физическое происхождение ангармонических поправок, рассмотренных в главе IV. Построена так называемая бесстеночная голографическая модель. Она получается путём определённого переопределения полей стандартной модели с мягкой стенкой, при котором дилатонный фон исчезает. Взамен появляется эффективная масса, зависящая от голографической координаты. Её можно интерпретировать как конденсацию некоторого пятимерного скалярного поля. Дискретный спектр масс появляется благодаря хиггсовскому механизму. При этом решается проблема конденсата размерности два в векторном корреляторе — в бесстеночной модели он автоматически исчезает. Одновременно с этим, вычет в безмассовом полюсе аксиально-векторного коррелятора принимает стандартное феноменологическое значение. Таким образом, для описания аксиального канала, предложенная бесстеночная модель подходит значительно лучше, чем стандартные голографические модели с мягкой стенкой. Также рассмотрено введение ультрафиолетового обрезания в стандартную модель с мягкой стенкой. Наличие такого обрезания делает спектр нелинейным. При этом он становится гораздо более похож на наблюдаемый спектр аксиально-векторных мезонов. Введённую модель естественно трактовать как дуальный подход к низкоэнергетической эффективной теории для сильных взаимодействий. В частности, тогда решается проблема с описанием спонтанного нарушения в простейших моделях с мягкой стенкой — предсказываемая ими пропорциональность массы кварка и кваркового конденсата превращается в достоинство модели, если интерпретировать её как пропорциональность для массы конституэнтного кварка. Возникающее при этом соотношение весьма похоже на формулу для кваркового конденсата в модели Намбу–Йона-Лизинио.

Таким образом, в диссертации развиты различные феноменологические методы для описания спектра лёгких мезонов и связанной с этим физики, открыта широкая симметрия в спектрах этих мезонов, дана её интерпретация и предсказан ряд новых резонансов. Результаты проведённых в диссертации исследований широко обсуждались и цитировались, послужили стимулом для ряда работ других авторов и, таким образом, внесли вклад в развитие планарных правил сумм КХД, голографических моделей и общей феноменологии лёгких адронов.

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту А.А. Андрианову за помощь в работе над диссертацией, а также соавторам части работ (А.А. Андрианов, В.А. Андрианов, Д. Эсприу) за годы плодотворного сотрудничества. Кроме того, автор благодарит весь коллектив кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ за создание прекрасной научной атмосферы, моральную поддержку и мотивацию к написанию данной диссертации.

Список литературы

1. S. Godfrey and N. Isgur, Phys. Rev. D **32** (1985) 189.
2. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345.
3. A.A. Andrianov and V.A. Andrianov, Int. J. Mod. Phys. A **8** (1993) 1981.
4. А.А. Андрианов, В.А. Андрианов, ТМФ **94** (1993) 6.
5. A.A. Andrianov and V.A. Andrianov, Proc. School-Sem. "Hadrons and nuclei from QCD", Tsuruga/Vladivostok/Sapporo 1993, Singapore: WSPC, 1994, p. 341; hep-ph/9309297.
6. А.А. Андрианов, В.А. Андрианов, В.Л. Юдичев, ТМФ 108 (1996) 276.
7. A.A. Andrianov and V.A. Andrianov, Proc. of the Int. Workshop on Hadron Physics (Coimbra 1999), ed. by A.H. Blin et al., N.Y., AIP, 2000, p.328; hep-ph/9911383.
8. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, and S.S. Afonin, Proc. of the 15th Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory (Tver, 2000), ed. by M.N. Dubinin and V.I. Savrin, MSU, Moscow, 2001, p.233; hep-ph/0101245.
9. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, and S.S. Afonin, Proc. of the 16th Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory (Moscow, 2001), ed. by M.N. Dubinin and V.I. Savrin, MSU, Moscow, 2001, p.254.
10. С.С. Афонин, Вестник Молодых Ученых **3** Серия: Физические Науки 1 (2002) 12.
11. В.А. Андрианов, С.С. Афонин, Записки Научных Семинаров ПОМИ. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 17. **291** (2002) 5 [J. Math. Sci. **125** (2005) 99]; hep-ph/0304140.
12. V.A. Andrianov and S.S. Afonin, Eur. Phys. J. A **17** (2003) 111.

13. А.А. Андрианов, В.А. Андрианов, С.С. Афонин, Физическая Мысль России **1** (2002) 2.

14. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, S.S. Afonin, Proceedings of the 12th International Seminar on High Energy Physics QUARKS'2002 (Novgorod, 2002), Eds. V.A. Matveev et. al. (JINR, 2003) p.19-28; hep-ph/0209260.

15. M.K. Volkov and C. Weiss, Phys. Rev. D **56** (1997) 221.

16. M.K. Volkov, D. Ebert, and M. Nagy, Int. J. Mod. Phys. A **13** (1998) 5443.

17. M.K. Volkov and V.L. Yudichev, Int. J. Mod. Phys. A **14** (1999) 4621.

18. М.К. Волков, В.Л. Юдичев, ЭЧАЯ **31** (2000) 576.

19. K. Nakamura *et al.* [Particle Data Group], J. Phys. G **37**, 075021 (2010).

20. A.V. Anisovich, V.V. Anisovich, and A.V. Sarantsev, Phys. Rev. D **62** 051502 (2000).

21. V.V. Anisovich, УФН **47** (2004) 49.

22. D. V. Bugg, Phys. Rep. **397**, 257 (2004).

23. G. Veneziano, Nuovo Cim. A **57** (1968) 190.

24. J. S. Kang and H. J. Schnitzer, Phys. Rev. D **12**, 841 (1975).

25. C. Goebel, D. LaCourse, and M. G. Olsson, Phys. Rev. D **41**, 2917 (1990).

26. F. Brau, Phys. Rev. D **62**, 014005 (2000).

27. M. Baker and R. Steinke, Phys. Rev. D **65**, 094042 (2002).

28. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).

29. E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979).

30. M. A. Shifman, A. I. Vainstein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147**, 385, 448 (1979).

31. Б.В. Гешкенбейн, Яд. Физ. **49** (1989) 1138.

32. M. Shifman, "At the Frontier of Particle Physics/Handbook of КХД," ed. by M. Shifman (World Scientific, Singapore, 2001); hep-ph/0009131.

33. M. Golterman and S. Peris, JHEP **0101** 028 (2001).

34. S.R. Beane, Phys. Rev. D **64** (2001) 116010.

35. S.R. Beane, Phys. Lett. B **521** (2001) 47.

36. Yu.A. Simonov, Яд. Физ. **65** (2002) 140.

37. M. Golterman, S. Peris, B. Phily, and E. de Rafael, JHEP **0201**, 024 (2002).

38. M. Golterman and S. Peris, Phys. Rev. D **67** (2003) 096001.

39. Н.В. Красников, А.А. Пивоваров, Яд. Физ. **35** (1982) 1270.

40. N.V. Krasnikov and A.A. Pivovarov, Phys. Lett. B **112** (1982) 397.

41. A.L. Kataev, N.V. Krasnikov, and A.A. Pivovarov, Phys. Lett. B **123** (1983) 93.

42. S.G. Gorishnii and A.L. Kataev, Phys. Lett. B **135** (1984) 457.

43. E.A. Tainov, Z. Phys. C **10** (1981) 87.

44. Б.В. Гешкенбейн, Яд. Физ. **42** (1985) 991.

45. A. Bramon, E. Etim, M. Greco, Phys. Lett. B **41** (1972) 609.

46. M. Greco, Nucl. Phys. B **63** (1973) 398.

47. J.J. Sakurai, Phys. Lett. B **46** (1973) 207.

48. A.R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **53** (1996) 5821.

49. B. Blok, M. Shifman, D. Zhang, Phys. Rev. D **57**, 2691 (1998); (E) D **59**, 019901 (1999).

50. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, and S.S. Afonin, Proceedings of the 5th Int. Conf. on Quark Confinement and Hadron Spectrum (Gargnano, Italy, 2002), World Scientific, Singapore (2003) p. 361; hep-ph/0212171.

