УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3
MSC 60G50, 60F99

Вероятности малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин*

Л. В. Розовский

Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет,
Российская Федерация, 197022, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 14

Для цитирования: *Розовский Л. В.* Вероятности малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 435–452.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.307

В работе исследуется асимптотическое поведение в нуле распределений и плотностей суммы конечного числа независимых положительных случайных величин при определенных предположениях относительно скорости убывания в нуле их распределений. Рассматриваются случаи, когда распределения (плотности) суммируемых случайных величин правильно меняются в нуле или могут убывать в нуле с произвольной скоростью.

Ключевые слова: малые уклонения, суммы независимых положительных случайных величин, медленно меняющиеся функции.

1. Введение. Результаты. Отправной точкой для настоящего исследования послужило следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть независимые случайные величины $X_i > 0$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию*

$$\mathbf{P}(X_i < x) \sim c_i\, x^{\alpha_i}\, \exp(-b_i\, x^{-\alpha}),\ x \to +0,$$

где a_i — произвольные вещественные числа, и c_i, b_i, α — произвольные положительные числа. Тогда

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 < x) \sim C\, x^A\, \exp(-B^{1+\alpha}\, x^{-\alpha}),\ x \to +0,$$

где

$$B = b_1^{1/(1+\alpha)} + b_2^{1/(1+\alpha)}, \quad A = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha/2,$$
$$C = c_1\, c_2\, \sqrt{2\pi\alpha/(1+\alpha)}\, b_1^{(2\alpha_1+1)/(2+2\alpha)}\, b_2^{(2\alpha_1+1)/(2+2\alpha)} / B^{A+1/2}.$$

Лемма 1, сформулированная М. А. Лифшицем, часто используется при изучении малых уклонений L_2-норм гауссовских процессов (см., например, [1]). Формальное ее доказательство можно найти в [2].

Очевидно, что утверждение леммы 1 по индукции может быть распространено на случай суммы произвольного конечного числа слагаемых. Однако это было сделано лишь в одном довольно специальном случае в [3]. Общий результат, по-видимому,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00356).

впервые получен в настоящей работе. В ней же, помимо прочего, содержится обобщение леммы 1 на случай фиксированного числа слагаемых X_i, распределения которых в нуле могут убывать, в том числе сколь угодно быстро.

Перейдем к изложению результатов.

Далее через $X_j, j = 1, 2, \dots$, будем обозначать независимые положительные случайные величины с функциями распределения $F_j(\cdot)$.

Перед тем, как заняться обобщением леммы 1, проанализируем случаи, когда распределения (плотности) случайных величин X_j правильно меняются в нуле. Заметим, что хотя формулировки здесь относительно несложны, а доказательства коротки, полученные результаты, скорее всего, являются новыми.

Теорема 1. *Пусть функция распределения $F_1(x)$ правильно меняется в нуле с некоторым показателем $\alpha \geq 0$. Если*

$$F_2(x + o(x)) \sim F_2(x), \ x \to +0, \tag{1.1}$$

то

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 < x) \sim F_1(x) \int_0^1 (1-u)^\alpha dF_2(x\,u), \ x \to +0. \tag{1.2}$$

В частности, если функция распределения $F_2(x)$ правильно меняется в нуле с некоторым показателем $\rho \geq 0$, то

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 < x) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1+\alpha+\rho)}\, F_1(x)\, F_2(x), \ x \to +0. \tag{1.3}$$

Замечание 1. Условие $v(x + o(x)) \sim v(x), \ x \to +0$ здесь и всюду далее понимается нами в следующем смысле: при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что условие

$$(1+\varepsilon)^{-1} < \frac{v(y)}{v(x)} < 1 + \varepsilon$$

будет выполняться для всех $\{y : |y - x| < \delta\, x\}$ и всех достаточно малых $x > 0$.

Соотношение (1.3) несложно обобщить, используя индукцию.

Следствие 1. *Пусть функции распределения $F_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, правильно меняются в нуле с некоторыми показателями $\alpha_j \geq 0$. Тогда*

$$F_1 * \dots * F_n(x) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n < x) \sim k_n \prod_{j=1}^n F_j(x), \ x \to +0,$$

где $k_n = \prod\limits_{j=1}^n \Gamma(1+\alpha_j)/\Gamma(1+\alpha), \ \ \alpha = \sum\limits_{j=1}^n \alpha_j$.

Смотри также [4, формулы (1.13), (1.14)].

Заметим, что следствие 1 позволяет найти асимптотику в нуле свертки конечного числа распределений Вейбулла и(или) гамма, поскольку в этих случаях $F_j(x) \sim a_j\, x^{\alpha_j}, \ x \to +0$.

Соотношения, аналогичные формулам в теореме 1 и следствии 1, справедливы также для плотностей. Приведем соответствующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть при $j = 1, 2$ функции распределения $F_j(x)$ абсолютно непрерывны в окрестности нуля с плотностями $p_j(x)$, такими что*

$$p_j(x + o(x)) \sim p_j(x), \ x \to +0. \tag{1.4}$$

1. *Если при некотором $\alpha > 0$*

$$p_1(x) \text{ правильно меняется в нуле с показателем } \alpha - 1, \tag{1.5}$$

то свертка плотностей $p_1 * p_2(x)$ удовлетворяет соотношению

$$p_1 * p_2(x) \sim p_1(x) \int\limits_0^1 (1-u)^{\alpha-1} dF_2(x\,u), \ x \to +0. \tag{1.6}$$

2. *Если функция распределения $F_1(x)$ медленно меняется в нуле, то*

$$p_1 * p_2(x) \sim p_1(x)\, F_2(x) + p_2(x)\, F_1(x), \ x \to +0. \tag{1.7}$$

В частности, если в теореме 2 дополнительно предположить, что функция распределения $F_2(x)$ правильно меняется в нуле с некоторым показателем $\rho \geq 0$, то

$$p_1 * p_2(x) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1+\alpha+\rho)} \big(p_1(x)\, F_2(x) + p_2(x)\, F_1(x)\big), \ x \to +0. \tag{1.8}$$

Отметим, что в случае (1.5)

$$F_1(x) \sim x p_1(x)/\alpha, \ x \to +0, \tag{1.9}$$

и условие (1.4) при $j = 1$ выполняется.

