

## Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 1. Постановка задачи

*В. М. Рябов*<sup>1</sup>, *Б. А. Ярцев*<sup>1,2</sup>, *Л. В. Паршина*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>2</sup> Крыловский государственный научный центр,

Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

**Для цитирования:** *Рябов В. М., Ярцев Б. А., Паршина Л. В.* Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 1. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 469–480. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.309>

Предложена математическая модель затухающих колебаний трехслойных пластин, образованных двумя жесткими анизотропными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера. Модель строится на основе вариационного принципа Гамильтона, уточненной теории пластин первого порядка, модели комплексных модулей и принципа упруго-вязкоупругого соответствия в линейной теории вязкоупругости. Считается, что для материалов жестких слоев температурно-частотная зависимость упруго-диссипативных характеристик пренебрежимо мала, в то время как для вязкоупругого полимера мягкого слоя эта зависимость учтена. Минимизация функционала Гамильтона позволяет свести задачу о затухающих колебаниях анизотропных конструкций к алгебраической проблеме комплексных собственных значений. Для формирования системы алгебраических уравнений применяется метод Рунге с использованием многочленов Лежандра в качестве координатных функций. Сначала находятся вещественные решения. Для определения комплексных собственных частот пластины в качестве их начальных значений используются найденные вещественные собственные частоты, а затем вычисляются комплексные частоты методом итераций третьего порядка. Обсуждаются результаты исследования сходимости численного решения. Приводится оценка достоверности математической модели и метода численного решения, выполненная путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь.

*Ключевые слова:* пластина, композит, анизотропия, вязкоупругий полимер, температурно-частотная зависимость, связанные колебания, собственная частота, коэффициент механических потерь.

1. Одним из преимуществ композитных конструкций являются высокие демпфирующие свойства. Поскольку характерные для конструкционных композитов уровни диссипации энергии превосходят аналогичные показатели для металлов и сплавов на 1–2 десятичных порядка, то, в отличие от конструкций из традиционных материалов, демпфирование в композитных конструкциях рассматривается не как полезный вторичный эффект, а как один из основных параметров проектирования [1–3]. Этим и объясняется устойчивый интерес к проблеме рассеяния энергии при колебаниях слоистых композитных конструкций, подтверждающийся рядом обзо-

ров, содержащих анализ работ на данную тему [1–7]. Отметим, что основная масса статей посвящена созданию математических моделей, а также расчетному и экспериментальному исследованию влияния составов и структур армирования композита, граничных условий и температурных режимов эксплуатации на демпфирующую способность композитов. Выполненные исследования позволили установить диапазоны изменения диссипативных характеристик конструкционных композитов в зависимости от перечисленных факторов и показать недостаточность реализуемых уровней рассеяния энергии для снижения амплитуд резонансных колебаний некоторых композитных конструкций до требуемых величин. Поэтому появились предложения по способам существенного повышения диссипации энергии за счет введения в состав слоистой структуры вязкоупругих материалов (VDM — viscoelastic damping material) [8]. Известны два основных способа введения в состав слоистой структуры вязкоупругих материалов. Первый способ состоит в нанесении на одну из наружных поверхностей слоистой структуры слоя «жесткого» изотропного вязкоупругого полимера (extensional damping, free layer damping) [9–11]. Второй способ предполагает создание композитных структур, внутри которых размещены слои «мягких» вязкоупругих полимеров (CLD — constrained layer damping) [12–18]. Используемое здесь деление полимеров на «жесткие» и «мягкие» условно и определяется отношением температуры эксплуатации (температуры окружающей среды)  $T_C$  к температуре стеклования полимера  $T_g$ . При  $T_C/T_g < 1$  полимер считается «жестким», а при  $T_C/T_g \approx 1$  — «мягким».

Очевидно, что бесконечное многообразие возможных вариантов составов неоднородных по толщине структур, в которые включены слои «мягких» вязкоупругих полимеров, порождает необходимость прогнозирования их демпфирующей способности на основе использования методов математического моделирования, позволяющих учитывать как особенности распределения вязкоупругого материала по объему конструкции, так и температурно-частотный режим ее эксплуатации. Последнее обстоятельство и послужило причиной написания данной работы.

**2.** Рассматривается безопорная прямоугольная пластина, образованная двумя жесткими анизотропными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера (рис. 1). Каждый жесткий слой представляет собой анизотропную структуру, формируемую конечным числом произвольно ориентированных ортотропных вязкоупругих слоев композитов. Проскальзывание между слоями отсутствует.

Математическая модель затухающих колебаний трехслойной пластины строится на основе теории слоистых регулярных структур, предложенной в [19]. В соответствии с этой теорией жесткие слои воспринимают основные усилия в плоскости армирования, а мягкий средний слой отвечает за поперечный сдвиг. Деформация слоистой конструкции полностью определяется перемещениями жестких слоев, для каждого из которых учитывается влияние поперечного сдвига в соответствии с уточненной теорией пластин первого порядка (теорией Рейсснера — Миндлина). На поверхностях контакта жестких и мягкого слоев выполняются условия непрерывности перемещений, в то время как поля деформаций могут иметь разрывы. В частности, на границе жесткого и мягкого слоев претерпевают разрыв деформации  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$ . Срединные плоскости жестких слоев совмещаются с глобальными системами координат  $x_{(r)}y_{(r)}z_{(r)}$  (рис. 1). Здесь и в дальнейшем индексы  $r = 1, 3$ , заключенные в круглые скобки, соответствуют жестким слоям, а маркируемый квадратными скобками индекс  $r = 2$  соответствует мягкому слою.

