

## Влияние неоднородности магнитного поля Земли на динамику электродинамической тросовой системы\*

А. П. Дериглазов, А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Дериглазов А. П., Тихонов А. А. Влияние неоднородности магнитного поля Земли на динамику электродинамической тросовой системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 539–551. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.316>

Рассматривается электродинамическая тросовая система, функционирующая в режиме натянутой связки и движущаяся по круговой экваториальной околоземной орбите в условиях неоднородности магнитного поля Земли. Найден возможный режим движения связки, представляющий собой близкое к вертикальному равновесное положение в плоскости орбиты. Исследована устойчивость найденного положения относительно равновесия по линейному приближению. Представлены результаты численного моделирования некоторых соотношений для тросовой системы при варьировании ее параметров.

*Ключевые слова:* электродинамическая тросовая система, устойчивость, геомагнитное поле, космический мусор.

**1. Введение.** Космические тросы рассматриваются в настоящее время не только как способ организации механической связи между орбитальными объектами, но и как источники дополнительных сил, действующих со стороны геофизических полей [1, 2]. Так, проводящий трос, движущийся в геомагнитном поле, испытывает воздействие амперовых сил, которые могут оказывать тормозящее действие на трос и присоединенные к нему орбитальные объекты [1]. Это обстоятельство породило целое направление исследований, в которых изучаются динамические свойства орбитальных связок с проводящими тросами, называемых электродинамическими тросовыми системами (ЭДТС). Особую актуальность этим исследованиям придает возможность использования ЭДТС для удаления с околоземных орбит нефункционирующих спутников, последних ступеней ракет-носителей и других крупных объектов, называемых космическим мусором и представляющих опасность для действующих спутников [3–11]. При этом наибольшей эффективностью отличается проводящий трос, функционирующий в режиме проводника с током, ориентированного в околоземном пространстве по местной вертикали [1, 3, 12]. Такой режим равновесной ориентации для обычного весомого троса обеспечивается силами гравитационного притяжения Земли и силами инерции. Однако для ЭДТС устойчивая вертикальная ориентация троса разрушается под действием момента сил Ампера [1, 8, 12–14].

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00146-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

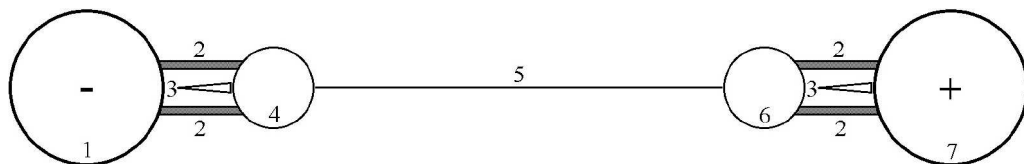


Рис. 1. Схема ЭДТС.

Для борьбы с этим нежелательным явлением в работах [15–17] был предложен способ, основанный на разделении зарядов, протекающих в ЭДТС, и концентрации их на концевых коллекторах зарядов. Суть этого способа поясняется с помощью рис. 1. К концам проводящего изолированного троса 5 присоединены коллекторы — устройства для сбора электрических зарядов. Коллектор 7, находящийся на верхнем конце троса (на том, который дальше от Земли), с помощью электроизолирующих креплений 2 соединен с концевым телом 6 проводящего троса 5. Коллектор 7 получает положительный заряд, поддерживаемый одним или несколькими электронными эмиттерами (например, полевыми электронными эмиттерами, холодными электронными эмиттерами на основе нанопористого углерода, или холловскими ионными источниками) 3, передающими отрицательный заряд на концевое тело 6. На противоположном конце троса (на том, который ближе к Земле) концевое тело 4 аналогичным образом соединено с коллектором 1. Коллектор 1 получает отрицательный заряд, поддерживаемый одним или несколькими электронными эмиттерами 3, передающими отрицательный заряд с концевой тела 4. Избыток отрицательных зарядов стекает с коллектора 1 в окружающую околоземную плазму, что обеспечивает в тросе наличие тока, протекающего по псевдоцепи, замыкающейся через ионосферные токи, текущие вдоль силовых линий геомагнитного поля [1].

В результате разделения зарядов и концентрации их на коллекторах возникает дополнительный восстанавливающий момент сил Лоренца, который, как показано, может быть использован для стабилизации проводящего троса в околоземном пространстве вдоль местной вертикали [15–17]. Исследования, выполненные в этих работах, а также в других работах, процитированных выше, проводились, конечно, с учетом градиентности гравитационного поля Земли и возникающего вследствие этого гравитационного момента. Вместе с тем, градиентность магнитного поля Земли (МПЗ) не учитывалась ни в одной из указанных работ. Поэтому представляется естественным поставить вопрос о влиянии градиентности МПЗ на динамику ЭДТС, особенно с учетом большой протяженности троса — порядка нескольких километров. В данной работе рассматривается ЭДТС, взаимодействующая с МПЗ за счет протекающего по тросу тока и наличия разноименных зарядов на концевых коллекторах. Анализируется влияние градиентности МПЗ на существование положений равновесия ЭДТС, в том числе вертикального, их устойчивость и колебания.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается ЭДТС, центр масс которой движется по круговой кеплеровой экваториальной орбите в гравитационном и магнитном полях Земли. В качестве гравитационного поля рассматривается центральное ньютоновское поле, МПЗ моделируется прямым магнитным диполем. Такая простейшая постановка задачи позволяет исключить нестационарности почти периодического типа [18, 19] и сосредоточиться именно на выявлении влияния градиентности МПЗ [20] на динамику ЭДТС. Сама ЭДТС представляет собой натянутый проводящий трос с массами, прикрепленными к его концам. В дальнейшем для краткости данная

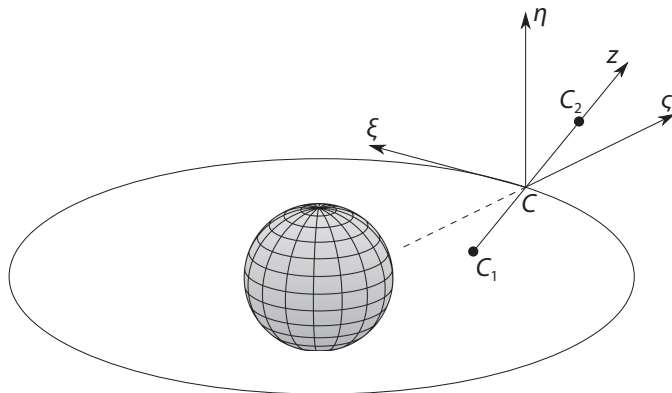


Рис. 2. ЭДТС в орбитальной системе координат.