Следствие 2. *Предположим, что плотности $p_j(x)$, $1 \leq j \leq n$, удовлетворяют условиям*

$$p_j(x) \sim \tilde{F}_j'(x), \ x \to +0,$$

где функции $\tilde{F}_j(x)$ таковы, что $\tilde{F}_j(0) = 0$ и

$$x\, \tilde{F}_j'(x) = (\alpha_j + o\,(1))\, \tilde{F}_j(x), \ x \to +0,$$

а постоянные $\alpha_j \geq 0$. Пусть, кроме того, в случае $\alpha_j = 0$

$$\tilde{F}_j'(x + o(x)) \sim \tilde{F}_j'(x), \ x \to +0.$$

Тогда

$$p_1 * \cdots * p_n(x) \sim k_n \left(\prod_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(x) \right)', \ x \to +0.$$

Для проверки следствия 2 применяем индукцию, имея в виду соотношения (1.8), (1.9) и условие следствия 2 о том, что функции $\tilde{F}_j(x)$ правильно меняются в нуле с показателями α_j.

Заметим, что из следствия 2 вытекает теорема 1C из [5].

Далее перейдем к анонсированному обобщению леммы 1. При изложении результатов будем придерживаться рассуждений и обозначений работы [5].

Сначала рассмотрим случай, когда функции распределения $F_j(x)$ абсолютно непрерывны в окрестности нуля с соответствующими плотностями $p_j(x)$.

По аналогии с [5, теорема 1D] будем предполагать, что

$$p_j(x) \sim u_j(x)\, e^{-g_j(x)},\ x \to +0, \tag{1.10}$$

где $u_j(x)$ и $g_j(x)$ при некоторой положительной функции $\xi_j = \xi_j(x)$, такой что

$$\xi_j(+0) = 0 \quad \text{и} \quad |\xi_j(x) - \xi_j(y)| \le L\,|x - y|,\ 0 < x,\, y \le x_0, \tag{1.11}$$

удовлетворяют условиям $(x \to +0)$

$$u_j(x + o\,(\xi_j)) \sim u_j(x) \tag{1.12}$$

и

$$g_j(x) \to +\infty, \quad g_j''(x + o\,(\xi_j)) \sim g_j''(x), \quad \mu_j(x) = \xi_j^2\, g_j''(x) \to +\infty. \tag{1.13}$$

Следует сказать, что выбор функции $\xi_j(x)$ в (1.12) и (1.13) можно осуществлять по разному. При этом, согласно (1.11) (т. е. по условию Липшица), функция $\xi_j(x)$ абсолютно непрерывна и $\xi_j(x) \le L\,x,\ 0 < x \le x_0$. Кроме того, из условия (1.13) следует, что функция $g_j(x)$ выпукла, а $g_j'(x)$ не убывает и $g_j'(+0) = -\infty$ (действительно, $g_j'(x) \le (g_j(s) - g_j(x))/(s - x),\ 0 < x < s \le s_0$, далее устремляем x к нулю).

Также можно показать (см. лемму 2 и формулу (3.27) в разделе 3), что в случае выполнения условий (1.12) и (1.13) $\lim\limits_{x \to +0} |\ln u_j(x)|/g_j(x) = 0$, т. е. скорость стремления к нулю правой части соотношения (1.10) определяется экспонентой.

В качестве примеров функций $g_j(x)$ можно взять $|\ln x|$, $\ln|\ln x|$, $\exp(-1/x)$, т. е. класс функций $g_j(x)$ весьма широк.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если при* $1 \le j \le m$ *выполнены условия* (1.10)–(1.13), *то*

$$p_1 * \cdots * p_m(x) \sim \frac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{j=1,\, j \ne i}^{m} g_j''(y_j)}} \prod_{j=1}^{m} p_j(y_j), \quad x \to +0, \tag{1.14}$$

где функции $y_j = y_j(x)$, $1 \le j \le m$, *удовлетворяют системе уравнений*

$$g_1'(y_1) = \cdots = g_m'(y_m), \tag{1.15}$$

в которой $y_1 + \cdots + y_m = x$.

Замечание 2. В некоторых случаях уравнения (1.15) удается разрешить в явном виде. Так,

1) если $g_1(x) = \dots = g_m(x)$, то $y_j = x/m,\ 1 \le j \le m$,

2) если при $1 \le j \le m$ и некоторых положительных постоянных b_j выполняется $g_j(x) = b_j\, x^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$, то $y_j = x\, b_j^{1/(1+\alpha)}/B_m,\ 1 \le j \le m$, где $B_m = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j^{1/(1+\alpha)}$.

Из первого случая в замечании 2, в частности, следует, что теорема 3 является обобщением теоремы 1D из [5].

Теперь сформулируем аналог теоремы 3 для распределений. Воспользуемся обозначением

$$\tilde{F}_j(x) = \int_0^x u_j(y)\, e^{-g_j(y)}\, dy. \tag{1.16}$$

Теорема 4. *Пусть целое $m \ge 2$. Предположим, что при $x \to +0$*

$$F_1(x) \sim u_1(x)\, e^{-g_1(x)} \tag{1.17}$$

и

$$F_j(x) \sim \tilde{F}_j(x),\ 2 \le j \le m, \tag{1.18}$$

где функции $u_j(x)$, $g_j(x)$ удовлетворяют условиям (1.11)–(1.13). *Тогда*

$$\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_m < x) \sim \frac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{j=1,\, j\ne i}^{m} g_j''(y_j)}} \prod_{j=1}^{m} \tilde{F}_j'(y_j),\ x \to +0, \tag{1.19}$$

где y_j — решения системы уравнений (1.15).

Следующий результат вытекает из теоремы 4.

Следствие 3. *Пусть целое $m \ge 2$. Будем предполагать, что*

$$F_j(x) \sim u_j(x)\, e^{-g_j(x)},\ x \to +0, \tag{1.20}$$

где функции $u_j(x)$, $g_j(x)$ при $1 \le j \le m$ удовлетворяют условиям (1.11)–(1.13) *и, кроме того, при $2 \le j \le m$ — условию*

$$|u_j'(x)| = o\big(u_j(x)\, |g_j'(x)|\big),\ x \to +0. \tag{1.21}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_m < x) \sim \frac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{j=1,\, j\ne i}^{m} g_j''(y_j)}} \prod_{j=2}^{m} |g_j'(y_j)| \prod_{j=1}^{m} F_j(y_j),\ x \to +0,$$

где y_j — решения системы уравнений (1.15).

Необременительное условие (1.21) отражает факт, что скорость стремления к нулю правой части соотношения (1.20) определяется экспонентой. Заметим, что (1.21) выполнено, если функция $u_j(x)$ правильно меняется в нуле.

Следствие 4. *Пусть при* $1 \le j \le m$ *выполнено условие* (1.20), *в котором* $g_j(x) = b_j\, x^{-\alpha}$, $b_j > 0$, $\alpha > 0$, *а функция* $u_j(x)$ *правильно меняется в нуле с некоторым показателем* α_j. *Тогда при* $x \to +0$

$$\mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_m < x) \sim$$
$$\sim B_m^{-1/2} \left(\frac{2\,\pi\,\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{x}{B_m}\right)^{A} e^{-B_m^{1+\alpha}\, x^{-\alpha}} \prod_{j=1}^{m} b_j^{(2\alpha_j+1)/2(1+\alpha)}\, u_j(x)\, x^{-\alpha_j},$$

где B_m *определено в замечании* 2, $A = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \alpha\,(m-1)/2$.