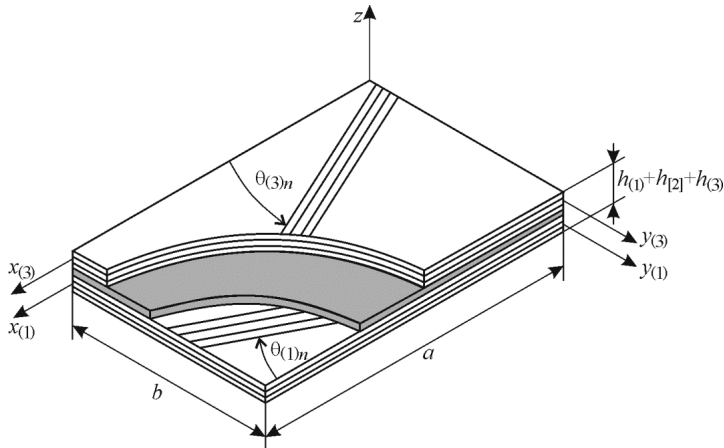


Рис. 1. Трехслойная пластина.

В соответствии с уточненной теорией пластин первого порядка элементы вектора перемещений  $r$ -го жесткого слоя описываются соотношениями

$$\begin{aligned} U^{(r)}(x, y, z, t) &= u^{(r)}(x, y, t) + z_{(r)} \alpha^{(r)}(x, y, t), \\ V^{(r)}(x, y, z, t) &= v^{(r)}(x, y, t) + z_{(r)} \beta^{(r)}(x, y, t), \\ W^{(r)}(x, y, z, t) &= w^{(r)}(x, y, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u^{(r)}, v^{(r)}, w^{(r)}$  — линейные перемещения срединной поверхности в направлениях осей  $x_{(r)}, y_{(r)}, z_{(r)}$ ;  $\alpha^{(r)}, \beta^{(r)}$  — углы поворота относительно осей  $y_{(r)}, z_{(r)}$ .

Элементы вектора перемещений мягкого слоя выражаются через элементы векторов перемещений жестких слоев ( $r = 1, 3$ ) при  $z_{(1)} = h_{(1)}/2$  и  $z_{(3)} = -h_{(3)}/2$ , где  $h_{(1)}, h_{(3)}$  — толщины жестких слоев:

$$\begin{aligned} U^{[2]}(x, y, z, t) &= u^{[2]}(x, y, t) + z_{[2]} \alpha^{[2]}(x, y, t), \\ V^{[2]}(x, y, z, t) &= v^{[2]}(x, y, t) + z_{[2]} \beta^{[2]}(x, y, t), \\ W^{[2]}(x, y, z, t) &= w^{[2]}(x, y, t) + z_{[2]} \gamma^{[2]}(x, y, t). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} u^{[2]} &= \frac{1}{2} \left[ u^{(1)} + u^{(3)} + \frac{1}{2} (h_{(1)} \alpha^{(1)} - h_{(3)} \alpha^{(3)}) \right], \\ \alpha^{[2]} &= \frac{1}{h_{[2]}} \left[ u^{(3)} - u^{(1)} - \frac{1}{2} (h_{(3)} \alpha^{(3)} + h_{(1)} \alpha^{(1)}) \right], \\ v^{[2]} &= \frac{1}{2} \left[ v^{(1)} + v^{(3)} + \frac{1}{2} (h_{(1)} \beta^{(1)} - h_{(3)} \beta^{(3)}) \right], \\ \beta^{[2]} &= \frac{1}{h_{[2]}} \left[ v^{(3)} - v^{(1)} - \frac{1}{2} (h_{(3)} \beta^{(3)} + h_{(1)} \beta^{(1)}) \right], \\ w^{[2]} &= \frac{1}{2} (w^{(3)} + w^{(1)}), \quad \gamma^{[2]} = \frac{1}{h_{[2]}} (w^{(3)} - w^{(1)}), \end{aligned}$$

где  $h_{[2]}$  — толщина мягкого слоя.

Элементы вектора деформаций  $r$ -го жесткого слоя связаны с элементами вектора его перемещений (1) соотношениями

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(r)} \\ \varepsilon_{yy}^{(r)} \\ \varepsilon_{yz}^{(r)} \\ \varepsilon_{xz}^{(r)} \\ \varepsilon_{xy}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx}^{(r)} \\ e_{yy}^{(r)} \\ e_{yz}^{(r)} \\ e_{xz}^{(r)} \\ e_{xy}^{(r)} \end{pmatrix} + z_{(r)} \begin{pmatrix} k_{xx}^{(r)} \\ k_{yy}^{(r)} \\ k_{yz}^{(r)} \\ k_{xz}^{(r)} \\ k_{xy}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x}^{(r)} \\ v_{,y}^{(r)} \\ \beta^{(r)} + w_{,y}^{(r)} \\ \alpha^{(r)} + w_{,x}^{(r)} \\ u_{,y}^{(r)} + v_{,x}^{(r)} \end{pmatrix} + z_{(r)} \begin{pmatrix} \alpha_{,x}^{(r)} \\ \beta_{,y}^{(r)} \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{,y}^{(r)} + \beta_{,x}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $(\dots)_{,x}, (\dots)_{,y}$  — символы частных производных по пространственным переменным  $x, y$ .