конструкция будет называться связкой. Концевые массы могут представлять собой два искусственных спутника Земли. Ввиду малых размеров спутников по сравнению с длиной троса, спутники рассматриваются как материальные точки, каждая из которых обладает массой и электростатическим зарядом. Будем предполагать, что трос находится в режиме, близком к натянутому состоянию вдоль местной вертикали благодаря градиенту гравитационного поля Земли. Данный режим движения троса будем называть номинальным. В этом режиме движения ось  $z$ , направленная вдоль натянутого троса, коллинеарна оси  $C\zeta$ , направленной вдоль радиуса-вектора  $\vec{R} = \overrightarrow{O_E C} = R\vec{\zeta}_0$  центра масс троса относительно центра Земли  $O_E$  (рис. 2).

Оси  $C\xi$  (орт  $\vec{\xi}_0$ ) и  $C\eta$  (орт  $\vec{\eta}_0$ ), направленные соответственно по касательной к орбите в сторону движения точки  $C$  и по нормали к плоскости орбиты, образуют с осью  $C\zeta$  (орт  $\vec{\zeta}_0$ ) орбитальную систему координат  $C\xi\eta\zeta$ . В инерциальном пространстве орбитальная система координат поворачивается с угловой скоростью  $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{\eta}_0$ . Упругие деформации троса не рассматриваются [1]. Таким образом, рассмотрению подлежит ЭДТС, моделируемая тонким проводящим однородным стержнем с погонной массой  $\rho_0$  и точечными грузами на концах. Масса нити  $m_0 = \rho_0(z_2 - z_1)$ , где  $z_1$  и  $z_2$  — координаты концевых масс  $m_1$  и  $m_2$  относительно центра масс системы (положения концевых масс отмечены точками  $C_1$  и  $C_2$  на рис. 2). Координаты центров зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$  будем считать совпадающими с координатами точечных масс. В системе главных центральных осей инерции  $C\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  с ортами  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  тензор инерции связки имеет вид  $J = \text{diag}(A, A, C_0)$ , где  $A = m_0 \frac{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}{3} + m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2$ , а  $C_0$  пренебрежимо мало по сравнению с  $A$ . Взаимную ориентацию осей систем координат  $C\xi\eta\zeta$  и  $C\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  зададим с помощью матрицы направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

так, что  $\vec{\xi}_0 = \alpha_1\vec{i}_1 + \alpha_2\vec{i}_2 + \alpha_3\vec{i}_3$ ,  $\vec{\eta}_0 = \beta_1\vec{i}_1 + \beta_2\vec{i}_2 + \beta_3\vec{i}_3$ ,  $\vec{\zeta}_0 = \gamma_1\vec{i}_1 + \gamma_2\vec{i}_2 + \gamma_3\vec{i}_3$ . Поскольку рассматривается симметричная относительно продольной оси конструкция троса, то для устранения неопределенности в выборе осей  $\tilde{x}, \tilde{y}$  представляется целесообразным ввести в рассмотрение сопутствующие оси (оси Резаля)  $Cxyz$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  так, что ось  $Cz$  направлена вдоль натянутого троса, а трехгранник  $Cxyz$  не

участвует в повороте троса вокруг оси  $Cz$  на угол  $\varphi$ . Кинематическими характеристиками вращательного движения связки являются: абсолютная угловая скорость  $\vec{\omega}$ , угловая скорость сопутствующего трехгранника относительно орбитальной системы координат  $\vec{\omega}_1 = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ , угловая скорость связки относительно сопутствующего трехгранника  $\dot{\varphi}\vec{k}$ , угловая скорость связки относительно орбитальной системы координат  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}_1 + \dot{\varphi}\vec{k}$ . Эти величины связаны соотношением  $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0$ , которое в проекциях на оси  $Cxyz$  имеет вид

$$\omega_x = p + \omega_0\beta_1, \quad \omega_y = q + \omega_0\beta_2, \quad \omega_z = r + \dot{\varphi} + \omega_0\beta_3, \quad (2)$$

где  $p, q, r$  — проекции относительной угловой скорости  $\vec{\omega}'$ .

### 3. Дифференциальные уравнения вращательного движения связки.

Оси Резаля остаются главными центральными осями инерции ЭДТС во все время движения. Согласно теореме об изменении кинетического момента  $\vec{K} = A\omega_x\vec{i} + A\omega_y\vec{j}$  под действием главного момента  $\vec{M}$  внешних сил относительно центра масс имеем

$$\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{xyz} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_0) \times \vec{K} = \vec{M}.$$

Отсюда в проекциях на оси  $x, y, z$  получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x - A\omega_y\omega_z = M_{Gx} + M_{Lx} + M_{Ax}, \\ A\dot{\omega}_y + A\omega_z\omega_x = M_{Gy} + M_{Ly} + M_{Ay}, \\ \omega_z = \omega_{z0} = \text{const.} \end{cases} \quad (3)$$

Совместно с кинематическими уравнениями Пуассона

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 + \omega_y\alpha_3 - \omega_z\alpha_2 &= -\omega_0\gamma_1, \\ \dot{\beta}_1 + \omega_y\beta_3 - \omega_z\beta_2 &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 + \omega_y\gamma_3 - \omega_z\gamma_2 &= \omega_0\alpha_1 \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} x \rightarrow y \rightarrow z \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \end{array} \right) \quad (4)$$

уравнения (3) образуют замкнутую дифференциальную систему, описывающую вращательное движение связки. Чтобы записать уравнения (3) в развернутом виде, нужно определить их правые части.