Следствие 4 является частным случаем следствия 3 (также см. замечание 2). При $m = 2$ оно обобщает лемму 1 (вместо $c_i\, x^{\alpha_i}$ используются функции $u_i(x)$).

Заметим, что условия следствия 4 выполняются, если случайные величины X_j имеют распределения Фреше, т. е. если $F_j(x) = \exp\{-(a_j/x)^k\}$, $x > 0$.

В заключение приведем асимптотики сверток распределений и плотностей положительных и независимых случайных величин в случае, когда распределение части из них правильно меняется в нуле, в то время как распределения (плотности) остальных удовлетворяют условиям типа (1.10) или (1.21). Для простоты ограничимся наиболее важным случаем двух слагаемых.

Теорема 5. *Пусть распределение* F_1 *правильно меняется в нуле с некоторым показателем* $\alpha \ge 0$ (*см. теорему* 1) *и пусть функции* $u_2(x)$ *и* $g_2(x)$ *удовлетворяют условиям* (1.11)–(1.13) *при* $j = 2$.

1. *Если при* $m = 2$ *выполняется условие* (1.18) (*см.* (1.16)), *то*

$$F_2 * F_1(x) \sim \Gamma(1+\alpha)\, \tilde{F}_2'(x)\, F_1(1/|g_2'(x)|)/|g_2'(x)|,\ \ x \to +0. \qquad (1.22)$$

2. *Если функция распределения* $F_2(x)$ *абсолютно непрерывна в окрестности нуля с плотностью* $p_2(x)$, *удовлетворяющей условию* (1.10) *при* $j = 2$, *то*

$$\int\limits_0^x p_2(x-y)\, F_1(dy) \sim \Gamma(1+\alpha)\, p_2(x)\, F_1(1/|g_2'(x)|),\ \ x \to +0. \qquad (1.23)$$

Замечание 3. Предположение (1.18) в первом утверждении теоремы 5 можно заменить условиями $F_2(x) \sim p_2(x)$ (см. (1.10)) и (1.21) при $j = 2$. В этом случае асимптотики в (1.22) и (1.23) будут совпадать.

Покажем, не слишком вдаваясь в детали, как можно использовать первое утверждение теоремы 5 и замечание 3 для вычислении асимптотики малых уклонений L_2-нормы некоторых гауссовских процессов.

Пример 1. Пусть $\|Y\|$ обозначает L_2-норму процесса Боголюбова $Y(t)$, $t \in [0,1]$, т. е. гауссовского процесса с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}Y(t)Y(s) = \frac{1}{2\omega\,\mathrm{sh}\,(\omega/2)}\,\mathrm{ch}\,(\omega\,|t-s| - \omega/2),\ \ t, s \in [0,1],\, \omega > 0.$$

В [6] показано, что $\|Y\|^2$ совпадает по распределению с суммой $X_1 + X_2$, где

$$F_1(x) \sim \frac{2\omega}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}, \quad F_2(x) \sim \frac{K}{\sqrt{x}}\; e^{-1/8x},\; x \to +0; \quad K = \frac{4\,\mathrm{sh}\,(\omega/2)}{\omega\sqrt{2\pi}}.$$

Воспользовавшись формулой (1.23) при $\alpha = 1/2$ и $g_2(x) = 1/8x$, найдем

$$\mathbf{P}(\|Y\|^2 < x) = \mathbf{P}(X_1 + X_2 < x) \sim 2K\omega\,\sqrt{x}\; e^{-1/8x},\; x \to +0.$$

Пример 2 представляет новое утверждение, которое позволяет обобщить один красивый результат (теорему 1) из [7].

Введем обозначения: ξ, ξ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — стандартные независимые гауссовские случайные величины, $p > 0$,

$$f(t) = \ln \mathbf{E} \exp\{-t|\xi|^p\},\; t \ge 0; \quad K(A, p) = -\int\limits_0^\infty t^{-1/A} f'(t)\, dt. \tag{1.24}$$

Следуя [7], определим полиномы

$$\begin{aligned} Q_r(x) &= x^r + A_{r-1}\, x^{r-1} + \cdots + A_0 = \prod_{i=1}^r (x + \theta_i), \\ P_q(x) &= x^q + B_{q-1}\, x^{q-1} + \cdots + B_0 = \prod_{i=1}^q (x + \phi_i), \end{aligned} \tag{1.25}$$

где r, $q \in \mathbb{Z}_+$, $A_i, B_i \in \mathbb{R}$, $\phi_i, \theta_i \in \mathbb{C}$.

Будем предполагать, что вещественные постоянные μ, ν удовлетворяют условию $V = q\mu - r\nu > 1$, а полиномы $Q_r(n)$, $P_q(n)$ положительны при всех целых $n \ge n_0 \ge 1$. Положим $\sigma = (\mu B_{q-1} - \nu A_{r-1})/V$. Заметим, что σ может, вообще говоря, принимать любые значения.

Сформулируем результат.

Теорема 6. *Пусть фиксированное целое k удовлетворяет условиям $k > -\sigma - 1$ и $k \ge n_0$, а числа a_n определены равенством $a_n = Q_r^\nu(n)/P_q^\mu(n)$ при $n \ge k+1$ и могут быть произвольными положительными постоянными, если $1 \le n \le k$.*

Тогда

$$\mathbf{P}\left(\sum_{n\ge 1} a_n\,|\xi_n|^p < \varepsilon\right) \sim \left(\frac{\big(\prod\limits_{j=1}^q \Gamma(k+1+\theta_j)\big)^\nu}{\big(\prod\limits_{j=1}^r \Gamma(k+1+\phi_j)\big)^\mu}\right)^{1/p} \left(\prod_{j=1}^k a_j\right)^{-\frac{1}{p}} \times$$
$$\times\, C\,\varepsilon^A\, \exp\big(-B\,\varepsilon^{-\frac{1}{V-1}}\big), \tag{1.26}$$

где $A = \frac{p-(1+2\sigma)\,V}{2p(V-1)}$, $B = (V-1)(\frac{K}{V})^{\frac{V}{V-1}}$, $K = K(V, p)$ *(см. (1.24)) и*

$$C = \frac{2^{\frac{-3p+2V-2p\sigma}{4p}}\, V^{\frac{2Vp-V-p-2V\sigma}{2p(V-1)}}\, K^{\frac{V-Vp+2V\sigma}{2p(V-1)}}\, \pi^{\frac{-p+2p\sigma+2V}{4p}}}{\Gamma(1+\frac{1}{p})^{\sigma+\frac{1}{2}}\,\sqrt{V-1}}.$$

Заметим, что условие $k > -\sigma - 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $k \geq k_\sigma$, где $k_\sigma = [\max(-\sigma, 0)]$ (здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x).