Поскольку для мягкого слоя учитываются только деформации обжатия и поперечного сдвига, то вектор деформаций записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{zz}^{[2]} \\ \varepsilon_{yz}^{[2]} \\ \varepsilon_{xz}^{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{,z}^{[2]} \\ V_{,z}^{[2]} + W_{,y}^{[2]} \\ U_{,z}^{[2]} + W_{,x}^{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{zz}^{[2]} \\ e_{yz}^{[2]} \\ e_{xz}^{[2]} \end{pmatrix} + z_{[2]} \begin{pmatrix} 0 \\ k_{yz}^{[2]} \\ k_{xz}^{[2]} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{zz}^{[2]} \\ \varepsilon_{yz}^{[2]} \\ \varepsilon_{xz}^{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{[2]}}(w^{(3)} - w^{(1)}) \\ \frac{1}{h_{[2]}}[v^{(3)} - v^{(1)} - \frac{1}{2}(h_{(3)}\beta^{(3)} + h_{(1)}\beta^{(1)})] + \frac{1}{2}(w_{,y}^{(3)} + w_{,y}^{(1)}) \\ \frac{1}{h_{[2]}}[u^{(3)} - u^{(1)} - \frac{1}{2}(h_{(3)}\alpha^{(3)} + h_{(1)}\alpha^{(1)})] + \frac{1}{2}(w_{,x}^{(3)} + w_{,x}^{(1)}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k_{yz}^{[2]} \\ k_{xz}^{[2]} \end{pmatrix} = \frac{1}{h_{[2]}} \begin{pmatrix} 0 \\ w_{,y}^{(3)} - w_{,y}^{(1)} \\ w_{,x}^{(3)} - w_{,x}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

При произвольной ориентации ортотропного слоя композита относительно связанной с направлениями осей  $r$ -го жесткого слоя глобальной системы координат  $x_{(r)}y_{(r)}z_{(r)}$  происходит изменение класса его упругой симметрии — ортотропный материал трансформируется в моноклинный. Тогда, учитывая, что в двумерной теории пластин пренебрегают трансверсальными нормальными напряжениями ( $\sigma_{zz} = 0$ ), физические соотношения для компонуемого в состав  $r$ -го жесткого слоя  $k$ -го моноклинного слоя композита записываются в виде [20–21]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{Q}_{lm} = \bar{Q}_{lm}(f, T_C)$  — элементы комплексной матрицы жесткости моноклинного слоя композита в связанной с направлениями осей  $r$ -го жесткого слоя глобальной системы координат  $x_{(r)}y_{(r)}z_{(r)}$ ,  $f$  — частота колебаний;  $T_C$  — температура окружающей среды.

В общем случае  $\bar{Q}_{lm} = \bar{Q}_{lm}(f, T_C)$ , между тем известно, что при  $T_C < T_g$  температурно-частотная зависимость упруго-диссипативных характеристик конструкционных композитов пренебрежимо мала [1–7, 22]. Поэтому далее при определении вещественных и мнимых частей элементов комплексной матрицы жесткости слоев композита учитывается лишь влияние их ориентации относительно глобальной системы координат.

Частотная зависимость вещественной части комплексного модуля упругости и коэффициента механических потерь вязкоупругого полимера при фиксированных значениях температуры окружающей среды описывается полиномами вида

$$\lg \operatorname{Re} E(f) = \sum_{m=0}^N p_m (\lg f)^{N-m}, \quad \lg \eta(f) = \sum_{n=0}^M q_n (\lg f)^{M-n},$$

получаемыми в результате аппроксимации экспериментальных данных.

Интегрируя элементы вектора напряжений (3) по толщине каждого слоя с учетом соотношений (2) и суммируя результаты по количеству слоев, определим мембранные усилия, изгибающие моменты и сдвиговые усилия, возникающие в  $r$ -м жестком слое трехслойной пластины независимо от толщин и ориентации слоев [20, 21]:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^{(r)} \\ N_{yy}^{(r)} \\ N_{xy}^{(r)} \\ M_{xx}^{(r)} \\ M_{yy}^{(r)} \\ M_{xy}^{(r)} \\ Q_{yz}^{(r)} \\ Q_{xz}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(r)} & A_{12}^{(r)} & A_{16}^{(r)} & B_{11}^{(r)} & B_{12}^{(r)} & B_{16}^{(r)} & 0 & 0 \\ A_{12}^{(r)} & A_{22}^{(r)} & A_{26}^{(r)} & B_{12}^{(r)} & B_{22}^{(r)} & B_{26}^{(r)} & 0 & 0 \\ A_{16}^{(r)} & A_{26}^{(r)} & A_{66}^{(r)} & B_{16}^{(r)} & B_{26}^{(r)} & B_{66}^{(r)} & 0 & 0 \\ B_{11}^{(r)} & B_{12}^{(r)} & B_{16}^{(r)} & D_{11}^{(r)} & D_{12}^{(r)} & D_{16}^{(r)} & 0 & 0 \\ B_{12}^{(r)} & B_{22}^{(r)} & B_{26}^{(r)} & D_{12}^{(r)} & D_{22}^{(r)} & D_{26}^{(r)} & 0 & 0 \\ B_{16}^{(r)} & B_{26}^{(r)} & B_{66}^{(r)} & D_{16}^{(r)} & D_{26}^{(r)} & D_{66}^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^{(r)} & A_{45}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45}^{(r)} & A_{55}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{,x}^{(r)} \\ v_{,y}^{(r)} \\ u_{,y}^{(r)} + v_{,x}^{(r)} \\ \alpha_{,x}^{(r)} \\ \beta_{,y}^{(r)} \\ \alpha_{,y}^{(r)} + \beta_{,x}^{(r)} \\ \beta^{(r)} + w_{,y}^{(r)} \\ \alpha^{(r)} + w_{,x}^{(r)} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Элементы матриц мембранных  $A_{lm}^{(r)}$ , смешанных  $B_{lm}^{(r)}$  и изгибных  $D_{lm}^{(r)}$  жесткостей  $r$ -го жесткого слоя вычисляются по известным формулам, приведенным в [9].