В центральном ньютоновском гравитационном поле на связку действует гравитационный момент  $\vec{M}_G$ , который в проекциях на оси  $Cxyz$  имеет вид [21]

$$M_{Gx} = -3\omega_0^2 A\gamma_2\gamma_3, \quad M_{Gy} = 3\omega_0^2 A\gamma_1\gamma_3, \quad M_{Gz} = 0.$$

Для вычисления моментов сил Ампера и Лоренца с учетом градиентности МПЗ определим сначала вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  в виде [22]

$$\vec{B} = \vec{B}_C + \Delta\vec{B},$$

где  $\vec{B}_C$  — магнитная индукция МПЗ в центре масс связки, а  $\Delta\vec{B}$  — дополнительное слагаемое, вычисляемое для данной точки пространства. Для МПЗ, моделируемого прямым магнитным диполем [21–23],  $\vec{B}_C = -g_1^0 \left(\frac{R_E}{R}\right)^3 \vec{\eta}_0$ , где  $g_1^0$  — гауссова постоянная, имеющая на эпоху 2015 значение  $g_1^0 = -29442.0$  нТл. В точке троса, определяемой координатой  $z$ , составляющая  $\Delta\vec{B}$ , порождаемая градиентностью МПЗ, в

осях  $Cxyz$  имеет вид [22]

$$\Delta \vec{B}(z) = 3g_1^0 \frac{R_E^3}{R^4} z \begin{pmatrix} \beta_1 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1 \\ \beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2 \\ 2\beta_3 \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Как показано в [24], для принятой модели геомагнитного поля при вычислении момента сил Лоренца достаточно рассмотреть следующее его представление:

$$\vec{M}_L = \vec{M}_{10} + \Delta \vec{M}_1 + \vec{M}_{20} + \Delta \vec{M}_2.$$

Здесь первая составляющая лоренцева момента обусловлена орбитальным движением связки, вторая составляющая учитывает градиентность МПЗ, третья составляющая обусловлена движением ЭДТС относительно ее центра масс, четвертая составляющая учитывает градиентность МПЗ при движении ЭДТС относительно ее центра масс. При дипольном приближении МПЗ (прямой диполь) аналитические выражения для указанных составляющих таковы [25]:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{10} &= \vec{P} \times (\vec{v}_C \times \vec{B}_C), \quad \vec{M}_{20} = (Q_1 z_1^2 + Q_2 z_2^2) [(\vec{\omega} - \vec{\omega}_E) \times \vec{k}] (\vec{B}_C \cdot \vec{k}), \\ \Delta \vec{M}_1 &= Q_1 \vec{C}\vec{C}_1 \times (\vec{v}_C \times \Delta \vec{B}_1) + Q_2 \vec{C}\vec{C}_2 \times (\vec{v}_C \times \Delta \vec{B}_2), \\ \Delta \vec{M}_2 &= Q_1 z_1^2 [(\vec{\omega} - \vec{\omega}_E) \times \vec{k}] (\Delta \vec{B}_1 \cdot \vec{k}) + Q_2 z_2^2 [(\vec{\omega} - \vec{\omega}_E) \times \vec{k}] (\Delta \vec{B}_2 \cdot \vec{k}). \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{P} = (Q_1 z_1 + Q_2 z_2) \vec{k}$ ,  $\vec{v}_C = R(\omega_0 - \omega_E) \vec{\xi}_0$ ,  $\omega_E$  — угловая скорость суточного вращения Земли,  $\Delta \vec{B}_i = \Delta \vec{B}(z_i)$  ( $i = 1, 2$ ), векторы  $\vec{C}\vec{C}_i$  направлены от центра масс ЭДТС к конечным массам (рис. 2),  $\vec{\rho} = z \vec{k}$ .

Момент сил Ампера вычислим по формуле [26]

$$\vec{M}_A = \vec{M}_{A10} + \Delta \vec{M}_{A1} = \int_{z_1}^{z_2} \vec{\rho} \times (I \vec{k} \times \vec{B}_C) dz + \int_{z_1}^{z_2} \vec{\rho} \times (I \vec{k} \times \Delta \vec{B}) dz,$$

где  $I$  — сила тока, протекающего по тросу. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} G &= 3A\omega_0^2, \quad a = -g_1^0 \frac{I}{2} \left( \frac{R_E}{R} \right)^3 (z_2^2 - z_1^2), \quad \tilde{a} = -g_1^0 I \frac{R_E^3}{R^4} (z_2^3 - z_1^3), \\ L &= -g_1^0 \frac{R_E^3}{R^2} (\omega_0 - \omega_E) (Q_1 z_1 + Q_2 z_2), \quad \tilde{L} = -g_1^0 \left( \frac{R_E}{R} \right)^3 (\omega_0 - \omega_E) (Q_1 z_1^2 + Q_2 z_2^2), \\ \tilde{\tilde{L}} &= -\frac{6g_1^0}{R} \left( \frac{R_E}{R} \right)^3 (\omega_0 - \omega_E) (Q_1 z_1^3 + Q_2 z_2^3), \quad \tilde{L}_0 = -g_1^0 \left( \frac{R_E}{R} \right)^3 (Q_1 z_1^2 + Q_2 z_2^2), \\ \tilde{\tilde{\tilde{L}}}_0 &= -\frac{6g_1^0}{R} \left( \frac{R_E}{R} \right)^3 (Q_1 z_1^3 + Q_2 z_2^3), \end{aligned}$$

запишем систему (3) в виде

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x - A\omega_y \omega_z = -G\gamma_2 \gamma_3 - L\gamma_2 - \tilde{L}(2\beta_2 \beta_3 - 3\gamma_2 \gamma_3) + \tilde{\tilde{L}}_0 q \beta_3 - \\ \quad - \tilde{\tilde{L}} \beta_2 \beta_3 \gamma_3 - \tilde{\tilde{L}}_0 q \beta_3 \gamma_3 - a\beta_1 + \tilde{a}(\beta_1 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1), \\ A\dot{\omega}_y + A\omega_z \omega_x = G\gamma_1 \gamma_3 + L\gamma_1 + \tilde{L}(2\beta_1 \beta_3 - 3\gamma_1 \gamma_3) - \tilde{\tilde{L}}_0 p \beta_3 + \\ \quad + \tilde{\tilde{L}} \beta_1 \beta_3 \gamma_3 + \tilde{\tilde{L}}_0 p \beta_3 \gamma_3 - a\beta_2 + \tilde{a}(\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2), \\ \omega_z = \omega_{z0} = \text{const.} \end{cases} \quad (5)$$

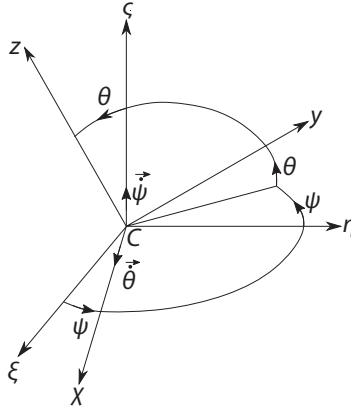


Рис. 3. Углы  $\psi$  и  $\theta$ , определяющие ориентацию связки.