Уже упомянутый нами результат из [7, теорема 1] совпадает с теоремой 6 при $k = 0$. Отметим, что при проверке теоремы 1 в [7] используются предположения $\sigma > -1$ и $a_n \searrow$ (не включенные в ее формулировку), первое из которых существенно, а от второго (которое может нарушаться при не слишком больших n) можно отказаться, если в процессе доказательства вместо предложения 2 из [7] воспользоваться теоремой 2.1 из [8].

Итак, теорема 6 является распространением теоремы 1 на случай *произвольных* значений параметра σ. Для ее проверки представим вероятность в левой части формулы (1.26) в виде $\mathbf{P}(X_1 + X_2 < \varepsilon)$, где $X_1 = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n\,|\xi_n|^p$, $X_2 = \sum\limits_{n\geq 1} a_{n+k}\,|\xi_{n+k}|^p$. Очевидно,

$$\mathbf{P}(a_n\,|\xi_n|^p < \varepsilon) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\left(\frac{\varepsilon}{a_n}\right)^{\frac{1}{p}},\ \varepsilon \to +0.$$

Отсюда, воспользовавшись, соответственно, следствием 1 и теоремой 1 из [7] (т. е. фактически соотношением (1.26) при $k = 0$), получим при $\varepsilon \to +0$

$$\begin{gathered} F_1(\varepsilon) \sim \frac{\left(\Gamma(1+\frac{1}{p})\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\varepsilon^{\frac{1}{p}}\right)^k}{\Gamma(1+\frac{k}{p})}\,\left(\prod_{j=1}^{k} a_j\right)^{-\frac{1}{p}}, \\ F_2(\varepsilon) \sim \left(\frac{\big(\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(k+1+\theta_j)\big)^\nu}{\big(\prod\limits_{j=1}^{r}\Gamma(k+1+\phi_j)\big)^\mu}\right)^{1/p}\quad \tilde{C}\,\varepsilon^{\tilde{A}}\,\exp\left(-B\,\varepsilon^{-\frac{1}{V-1}}\right), \end{gathered} \tag{1.27}$$

где $\tilde{C}$ и $\tilde{A}$ задаются посредством формул для C и A (см. (1.26)), соответственно, при замене в них σ на $k + \sigma$. Теперь для получения соотношения (1.26) следует воспользоваться асимптотиками (1.27) и формулой (1.22) при $\alpha = k/p$ и $g_2(\varepsilon) = B\,\varepsilon^{-\frac{1}{V-1}}$.

2. Доказательства теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. При $0 < \varepsilon < 1$ имеем

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 < x) = \left(\int\limits_0^{x-\varepsilon x} + \int\limits_{x-\varepsilon x}^{x}\right) F_1(x-y)F_2(dy) = I_1 + I_2. \tag{2.1}$$

Принимая во внимание свойства медленно меняющихся функций (см. [9]) и условие (1.1), получим для некоторого $\varepsilon = \varepsilon(x) \to +0$ при $x \to +0$ соотношения

$$I_1 \sim F_1(x) \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-u)^\alpha\, F_2(x\,du), \quad I_1 \geq F_1(\varepsilon x)\, F_2(x-\varepsilon x) \sim F_1(\varepsilon x)\, F_2(x),$$

$$I_2 \leq F_1(\varepsilon x)\,(F_2(x) - F_2(x-\varepsilon x)) = o(1)\, F_1(\varepsilon x)\, F_2(x) = o(I_1),$$

$$\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} (1-u)^\alpha\, F_2(x\,du) = o(F_2(x)).$$

Отсюда и из (2.1) следует оценка (1.2). □

Доказательство теоремы 2. Запишем

$$I(x) = p_1 * p_2(x) = \left(\int\limits_0^{(1-\varepsilon)x} + \int\limits_{(1-\varepsilon)x}^{x} \right) p_1(x-y) F_2(dy) = I_1 + I_2. \tag{2.2}$$

Из условия (1.4) следует, что

$$I_2 \sim p_2(x)\, F_1(\varepsilon x),\ x \to +0, \tag{2.3}$$

при некотором положительном $\varepsilon = \varepsilon(x) \to 0$, $x \to +0$.

Если выполнено условие (1.5), отсюда и из (1.9) при $x \to +0$ получим

$$\begin{gathered} I_1 \sim p_1(x) \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-u)^{\alpha-1} F_2(x\,du), \\ \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} (1-u)^{\alpha-1} F_2(x\,du) \sim x\, p_2(x)\, \varepsilon^\alpha/\alpha, \quad I_2 \sim x\, p_1(x)\, p_2(x)\, \varepsilon^\alpha/\alpha. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Но из (1.4) следует, что

$$\left(A\,(x/y)^a\right)^{-1} \leq \frac{p_2(y)}{p_2(x)} \leq A\,(x/y)^a,\ 0 < y \leq x \leq x_0, \tag{2.5}$$

где A и a — некоторые положительные постоянные (этот факт является частным случаем леммы 2 настоящей работы).

Отсюда при некоторой положительной постоянной c получаем

$$\int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-u)^{\alpha-1} F_2(x\,du \geq c\, x\, p_2(x),\ 0 < x < x_0. \tag{2.6}$$

Оценки (2.2), (2.4) и (2.6) приводят к (1.7).

Далее проверим второе утверждение теоремы 2.

Пусть функция $F_1(x)$ медленно меняется в нуле. Тогда (см. (2.3)) можем записать

$$I_2 \sim p_2(x)\, F_1(x),\ \ x \to +0. \tag{2.7}$$

Помимо этого, при условии (1.4), $j = 1$ (см. также (2.5) и (2.6)), будем иметь

$$\delta(x) = (F_1(x) - F_1(x/2))/F_1(x) \geq c\, x\, p_1(x)/F_1(x),\ 0 < x < x_0, \tag{2.8}$$

причем $\delta(x) \to 0$, $x \to +0$. Теперь получаем

$$I_1 = \left(\int\limits_0^{\varepsilon x} + \int\limits_{\varepsilon x}^{(1-\varepsilon)x}\right) p_1(x-y) F_2(dy) = J_1 + J_2. \tag{2.9}$$

Очевидно,

$$J_1 \sim p_1(x)\, F_2(\varepsilon x),\ x \to +0, \tag{2.10}$$

и, по аналогии с (2.6),

$$F_2(x) - F_2(\varepsilon x) = O\left(\varepsilon^{-a}\right) p_2(x), \quad J_2 = O\left(\varepsilon^{-2a}\right) x\, p_1(x)\, p_2(x).$$

Отсюда и из (2.2), (2.7)–(2.10) следует (1.7).