Потенциальная энергия деформации  $U_{(r)}$  и кинетическая энергия  $T_{(r)}$   $r$ -го жесткого слоя трехслойной пластины определяются соотношениями

$$U_{(r)} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [N_{xx}^{(r)} u_{,x}^{(r)} + N_{yy}^{(r)} v_{,y}^{(r)} + N_{xy}^{(r)} (u_{,y}^{(r)} + v_{,x}^{(r)}) + M_{xx}^{(r)} \alpha_{,x}^{(r)} + M_{yy}^{(r)} \beta_{,y}^{(r)} + M_{xy}^{(r)} (\alpha_{,y}^{(r)} + \beta_{,x}^{(r)}) + Q_{yz}^{(r)} (\beta^{(r)} + w_{,y}^{(r)}) + Q_{xz}^{(r)} (\alpha^{(r)} + w_{,x}^{(r)})] dx dy, \quad (5)$$

$$T_{(r)} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ I_0^{(r)} [(\dot{u}^{(r)})^2 + (\dot{v}^{(r)})^2 + (\dot{w}^{(r)})^2] + 2I_1^{(r)} [\dot{u}^{(r)} \dot{\alpha}^{(r)} + \dot{v}^{(r)} \dot{\beta}^{(r)}] + I_2^{(r)} [(\dot{\alpha}^{(r)})^2 + (\dot{\beta}^{(r)})^2] \} dx dy. \quad (6)$$

В формуле (6) введены следующие обозначения:

$$(I_0^{(r)}, I_1^{(r)}, I_2^{(r)}) = \sum_{k=1}^p \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k^{(r)} (1, z_{(r)}, z_{(r)}^2) dz,$$

где  $\rho_k^{(r)}$  — плотность материала  $k$ -го слоя композита, входящего в состав  $r$ -го жесткого слоя трехслойной пластины.

Потенциальная энергия деформации  $U_{[2]}$  мягкого слоя такова:

$$U_{[2]} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b h_{[2]} \left[ E(e_{zz}^{[2]})^2 + G \left( (e_{yz}^{[2]})^2 + \frac{h_{[2]}^2}{12} (k_{yz}^{[2]})^2 \right) + \right. \\ \left. + G \left( (e_{xz}^{[2]})^2 + \frac{h_{[2]}^2}{12} (k_{xz}^{[2]})^2 \right) \right] dx dy, \quad (7)$$

где  $E, G$  — комплексный модуль упругости и комплексный модуль сдвига вязкоупругого полимера.

Кинетическая энергия  $T_{[2]}$  мягкого слоя определяется соотношением

$$T_{[2]} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ I_0^{[2]} [(\dot{u}^{[2]})^2 + (\dot{v}^{[2]})^2 + (\dot{w}^{[2]})^2] + I_2^{[2]} [(\dot{\alpha}^{[2]})^2 + (\dot{\beta}^{[2]})^2 + (\dot{\gamma}^{[2]})^2] \} dx dy. \quad (8)$$

В равенстве (8) введены следующие обозначения:

$$(I_0^{[2]}, I_1^{[2]}, I_2^{[2]}) = \int_{-h_{[2]}/2}^{h_{[2]}/2} \rho_{[2]}(1, z_{[2]}, z_{[2]}^2) dz = \left( \rho_{[2]} h_{[2]}, 0, \rho_{[2]} \frac{h_{[2]}^3}{12} \right),$$

где  $\rho_{[2]}$  — плотность вязкоупругого полимера.

Для записи уравнений затухающих колебаний трехслойной пластины используется вариационный принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (9)$$

где  $L = T - U$  — функция Лагранжа,  $T = T_{(1)} + T_{[2]} + T_{(3)}$ ,  $U = U_{(1)} + U_{[2]} + U_{(3)}$ .

Подстановка (5)–(8) с учетом квазигармонического характера колебаний в функционал (9) и его последующая минимизация сводит задачу о затухающих колебаниях трехслойной пластины к алгебраической проблеме комплексных собственных значений  $\omega$ . Для ее формирования применяется метод Рунге с использованием многочленов Лежандра в качестве координатных функций. В итоге приходим к системе

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0, \quad (10)$$

для решения которой используется метод итераций третьего порядка [10]. Отметим, что искомым вектор  $X$  имеет размерность  $10N^2$ , и для применяемых при вычислениях значениях  $N \in [10, 15]$  изменяется от 1000 до 2250.

**3.** Аналогичным образом можно получить уравнения движения глобально ортотропного трехслойного безопорного стержня, образованного двумя жесткими ортотропными слоями ( $A_{16}^{(r)} = A_{26}^{(r)} = A_{45}^{(r)} = B_{16}^{(r)} = B_{26}^{(r)} = D_{16}^{(r)} = D_{26}^{(r)} = 0$ ) и мягким слоем изотропного вязкоупругого полимера. Для этого пренебрежем деформированием срединных поверхностей жестких слоев ( $r = 1, 3$ ) в направлениях осей  $y_{(1)}$

и  $y_{(3)}$  при  $b \rightarrow h_{(1)}, h_{(3)}$ , т.е. считаем, что  $\tilde{u}^{(r)} \neq 0, \tilde{\alpha}^{(r)} \neq 0, \tilde{u}_{,x}^{(r)} \neq 0, \tilde{\alpha}_{,x}^{(r)} \neq 0, \tilde{\alpha}^{(r)} + \tilde{w}_{,x}^{(r)} \neq 0, \tilde{v}^{(r)} = \tilde{\beta}^{(r)} = \tilde{v}_{,y}^{(r)} = \tilde{u}_{,y}^{(r)} + \tilde{v}_{,x}^{(r)} = \tilde{\beta}_{,y}^{(r)} = \tilde{\alpha}_{,y}^{(r)} + \tilde{\beta}_{,x}^{(r)} = \tilde{\beta}^{(r)} + \tilde{w}_{,y}^{(r)} = 0$ . В этом случае  $N_{yy}^{(r)} = N_{xy}^{(r)} = M_{yy}^{(r)} = M_{xy}^{(r)} = Q_{yz}^{(r)} = 0$  и размерность системы линейных алгебраических уравнений (4) понижается:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}^{(r)} \\ M_{xx}^{(r)} \\ Q_{xz}^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(r)} & B_{11}^{(r)} & 0 \\ B_{11}^{(r)} & D_{11}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x}^{(r)} \\ \alpha_{,x}^{(r)} \\ \alpha^{(r)} + w_{,x}^{(r)} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

С учетом зависимостей (11) и квазигармонического характера колебаний условиями стационарности функционала (9) задача о затухающих колебаниях глобально ортотропного трехслойного стержня сводится к виду (10) и используется далее при обосновании достоверности разработанной математической модели путем сравнения расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний.