**4. Положения относительного равновесия.** Для решения вопроса о существовании возможных положений равновесия связки в орбитальной системе координат, положим проекции относительной угловой скорости  $p, q$  равными нулю в уравнениях (2), (4), (5) и перейдем от направляющих косинусов к углам  $\psi, \theta$  (рис. 3) по формулам

$$\beta_1 = \sin \psi, \beta_2 = \cos \psi \cos \theta, \beta_3 = -\cos \psi \sin \theta, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = \sin \theta, \gamma_3 = \cos \theta.$$

Тогда уравнения (5) примут вид

$$\begin{cases} -A\omega_0^2 \cos^2 \psi \cos \theta \sin \theta = G \cos \theta \sin \theta + L \sin \theta - \\ -\tilde{L} \sin \theta \cos \theta (3 + 2 \cos^2 \psi) - \tilde{\tilde{L}} \cos^2 \psi \sin \theta \cos \theta + a \sin \psi - \tilde{a} \sin \psi \cos \theta, \\ A\omega_0^2 \sin \psi \cos \psi \sin \theta = 2\tilde{L} \sin \psi \cos \psi \sin \theta + \tilde{\tilde{L}} \sin \psi \cos \psi \sin \theta \cos \theta + \\ + a \cos \theta \cos \psi - \tilde{a} \cos \psi \cos 2\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Положению троса, вытянутого вдоль местной вертикали, соответствует значение угла  $\theta = 0$ . Подставляя это значение в систему (6), получаем уравнение

$$R(z_2^2 - z_1^2) - 2(z_2^3 - z_1^3) = 0, \quad (7)$$

откуда следует, что данный режим движения является практически нереализуемым, поскольку уравнение (7) накладывает неприемлемо жесткие ограничения на значения  $z_1$  и  $z_2$ . Действительно, поскольку  $R$  на несколько порядков больше величин  $|z_1|$  и  $z_2$ , то при самых малых отклонениях от требуемых значений  $z_1, z_2$  левая часть уравнения (7) сильно отличается от нуля.

Рассмотрим возможность существования «наклонных» положений равновесия связки в орбитальной системе координат. В силу сферической симметрии гравитационного поля и осевой симметрии МПЗ, следует проанализировать возможность существования положений равновесия связки в двух плоскостях орбитальной системы координат: в плоскости орбиты  $(\xi, \zeta)$  и в плоскости  $(\eta, \zeta)$ , ортогональной плоскости орбиты.

Полагая  $\sin \psi = 0$  в системе (6), получим следующую систему уравнений для нахождения положений равновесия связки в плоскости  $(\eta, \zeta)$ , перпендикулярной к

плоскости орбиты:

$$\begin{cases} \cos \theta_{1,2} = \left( R(z_1 + z_2) \pm \sqrt{(z_1 + z_2)^2 R^2 + 32(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)^2} \right) / 8(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2), \\ \cos \theta = -L / \left( 4A\omega_0^2 - 5\tilde{L} - \tilde{\tilde{L}} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Несложно заметить, что во втором уравнении системы (8) правая часть является отрицательной в силу того, что  $L$  — положительная величина при любых параметрах связки, соблюдающих физически обоснованное расположение положительного заряда выше отрицательного, а знаменатель — положительная величина в силу того, что  $A\omega_0^2$  на несколько порядков больше, чем  $\tilde{L}$  и  $\tilde{\tilde{L}}$ . Таким образом в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты, отсутствуют равновесные положения связки, при которых положительный заряд выше отрицательного. «Перевернутые» же положения связки либо не представляют практического интереса в рамках поставленной задачи, либо вообще не реализуемы вследствие того, что такая связка будет смята кулоновыми и лоренцевыми силами, и поэтому далее не рассматриваются.

Положив  $\cos \psi = 0$  в системе (6), перейдем к рассмотрению возможных положений равновесия связки в плоскости орбиты  $(\xi, \zeta)$ . В данном случае одно из уравнений (6) удовлетворяется тождественно и система преобразуется к уравнению

$$G \cos \theta \sin \theta + L \sin \theta - 3\tilde{L} \sin \theta \cos \theta \pm a \mp \tilde{a} \cos \theta = 0, \quad (9)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют  $\psi = \pm\pi/2$ . Перейдем в (9) от  $\sin \theta$  к  $\cos \theta$ , для краткости обозначим  $\cos \theta = x$ . Для переменной  $x \in [0; 1]$  получим следующее алгебраическое уравнение четвертого порядка:

$$p(x) = x^4 \left( G - 3\tilde{L} \right)^2 + 2x^3 L \left( G - 3\tilde{L} \right) + x^2 \left[ L^2 - \left( G - 3\tilde{L} \right)^2 + \tilde{a}^2 \right] - 2x \left[ L \left( G - 3\tilde{L} \right) - a\tilde{a} \right] + a^2 - L^2 = 0. \quad (10)$$

Для определения максимума возможного числа вещественных корней уравнения (10) на заданном интервале, воспользуемся теоремой Бюдана — Фурье [27]. Составим последовательность Фурье для полинома  $p(x)$  и его производных:

$$fseq(x) = \left\{ p(x), p'(x), p''(x), p'''(x), p^{(IV)}(x) \right\}.$$

Число вещественных корней уравнения  $p(x) = 0$ , размещенных между 0 и 1, не может быть больше, чем число перемен знаков, потерянных в  $fseq(x)$  при переходе от подстановки  $x := 0$  к подстановке  $x := 1$ . Для связок, симметричных  $(z_2 = -z_1)$  относительно центра масс,  $a = \tilde{L} = 0$  и, как несложно проверить, получаем следующую таблицу знаков:

	$x = 0$	$x = 1$
$p(x)$	–	+
$p'(x)$	–	+
$p''(x)$	знак не важен	+
$p'''(x)$	+	+
$p^{(IV)}(x)$	+	+

По представленным в таблице знакам можно утверждать, что симметричная относительно центра масс связка имеет единственное положение равновесия в плоскости орбиты.