51. S. S. Afonin, A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, and D. Espriu, JHEP **0404**, 039 (2004).

52. S. S. Afonin, A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, and D. Espriu, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 885 (2006).

53. S. S. Afonin, A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, and D. Espriu, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **164**, 296 (2007).

54. S.S. Afonin, Phys. Lett. B **576** (2003) 122.

55. S. S. Afonin and D. Espriu, JHEP **09**, 047 (2006).

56. T. Das, G.S. Guralnik, V.S. Mathur, F.E. Low, and J.E. Young, Phys. Rev. Lett. **18** (1967) 759.

57. R. Socolow, Phys. Rev. B **137** (1965) 1221.

58. J. Bijnens, Phys. Lett. B **306** (1993) 343.

59. T. Minamikawa *et al.*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **37-38** (1966) 56.

60. T. Minamikawa *et al.*, Prog. Theor. Phys. **61** (1979) 548.

61. R.D. Peccei, J. Sola, Nucl. Phys. B **281** (1987) 1.

62. G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, and E. de Rafael, Nucl. Phys. B **321** (1989) 311.

63. W.A. Bardeen, J. Bijnens, and J.-M. Gerard, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1343.

64. D. Espriu, E. de Rafael, and J. Taron, Nucl. Phys. B **345** (1990) 22; Erratum: ibid. B **355** (1991) 278.

65. J. Bijnens and E. de Rafael, Phys. Lett. B **273** (1991) 483.

66. J. Donoghue, B. Holstein, and D. Wyler, Phys. Rev. D **47** (1993) 2089.

67. J. Bijnens, E. de Rafael, and H. Zheng, Z. Phys. C **62** (1994) 437.

68. B. Moussallam, Eur. Phys. J. C **6** (1998) 681.

69. В.А. Андрианов, С.С. Афонин, Ядер. Физ. **65** (2002) 1913.

70. S.S. Afonin, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 6693 (2006).

71. S.S. Afonin, Phys. Rev. C **77**, 058201 (2008).

72. A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. B **234**, 189 (1984).

73. A.V. Belitsky and O.V. Teryaev, Phys. Lett. B **366**, 345 (1996).

74. A. A. Migdal, Ann. Phys. (NY) **110**, 46 (1978).

75. J. Erlich, G. D. Kribs and I. Low, Phys. Rev. D **73**, 096001 (2006).

76. S. S. Afonin, Nucl. Phys. B **779**, 13 (2007).

77. S. S. Afonin, Phys. Lett. B **639**, 258 (2006).

78. S. S. Afonin, Int. J. Mod. Phys. A **22**, 4537 (2007).

79. S. S. Afonin, Eur. Phys. J. A **29**, 327 (2006).

80. M. Shifman and A. Vainshtein, Phys. Rev. D **77**, 034002 (2008).

81. L. Ya. Glozman, Phys. Rept. **444**, 1 (2007).

82. E. Klempt and A. Zaitsev, Phys. Rept. **454**, 1 (2007).

83. P. Bicudo, Phys. Rev. D **76**, 094005 (2007).

84. El H. Mezoir and P. González, Phys. Rev. Lett. **101**, 232001 (2008).

85. H. Forkel, M. Beyer and T. Frederico, JHEP **0707**, 077 (2007).

86. V. A. Fock, Z. Phys. **98**, 145 (1935).

87. S.S. Afonin, Mod. Phys. Lett. A **22**, (2007) 1359.

88. S.S. Afonin, Phys. Rev. C **76**, 015202 (2007).

89. J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)].

90. E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).

91. S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998).

92. J. Polchinski and M. J. Strassler, Phys. Rev. Lett. **88**, 031601 (2002).

93. G. F. de Teramond and S. J. Brodsky, Phys. Rev. Lett. **94**, 201601 (2005).

94. J. Erlich, E. Katz, D. T. Son, and M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **95**, 261602 (2005).

95. L. Da Rold and A. Pomarol, Nucl. Phys. B **721**, 79 (2005).

96. A. Karch, E. Katz, D. T. Son, and M. A. Stephanov, Phys. Rev. D **74**, 015005 (2006).

97. S. S. Afonin, Phys. Lett. B **678**, 477 (2009).

98. S. S. Afonin, Phys. Lett. B **675**, 54 (2009).

99. S. S. Afonin, Eur. Phys. J. C **61**, 69 (2009).

100. S.S. Afonin, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3933 (2010).

101. S. S. Afonin, AIP Conf. Proc. **1374**, 613 (2011).

102. S.S. Afonin, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 3615 (2011).

103. S. S. Afonin, Phys. Rev. C **83**, 048202 (2011).

104. S. S. Afonin, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 5683 (2010).

105. S. S. Afonin, Acta Physica Polonica B **3** (Proc. Suppl.), 911 (2010).

106. J. Alfaro, L. Balart, A.A. Andrianov, and D. Espriu, Int. J. Mod. Phys. A **18** (2003) 2501.

107. А.А. Андрианов, Д. Эсприу, ТМФ **135** (2003) 745.

108. E.C. Poggio, H.R. Quinn, S. Weinberg, Phys. Rev. D **13** (1976) 1958.

109. L.J. Reinders, H.R. Rubinstein, and S. Yazaki, Nucl. Phys. B **196** (1982) 125.

110. K.G. Chetyrkin, S. Narison, V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B **550** (1999) 353.

111. F.V. Gubarev, V.I. Zakharov, Phys. Lett. B **501** (2001) 28.

112. S. Narison, V.I. Zakharov, Phys. Lett. B **522** (2001) 266.

113. K.I. Kondo, Phys. Lett. B **572** (2003) 210.

114. K.I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, and T. Imai, Phys. Rev. D **65** (2002) 085034.

115. A.A. Andrianov, D. Espriu, and R. Tarrach, Nucl. Phys. B **533** (1998) 429.

116. A.A. Andrianov, D. Espriu, and R. Tarrach, Nucl. Phys. B **86** (Proc. Suppl.) (2000) 275.

117. M. Knecht and E. de Rafael, Phys. Lett. B **424** (1998) 335.

118. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **18** (1967) 507.

119. M.A. Shifman, A.I. Vainstein, and V.I. Zakharov, Sov. Phys. JETP Lett. **27** (1978) 55.

120. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, V.Yu. Novozhilov, and Yu.V. Novozhilov, Phys. Lett. B **186** (1987) 401.

121. A.A. Andrianov and V.A. Andrianov, Z. Phys. C 55 (1992) 435.

122. A. Pich, Rept. Prog. Phys. **58** (1995) 563.

123. C.A. Dominguez and K. Schilcher, Phys. Rev. D **61** (2000) 114020.

124. B.V. Geshkenbein, B.L. Ioffe and K.N. Zyablyuk, Phys. Rev. D **64** (2001) 093009;

125. M. Harada and K. Yamawaki, Phys. Rept. **381** (2003) 1.

126. В.К. Хеннер, Т.С. Белозерова, Яд. Физ. **59** (1996) 1915.

127. В.К. Хеннер, Т.С. Белозерова, Яд. Физ. **61** (1998) 128.

128. J.A. Oller and E. Oset, Phys. Rev. D **60** (1999) 074023.

129. J.R. Peláez, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 102001.

130. D. Black, A.H. Fariborz and J. Schechter, Phys. Rev. D **61** (2000) 074001.

131. V. Cirigliano, G. Ecker, H. Neufeld and A. Pich, JHEP **06** (2003) 012.

132. C.A. Dominguez, Phys. Rev. D **15** (1977) 1350; *ibid.* **16** (1977) 2313, 2320.

133. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, and A.N. Manashov, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 5435.