**4.** Сходимость предложенного метода численного решения дифференциальных уравнений движения трехслойных неоднородных композитных структур исследовалась на примере прямоугольной трехслойной пластины ( $a = 0,16$  м,  $b = a/4 = 0,04$  м) путем варьирования числа координатных функций  $N$  по обоим независимым пространственным переменным  $x, y$ . Жесткие слои трехслойной пластины толщиной  $h_{(1)} = h_{(3)} = h = a/100 = 0,0016$  м = const представляют собой квазиоднородные структуры, образованные совокупностью конечного числа армирующих слоев углепластика HMS/DX-209 ( $\rho = 1580$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_{11} = 191(1 + i \cdot 7,8 \cdot 10^{-4})$  ГПа,  $E_{22} = 5(1 + i \cdot 6,7 \cdot 10^{-3})$  ГПа,  $G_{12} = G_{13} = 3(1 + i \cdot 1,16 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $G_{23} = 2,5(1 + i \cdot 1,15 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,279$ ). Ориентация всех армирующих слоев относительно связанных с направлениями осей пластины глобальных систем координат  $x_{(1)}y_{(1)}z_{(1)}$  и  $x_{(3)}y_{(3)}z_{(3)}$  считалась одинаковой:  $\theta_{(1)} = \theta_{(3)} = 0^\circ$ . Жесткие слои связаны между собой мягким слоем изотропного вязкоупругого полимера ВДМ-2 толщиной  $h_{[2]} = 0,00032$  м. Температурно-частотные зависимости вещественной части комплексного модуля упругости  $\text{Re } E(f, T_C)$  и коэффициента механических потерь  $\eta = \eta(f, T)$  вязкоупругого полимера ВДМ-2 ( $\nu \approx 0,5, \rho = 1290$  кг/м<sup>3</sup>) приведены на рис. 2.

Исследования сходимости численного решения выполнялись для трехслойной пластины с относительной толщиной мягкого слоя вязкоупругого полимера  $\bar{h} = h_{[2]}/h = 0,2$  при трех значениях температуры окружающей среды:  $T_C = 0^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 40^\circ\text{C}$ . Анализ полученных результатов позволяет отметить быструю сходимость решения, поскольку во всех рассмотренных случаях для первых шести тонов колебаний рассматриваемой пластины  $\tilde{f}_i = (f_{i(N=j)}/f_{i(N=11)}) \rightarrow 1$  и  $\tilde{\eta}_i = (\eta_{i(N=j)}/\eta_{i(N=11)}) \rightarrow 1$  при  $j \geq 8$ . Здесь  $f_{i(N=j)}, \eta_{i(N=j)}$  — значения собственной частоты и коэффициента механических потерь  $i$ -го тона колебаний при  $j = \overline{6, 11}$ .

**5.** Оценка достоверности предложенной математической модели и разработанного метода численного решения дифференциальных уравнений движения проводилась путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь безопорных трехслойных пластин. Для этого были изготовлены две серии трехслойных пластин (по 4 образца в серии:  $a = 0,25$  м,  $b = 0,04$  м). Жесткие слои трехслойных пластин выполнялись из однопослойного углепластика SM-Preg-C-230/600 SP004 39 ( $h_{(1)} = h_{(3)} = h = 0,005$  м;  $\theta_1 = \theta_3 = \theta = 0^\circ$ ). Мягкий слой трехслойных пластин первой серии выполнялся из

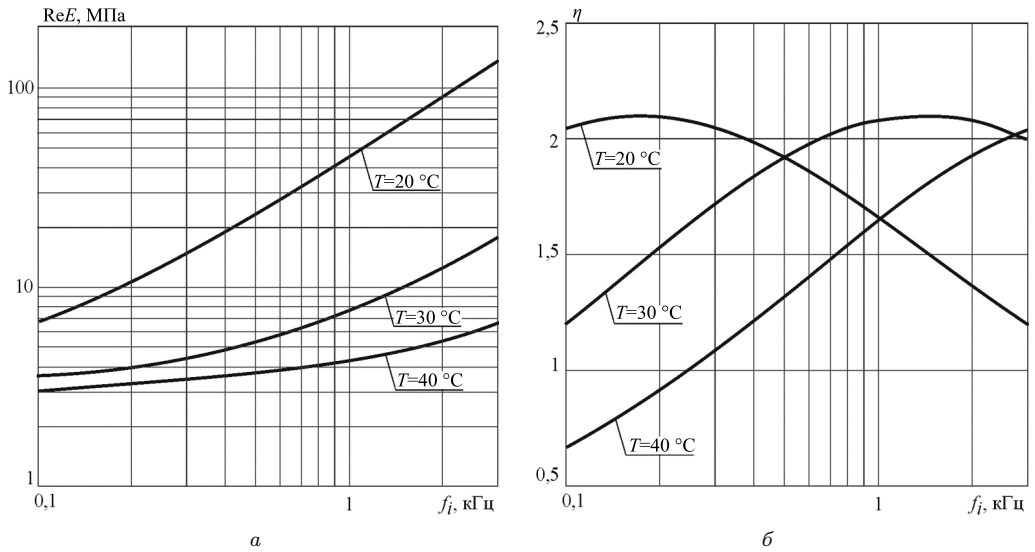


Рис. 2. Частотные зависимости вещественной части комплексного модуля упругости (а), коэффициента механических потерь (б) вязкоупругого полимера ВДМ-2 при фиксированных значениях температуры окружающей среды  $T_C = \text{const}$ .