Поскольку космическая тросовая система является сильно протяженным космическим объектом и условие  $z_2 = -z_1$  может выполняться не совсем точно, представляет интерес вопрос, существуют ли положения равновесия в плоскости орбиты для несимметричных относительно центра масс связок. Для этого проварируем часть параметров ЭДТС при фиксированных значениях остальных. Параметрами ЭДТС являются: концевые массы и заряды, длина троса, погонная масса троса и сила тока. Будем считать фиксированными следующие из них: погонная масса троса  $\rho_0 = 0.002$  кг/м, сила тока  $I = 2$  А, заряды  $Q_2 = -Q_1 = 10^{-4}$  Кл. Поскольку за начало системы координат  $Cxyz$  берется центр масс, можем определить связь между координатами концевых масс через выражение  $z$ -координаты центра масс:

$$z_C = \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2} \int_L \rho_0 r dr = \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2} \left[ m_1 z_1 + m_2 z_2 + \frac{\rho_0}{2} (z_2^2 - z_1^2) \right] = 0.$$

Пусть величины  $z_1$  и  $z_2$  связаны соотношением  $\frac{z_2}{|z_1|} = \mu$ . Будем иметь следующее уравнение связи между массами и координатами  $z_1$  и  $z_2$ :

$$-\frac{m_1}{\mu z_2} + \frac{m_2}{z_2} + \frac{\rho_0}{2} \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Численные эксперименты с вариацией параметров выполнялись в двух вариантах. В первом из них производилась вариация параметра  $\mu$  на отрезке  $[0.9; 1.1]$  с шагом  $h_1 = 0.002$  и вариация  $z_2$  на отрезке  $[500; 1500]$  м с шагом  $h_2 = 5$  м. Строилась прямоугольная сетка (размера  $100 \times 100$ ) параметров, для которых были вычислены корни уравнения (10) при фиксированном значении одной из концевых масс:  $m_2 = 100$  кг. Величина  $m_1$  вычислялась для заданных  $\mu$  и  $z_2$  по формуле (11). Результат вычислений показан в виде поверхности  $\theta(\mu, z_2)$  на рис. 4, а.

Во втором варианте производилась вариация зарядов  $Q_2 = -Q_1 = Q$  на отрезке  $[10^{-5}; 10^{-4}]$  Кл с шагом  $h_1 = (10^{-4} - 10^{-5})/100$  и масс  $m_1 = m_2 = m$  на отрезке  $[100; 600]$  кг с шагом  $h_2 = 5$  кг. При этом считались фиксированными следующие величины: сила тока  $I = 2$  А, погонная масса троса  $0.002$  кг/м,  $z_2 = -z_1 = 500$  м. Результат вычислений показан в виде поверхности  $\theta(Q, m)$  на рис. 4, б. Выбор симметричной относительно центра масс связки обусловлен тем, что случай  $z_2 = -z_1$  обеспечивает интересующий нас минимум отклонения связки от вертикали (см. рис. 4, а).

По полученным значениям в пакете MATLAB были составлены кубические сплайны, для которых построены соответствующие поверхности. Из рис. 4, а, б видно, что для широкой области значений параметров существует положение равновесия ЭДТС в плоскости орбиты, которое соответствует значению угла  $\theta$ , близкому к нулю. На графиках изменения угла при вариации  $z_2$  или  $Q$  являются неразличимыми, но стоит отметить, что при увеличении  $Q$  наблюдается уменьшение угла  $\theta$ , ровно так же как и при увеличении  $z_2$ . Следует также отметить, что в процессе расчетов проверялось условие натяжения троса. При всех рассмотренных значениях параметров связка находится в натянутом состоянии, несмотря на силы кулонова притяжения зарядов.



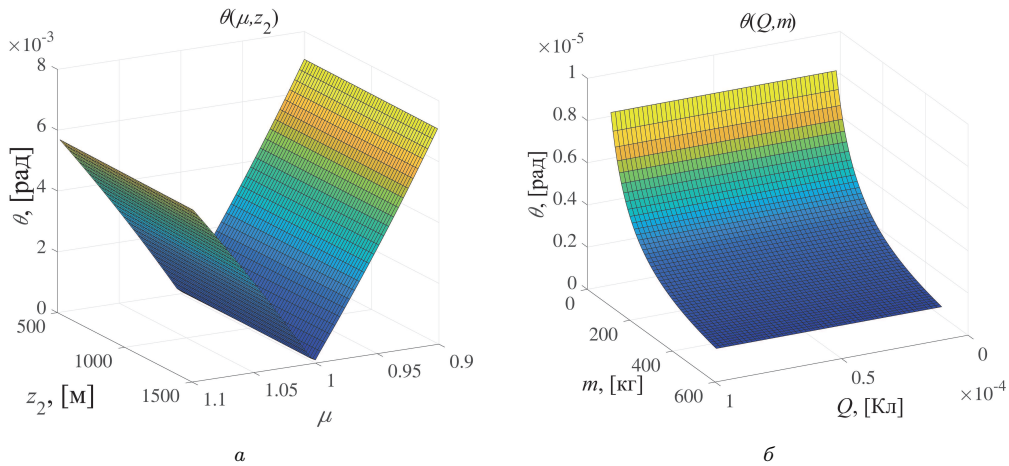


Рис. 4. Значения угла  $\theta$  при вариации параметров.