134. V. Elias, A. Fariborz, M.A. Samuel, Fang Shi, and T.G. Steele, Phys. Lett. B **412** (1997) 131.

135. J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. (NY) **158**, 142 (1984).

136. J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).

137. M.A. Shifman, A.I. Vainstein, V.I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 297.

138. ALEPH Collab. (R. Barate *et al.*), Eur. Phys. J. C **4** (1998) 409.

139. OPAL Collab. (K. Ackerstaff *et al.*), Eur. Phys. J. C **7** (1999) 571.

140. M. Davier, A. Hocker, L. Girlanda, J. Stern, Phys. Rev. D **58** (1998) 096014.

141. M. Knecht, R. Urech, Nucl. Phys. B **519** (1998) 329.

142. D. Gross, S.B. Treiman, F. Wilczek, Phys. Rev. D **19** (1979) 2188.

143. J. Gasser, Ann. Phys. **136** (1981) 62.

144. M. Knecht, S. Peris, E. de Rafael, Phys. Lett. B **443** (1998) 255.

145. A.A. Andrianov and D. Espriu, JHEP **10** (1999) 022.

146. A.A. Andrianov, D. Espriu, and R. Tarrach, Nucl. Phys. B **86** (Proc. Suppl.) (2000) 275.

147. S. Narison, Nucl. Phys. Suppl. **96** (2001) 364.

148. A. Pich, Rept. Prog. Phys. **58** (1995) 563.

149. A.A. Andrianov, V.A. Andrianov, and V.L. Yudichev, Phys. Lett. B **328** (1994) 401.

150. M. Knecht, E. de Rafael, Phys. Lett. B **424** (1998) 335.

151. C. Lovelace, Phys. Lett. B **28**, 264 (1968).

152. J.A. Shapiro, Phys. Rev. **179**, 1345 (1969).

153. M. Ademollo, G. Veneziano, and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **22**, 83 (1969).

154. V. I. Shevchenko and Yu. A. Simonov, Phys. Rev. D **70**, 074012 (2004).

155. M. Shifman, in *кварк-адронная дуальность and the Transition to рКХД*, ed. by A. Fantoni, S. Liuti, and O. Rondon (World Scientific, Singapore, 2006) [hep-ph/0507246].

156. E. R. Arriola and W. Broniowski, Phys. Rev. D **73**, 097502 (2006).

157. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **75**, 461 (1974).

158. C.G. Callan, N. Coote, D.J. Gross, Phys. Rev. D **13**, 1649 (1976).

159. M.B. Einhorn, Phys. Rev. D **14**, 3451 (1976).

160. K. Kawarabayashi and M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **16**, 255 (1966).

161. Riazuddin and Fayyazuddin, Phys. Rev. **147**, 1071 (1966).

162. E. R. Arriola and W. Broniowski, Phys. Rev. D **67**, 074021 (2003).

163. J. J. Sanz-Cillero, Nucl. Phys. B **732**, 136 (2006).

164. S. Coleman and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **45**, 100 (1980).

165. V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B191 (1981) 301.

166. C. Becchi, S. Narison, E. de Rafael, and F.J. Yndurain, Z. Phys. C **8** (1981) 335.

167. E. de Rafael, *Les Houches (1997) 1171, hep-ph/9802448.

168. A. A. Andrianov and D. Espriu, JHEP **9910**, 022 (1999).

169. S. Peris and E. de Rafael, Phys. Lett. B **309**, 389 (1993).

170. W. Broniowski, A. Steiner, and M. Lutz, Phys. Rev. Lett. **71**, 1787 (1993).

171. M. Jacob and H. Zheng, Phys. Lett. B **321**, 125 (1994).

172. А.А. Андрианов, В.А. Андрианов, Записки Научных Семинаров ПОМИ. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики **245** (1996) 5; hep-ph/9705364.

173. A. A. Andrianov, D. Espriu, and R. Tarrach, Nucl. Phys. B **533**, 429 (1998).

174. V. Barger, D. Cline, Phys. Rev. **182**, 1849 (1969).

175. O. Kaczmarek, F. Zantow, Phys. Rev. D **71**, 114510 (2005).

176. I.V. Anikin, B. Pire, L. Szymanowski, O.V. Teryaev, and S. Wallon, Eur. Phys. J. C **47**, 71 (2006).

177. G. Höhler, in *Physics with ГэВ-particle beams*, edited by H. Machner and K. Sistemish (World Scientific, Singapore, 1995) p. 198.

178. G. Höhler and H. M. Staudenmaier, in *πN Newsletter, Proceedings of the sixth International Symposium on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon*, edited by D. Drechsel *et al.* **11**, 7 (1995); ibid. 194.

179. M. Kirchbach, Mod. Phys. Lett. A **12**, 2373 (1997).

180. M. Kirchbach, **12**, 3177 (1997).

181. M. Kirchbach, **15**, 1435 (2000).

182. M. Kirchbach, Nucl. Phys. A **689**, 157 (2001).

183. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Курс теоретической физики* (Наука, Москва, 1989), Т. 4, Гл. 1, Пар. 5.

184. L.Ya. Glozman, Phys. Lett. B **587**, 69 (2004).

185. E. Klempt, Phys. Lett. B **559**, 144 (2003).

186. A.V. Anisovich *et al.*, hep-ph/0508260.

187. F.J. Gilman and H. Harari, Phys. Rev. **165**, 1803 (1968).

188. S. Weinberg, Phys. Rev. **177**, 2604 (1969).

189. A. Casher, H. Neuberger, S. Nussinov, Phys. Rev. D **20**, 179 (1979).

190. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Курс теоретической физики* (Наука, Москва, 1989) Т.3.