Соотношение (1.8) при $\alpha = 0$ или $\rho = 0$ совпадает с (1.7). Если же $\alpha, \rho > 0$, то правую часть равенства (1.6) можно заменить (см. (1.9)) на

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\alpha+\rho)}\, x p_1(x)\, p_2(x) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1+\alpha+\rho)} \big(p_1(x)\, F_2(x) + p_2(x)\, F_1(x)\big),$$

т. е. соотношение (1.8) снова справедливо.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана. $\square$

3. Доказательства теорем 3–5.

Доказательство теоремы 3. Теорему 3 будем доказывать в два этапа. Сначала убедимся в ее справедливости при $m = 2$ (предложение 1), затем окончательный результат проверим по индукции.

Положим $\tau(y) = g_1(x-y) + g_2(y)$, $0 < y < x$.

Предложение 1. *Если при $j = 1$ и 2 выполнены условия* (1.10)–(1.13)*, то*

$$p_1 * p_2(x) \sim p_1(x - y_*)\, p_2(y_*)\, \sqrt{2\pi/\tau''(y_*)},\ \ x \to +0, \tag{3.1}$$

где $y_* = y_*(x)$ — (единственное) решение уравнения

$$\tau'(y_*) = 0. \tag{3.2}$$

Важную роль в доказательстве предложения 1 играет нижеследующий вспомогательный результат, который является аналогом леммы 3 из [5]. Его доказательство приводится в основном для удобства читателя.

Лемма 2. *Пусть x_0 и t_0 — некоторые положительные числа. Предположим, что при всех $0 < x < x_0$ функция $\xi(x)$ непрерывна справа и, кроме того,*

$$\xi = \xi(x) > 0 \quad и \quad \xi(x - t\xi)/\xi \leq L(t),\ \ t \in [0, t_0], \tag{3.3}$$

где $L(t),\ 0 \le t \le t_0,$ *— некоторая непрерывная функция. Если*

$$v(x + o\,(\xi)) = (1 + o\,(1))v(x),\ \ x \to +0, \tag{3.4}$$

то для любого $\varepsilon \in (0,1)$ *найдутся постоянные* $a > 0$ *и* $\bar{x} \le x_0$ *такие, что*

$$(1+\varepsilon)^{-\left(1+a\int\limits_y^x du/\xi(u)\right)} \le \frac{v(y)}{v(x)} \le (1+\varepsilon)^{1+a\int\limits_y^x du/\xi(u)}$$

при всех $\{y, x:\ 0 < y \le x \le \bar{x}\}$.

Доказательство леммы 2. Выберем $\varepsilon \in (0,1)$. Из условия (3.4) (см. замечание 1), в частности, следует, что при некоторых $\delta \in (0, t_0]$ и $\bar{x} \le x_0$ выполняется

$$(1+\varepsilon)^{-1} \le \frac{v(x - \delta\xi)}{v(x)} \le 1 + \varepsilon, \quad 0 < x \le \bar{x}. \tag{3.5}$$

Пусть $0 < y \le x \le \bar{x}$. Положим $y_0 = x$ и $y_{k+1} = y_k - \delta\xi_k,\ k \ge 0$, где $\xi_k = \xi(y_k)$. Последовательность y_k, очевидно, монотонно убывает, причем к нулю. В самом деле, из предположения $\lim y_k = c \in (0, x)$ и того, что функция $\xi(x)$ непрерывна справа, следует

$$\lim \xi_k = \xi(c) = \lim(y_k - y_{k+1})/\delta = 0,$$

а это противоречит условию $\xi(x) > 0$ для любого $0 < x \le \bar{x}$.

Имеем по (3.3) при любом $k \ge 0$

$$1 = \frac{y_k - y_{k+1}}{\delta\xi_k} \le \frac{1}{\delta} \max_{y_{k+1} \le u \le y_k} \frac{\xi(u)}{\xi_k} \int\limits_{y_{k+1}}^{y_k} du/\xi(u) \le a \int\limits_{y_{k+1}}^{y_k} du/\xi(u),$$

где $a = \frac{1}{\delta} \max\limits_{0 \le t \le \delta} L(t)$. Отсюда при $n:\ y_{n+1} \le y < y_n$ получаем

$$n \le k \int\limits_{y_n}^{y_0} du/\xi(u) \le k \int\limits_{y}^{x} du/\xi(u). \tag{3.6}$$

Теперь можем записать

$$\frac{v(y)}{v(x)} = \prod_{l=0}^{n-1} \frac{v(y_{l+1})}{v(y_l)} \cdot \frac{v(y)}{v(y_n)}$$

и, следовательно, по (3.4) будем иметь

$$(1+\varepsilon)^{-(1+n)} \le \frac{v(y)}{v(x)} \le (1+\varepsilon)^{1+n}.$$

Отсюда и из оценки (3.6) вытекает утверждение леммы 2. □

Вернемся к доказательству предложения 1. Введем обозначения. Положим $\hat{\xi} = \min\left(\xi_1(x - y_*), \xi_2(y_*)\right)$ и $\hat{y} = y_* - \varepsilon\,\hat{\xi},\ \ \bar{y} = y_* + \varepsilon\,\hat{\xi}$, где положительное ε достаточно мало.

По (1.10) имеем

$$p_1 * p_2(x) \sim \left(\int\limits_{|y-y_*|\le\varepsilon\hat{\xi}} + \int\limits_0^{\hat{y}} + \int\limits_{\bar{y}}^{x} \right) u_1(x-y)\, e^{-\tau(y)}\, u_2(y) dy, \quad x \to +0. \tag{3.7}$$

Обозначим интегралы в (3.7) через I_1, I_2 и I_3. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(x) \to 0$ достаточно медленно при $x \to +0$. Заметим (см. (1.13) и ниже), что в этом случае

$$0 < \hat{y} < \bar{y} < x, \quad \hat{\xi}^2\, \tau''(y_*) \to \infty. \tag{3.8}$$

Сначала оценим I_1. Согласно условию (1.12) при $x \to +0$

$$u_1(x-y) = u_1(x - y_* - (y - y_*)) = u_1(x - y_* + o\,(\xi(x-y_*))) \sim u_1(x-y_*)$$

и, аналогично, $u_2(y) \sim u_2(y_*)$. Кроме того (см. (3.2) и (1.13)), можем записать

$$\tau(y) = \tau(y_*) + \left(\frac{1}{2} + o\,(1)\right)(y-y_*)^2\, \tau''(y_*). \tag{3.9}$$