**5. Устойчивость равновесного положения связки.** Для определения условий устойчивости положения равновесия связки в плоскости орбиты вернемся к уравнениям (5) и перейдем в них к углам  $\psi, \theta$  с учетом равенств  $p = \dot{\theta}$ ,  $q = \dot{\psi} \sin \theta$ ,  $r = \dot{\psi} \cos \theta$ . Будем полагать, что при значениях  $\theta = \theta^*$ ,  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$  связка находится в положении равновесия. Введем малые отклонения от этого положения  $\Delta\theta$  и  $\Delta\psi$  так, что  $\theta = \theta^* + \Delta\theta$ ,  $\psi = \pm \frac{\pi}{2} + \Delta\psi$ . С учетом малости углов  $\Delta\theta$  и  $\Delta\psi$  линеаризованная система (5) примет вид

$$\begin{cases} A\Delta\ddot{\theta} = -\left(G - 3\tilde{L}\right) (\cos \theta^* \sin \theta^* + \Delta\theta \cos 2\theta^*) - \\ \quad -L (\sin \theta^* + \Delta\theta \cos \theta^*) \mp a \pm \tilde{a} (\cos \theta^* - \Delta\theta \sin \theta^*), \\ \left(A\Delta\ddot{\psi} + A\omega_0^2\Delta\psi\right) \sin \theta^* = \\ \quad = \left(2\tilde{L} \sin \theta^* + \tilde{\tilde{L}} \cos \theta^* \sin \theta^* \pm a \cos \theta^* \mp \tilde{a} \cos 2\theta^*\right) \Delta\psi. \end{cases} \quad (12)$$

С учетом уравнения (9), которому удовлетворяют координаты положения равновесия, система (12) допускает упрощение до следующего вида:

$$\begin{cases} A\Delta\ddot{\theta} + b\Delta\theta = 0, \\ A\Delta\ddot{\psi} + d\Delta\psi = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $b = \left(G - 3\tilde{L}\right) \cos 2\theta^* + L \cos \theta^* \pm \tilde{a} \sin \theta^*$ ,  $d = A\omega_0^2 - 2\tilde{L} - \tilde{\tilde{L}} \cos \theta^* \sin \theta^* \mp a \cot \theta^* \pm \tilde{a} \frac{\cos 2\theta^*}{\sin \theta^*}$ . Условием устойчивости колебаний по углу  $\Delta\theta$  будет положительность коэффициента  $b$ , поскольку  $A > 0$  всегда. Так как  $G$  на порядок больше, чем  $\tilde{L}$ , коэффициент  $L$  всегда положительный, а  $\tilde{a}$  умножается на малую величину, то неравенство  $b > 0$  выполняется.

Для колебаний по углу  $\Delta\psi$  условием устойчивости будет положительность коэффициента  $d$ . В силу малости  $\theta^*$  слагаемое  $\mp a \cot \theta^*$  будет иметь наибольший по-

рядок в выражении  $d$ . Поэтому следует предположить, что при  $\psi^* = \pi/2$  и выполнении условия  $z_2 < |z_1|$ , а также при  $\psi^* = -\pi/2$  и выполнении условия  $z_2 > |z_1|$  коэффициент  $d$  будет положительным в силу положительности слагаемого  $\mp a \cot \theta^*$  (знаки  $\mp$  соответствуют знакам  $\psi^* = \pm\pi/2$ ). В ходе численного моделирования с аналогично построенной сеткой, как для уравнения (10), и с теми же значениями фиксированных параметров ЭДТС было установлено, что при  $\mu = 1$  происходит разрыв значения  $d$ , и этот коэффициент будет положительным при  $\mu \leq 1$  для  $\psi^* = \pi/2$  и при  $\mu \geq 1$  для  $\psi^* = -\pi/2$ .

Были также численно проанализированы частоты колебаний связки по углам  $\theta$  и  $\psi$ . Установлено, что оптимальной является симметричная относительно центра масс связка, поскольку такой конфигурации отвечают наибольшие частоты одновременно нутационных (по углу  $\theta$ ) и прецессионных (по углу  $\psi$ ) колебаний. Частота нутационных колебаний  $k_1 = \sqrt{b/A}$  увеличивается при увеличении зарядов коллекторов. Если  $|Q_1| > Q_2$  в симметричном случае, то также наблюдается увеличение частот нутационных и прецессионных колебаний при увеличении зарядов. Полученные зависимости подтверждают тот факт, что момент сил Лоренца оказывает стабилизирующее воздействие на ЭДТС, а влияние градиентности МПЗ, приводящее к исчезновению вертикального положения равновесия связки, тем не менее не препятствует реализации устойчивого рабочего режима функционирования ЭДТС в положении, близком к вертикальному.

**6. Заключение.** В работе рассмотрено влияние градиентности магнитного поля Земли на положения равновесия, устойчивость и колебания электродинамической тросовой системы, содержащей заряженные коллекторы на концах троса. В ходе анализа динамических уравнений движения установлено, что градиентность геомагнитного поля приводит к исчезновению вертикального положения равновесия связки даже при условии симметричности связки относительно центра масс. Обнаруженное наклонное положение равновесия связки в плоскости орбиты для широкой области параметров соответствует малому отклонению троса от местной вертикали, что позволяет также эффективно использовать данную конфигурацию ЭДТС для выполнения задачи по уводу космического мусора с орбиты Земли. Установлена устойчивость по линейному приближению найденного положения равновесия при выполнении соответствующих соотношений для координат концевых масс. Подтверждено, что момент сил Лоренца оказывает стабилизирующее воздействие на ЭДТС и расширяет область устойчивости рабочего режима ЭДТС.

## Литература

1. Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990.
2. Родников А. В., Красильников П. С. О пространственных движениях орбитальной леерной связки // Нелинейная динам. 2017. Т. 13, № 4. С. 505–518. <https://doi.org/10.20537/nd1704004>
3. Forward R. L. Electrodynamic drag terminator tether, Appendix K of high strength-to-weight tapered Hoytether for LEO to GEO payload transport. Final Report on NASA SBIR Phase I Contract NAS8-40690, 10 July 1996.
4. Forward R. L., Hoyt R. P., Uphoff C. Application of the Terminator Tether<sup>TM</sup> electrodynamic drag technology to the deorbit of constellation spacecraft // 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibition, Cleveland, OH, USA, July 13–15, 1998. Art. no. 98-3491. <https://doi.org/10.2514/6.1998-3491>
5. Forward R. L., Hoyt R. P. Terminator Tether<sup>TM</sup>: a spacecraft deorbit device // Journal of Spacecraft and Rockets. 2000. Vol. 37. P. 187–196. <https://doi.org/10.2514/2.3565>