191. V. L. Morgunov, A. V. Nefediev, and Yu. A. Simonov, Phys. Lett. B **459**, 653 (1999).

192. Y. Nambu, Phys. Rev. D **210**, 4262 (1974).

193. A. Selem and F. Wilczek, hep-ph/0602128.

194. F. Wilczek, hep-ph/0409168.

195. N. Matagne and F. Stancu, Phys. Rev. D **71**, 014010 (2005).

196. L. Ya. Glozman, Phys. Lett. B **541**, 115 (2002).

197. S. Godfrey and J. Napolitano, Rev. Mod. Phys. **71**, 1411 (1999).

198. P. González, J Vijande, A. Valcarce, and H. Garcilazo, Eur. Phys. J. A **29**, 235 (2006).

199. B. Zwiebach, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

200. Yu. A. Simonov, Phys. Lett. B **226**, 151 (1989).

201. T. D. Cohen, arXiv:0805.4813 [hep-ph].

202. A. Deur, arXiv:0901.2190 [hep-ph].

203. A. A. Andrianov and D. Espriu, Phys. Lett. B **671**, 275 (2009).

204. P. M. Morse, Phys. Rev. **34**, 57 (1929).

205. T. Gherghetta, J. I. Kapusta, and T. M. Kelley, Phys. Rev. D **79**, 076003 (2009).

206. C. Csáki and M. Reece, JHEP **0705**, 062 (2007).

207. J. Hirn, N. Rius, and V. Sanz, Phys. Rev. D **73**, 085005 (2006).

208. A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **73**, 1207 (1994).

209. O. Andreev, Phys. Rev. D **73**, 107901 (2006).

210. J.S. Collins, L. Duncan and S.D. Joglekar, Phys. Rev. D **16**, 438 (1977).

211. R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 4130 (1974).

212. V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **125**, 136 (1983).

213. M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, and D. J. Winters, JHEP **0307**, 049 (2003).

214. M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, and D. J. Winters, JHEP **0405**, 041 (2004).

215. D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. D **69**, 065020 (2004).

216. T. Sakai and S. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. **113**, 843 (2005).

217. T. Sakai and S. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. **114**, 1083 (2005).

218. M. Kruczenski, L. A. P. Zayas, J. Sonnenschein and D. Vaman, JHEP **0506**, 046 (2005).

219. H. Boschi-Filho and N. R. F. Braga, JHEP **0305**, 009 (2003).

220. H. Boschi-Filho and N. R. F. Braga, Eur. Phys. J. C **32**, 529 (2004).

221. H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, and H. L. Carrion, Phys. Rev. D **73**, 047901 (2006).

222. A. Paredes and P. Talavera, Nucl. Phys. B **713**, 438 (2005).

223. E. Katz, A. Lewandowski and M. D. Schwartz, Phys. Rev. D **74**, 086004 (2006).

224. N. Evans and A. Tedder, Phys. Lett. B **642**, 546 (2006).

225. U. Gürsoy and E. Kiritsis, JHEP **0802**, 032 (2008).

226. U. Gürsoy, E. Kiritsis and F. Nitti, JHEP **0802**, 019 (2008).

227. J. Hirn and V. Sanz, JHEP **0512** (2005) 030.

228. J. Erdmenger, N. Evans, I. Kirsch and E. Threlfall, Eur. Phys. J. A **35**, 81 (2008).

229. J. Babington, J. Erdmenger, N. J. Evans, Z. Guralnik, and I. Kirsch, Phys. Rev. D **69**, 066007 (2004).

230. J. P. Shock and F. Wu, JHEP **0608**, 023 (2006).

231. J. P. Shock, F. Wu, Y.-L. Wu, and Z.-F. Xie, JHEP **0703**, 064 (2007).

232. R. Casero, E. Kiritsis and A. Paredes, Nucl. Phys. B **787**, 98 (2007).

233. D. K. Hong, T. Inami and H. U. Yee, Phys. Lett. B **646**, 165 (2007).

234. H.-Ch. Kim, Y.M. Kim, and U. Yakhshiev, JHEP **0911**, 034 (2009).

235. H.-Ch. Kim and Y.M. Kim, **JHEP 0901**, 034 (2009).

236. H. Forkel, Phys. Rev. D **78**, 025001 (2008).

237. W. de Paula, T. Frederico, H. Forkel, and M. Beyer, Phys. Rev. D **79**, 075019 (2009).

238. H. Forkel and E. Klempt, Phys. Lett. B **679**, 77 (2009).

239. A. Krikun, Phys. Rev. D **77**, 126014 (2008).

240. P. Colangelo, F. De Fazio, F. Jugeau, and S. Nicotri, Phys. Lett. B **652**, 73 (2007).

241. P. Colangelo, F. De Fazio, F. Jugeau, and S. Nicotri, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 4177 (2009).

242. P. Colangelo, F. De Fazio, F. Giannuzzi, F. Jugeau, and S. Nicotri, Phys. Rev. D **78**, 055009 (2008).

243. F. Jugeau, arXiv:0902.3864 [hep-ph].

244. F. Jugeau, arXiv:0912.2659 [hep-ph].

245. A. Vega and I. Schmidt, Phys. Rev. D **78**, 017703 (2008).

246. A. Vega and I. Schmidt, Phys. Rev. D **79**, 055003 (2009).

247. A. Pomarol and A. Wulzer, Nucl. Phys. B **809**, 347 (2009).

248. G. F. de Teramond and S. J. Brodsky, Phys. Rev. Lett. **102**, 081601 (2009).

249. G. F. de Teramond and S. J. Brodsky, arXiv:0909.3900 [hep-ph].

250. F. Zuo, arXiv:0909.4240 [hep-ph].

251. L. Cappiello and G. D'Ambrosio, arXiv:0912.3721 [hep-ph].

252. J. Bechi, arXiv:0912.2681 [hep-ph].

253. Y. Q. Sui, Y. L. Wu, Z. F. Xie, and Y. B. Yang, arXiv:0909.3887 [hep-ph].

254. D. Becciolini, M. Redi, and A. Wulzer, arXiv:0906.4562 [hep-ph].

255. A. Mikhailov, arXiv:hep-th/0201019.

256. I. L. Buchbinder, A. Pashnev, and M. Tsulaia, Phys. Lett. B **523**, 338 (2001).

257. I. R. Klebanov and E. Witten, Nucl. Phys. B **556**, 89 (1999).

258. A. A. Migdal and M. A. Shifman, Phys. Lett. B **114**, 445 (1982).

259. M. A. Shifman, Phys. Rept. **209**, 341 (1991).

260. J. Bijnens, Phys. Rept. **265**, 369 (1996).

261. E. Pallante and R. Petronzio, Z. Phys. C **65**, 487 (1995).

262. B. Holdom and R. Lewis, Phys. Rev. D **51**, 6318 (1995).

263. S. P. Klevansky and R. H. Lemmer, hep-ph/9707206.

264. W. Broniowski, hep-ph/9911204.

265. A. E. Dorokhov and W. Broniowski, Eur. Phys. J. C **32**, 79 (2003).

266. A. E. Dorokhov, Phys. Rev. D **70**, 094011 (2004).

267. S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).

268. B. Batell and T. Gherghetta, Phys. Rev. D **78**, 026002 (2008).

269. A. Karch, E. Katz, D. T. Son and M. A. Stephanov, JHEP **1104**, 066 (2011).

270. S. S. Afonin, Eur. Phys. J. C **71**, 1830 (2011).

Приложение А.1

Рассмотрим возможность существования глюонного конденсата размерности два и покажем, что он не существенен при фитировании мезонных параметров, по крайней мере в пределе большого числа цветов. Такой конденсат $\lambda^2 < 0$ ("тахионная масса глюона") был введён в работе [110]. Он не может происходить от локального калибровочно-инвариантного оператора, в работах [110, 111, 113] можно найти различные спекуляции, касающиеся его происхождения, измерения и физического смысла.

В работах [110, 111], была предложена следующая модификация ОР для кварковых токов:

$$\Delta\Pi^V(Q^2) = \Delta\Pi^A(Q^2) = -\frac{\alpha_s}{4\pi^3}\cdot\frac{\lambda^2}{Q^2} \tag{A.1}$$

$$\Delta\Pi^S(Q^2) = \Delta\Pi^P(Q^2) = -\frac{3\alpha_s}{2\pi^3}\lambda^2\ln\frac{\Lambda^2}{Q^2}. \tag{A.2}$$

Вывод таких членов из резонансных сумм в V и A каналах не представляет проблем: их введение совместимо с анзацами (22), (29) (см. соответствующие правила сумм в следующем Приложении, уравнения (A.9), (A.10)). Однако, чтобы воспроизвести нужные асимптотические члены в скалярных каналах, нужно существенно модифицировать линейную часть анзаца (35) для вычетов for S и P резонансов. Мы рассмотрим два вида возможных вкладов: асимптотически постоянный сдвиг и сдвиг, действующий только на вычет пиона ($n = 0$),

$$Z_{S,P}(n) \longrightarrow$$

$$Z^\lambda_{S,P}(n) \equiv 2G^2_{S,P}(n)m^2_{S,P}(n) + G^\lambda_0\frac{dm^2_{S,P}(n)}{dn} + \tilde{Z}_\pi\ \delta_{n,0}. \tag{A.3}$$

В рамках данного анзаца, соответствующие суммы по резонансам (37) дают вклад

$$\Delta\Pi^{S,P} \simeq G^\lambda_0\ln\left(\frac{Q^2+m^2(x)}{\mu^2}\right) + \dots\,, \tag{A.4}$$

который насыщает асимптотики для конденсата размерности два (A.2), если

$$G_0^\lambda = -\frac{3\alpha_s}{2\pi^3}\lambda^2. \tag{A.5}$$

В этом случае нужно внести некоторые изменения в правила сумм следующего Приложения.

С другой стороны, модификация (A.3) очевидно затрагивает вычет в пионном полюсе Z_π (при $n=0$)

$$Z_\pi \equiv 2\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{f_\pi^2} = \tilde{Z}_\pi + aG_0^\lambda. \tag{A.6}$$

Если взять $\tilde{Z}_\pi = 0$ и положить пион на радиальную траекторию Редже, то требуемое значение "глюонной массы"должно быть $\lambda^2 \simeq -2\,$ГэВ^2. Однако такое значение по меньшей мере на порядок больше известных теоретических оценок [111], $\lambda^2 = -(0.2 \div 0.5)\,$ГэВ^2, и феноменологических ограничений (из анализа распада τ-лептона) [123], $\lambda^2 = -(0.05 \pm 0.08)\,$ГэВ^2.