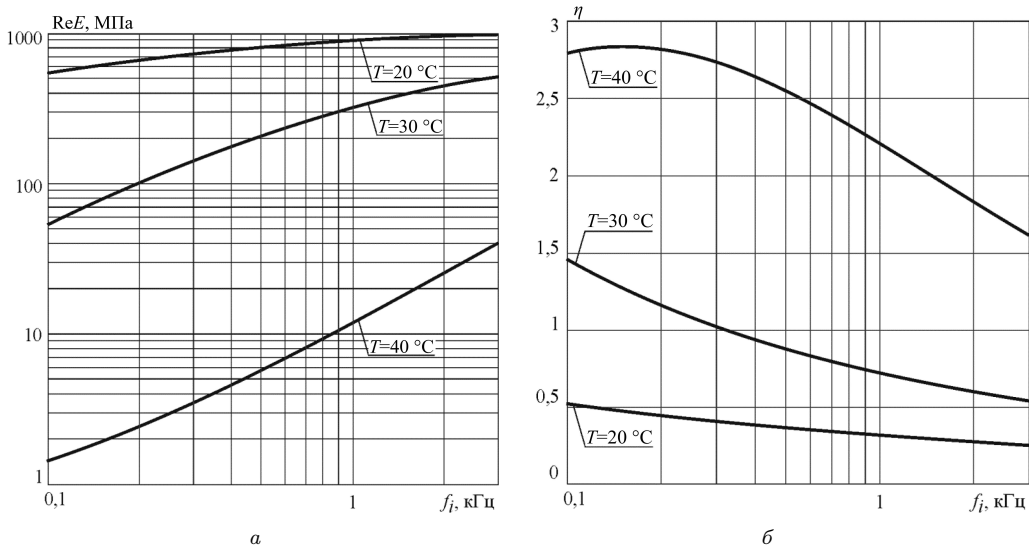


Рис. 3. Частотные зависимости вещественной части комплексного модуля упругости (а), коэффициента механических потерь (б) вязкоупругого полимера ВДМ-1 при фиксированных значениях температуры окружающей среды  $T_C = \text{const}$ .

вязкоупругого полимера ВДМ-1 ( $h_{[2]} = 0,0006$  м), а трехслойных пластин второй серии — из вязкоупругого полимера ВДМ-2 ( $h_{[2]} = 0,001$  м). Упруго-диссипативные характеристики однонаправленного углепластика SM-Preg-C-230/600 CP004 39 ( $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_{11} = 120(1 + i \cdot 9 \cdot 10^{-4})$  ГПа,  $E_{22} = 8(1 + i \cdot 9,6 \cdot 10^{-3})$  ГПа,  $G_{12} = G_{13} = 4,4(1 + i \cdot 1,6 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $G_{23} = 2,7(1 + i \cdot 1,5 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,27$ ) и вязкоупругих полимеров (рис. 2, 3) определялись экспериментально.



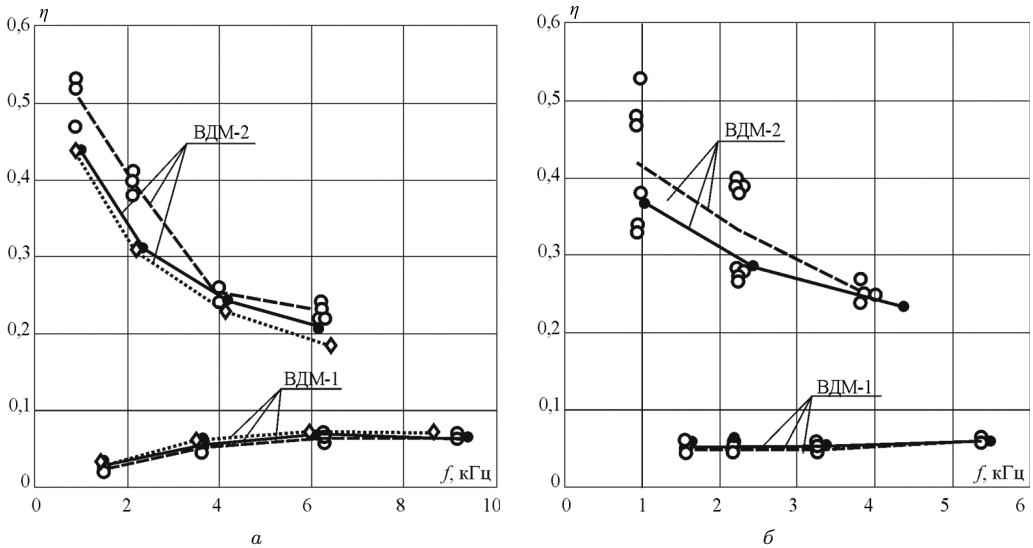


Рис. 4. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь изгибных (а) и крутильных (б) колебаний безопорной трехслойной пластины ( $\theta = \theta_1 = \theta_3 = 0^\circ$ ,  $T_C = 23^\circ\text{C}$ ).

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений собственных частот  $f_{i\text{ cal}}$ ,  $f_{i\text{ exp}}$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_{i\text{ cal}}$ ,  $\eta_{i\text{ exp}}$  изгибных ( $i = \overline{1, 4}$ ) и крутильных ( $i = \overline{1, 3}$ ) колебаний трехслойных пластин приведено на рис. 4. На этом рисунке сплошными линиями представлены зависимости  $\eta_{i\text{ cal}} = \eta_{i\text{ cal}}(f)$ , вычисленные по модели трехслойной пластины, точками обозначены результаты эксперимента, а пунктирными линиями — средние экспериментальные значения. Помимо этого, на рис. 4, а точечными линиями обозначены расчетные зависимости, полученные по модели глобально ортотропного трехслойного стержня.