6. Tethers in Space Handbook / Eds. by M.L. Cosmo, E.C. Lorenzini. 3rd ed. Cambridge, MA, USA: Smithsonian Astrophysical Observatory, 1997.
7. Vannaroni G., Dobrowolny M., De Venuto F. Deorbiting with electrodynamic tethers: comparison between different tether configurations // Space Debris. 1999. Vol. 1. P. 159–172. <https://doi.org/10.1023/A:1012570808078>
8. Iess L., Bruno C., Olivieri C., Ponzi U., Parisse M., Laneve G., Vannaroni G., Dobrowolny M., De Venuto F., Bertotti B., Anselmo L. Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. Part I: general concepts and requirements // Acta Astronautica. 2002. Vol. 50. Iss. 7. P. 399–406. [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(01\)00180-1](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(01)00180-1)
9. Iess L., Bruno C., Olivieri C., Vannaroni G. Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. Part II: system configuration and performance // Acta Astronautica. 2002. Vol. 50. Iss. 7. P. 407–416. [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(01\)00181-3](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(01)00181-3)
10. Ishige Y., Kawamoto S., Kibe S. Study on electrodynamic tether system for space debris removal // Acta Astronautica. 2004. Vol. 55. Iss. 11. P. 917–929. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2004.04.015>
11. Yamaigawa Y., Hiragi E., Kishimoto T. Dynamic behavior of electrodynamic tether deorbit system on elliptical orbit and its control by Lorentz force // Aerospace Science and Technology. 2005. Vol. 9. Iss. 4. P. 366–373. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2004.09.005>
12. Zhong R., Zhu Z.H., Libration dynamics and stability of electrodynamic tethers in satellite deorbit // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2013. Vol. 116. P. 279–298. <https://doi.org/10.1007/s10569-013-9489-4>
13. Levin E.M. Dynamic Analysis of Space Tether Missions. San Diego, California: American Astronautical Society, 2007. (Vol. 126 of Advances in the Astronautical Sciences.)
14. Pelaez J., Lorenzini E. C., Lopez-Rebollal O., Ruiz M. A new kind of dynamic instability in electrodynamic tethers // Advances in the Astronautical Sciences. San Diego, CA: Spaceflight Mechanics, AAS Publications, 2000. Vol. 105. P. 1367–1386.
15. Тихонов А. А. Об одной конструктивной схеме электродинамического троса для расширения возможностей и повышения эффективности решения задачи спуска ИСЗ с орбиты // Сборник трудов X международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (ПМТУКТ-2017), 18–24 сентября 2017, Воронеж. 2017. С. 347–350.
16. Тихонов А. А. Патент RU — №2666610 на изобретение «Устройство стабилизации электродинамической тросовой системы для удаления космического мусора» по заявке №2017129790. Приоритет 22.08.2017. Дата гос. Регистрации в Гос. Реестре изобретений РФ 11.09.2018.
17. Tikhonov A. A., Shcherbakova L. F. On equilibrium positions and stabilization of electrodynamic tether system in the orbital frame // The International Scientific Conference on Mechanics “The Eighth Polyakhov’s Reading”, 29 January — 2 February 2018, Saint Petersburg, Russia. 2018. Vol. 1959, art. no. 020001. (AIP Conference Proceedings.) <https://doi.org/doi:10.1063/1.5034626>
18. Тихонов А. А., Петров К. Г. Мультипольные модели магнитного поля Земли // Космические исследования. 2002. Т. 40, № 3. С. 203–212.
19. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Одноосная стабилизация вращательного движения твердого тела при наличии возмущений с нулевыми средними значениями // Вестник С.-Петербурга. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 270–280. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209>
20. Антипов К. А., Тихонов А. А. Мультипольные модели геомагнитного поля: построение N-го приближения // Геомагнетизм и аэрономия. 2013. Т. 53, № 2. С. 257–267.
21. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
22. Петров К. Г., Тихонов А. А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 1: Напряженность магнитного поля Земли в орбитальной системе координат // Вестник С.-Петербурга. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1999. Вып. 1. С. 92–100.
23. Ouchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V. Geomagnetic field models for satellite angular motion studies // Acta Astronautica. 2018. Vol. 144. P. 171–180. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.12.026>
24. Тихонов А. А. Уточнение модели «наклонный диполь» в задаче об эволюции вращательного движения заряженного тела в геомагнитном поле // Космические исследования. 2002. Т. 40, № 2. С. 157–162.
25. Петров К. Г., Тихонов А. А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 2: Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестник С.-Петербурга. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1999. Вып. 15. С. 81–91.

26. Corsi J., Iess L. Stability and control of electrodynamic tether for de-orbiting applications // *Acta Astronautica*. 2001. Vol. 48. Iss. 5–12. P. 491–501. [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(01\)00049-2](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(01)00049-2)
27. Akritas A. *Elements of Computer Algebra with Applications*. New York: Wiley-Interscience, 1989.

Статья поступила в редакцию 4 декабря 2019 г.;  
после доработки 25 декабря 2019 г.;  
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Дериглазов Алексей Павлович — студент; alexeideriglazov@gmail.com

Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.tikhonov@spbu.ru

## The effect of nonuniformity of the Earth's magnetic field on dynamics of electrodynamic space tether system

A. P. Deriglazov, A. A. Tikhonov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Deriglazov A. P., Tikhonov A. A. The effect of nonuniformity of the Earth's magnetic field on dynamics of electrodynamic space tether system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 539–551. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.316> (In Russian)

An electrodynamic space tether system in a circular equatorial orbit under conditions of nonuniformity of the Earth's magnetic field is considered. The dynamic equations of motion are analyzed to search for equilibrium modes of motion. The oblique equilibrium position of the tether in the orbit plane is found. The stability of the found equilibrium is investigated in linear approximation. The results of numerical modeling are presented.

*Keywords:* electrodynamic tether system, stability, geomagnetic field, space debris.