Отсюда заключаем, что для реалистичных значений конденсата λ^2, его вклад в вычеты (A.3), (A.6) пренебрежимо мал. Более того, можно проверить, что его вклад в массы мезонов и константы распада определённо меньше 5%. Остаётся открытым вопрос, существуют ли физические наблюдаемые, которые достаточно чувствительны к наличию такого конденсата.

Приложение A.2

После всех суммирований в уравнении (34), приходим к разложению

$$-\frac{1}{2}\frac{d\Pi^{V,A}(Q^2)}{dQ^2} \simeq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k^{V,A}}{Q^{2k}}. \tag{A.7}$$

Подставляя выражения для c_k и сравнивая (A.7) с ОР (2) и (3), получаем следующие асимптотические правила сумм в V и A каналах.

При $1/Q^2$:

$$c_1^{V,A} = \frac{N_c}{24\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}\right) = C. \tag{A.8}$$

При $1/Q^4$ (конденсат размерности два положен равным нулю):

$$c_2^V = a(C + A_F^V) - C\left(\frac{1}{2}a + M^2\right) + A_F^V \Delta_F^{(1)} = 0, \tag{A.9}$$

$$c_2^A = a(C + A_F^A) - C\left(\frac{1}{2}a + M^2\right) + A_F^A \Delta_F^{(1)} = -f_\pi^2. \tag{A.10}$$

При $1/Q^6$:

$$c_3^A = -2a(C + A_F^V)(M^2 + A_m^V) + C\left(M^2\left(M^2 + a\right) + \frac{1}{6}a^2\right)$$

$$-2CA_m^V \Delta_m^{(1)} - 2A_F^V \Delta_F^{(2)} = \frac{\alpha_s}{12\pi}\langle G^2 \rangle, \tag{A.11}$$

$$c_3^A = -2a(C + A_F^A)(M^2 + A_m^A) + C\left(M^2\left(M^2 + a\right) + \frac{1}{6}a^2\right)$$

$$-2CA_m^A \Delta_m^{(1)} - 2A_F^A \Delta_F^{(2)} = \frac{\alpha_s}{12\pi}\langle G^2 \rangle. \tag{A.12}$$

При $1/Q^8$ в $\Pi^V(Q^2) - \Pi^A(Q^2)$:

$$c_4^V - c_4^A = 3a(C + A_F^V)(M^2 + A_m^V)^2 - 3a(C + A_F^V)(M^2 + A_m^V)^2$$

$$+6C(A_m^V - A_m^A)\Delta_m^{(2)} + 3(A_F^V - A_F^A)\Delta_F^{(3)} = -12\pi\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2. \tag{A.13}$$

В уравнениях (A.9)-(A.13) были введены следующие обозначения (символ i означает m или F или G):

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{a}{e^{B_i} - 1}, \tag{A.14}$$

$$\Delta_i^{(2)} \equiv \Delta_i^{(2)}(M) = \frac{a(-M^2 + (M^2 + a)e^{B_i})}{(e^{B_i} - 1)^2}, \tag{A.15}$$

$$\Delta_i^{(3)} \equiv \Delta_i^{(3)}(M) =$$

$$\frac{a\left[-a(a + 2M^2) + ae^{B_i}(3a + 2M^2) + (M^2 + a)^2(e^{B_i} - 1)^2\right]}{(e^{B_i} - 1)^3}. \tag{A.16}$$

В скалярном случае можно выписать разложение, аналогичное (A.7):

$$\frac{1}{4}\frac{d^2\Pi^{S,P}(Q^2)}{(dQ^2)^2} \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^{S,P}}{Q^{2k}}. \tag{A.17}$$

Сравнивая (A.17) с ОР (4) и (5), получаем асимптотические правила сумм. Мы выпишем их для случая π-out. Случай π-in может быть также легко получен.
При $1/Q^2$:

$$c_1^{S,P} = \frac{N_c}{32\pi^2}\left(1+\frac{11\alpha_s}{3\pi}\right) = \frac{\bar{C}}{2}. \tag{A.18}$$

При $1/Q^6$:

$$c_2^S = a(\bar{C}+A_G^S)(\bar{M}^2+A_m^S) - \frac{\bar{C}}{2}\left(\bar{M}^2\left(\bar{M}^2+a\right)+\frac{1}{6}a^2\right)$$

$$+A_G^S\Delta_G^{(2)}(\bar{M}) = \frac{\alpha_s}{16\pi}\langle G^2\rangle, \tag{A.19}$$

$$c_2^P = \frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{f_\pi^2} + a(\bar{C}+A_G^P)(\bar{M}^2+A_m^P)$$

$$-\frac{\bar{C}}{2}\left(\bar{M}^2\left(\bar{M}^2+a\right)+\frac{1}{6}a^2\right) + A_G^P\Delta_G^{(2)}(\bar{M}) = \frac{\alpha_s}{16\pi}\langle G^2\rangle. \tag{A.20}$$

При $1/Q^8$ в $\Pi_S(Q^2)-\Pi_P(Q^2)$:

$$c_3^S - c_3^P = -3a(\bar{C}+A_G^S)(\bar{M}^2+A_m^S)^2$$

$$+3a(\bar{C}+A_G^P)(\bar{M}^2+A_m^P)^2 - 3\bar{C}(A_m^S-A_m^P)\Delta_m^{(2)}(\bar{M})$$

$$-3(A_G^S-A_G^P)\Delta_G^{(3)}(\bar{M}) = -18\pi\alpha_s\langle\bar{q}q\rangle^2. \tag{A.21}$$

Приложение A.3

Величины $\Delta_i^{(j)}$ ($j=1,2,3$, см. (A.14)-(A.16)) появляются из-за сумм ($B>0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Bn} = \frac{1}{e^B-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Bn} n = \frac{e^B}{(e^B-1)^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Bn} n^2 = \frac{e^B(e^B+1)}{(e^B-1)^3}.$$

Линейная по n часть суммируется благодаря следующему асимптотическому представлению (точнее говоря, после отделения первого состояния, нужно сделать сдвиг $M^2 \to M^2 + a$ во всех нижеприведённых выражениях):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(Q^2+M^2+an)^2} = \frac{1}{a^2}\psi\left(1, \frac{Q^2+M^2}{a}\right) =$$

$$\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^4}\left(M^2 - \frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{Q^6}\left(M^4 - aM^2 + \frac{1}{6}a^2\right) - \right.$$

$$\left.\frac{M^2}{Q^8}\left(M^2 - \frac{1}{2}a\right)\left(M^2 - a\right)\right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^{10}}\right), \tag{A.22}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^2+an}{(Q^2+M^2+an)^3} =$$

$$\frac{Q^2}{2a^3}\psi\left(2, \frac{Q^2+M^2}{a}\right) + \frac{1}{a^2}\psi\left(1, \frac{Q^2+M^2}{a}\right), \tag{A.23}$$

где

$$\frac{Q^2}{2a^3}\psi\left(2, \frac{Q^2+M^2}{a}\right) = \frac{1}{a}\left\{-\frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{Q^4}\left(M^2 - \frac{1}{2}a\right)\right.$$

$$-\frac{3}{2Q^6}\left(M^4 - aM^2 + \frac{1}{6}a^2\right)$$

$$\left. + \frac{2M^2}{Q^8}\left(M^2 - \frac{1}{2}a\right)\left(M^2 - a\right)\right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^{10}}\right). \tag{A.24}$$

Суммируя выражения (A.22) и (A.24) в (A.23), можно увидеть отсутствие вклада при $1/Q^4$ в S и P корреляторах. Поправки вносят вклад только в следующие члены, начиная с $1/Q^6$. Таким образом, в скалярный случае асимптотика, дающая конденсат размерности два, исчезает тождественно и мы не имеем соответствующего правила сумм.