Сказанное приводит к соотношению

$$I_1 \sim e^{-\tau(y_*)}\, u_1(x-y_*)\, u_2(y_*) \sqrt{\frac{2\pi}{\tau''(y_*)}}, \quad x \to +0. \tag{3.10}$$

Займемся I_2. С помощью леммы 2 найдем при $0 < y < y_*$ и некотором $a > 0$

$$u_2(y)/u_2(y_*) < 2\, \exp\left(a \int\limits_y^{y_*} du/\xi_2(u)\right),$$

$$u_1(x-y)/u_1(x-y_*) < 2\, \exp\left(a \int\limits_{x-y_*}^{x-y} du/\xi_1(u)\right).$$

Отсюда получаем

$$I_2 \le 4\, u_1(x-y_*)\, u_2(y_*) \int\limits_0^{\hat{y}} e^{-\nu(y)}\, dy, \tag{3.11}$$

где функция $\nu(y) = \tau(y) - a\, \left(\int\limits_y^{y_*} du/\xi_2(u) + \int\limits_{x-y_*}^{x-y} du/\xi_1(u) \right)$. Очевидно, справедливо равенство

$$\nu'(y) = \tau'(y) + a\, \left(\frac{1}{\xi_2(y)} + \frac{1}{\xi_1(x-y)}\right),$$

откуда (см. (3.2) и (3.8)) $\nu'(y_*) = o\,(\varepsilon\, \hat{\xi}\, \tau''(y_*)),\ x \to +0$. Кроме того, выполняется

$$\nu(y) = \nu(\hat{y}) + (y - \hat{y})\, \nu'(\hat{y}) + \int\limits_y^{\hat{y}} (t-y)\, d\nu'(t), \tag{3.12}$$

причем

$$\int\limits_{y}^{\hat y}(t-y)\,d\nu'(t)=\int\limits_{y}^{\hat y}(t-y)\,\tau''(t)\,dt-a\int\limits_{y}^{\hat y}(t-y)\,\left(\frac{d\xi_2(t)}{\xi_2^2(t)}+\frac{d\xi_1(x-t)}{\xi_1^2(x-t)}\right).$$

По условию (1.11) при $0<y<\hat y$ получаем

$$\left|\int\limits_{y}^{\hat y}(t-y)\,\left(\frac{d\xi_2(t)}{\xi_2^2(t)}+\frac{d\xi_1(x-t)}{\xi_1^2(x-t)}\right)\right|\le L\int\limits_{y}^{\hat y}(t-y)\,\left(\frac{dt}{\xi_2^2(t)}+\frac{dt}{\xi_1^2(x-t)}\right),$$

и, следовательно (см. (3.8)),

$$\int\limits_{y}^{\hat y}(t-y)\,d\nu'(t)\sim\int\limits_{y}^{\hat y}(t-y)\,\tau''(t)\,dt,\quad x\to+0. \tag{3.13}$$

Аналогично будем иметь

$$\nu'(y)-\nu'(\hat y)=-\int\limits_{y}^{\hat y}d\nu'(t)\sim\int\limits_{y}^{\hat y}\tau''(t)\,dt,\quad x\to+0. \tag{3.14}$$

Из (3.12)–(3.14), (1.13) и равенства $\nu(y_*)=\tau(y_*)$, в частности, следуют соотношения $(0<y<\hat y,\ x\to+0)$

$$\nu(y)\ge\nu(\hat y)+(y-\hat y)\nu'(\hat y),\quad \nu'(\hat y)\sim-\varepsilon\,\hat\xi\,\tau''(y_*)=-\varepsilon\,(\hat\xi^2\,\tau''(y_*))^{1/2}\,(\tau''(y_*))^{1/2},$$
$$\nu(\hat y)-\nu(y_*)\sim0.5\,(\varepsilon\,\hat\xi)^2\,\tau''(y_*).$$

Подставляя эти оценки в (3.11), найдем

$$I_2\le4\,u_1(x-y_*)\,u_2(y_*)\,e^{-\nu(\hat y)}/|\nu'(\hat y)|=$$
$$=o\,(1)\,u_1(x-y_*)\,u_2(y_*)\,e^{-\tau(y_*)}/(\tau''(y_*))^{1/2}. \tag{3.15}$$

Оценка для I_3 проверяется аналогично. Из соотношений (3.7), (3.10) и (3.15) следует предложение 1, или теорема 3 при $m=2$.

Общий случай будем доказывать по индукции, воспользовавшись тождеством (см. (1.14))

$$I_{m+1}(x)=p_{m+1}*I_m(x). \tag{3.16}$$

В соответствии с индукционным предположением

$$I_m(x)\sim v_m(x)\,e^{-\tau_m(x)},\ x\to+0, \tag{3.17}$$

где (см. (1.10), (1.15))

$$v_m(x)=\frac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=1,\,j\ne i}^{m}g_j''(y_j)}}\,\prod_{j=1}^{m}u_j(y_j),\quad \tau_m(x)=\sum_{j=1}^{m}g_j(y_j). \tag{3.18}$$

Положим $\hat{\xi} = \hat{\xi}(x) = \min_{1\le j\le m} \xi_j(y_j)$. Покажем, что

$$v_m(x + o\,(\hat{\xi})) \sim v_m(x), \quad \tau_m(x + o\,(\hat{\xi})) \sim \tau_m(x),\ x \to +0. \tag{3.19}$$

Первое соотношение очевидно (см. (1.12)). Проверим второе. Имеем по (1.15) равенство

$$g_j'(y_j) = g_j''(y_j)\,y_j'(x) = g_m''(y_m)\,y_m'(x).$$

Отсюда получаем

$$\left(\sum_{j=1}^m y_j'(x)\right)' = 1 = g_m''(y_m)\,y_m'(x)\,\sum_{j=1}^m 1/g_j''(y_j) = g_j''(y_j)\,y_j'(x)\,\sum_{j=1}^m 1/g_j''(y_j),$$

т. е.

$$y_j'(x) = \left(g_j''(y_j)\,\sum_{j=1}^m 1/g_j''(y_j)\right)^{-1},\ 1\le j\le m. \tag{3.20}$$

Теперь можем записать

$$\tau_m'(x) = \sum_{j=1}^m g_j'(y_j)\,y_j'(x) = g_m'(y_m)\,\sum_{j=1}^m y_j'(x) = g_m'(y_m),$$

и, значит,

$$\tau_m''(x) = g_m''(y_m)\,y_m'(x) = \left(\sum_{j=1}^m 1/g_j''(y_j)\right)^{-1}. \tag{3.21}$$