Сопоставление полученных результатов позволяют утверждать, что использование обоих методов прогнозирования диссипативных свойств приводит к хорошему согласованию с экспериментальными данными. Расхождения  $\Delta f_i = [(f_{i\text{ cal}}/f_{i\text{ exp}}) - 1] \cdot 100\%$ ,  $\Delta \eta_i = [(\eta_{i\text{ cal}}/\eta_{i\text{ exp}}) - 1] \cdot 100\%$  между значениями  $f_{i\text{ cal}} = f_{i\text{ cal}}(f)$  и  $f_{i\text{ exp}} = f_{i\text{ exp}}(f)$ ,  $\eta_{i\text{ cal}} = \eta_{i\text{ cal}}(f)$  и  $\eta_{i\text{ exp}} = \eta_{i\text{ exp}}(f)$  возрастают по мере увеличения демпфирующей способности механической системы, но для всех рассмотренных случаев справедливы неравенства  $|\Delta f_i| \leq 10\%$ ,  $|\Delta \eta_i| \leq 15\%$ . Следовательно, достоверность предложенных математических моделей и разработанных методов численного решения дифференциальных уравнений движения обоснована.

## Литература

1. Bert C. W. Composite Materials: a Survey of Damping Capacity of Fiber Reinforced Composites // Damping Applications for Vibration Control. ASME AMD-38. 1980. P. 53–63.
2. Gibson R. F. Dynamic Mechanical Properties of Advanced Composite Materials and Structures: A Review // Shock & Vibration Digest. 1987. Vol. 19, no. 7. P. 13–22.
3. Зиновьев П. А., Ермаков Ю. Н. Характеристики рассеяния энергии при колебаниях в элементах конструкций из волокнистых композитов (обзор). М.: ЦНИИ научно-техн. информации. 1989.
4. Benchekchou B., Coni M., Howarth H., White R. Some aspects of vibration damping improvement in composite materials // Composites. Part B: Engineering. 1998. Vol. 29B. P. 809–817.

5. Chandra R., Singh S. P., Gupta K. Damping studies in fiber-reinforced composites — a review // Composite Structures. 1999. Vol. 46. P. 41–51. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00041-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00041-0)
6. Finegan I. C., Gibson R. F. Recent research on enhancement of damping in polymer composites // Composite Structures. 1999. Vol. 44, no. 2–3. P. 89–98. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00073-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00073-7)
7. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M. Damping in composite materials: Properties and models // Composites: Part B. 2015. Vol. 78. P. 144–152. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.03.081>
8. Zhou X. Q., Yu D. Y., Shao X. Y., Zhang S. Q., Wang S. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review // Composite Structures. 2016. Vol. 136. P. 460–480. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.10.014>
9. Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 1. Постановка задачи // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 300–309. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.210>
10. Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 2. Метод решения // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 678–688. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.414>
11. Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 3. Численный эксперимент // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 144–156. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.111>
12. Berthelot J.-M. Damping analysis of orthotropic composites with interleaved viscoelastic layers: modeling // Journal of Composite Materials. 2006. Vol. 40. Iss. 21. P. 1889–1909. <https://doi.org/10.1177/0021998306061302>
13. Berthelot J.-M., Sefrani Y. Damping analysis of unidirectional glass fiber composites with interleaved viscoelastic layers: experimental investigation and discussion // Journal of Composite Materials. 2006. Vol. 40. Iss. 21. P. 1911–1932. <https://doi.org/10.1177/0021998306061303>
14. Hao M., Rao M. D. Vibration and Damping Analysis of a sandwich beam containing a viscoelastic constraining layer // Journal of Composite Materials. 2005. Vol. 39. Iss. 18. P. 1621–1643. <https://doi.org/10.1177/0021998305051124>
15. Rao M., Echempati R., Nadella S. Dynamic analysis and damping of composite structures embedded with viscoelastic layers // Composites. Part B: Engineering. 1997. Vol. 28. Iss. 5–6. P. 547–554.
16. Fotsing E., Sola M., Ross A., Ruiz E. Lightweight damping of composite sandwich beams: experimental analysis // Journal of Composite Materials. 2012. Vol. 47. Iss. 12. P. 1501–1511. <https://doi.org/10.1177/0021998312449027>
17. Li J., Narita Y. Analysis and optimal design for the damping property of laminated viscoelastic plates under general edge conditions // Composites. Part B: Engineering. 2013. Vol. 45. Iss. 1. P. 972–980. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.014>
18. Youzera H., Meftah S., Challamel N., Tounsi A. Nonlinear damping and forced vibration analysis of laminated composite beams // Composites. Part B: Engineering. 2012. Vol. 43. Iss. 3. P. 1147–1154. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.008>
19. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980.
20. Gibson R. F. Principles of Composite Material Mechanics. 3rd ed. Taylor & Francis Group, LLC, 2012.
21. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. 2nd ed. CRC Press LLC, 2004.
22. Berthelot J.-M. Dynamics of composite materials and structures. Vallouise, France: Les Clousures. At the Bottom of Ecrins 4102 m, 2015.

Статья поступила в редакцию 2 февраля 2020 г.;  
 после доработки 29 февраля 2020 г.;  
 рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; [v.ryabov@spbu.ru](mailto:v.ryabov@spbu.ru)

Ярцев Борис Александрович — д-р техн. наук; [boris\\_yar@mail.ru](mailto:boris_yar@mail.ru)

Паршина Людмила Валентиновна — канд. техн. наук, ст. науч. сотр.; [ludaparshina@mail.ru](mailto:ludaparshina@mail.ru)

# Coupled vibrations of viscoelastic three-layer composite plates.

## 1. Formulation of problem

V. M. Ryabov<sup>1</sup>, B. A. Yartsev<sup>1,2</sup>, L. V. Parshina<sup>2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

<sup>2</sup> Krylov State Research Center, 44, Moskovskoye shosse, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