Приложение A.4

Модель адронных струн не учитывает спин кварков, который приводит к существованию двух типов состояний в зависимости от их относительных угловых моментов. Короче говоря, существуют S- и D-волновые ρ-мезоны, что приводит к удвоению соответствующей векторной траектории [20, 21]. Хотя концептуально это выглядит просто, данное обстоятельство значительно усложняет анализ.

Эти два сорта ρ-мезонов должны входить в правила сумм независимо, что, вообще говоря, ведёт к связи в соотношении (17):

$$\frac{F_V^2(n)}{a_V} + \frac{F_D^2(n)}{a_D} = \frac{F_A^2(n)}{a_A}, \qquad n \to \infty, \tag{A.25}$$

где значок D стоит для D-волновых ρ-мезонов. Из численных оценок видно (особенно для корректного анзаца $a_{V,S} = a_{V,D} = a_A$), что $F_{V,D}$ должна быть очень малой по сравнению с $F_{V,S}$. Это следует также из анализа матричного элемента $\langle 0|\bar{q}\gamma_\mu q|\rho^0\rangle$. Ясно, что D-волновое конечное состояние сильно подавлено по сравнению с S-волновым, хотя конкретный численный ответ будет зависеть от того, как моделировать волновую функцию ρ^0-мезона. В нерелятивистском случае, данное утверждение тривиально: S-волна ведёт себя как константа, а D-волна как r^2 при малых расстояниях r, следовательно, последняя стремится к нулю, т.к. аннигиляция есть точечный процесс. Таким образом, D-волновые ρ-мезоны, по крайней мере асимптотически, должны исчезать в правилах сумм в противоположность анализу в [36], где это расщепление рассматривалось в рамках квазиклассического струнного подхода.

Рассмотрим линейный анзац для спектра масс D-волновых векторных мезонов:

$$m_D^2(n) = M_D^2 + an. \tag{A.26}$$

Прямое включение этих мезонов в правила сумм (25) приводит к ограничению в силу киральной симметрии: $m_D = M$. Это противоречит феноменологии [20, 21]: S и D траектории, скорее всего, имеют постоянное расщепление при любой энергии. Для того, чтобы удовлетворить правилам сумм типа (25), вычеты D-волновых мезонов должны убывать, по крайней мере, экспоненциально. Мы предлагаем следующую параметризацию:

$$F_D^2(n) = aA_De^{-B_Dn}, \qquad B_D > 0. \tag{A.27}$$

В силу экспоненциальной малости этих вычетов, мы не рассматриваем поправок к спектру масс от D-волновых ρ-мезонов (A.26) в нашем приближении.

Приложение А.5

Имея анзац для спектра масс $m_J^2(n)$ и констант распада F_J^2, можно вычислить электромагнитную разность масс пионов $\Delta m_\pi \equiv m_{\pi^+} - m_{\pi^0}$, киральную константу L_{10} [136] (параметризующую распад $\pi \to e\nu\gamma$) и $K \to \pi$ матричный элемент электромагнитного пингвинного оператора $Q_7^{3/2}$. Пример такого вычисления для линейного спектра масс приведен в [33]. Кроме того, в скалярном секторе можно вычислить киральную константу L_8 [136] (параметризующую отношение токовых масс кварков). Мы не рассматриваем оператор $Q_7^{3/2}$, т.к. его величина сильно зависит от обрезания по импульсам и не представляет большого интереса в феноменологии. Остальные константы определяются соотношениями:

$$L_{10} = -\frac{1}{8}\frac{d}{dQ^2}\left[Q^2\left(\Pi^V(Q^2) - \Pi^A(Q^2)\right)\right]_{Q^2=0}, \tag{A.28}$$

$$\Delta m_\pi = -\frac{3\alpha}{16\pi m_\pi f_\pi^2}\int_0^\infty dQ^2 Q^2\left(\Pi^V(Q^2) - \Pi^A(Q^2)\right), \tag{A.29}$$

$$L_8 = \frac{f_\pi^4}{32\langle\bar{q}q\rangle^2}\frac{d}{dQ^2}\left[Q^2\left(\Pi^S(Q^2) - \Pi^P(Q^2)\right)\right]_{Q^2=0}. \tag{A.30}$$

В этих величинах можно провести прямое суммирование по всем резонансам благодаря точному сокращению расходящихся частей. Используя обозначения (29), (32) и (А.26), можно написать для (А.28)-(А.30) сходящиеся суммы (мы выделяем основные состояния отдельно, а в остальных удерживаем только ведущий вклад и вклад, линейный по экспоненциальным поправкам):

$$L_{10} = \frac{a}{4}\left\{\frac{C + A_F^A}{M^2 + A_m^A} - \frac{C + A_F^V}{M^2 + A_m^V}\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^\infty \frac{\bar{m}^2(n)e^{-B_F n}\left(A_F^A - A_F^V\right) - Ce^{-B_m n}\left(A_m^A - A_m^V\right)}{\bar{m}^4(n)}\right\}, \tag{A.31}$$

$$\Delta m_\pi = \frac{3\alpha a}{16\pi m_\pi f_\pi^2}\left\{(C + A_F^A)(M^2 + A_m^A)\ln\frac{M^2 + A_m^A}{\mu^2} - \right.$$

$$(C + A_F^V)(M^2 + A_m^V)\ln\frac{M^2 + A_m^V}{\mu^2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C\bar{m}^2(n)\ln\frac{m_A^2(n)}{m_V^2(n)}+\left[Ce^{-B_m n}\left(A_m^A-A_m^V\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\bar{m}^2(n)e^{-B_F n}\left(A_F^A-A_F^V\right)\right]\ln\frac{\bar{m}^2(n)}{\mu^2}\right)\Bigg\}. \tag{A.32}$$

В случае π-in:

$$L_8=\frac{f_\pi^4 a}{16\langle\bar{q}q\rangle^2}\left\{\bar{C}+A_G^S+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-B_G n}\left(A_G^S-A_G^P\right)\right\}=$$

$$\frac{f_\pi^4 a}{16\langle\bar{q}q\rangle^2}\left\{\bar{C}+A_G^S+\frac{\left(A_G^S-A_G^P\right)}{e^{B_G}-1}\right\}, \tag{A.33}$$

в то время как в случае π-out:

$$L_8=\frac{f_\pi^4 a}{16\langle\bar{q}q\rangle^2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-B_G n}\left(A_G^S-A_G^P\right)=\frac{f_\pi^4 a}{16\langle\bar{q}q\rangle^2}\frac{\left(A_G^S-A_G^P\right)}{1-e^{-B_G}}. \tag{A.34}$$

Параметр μ в уравнении (A.32) является масштабом нормировки. Результат от него не зависит, что непосредственно видно из разности правил сумм (A.11) и (A.12).

Для L_{10} и L_8 приняты следующие феноменологические оценки: $L_{10}|_{\text{phen}}=(-5.5\pm0.7)\cdot10^{-3}$ [122] и $L_8|_{\text{phen}}=(0.8\pm0.3)\cdot10^{-3}$ [122].

Приложение A.6

В данном приложении приведен численный пример спектра масс мезонов, предложенный в работе. Входными параметрами, общими для всех таблиц, являются: $a=(1120\,\text{МэВ})^2$, $\langle\bar{q}q\rangle=-(240\,\text{МэВ})^3$, $\frac{\alpha_s}{\pi}\langle G^2\rangle=(360\,\text{МэВ})^4$, $f_\pi=103\,\text{МэВ}$, $Z_\pi=2\frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{f_\pi^2}$, $\alpha_s=0.3$. Размерность величин: $m(n)$, $F(n)$, $G(n)$ — МэВ; A_m — МэВ^2; A_F, A_G, $B_{F,G,m}$ — МэВ^0.

Таблица 7: Пример параметров для спектра масс. Соответствующие экспериментальные значения [19, 21] (если имеются) показаны в скобках.