Отсюда и из (1.13) следует, что второе утверждение в (3.19) справедливо, а также то, что

$$\hat{\xi}^2\tau_m''(x) \to \infty,\ x \to +0. \tag{3.22}$$

Далее покажем, что функция $\hat{\xi}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L. Действительно, по (1.11) и (3.20) имеем

$$\begin{aligned}|\hat{\xi}(x_1) - \hat{\xi}(x_2)| &\le \max_{1\le j\le m} |\xi_j(y_j(x_1)) - \xi_j(y_j(x_2)| \le \\ &\le \max_{1\le j\le m} L\,|y_j(x_1)) - y_j(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|\,\max_{1\le j\le m}\,\max_{t\in[x_1,\,x_2]} y_j'(t) \le L\,|x_1 - x_2|.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Пусть плотность $p_{m+1}(y)$ удовлетворяет условиям (1.10)–(1.13) при $j = m+1$. Соотношения (3.17)–(3.23) позволяют нам воспользоваться теоремой 6, взяв в ней $I_m(y)$ и $p_{m+1}(y)$ вместо $p_2(y)$ и $p_1(y)$, соответственно. Тогда из (3.16)–(3.18) следует

$$I_{m+1}(x) \sim I_m(y_*)\,p_{m+1}(x - y_*)\sqrt{2\pi/\tau''(y_*)},\ x \to +0, \tag{3.24}$$

где $\tau(y) = \tau_m(y) + g_{m+1}(x - y)$, а $y_* = y_*(x)$ удовлетворяет условию (3.2).

Положим $\tilde{y}_j = y_j(y_*),\ 1\le j\le m$ (см. (1.15)), и $\tilde{y}_{m+1} = x - y_*$. Из (3.2) следует $g_m'(\tilde{y}_m) = g_{m+1}'(\tilde{y}_{m+1})$, откуда получаем

$$g_j'(\tilde{y}_j) = g_{m+1}'(\tilde{y}_{m+1}),\ 1\le j\le m. \tag{3.25}$$

Согласно (3.17), (3.18), (3.25) и (3.21) с y_* вместо x имеем

$$I_m(y_*) \sim \prod_{j=1}^{m} p_j(\tilde y_j)\,(2\pi)^{(m-1)/2}\left(\prod_{j=1}^{m} g_j''(\tilde y_j)\,\frac{1}{\tau_m''(y_*)}\right)^{-1/2},$$

$$\tau''(y_*) = \tau_m''(y_*) + g_{m+1}''(\tilde y_{m+1}) = \tau_m''(y_*)\,g_{m+1}''(\tilde y_{m+1})\sum_{j=1}^{m+1} 1/g_j''(\tilde y_j).$$

Подставляя полученные оценки в (3.24), мы осуществляем индукционный переход, тем самым полностью доказывая теорему 3. □

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3. При этом в начальной стадии проверки аналога теоремы 6 используется соотношение ($x \to +0$)

$$\int_0^x F_2(x-y)F_1(dy) \sim \int_0^x \tilde F_2(x-y)F_1(dy) = \int_0^x F_1(x-y)\tilde F_2(dy) \sim \int_0^x \tilde F_1'(x-y)\tilde F_2(dy),$$

заключительная формула в котором совпадает с левой частью оценки (3.1). □

Следствие 5 с учетом (1.21) получим, положив в теореме 3

$$\tilde F_j(x) = \int_0^x u_j(y)\,|g_j'(y)|\,e^{-g_j(y)}\,dy, \quad 2 \le j \le m,$$

поскольку в этом случае $\tilde F_j(x) \sim u_j(x)\,e^{-g_j(x)},\ x \to +0$. Надо лишь показать, что

$$g'(x + o\,(\xi)) \sim g'(x),\ x \to +0, \tag{3.26}$$

где для краткости убран индекс j.

С этой целью по аналогии с оценкой (4.22) из [5], докажем, что

$$|g'(x)| \ge \delta_0\,\xi g''(x),\ 0 < x < x_0. \tag{3.27}$$

В самом деле, пусть $\delta = (2L)^{-1}$ (см. (1.11)). Функция $|g'(x)|$ монотонно убывает, в силу чего при некотором $\theta \in (0, \delta)$ (см. также лемму 2)

$$|g'(x)| = -g'(x) = g'(x+\delta\xi) - g'(x) + |g'(x+\delta\xi)| \ge$$
$$\ge \delta\xi\,g''(x)\,\frac{g''(x+\theta\xi)}{g''(x)} \ge \exp\left(-1 - k\int\limits_x^{x+\delta\xi} du/\xi(u)\right).$$

Но $\xi(u) = \xi + (\xi(u) - \xi(x)) \ge \xi - (u-x)L \ge (1 - \delta\,L)\,\xi,\ u \in (x, x+\delta\xi)$. Таким образом, (3.27) выполняется при $\delta_0 = (2eL)^{-1}\,e^{-k/L}$. Отсюда получаем $g'(x + o\,(\xi)) - g'(x) = o\,(1)\xi\,g''(x + o\,(\xi)) = o\,(1)\xi\,g''(x) = o\,(1)\,g'(x)$, т. е. (3.26) действительно справедливо.

Доказательство теоремы 5. Для краткости будем обозначать $u_2(\cdot)$, $g_2(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ через $u(\cdot)$, $g(\cdot)$ и $p(\cdot)$ соответственно. Очевидно (см. (1.16), (1.18), (1.10)), что

$$F_2 * F_1(x) \sim \int\limits_0^x \tilde F_2(x-y)\,F_1(dy) = \left(\int\limits_0^{\varepsilon\xi} + \int\limits_{\varepsilon\xi}^{x}\right) p(x-y)\,F_1(y)\,dy = I + J. \tag{3.28}$$

Из условия (1.25) при $\varepsilon = \varepsilon(x) \to +0,\ x \to +0$, в частности, следует, что

$$g(x-y) - g(x) \sim y\,|g'(x)|,\ 0 < y < \varepsilon\xi,\ x \to +0. \tag{3.29}$$

Отсюда и из (1.12), учитывая свойства правильно меняющихся функций, получим

$$I \sim p(x) \int\limits_0^{\varepsilon\xi} e^{-(1+o\,(1))y\,|g'(x)|}\, F_1(y)dy \sim \frac{p(x)}{|g'(x)|} \int\limits_0^{\varepsilon\xi|g'(x)|} e^{-t}\, F_1(t/|g'(x)|)\, dt$$

и (напоминаем, что $\xi\,|g'(x)| \to \infty$) в конечном счете

$$I \sim \frac{p(x)}{|g'(x)|}\, F_1(1/|g'(x)|)\, \Gamma(1+\alpha),\ x \to +0. \tag{3.30}$$