**For citation:** Ryabov V. M., Yartsev B. A., Parshina L. V. Coupled vibrations of viscoelastic three-layer composite plates. 1. Formulation of problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 469–480.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.309> (In Russian)

A mathematical model of damped oscillations of three-layer plates formed by two rigid anisotropic layers and a soft middle isotropic layer of a viscoelastic polymer is proposed. Each hard layer is an anisotropic structure formed by a finite number of randomly oriented orthotropic viscoelastic composites layers. The model is based on the use of the Hamiltonian variational principle, the refined theory of first-order plates (Reissner-Mindlin theory), the model of complex modules and the principle of elastic-viscoelastic correspondence in the linear theory of viscoelasticity. When describing the physical relationships of hard layer materials, the influence of the vibration frequency and the ambient temperature is considered negligible, while for the soft layer of a viscoelastic polymer, the temperature-frequency dependence of the elastic-dissipative characteristics is taken into account based on experimentally determined generalized curves. As a special case of the general problem, by neglecting the deformation of the middle surfaces of the rigid layers in one of the directions of the axes of the rigid layers of a three-layer plate, the equations of longitudinal and transverse damped oscillations of a globally orthotropic three-layer beam are obtained. Minimization of the Hamilton functional allows us to reduce the problem of damped vibrations of anisotropic structures to the algebraic problem of complex eigenvalues.

*Keywords:* plate, composite, anisotropy, viscoelastic polymer, temperature-frequency dependence, coupled vibrations, natural frequency, loss factor.

## References

1. Bert C. W., “Composite Materials: a Survey of Damping Capacity of Fiber Reinforced Composites”, *Damping Applications for Vibration Control. ASME AMD-38*, 53–63 (1980).
2. Gibson R. F., “Dynamic Mechanical Properties of Advanced Composite Materials and Structures: A Review”, *Shock & Vibration Digest* **19**(7), 13–22 (1987).
3. Zinoviev P. A., Ermakov Yu. N., *Vibrational energy dissipation characteristics in fiber composites structural elements (review)* (Central Research Institute scientific and technical Information, Moscow, 1989). (In Russian)
4. Benčekchou B., Coni M., Howarth H., White R., “Some aspects of vibration damping improvement in composite materials”, *Composites. Part B: Engineering* **29B**, 809–817 (1998).
5. Chandra R., Singh S. P., Gupta K., “Damping studies in fiber-reinforced composites — a review”, *Composite Structures* **46**, 41–51 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00041-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00041-0)
6. Finegan I. C., Gibson R. F., “Recent research on enhancement of damping in polymer composites”, *Composite Structures* **44** (2–3), 89–98 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00073-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00073-7)
7. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M., “Damping in composite materials: Properties and models”, *Composites: Part B* **78**, 144–152 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.03.081>
8. Zhou X. Q., Yu D. Y., Shao X. Y., Zhang S. Q., Wang S., “Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review”, *Composite Structures* **136**, 460–480 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.10.014>
9. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Energy dissipation during vibrations of nonuniform composite structures: 1. Formulation of the problem”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **51**(2), 175–181 (2018). <https://doi.org/10.3103/S1063454118020073>

10. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Energy Dissipation during Vibrations of Heterogeneous Composite Structures: 2. Method of Solution”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **51**(4), 413–420 (2018). <https://doi.org/10.3103/S106345411804012X>
11. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Energy Dissipation during Vibrations of Heterogeneous Composite Structures: 3. Numerical Experiments”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **52**(1), 102–111 (2019). <https://doi.org/10.3103/S1063454119010114>
12. Berthelot J.-M., “Damping analysis of orthotropic composites with interleaved viscoelastic layers: modeling”, *Journal of Composite Materials* **40**(21), 1889–1909 (2006). <https://doi.org/10.1177/0021998306061302>
13. Berthelot J.-M., Sefrani Y., “Damping analysis of unidirectional glass fiber composites with interleaved viscoelastic layers: experimental investigation and discussion”, *Journal of Composite Materials* **40**(21), 1911–1932 (2006). <https://doi.org/10.1177/0021998306061303>
14. Hao M., Rao M.D., “Vibration and Damping Analysis of a sandwich beam containing a viscoelastic constraining layer”, *Journal of Composite Materials* **39**(18), 1621–1643 (2005). <https://doi.org/10.1177/0021998305051124>
15. Rao M., Echempati R., Nadella S., “Dynamic analysis and damping of composite structures embedded with viscoelastic layers”, *Composites. Part B: Engineering* **28**(5–6), 547–554 (1997).
16. Fotsing E., Sola M., Ross A., Ruiz E., “Lightweight damping of composite sandwich beams: experimental analysis”, *Journal of Composite Materials* **47**(12), 1501–1511 (2012). <https://doi.org/10.1177/0021998312449027>
17. Li J., Narita Y., “Analysis and optimal design for the damping property of laminated viscoelastic plates under general edge conditions”, *Composites. Part B: Engineering* **45**(1), 972–980 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.014>
18. Youzera H., Meftah S., Challamel N., Tounsi A., “Nonlinear damping and forced vibration analysis of laminated composite beams”, *Composites. Part B: Engineering* **43**(3), 1147–1154 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.008>
19. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N., *Mechanics of multilayer structures* (Mashinostroenie Publ., Moscow, 1980). (In Russian)
20. Gibson R. F., *Principles of Composite Material Mechanics* (3rd ed., Taylor & Francis Group, LLC, 2012).
21. Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis* (2nd ed., CRC Press LLC, 2004).
22. Berthelot J.-M., *Dynamics of composite materials and structures* (Les Clousures, At the Bottom of Ecrins 4102 m, Vallouise, France, 2015).

Received: February 2, 2020  
 Revised: February 29, 2020  
 Accepted: March 19, 2020

Authors' information:

Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru  
 Boris A. Yartsev — boris\_yar@mail.ru  
 Ludmila V. Parshina — ludaparshina@mail.ru