Case	Inputs	Fits and constants
VA	$m_V(0) = 770\,(769.3 \pm 0.8)$, $m_A(0) = 1200\,(1230 \pm 40)$,	$M = 920$, $B_m = 0.97$, $B_F = 0.72$, $A_m^V = -500^2$, $A_m^A = 770^2$, $A_F^V = 0.0012$, $A_F^A = -0.0031$, $L_{10} = -6.5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta m_\pi = 2.3$
SP (π-in)	$m_S(0) = 1000$, $m_P(0) = 0$, $m_P(1) = 1300\,(1300 \pm 100)$, $B_m = 0.97$	$\bar{M} = 840$, $B_G = 0.42$, $A_m^S = 550^2$, $A_m^P = -840^2$, $A_G^S = -0.0009$, $A_G^P = 0.0004$, $L_8 = 1.0 \cdot 10^{-3}$
SP (π-out)	$m_S(0) = 1000$, $m_P(0) = 1300\,(1300 \pm 100)$, $m_P(1) = 1800\,(1801 \pm 13)$, $B_m = 0.97$	$\bar{M} = 1470$, $B_G = 1.27$, $A_m^S = -1080^2$, $A_m^P = -690^2$, $A_G^S = 0.0213$, $A_G^P = 0.0067$, $L_8 = 0.9 \cdot 10^{-3}$

Таблица 8: Спектр масс и вычетов для набора параметров из предыдущих таблиц. Известные экспериментальные значения [19, 21] показаны в скобках. Не все массы скалярных мезонов соотнесены с экспериментальными значениями, т.к. такое соответствия не является надежно установленным из-за сильного смешивания и эффектов унитаризации. За исключением пиона, эффект токовой массы кварка является пренебрежимо малым и не учитывался.

n	out	0	1	2	3
$m_V(n)$ $F_V(n)$		$770\,(769.3 \pm 0.8)$ $138\,(154 \pm 8)$	$1420\,(1465 \pm 25)$ 135	1820 133	$2140\,(2149 \pm 17)$ 133
$m_A(n)$ $F_A(n)$		$1200\,(1230 \pm 40)$ $116\,(123 \pm 25)$	$1520\,(1640 \pm 40)$ 125	$1850\,(1971 \pm 15)$ 128	$2150\,(2270 \pm 50)$ 130
$m_S(n)$ $G_S(n)$		$1000\,(980 \pm 10)$ 176	1440 178	$1800\,(1713 \pm 6)$ 178	2100 179
$m_P(n)$ $G_P(n)$		0 –	$1300\,(1300 \pm 100)$ 179	$1760\,(1801 \pm 13)$ 179	$2100\,(2070 \pm 35)$ 179
$m_S(n)$ $G_S(n)$		$1000\,(980 \pm 10)$ 243	$1730\,(1713 \pm 6)$ 199	2120 185	2420 181
$m_P(n)$ $G_P(n)$	0 –	$1300\,(1300 \pm 100)$ 201	$1800\,(1801 \pm 13)$ 186	$2150\,(2070 \pm 35)$ 181	$2430\,(2360 \pm 30)$ 180

Приложение Б.1

Числа Бернулли даются формулой

$$B_{2k} = (-1)^{k-1}\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k), \tag{Б.1}$$

$$B_{2k+1} = 0, \quad k > 0. \tag{Б.2}$$

Здесь ζ есть дзета-функция Римана. Приведём первые несколько чисел

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \tag{Б.3}$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}. \tag{Б.4}$$

Полиномы Бернулли определяются как

$$B_k(x) = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}B_m x^{k-m}. \tag{Б.5}$$

Первые несколько полиномов:

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x(x-1/2)(x-1),$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}. \tag{Б.6}$$

Полиномы Бернулли имеют много интересных свойств. Ниже мы показываем некоторые из них, имеющие отношение к нашему анализу. Для $k > 0$ имеем

$$B_k'(x) = kB_{k-1}(x), \tag{Б.7}$$

$$B_{2k+1}(0, 1/2, 1) = 0, \tag{Б.8}$$

$$B_{2k}(0, 1) = B_{2k}, \tag{Б.9}$$

$$B_{2k}(1/2) \xrightarrow[k\to\infty]{} -B_{2k}, \tag{Б.10}$$

$$B_{2k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sim \cos(2\pi x), \tag{Б.11}$$

$$B_{2k+1}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sim \sin(2\pi x). \tag{Б.12}$$

Следует отметить, что выход на асимптотики (Б.10)-(Б.12) происходит очень быстро. Скажем, $B_2(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}B_2$, но уже $B_4(\frac{1}{2}) \approx -0.97B_4$. Что касается уравнения (Б.11), то мы интересуемся корнями только в интервале $[0,1]$. Уже для $B_2(x)$ корни (приближённо) 0.21 и 0.79 близки к асимптотическим корням, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$.

Приложение Б.2

В этом приложении мы выведем уравнение (83). Используя свойство (Б.2), можно переписать уравнение (82) в форме

$$-\psi(z+x) = -\ln z - \ln\left(1+\frac{x}{z}\right) + \frac{1}{2(z+x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k(z+x)^k}, \quad \text{(Б.13)}$$

Разложим последние три члена в правой части уравнения (Б.13) при $z \gg x$,

$$-\ln\left(1+\frac{x}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{x^k}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{kz^k}\binom{k}{0}B_0x^{k-0}, \quad \text{(Б.14)}$$

$$\frac{1}{2(z+x)} = \frac{1}{2z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{kz^k}\binom{k}{1}B_1x^{k-1}, \quad \text{(Б.15)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k(z+x)^k} &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{kz^k}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\binom{k+l-1}{l}\frac{x^l}{z^l} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{z^k}\sum_{m=2}^{k}\frac{(-1)^{k-m}}{m}\binom{k-1}{k-m}B_mx^{k-m} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{kz^k}\sum_{m=2}^{k}\binom{k}{m}B_mx^{k-m}. \quad \text{(Б.16)}\end{aligned}$$

В последнем случае мы перемножили суммы по формуле

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_ny^n\sum_{k=0}^{\infty}b_k(n)y^k = \sum_{n=2}^{\infty}y^n\sum_{k=2}^{n}a_kb_{n-k}(n),$$

использовали тождество $\binom{k-1}{k-m} = \frac{m}{k}\binom{k}{m}$ и соотношение (Б.2). Складывая уравнения (Б.14), (Б.15), (Б.16) и подставляя результат в уравнение (Б.13), в итоге получаем

$$-\psi(z+x) = -\ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kz^k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} B_m x^{k-m}. \tag{Б.17}$$

Вспоминая определение полиномов Бернулли (Б.5), приходим к уравнению (83).

Приложение Б.3

В данном Приложении мы дадим альтернативный аргумент в пользу того, что поправки к спектру экспоненциально малы.