Теперь оценим J. Положим $\hat{x} = x - \varepsilon\xi$. Из условия (1.12) и леммы 2 следует (аналогично оценке (3.11)), что $p(y) \le 2u(\hat{x})\, e^{-\nu(y)}$, где функция $\nu(y) = g(y) - a \int\limits_y^{\hat{x}} du/\xi(u),\ 0 < y < \hat{x},\ \nu(\hat{x}) = g(\hat{x})$. Согласно (1.25) имеем $\nu'(y) \sim g'(y)$, $\nu''(y) \sim g''(y) > 0$, когда $y \to +0$, и, в частности,

$$\nu(y) \ge \nu(\hat{x}) + (y - \hat{x})\,\nu'(\hat{x}),\ 0 < y < \hat{x}.$$

Применяя вышеприведенные оценки, найдем

$$J = \int\limits_0^{\hat{x}} p(y)\, F_1(x-y)\, dy \le 2u(\hat{x})\, e^{-g(\hat{x})} \int\limits_0^{\hat{x}} e^{-(\hat{x}-y)\,|\nu'(\hat{x})|}\, F_1(x-y)\, dy. \tag{3.31}$$

Используя очередной раз свойства правильно меняющихся функций, для интеграла в правой части (3.31) получим оценку

$$O\left((\varepsilon\xi\,|\nu'(\hat{x})|)^c\, F_1(1/|g'(x)|)/|g'(x)|\right),$$

где постоянная $c > \alpha$. Отсюда и из оценки (3.29) следует $J = o\,(I),\ x \to +0$. Таким образом, оценка (1.23) обоснована.

Вторая часть теоремы 5 проверяется аналогично. Применяется соотношение (см. (3.28), (3.29), (1.12) и (1.25))

$$\int\limits_0^{\varepsilon\xi} p(x-y)\, F_1(dy) \sim u(x) \int\limits_0^{\varepsilon\xi} e^{-g(x-y)}\, F_1(dy) =$$

$$= p(x) \left(F_1(\varepsilon\xi)\, e^{g(x)-g(x-\varepsilon\xi)} + (1+o\,(1))\,|g'(x)| \int\limits_0^{\varepsilon\xi} e^{g(x)-g(x-y)}\, F_1(y)\, dy \right).$$

Остальные рассуждения не меняются.

Автор выражает признательность рецензентам за неформальное отношение к работе.

Литература

1. *Beghin L., Nikitin Ya. Yu., Orsingher E.* Exact small ball constants for some Gaussian processes under the L^2-norm // Записки научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 298. С. 5–21.

2. *Фаталов В. Р.* Эргодические средние при большом значении T и точные асимптотики малых уклонений для многомерного винеровского процесса // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 169–206. https://doi.org/10.4213/im7938

3. *Никитин Я. Ю., Пусев Р. С.* Точная асимптотика малых уклонений для ряда броуновских функционалов // Теория вероятн. и ее примен. 2012. Т. 57. Вып. 1. С. 98–123. https://doi.org/10.4213/tvp4433

4. *Розовский Л. В.* О вероятностях малых уклонений положительных случайных величин // Записки научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 320. С. 150–159.

5. *Розовский Л. В.* О сверхбольших уклонениях суммы независимых случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением, удовлетворяющим условию Крамера // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. Вып. 1. С. 78–103. https://doi.org/10.4213/tvp302

6. *Пусев Р. С.* Асимптотика малых уклонений процессов Боголюбова в квадратичной норме // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 165, №1. С. 134–144. https://doi.org/10.4213/tmf6567

7. *Никитин Я. Ю., Харинский П. А.* Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме для одного класса гауссовских процессов // Записки научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 311. С. 214–221.

8. *Rozovsky L. V.* Comparison theorems for small deviations of weighted series // Probab. math. stat. 2012. Vol. 32, no. 1. P. 117–130.

9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

Статья поступила в редакцию 5 октября 2019 г.;
после доработки 21 февраля 2020 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Розовский Леонид Викторович — д-р физ.-мат. наук; L_Rozovsky@mail.ru

Small deviation probabilities for sums of independent positive random variables

L. V. Rozovsky

St. Petersburg State Chemical Pharmaceutical University, 14, ul. Professora Popova, St. Petersburg, 197022, Russian Federation

For citation: Rozovsky L. V. Small deviation probabilities for sums of independent positive random variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 435–452. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.307 (In Russian)

We examine an asymptotic behavior at zero of distributions and densities of a sum of several independent positive random variables under certain assumptions on the decay rate of their distributions at zero. We consider the cases, when the distributions (densities) of summable random variables are regularly or slowly varying at zero or can decrease at zero with an arbitrary rate.

Keywords: small deviations, sums of independent positive random variables, slowly varying functions.

References

1. Beghin L., Nikitin Ya. Yu., Orsingher E., "Exact small ball constants for some Gaussian processes under the L^2-norm", *J. Math. Sci.* **128** (1), 2493–2502 (2005). https://doi.org/10.1007/s10958-005-0197-9

2. Fatalov V., "Ergodic means for large values of T and exact asymptotics of small deviations for a multi-dimensional Wiener process", *Izvestiya: Mathematics* **77** (6), 1224–1259 (2013). http://dx.doi.org/10.1070/IM2013v077n06ABEH002675

3. Nikitin Ya. Yu., Pusev R. S., "Exact small deviation asymptotics for some Brownian functionals", *Theory Probab. Appl.* **57** (1), 60–81 (2013). https://doi.org/10.1137/S0040585X97985790

4. Rozovsky L. V., "On small deviation probabilities of positive random variables", *J. Math. Sci.* **137** (1), 4561–4566 (2006). https://doi.org/10.1007/s10958-006-0251-2

5. Rozovsky L. V., "Superlarge Deviations of a Sum of Independent Random Variables Having a Common Absolutely Continuous Distribution under the Cramer Condition", *Theory Probab. Appl.* **48** (1), 108–130 (2004). https://doi.org/10.1137/S0040585X980233

6. Pusev R. S., "Asymptotics of small deviations of the Bogoliubov processes with respect to a quadratic norm", *Theor. Math. Phys.* **165**, 1348–1357 (2010). https://doi.org/10.1007/s11232-010-0113-4

7. Nikitin Ya. Yu., Kharinski P. A., "Sharp small deviation asymptotics in L_2-norm for a class of Gaussian processes", *J. Math. Sci.* **133** (3), 1328–1332 (2006). https://doi.org/10.1007/s10958-006-0042-9

8. Rozovsky L. V., "Comparison theorems for small deviations of weighted series", *Probab. math. stat.* **32** (1), 117–130 (2012).

9. Feller W., *Introduction to the probability theory and its applications* **2** (John Willey Sons, Inc., 1971).

Received: October 5, 2019
Revised: February 21, 2020
Accepted: March 19, 2020

Author's information:

Leonid V. Rozovsky — L_Rozovsky@mail.ru