## References

1. Beletsky V. V., Levin E. M., *Dynamics of Space Tether Systems* (Nauka Publ., Moscow, 1990). (In Russian)
2. Rodnikov A. V., Krasilnikov P. S., “On spacial motions of an orbital tethered system”, *Nelineinaya Dinamika* **13** (4), 505–518 (2017). <https://doi.org/10.20537/nd1704004> (In Russian)
3. Forward R. L., *Electrodynamic drag terminator tether, Appendix K of high strength-to-weight tapered Hoytether for LEO to GEO payload transport* (Final Report on NASA SBIR Phase I Contract NAS8-40690, 10 July 1996).
4. Forward R. L., Hoyt R. P., Uphoff C., “Application of the Terminator Tether<sup>TM</sup> electrodynamic drag technology to the deorbit of constellation spacecraft”, *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibition, Cleveland, OH, USA, July 13–15, 1998*, art. no. 98-3491. <https://doi.org/10.2514/6.1998-3491>
5. Forward R. L., Hoyt R. P., “Terminator Tether<sup>TM</sup>: a spacecraft deorbit device”, *Journal of Spacecraft and Rockets* **37**, 187–196 (2000). <https://doi.org/10.2514/2.3565>
6. *Tethers in Space Handbook* (3rd ed., M. L. Cosmo, E. C. Lorenzini (eds.), Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, MA, USA, 1997).
7. Vannaroni G., Dobrowolny M., De Venuto F., “Deorbiting with electrodynamic tethers: comparison between different tether configurations”, *Space Debris* **1**, 159–172 (1999). <https://doi.org/10.1023/A:1012570808078>
8. Iess L., Bruno C., Olivieri C., Ponzi U., Parrisè M., Laneve G., Vannaroni G., Dobrowolny M., De Venuto F., Bertotti B., Anselmo L., “Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. Part I: general concepts and requirements”, *Acta Astronautica* **50**, iss. 7, 399–406 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(01\)00180-1](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(01)00180-1)
9. Iess L., Bruno C., Olivieri C., Vannaroni G., “Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. Part II: system configuration and performance”, *Acta Astronautica* **50**, iss. 7, 407–416 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(01\)00181-3](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(01)00181-3)

10. Ishige Y., Kawamoto S., Kibe S., “Study on electrodynamic tether system for space debris removal”, *Acta Astronautica* **55**, iss. 11, 917–929 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2004.04.015>
11. Yamaigawa Y., Hiragi E., Kishimoto T., “Dynamic behavior of electrodynamic tether deorbit system on elliptical orbit and its control by Lorentz force”, *Aerospace Science and Technology* **9**, iss. 4, 366–373 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.ast.2004.09.005>
12. Zhong R., Zhu Z.H., “Libration dynamics and stability of electrodynamic tethers in satellite deorbit”, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **116**, 279–298 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10569-013-9489-4>
13. Levin E. M., *Dynamic Analysis of Space Tether Missions* (American Astronautical Society, San Diego, California, 2007, vol. 126 of Advances in the Astronautical Sciences).
14. Pelaez J., Lorenzini E. C., Lopez-Rebollal O., Ruiz M., “A new kind of dynamic instability in electrodynamic tethers”, *Advances in the Astronautical Sciences* **105**, 1367–1386 (Spaceflight Mechanics, AAS Publications, San Diego, CA, 2000).
15. Tikhonov A. A., “Ob odnoy konstruktivnoy skheme elektrodinamicheskogo trosha dlya rasshireniya vozmozhnostey i povysheniya effektivnosti resheniya zadachi spuska ISZ s orbity”, *Sbornik trudov X mezhdunarodnoy nauchoy konferencii “Sovremennyye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy”, September 18–24, 2017, Voronezh*, 347–350 (2017). (In Russian)
16. Tikhonov A. A., Device of stabilization of electrodynamic cable system for removing space waste. RU-2666610-C1, B64G-001/32; B64G-001/34 (Web of Science Derwent Collection, No 2018-81465E).
17. Tikhonov A. A., Shcherbakova L. F., “On equilibrium positions and stabilization of electrodynamic tether system in the orbital frame”, *The International Scientific Conference on Mechanics “The Eighth Polyakhov’s Reading”, 29 January – 2 February 2018, Saint Petersburg, Russia* **1959**, 020001 (AIP Conference Proceedings, 2018). <https://doi.org/doi:10.1063/1.5034626>
18. Tikhonov A. A., Petrov K. G., “Multipole models of the Earth’s magnetic field”, *Cosmic Research* **40** (3), 203–212 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1015916718570>
19. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A., “Uniaxial Attitude Stabilization of a Rigid Body under Conditions of Nonstationary Perturbations with Zero Mean Values”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **52**, iss. 2, 187–193 (2019). <https://doi.org/10.1134/S106345411902002X>
20. Antipov K. A., Tikhonov A. A., “Multipole Models of the Geomagnetic Field: Construction of the N-th Approximation”, *Geomagnetism and Aeronomy* **53** (2), 257–267 (2013). <https://doi.org/10.1134/S0016793213020023>
21. Beletsky V. V., *Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass* (Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1966).
22. Petrov K. G., Tikhonov A. A., “The moment of Lorentz forces, acting upon the charged satellite in the geomagnetic field. Part 1. The strength of the Earth’s magnetic field in the orbital coordinate system”, *Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 1, 92–100 (1999). (In Russian)
23. Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V., “Geomagnetic field models for satellite angular motion studies”, *Acta Astronautica* **144**, 171–180 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.12.026>
24. Tikhonov A. A., “Refinement of the Oblique Dipole Model in the Evolution of Rotary Motion of a Charged Body in the Geomagnetic Field”, *Cosmic Research* **40** (2), 157–162 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1015149420500>
25. Petrov K. G., Tikhonov A. A., “The moment of Lorentz forces, acting upon the charged satellite in the geomagnetic field. Part 2. The determination of the moment and estimations of its components”, *Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 15, 81–91 (1999). (In Russian)
26. Corsi J., Iess L., “Stability and control of electrodynamic tether for de-orbiting applications”, *Acta Astronautica* **48** (5–12), 491–501 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(01\)00049-2](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(01)00049-2)
27. Akritas A., *Elements of Computer Algebra with Applications* (Wiley-Interscience, New York, 1989).

Received: December 4, 2019

Revised: December 25, 2019

Accepted: March 19, 2020

#### Authors’ information:

Alexey P. Deriglazov — alexeideriglazov@gmail.com

Alexey A. Tikhonov — a.tikhonov@spbu.ru