Просуммируем выражение (80) по формуле Эйлера-Маклорена, которая представляет следующий асимптотический ряд:

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^{\infty} f(x)dx - B_1 \left[f(0) + f(N)\right]$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \left[f^{(k-1)}(N) - f^{(k-1)}(0)\right]. \tag{Б.18}$$

Нам нужны функции со свойством $f^{(k)}(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, $k = 0, 1, \ldots$, для которых сумма (Б.18) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^{\infty} f(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(0). \tag{Б.19}$$

В нашем случае

$$f(n) \sim \frac{F^2(n)}{z+n+x+\Delta(n)}. \tag{Б.20}$$

Для линейного спектра, $F^2(n) = \text{const}$, $\Delta(n) = 0$, выражение (Б.19) даёт асимптотическое разложение дигамма-функции (48). В частности, после интегрирования появляется логарифм, и это налагает ограничение на $F^2(n)$: чтобы воспроизвести аналитическую структуру операторного разложения (то есть иметь ряд только по z^{-k}), вычеты должны вести себя как

$$F^2(n) \sim \frac{dm^2(n)}{dn}, \tag{Б.21}$$

с точностью до экспоненциально малых членов (см. главу I [51]). Мы не будем интересоваться последними. Проблема сводится к поправкам к линейному спектру масс,

$$f(n) \sim \frac{1+\Delta'(n)}{z+n+x+\Delta(n)}. \tag{Б.22}$$

Подставляя (Б.22) в (Б.19) и разлагая по обратным степеням z, получаем бесконечный ряд при каждой степени, поскольку теперь $\Delta^{(k)}(0) \neq 0$ при $k > 1$. Скажем, при $1/z$ имеем вклад

$$\frac{1}{z}: \quad \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \Delta^{(k-1)}(0). \tag{Б.23}$$

Теперь потребуем, чтобы малые поправки не порождали неконтролируемых расходимостей во всех результатах. Если мы хотим не нарушить нашу схему работы с правилами сумм, нужно наложить сходимость сумм типа (Б.23). Из соотношения (Б.1) для больших чётных k имеем следующее условие для суммы (Б.23)

$$\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\Delta^{(k)}(0)}{\Delta^{(k-1)}(0)}\right| < 1. \tag{Б.24}$$

В случае степенных поправок, $\Delta(n) \sim n^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$), условие (Б.24) не может быть выполнено, так же как для поправок вида $\Delta(n) \sim n^{\alpha}e^{-\beta n}$ ($\beta > 0$), где α не является целым положительным числом. Но для экспоненциальных поправок, $\delta(n) \sim e^{-\beta n}$, условию (Б.24) можно удовлетворить, если $\beta < 2\pi$. То же самое верно и для специального типа "смешанных"поправок: $\Delta(n) \sim n^{\alpha}e^{-\beta n}$ ($\alpha, \beta > 0$), где α целое число. При других степенях $1/z$ ситуация более сложная. Мы дадим лишь оценку для экспоненциальных поправок (они имеют свойство $\Delta^{(k)}(0) = (\Delta'(0))^k$),

$$\frac{1}{z^m}: \quad \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k (c_m)^k}{k!} \Delta^{(k-1)}(0), \tag{Б.25}$$

где $c_m = \mathcal{O}(1)$, $c_m > 1$. Для сходимости, получаем тогда $\beta < 2\pi/c_m$.

Таким образом, в рамках представленной схемы, существуют жёсткие ограничения на производные от поправок. Степенные поправки не могут их удовлетворить, а экспоненциальные могут. С другой стороны, показатель экспоненты β также ограничен. В действительности, этот показатель может быть так мал, что в начале спектра убывание поправок медленнее, чем, скажем, $1/n$. Представленные оценки находятся в полном согласии с результатами и фитами первой главы.

Приложение B

В данном приложении мы демонстрируем конкретный пример того как усреднённые данные из Particle Data маскируют кластеризацию состояний. Рассмотрим Δ-барионы, их спектр из PDG [19] показан на рис. 6. Из-за больших экспериментальных погрешностей, кластеризация состояний не является чёткой. Если же мы возьмём данные только из анализа Хёлера [19], представленного на рис. 7, то явление кластеризации становится ярко-выраженной. Аналогичная картина возникает и при рассмотрении данных только из анализа Куткоского [19], и всё это повторяется в секторе нуклонов.

Рис. 6: Экспериментальный спектр Δ-барионов [19] в единицах квадрата массы $\Delta(1232)$-бариона. Указаны экспериментальные ошибки. Наиболее надёжные значения отмечены кружками. Заштрихованные и не заштрихованные полоски и кружки обозначают состояния с противоположными чётностями. Примерные положения кластеров показаны пунктирными линиями.

Рис. 7: Спектр Δ-барионов из анализа Хёлера [19]. Обозначения как на рис. 6.

Приложение Г

Рассмотрим плоскую метрику

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu - dz^2. \tag{Г.1}$$

В этой метрике уравнения движения (354), (355) принимают форму

$$-\psi_n'' + \left(2g_5^2 \sum_k \langle X_{2k}\rangle^2\right)\psi_n = m_n^2\psi_n, \tag{Г.2}$$

$$X_{2k}'' - (m_5)_{2k}^2 X_{2k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{Г.3}$$

Используя соотношение (346) и граничное условие (350), решениями уравнений (Г.3) являются

$$\langle X_2\rangle = c_2 \sin(2z), \tag{Г.4}$$

$$\langle X_4\rangle = c_4 z, \tag{Г.5}$$

$$\langle X_{2k}\rangle = c_{2k} \sinh(2\sqrt{k(k-2)}\, z), \qquad k = 3, 4, \ldots \tag{Г.6}$$

Гармонический вклад в потенциал (Г.2) идёт от вакуумного среднего $\langle X_4\rangle$, по крайней мере при достаточно больших z. По-видимому, мы не должны использовать нашу логику для операторов с индексом $k > 2$, поскольку решения (Г.6) не выглядят физическими.

Приложение Д.1

В данном Приложении, мы кратко напоминаем основные результаты теории Штурма-Лиувилля (ШЛ). Уравнение ШЛ выглядит следующим образом:

$$-\partial_z[p(z)\partial_z\varphi] + q(z)\varphi = \lambda\omega(z)\varphi. \tag{Д.1}$$

Здесь функция $p(z) > 0$ имеет непрерывную производную, функции $q(z) > 0$ и $\omega(z) > 0$ являются непрерывными на конечном замкнутом интервале $[z_{\min}, z_{\max}]$. Грубо говоря, задача ШЛ состоит в нахождении значений λ, для которых существует нетривиальное решение уравнения (Д.1), удовлетворяющее определённым граничным условиям. В предположении, что

$p(z)^{-1}$, $q(z)$ и $\omega(z)$ представляют вещественные интегрируемые функции на интервале $[z_{\min}, z_{\max}]$ с граничными условиями вида

$$\varphi(z_{\min}) \cos\alpha - p(z_{\min})\varphi'(z_{\min}) \sin\alpha = 0, \tag{Д.2}$$

$$\varphi(z_{\max}) \cos\beta - p(z_{\max})\varphi'(z_{\max}) \sin\beta = 0, \tag{Д.3}$$

где $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ и штрих означает производную, теорема ШЛ утверждает, что:

- Существует бесконечный дискретный набор вещественных собственных значений λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- С точностью до константы нормировки, существует единственная собственная функция $\varphi_n(z)$, соответствующая каждому собственному числу λ_n, и эта собственная функция имеет $n-1$ нулей на интервале $[z_{\min}, z_{\max}]$.
- Нормируемые собственные функции образуют ортонормированный базис

$$\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \varphi_m(z)\varphi_n(z)\omega(z)dz = \delta_{mn}. \tag{Д.4}$$

Таким образом, решения задачи ШЛ образуют полный набор функций на интервале $[z_{\min}, z_{\max}]$, которые могут быть использованы для разложения произвольной функции на данном интервале.

Приложение Д.2

В типичной ситуации, спектр рассматриваемых моделей определяется уравнением

$$-\psi_n'' + \left[z^2 + \frac{b^2 - 1/4}{z^2} + c\right]\psi_n = m_n^2\psi_n, \tag{Д.5}$$

которое является точно-решаемым. Его спектр нормируемых мод есть:

$$m_n^2 = 4n + 2|b| + 2 + c, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{Д.6}$$

соответствующие нормированные собственные функции:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2n!}{(|b|+n)!}} e^{-z^2/2} z^{|b|+1/2} L_n^{|b|}(z^2), \tag{Д.7}$$

где $L_n^{|b|}$ представляют присоединённые полиномы Лежандра.

В случае $|b| = 1/2$, решения уравнения (Д.5) другие. Спектр:

$$m_n^2 = 2n + 1 + c, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{Д.8}$$

а соответствующие нормированные собственные функции даются выражением:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \pi^{-1/4} e^{-z^2/2} H_n(z), \tag{Д.9}$$

где H_n являются полиномами Лагерра.

В случае $|b| < 1/2$, дискретного спектра не существует.