

Оптимальные подпространства для среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых функций на отрезке*

О. Л. Виноградов, А. Ю. Улицкая

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Для цитирования: Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю. Оптимальные подпространства для среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых функций на отрезке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 404–417. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.304>

В настоящей работе мы указываем серию приближающих подпространств, экстремальных в L_2 для трех классов функций из соболевского пространства $W_2^{(r)}$ на отрезке, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Полученные оптимальные пространства порождены равномерными сдвигами одной функции. В частности, мы указываем экстремальные пространства сплайнов всех степеней $d \geq r - 1$ с равноотстоящими узлами.

Ключевые слова: пространства сдвигов, сплайны, поперечники.

1. Введение. 1.1. Обозначения. В дальнейшем \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_+ , \mathbb{N} — множества комплексных, вещественных, целых, неотрицательных целых и натуральных чисел соответственно, $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$. Если из контекста не следует противное, все рассматриваемые пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Если $p \in [1, +\infty)$, то L_p — пространство измеримых, 2π -периодических, суммируемых с p -й степенью на периоде функций; $L_p[a, b]$ — пространство измеримых, суммируемых с p -й степенью на $[a, b]$ функций. Нормы в этих пространствах определяются соответственно равенствами

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{1/p}, \quad \|f\|_{L_p[a,b]} = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}.$$

Далее, $W_2^{(r)}[a, b]$ — пространство функций f из $L_2[a, b]$, у которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_2[a, b]$; класс $W_2^{(r)}$ периодических функций определяется аналогично.

Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ обозначается скалярное произведение в гильбертовом пространстве \mathcal{H} ;

$$E(f, \mathfrak{N})_p = \inf_{T \in \mathfrak{N}} \|f - T\|_p$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве L_p множеством $\mathfrak{N} \subset L_p$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18-11-00055).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

Коэффициенты Фурье функции f и дискретное преобразование Фурье набора $\{\beta_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяются равенствами

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt, \quad \hat{\beta}_l = \sum_{k=0}^{2n-1} \beta_k e^{-\frac{ik\pi}{n}}.$$

Запись $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ означает, что ряд в правой части есть ряд Фурье функции f .

При $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathbf{S}_{n,\mu}$ обозначается $2n$ -мерное пространство 2π -периодических сплайнов степени μ дефекта 1 по равномерному разбиению $\frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, через $\mathcal{T}_{2n-1} - (2n-1)$ -мерное пространство тригонометрических многочленов степени не выше $n-1$.

Символами f^e и f^o обозначаются соответственно четная и нечетная части функции f , т. е.

$$f^e = \frac{f + f(-\cdot)}{2}, \quad f^o = \frac{f - f(-\cdot)}{2}.$$

Напомним, что n -поперечником по Колмогорову множества A в нормированном пространстве X называется величина

$$d_n(A; X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

где первый инфимум берется по всем подпространствам X_n пространства X размерности не выше n . Подпространства, реализующие инфимум, называются *оптимальными* или *экстремальными*.

1.2. Обзор результатов. В работе [1] М. Флоатер (M. Floater) и Э. Санде (E. Sande) рассматривали задачу среднеквадратичной аппроксимации трех классов функций из $W_2^{(r)}[0, 1]$, определяемых некоторыми граничными условиями. При несколько измененной нормировке (которой мы далее будем придерживаться) эти классы суть

$$\begin{aligned} H_0^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0, \pi] : u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq k < r, \quad k \text{ четно}\}, \\ H_1^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0, \pi] : u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq k < r, \quad k \text{ нечетно}\}, \\ H_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)}\left[0, \frac{\pi}{2}\right] : u^{(k)}(0) = u^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq k, l < r, \quad k \text{ четно, } l \text{ нечетно}\right\}. \end{aligned}$$

Флоатер и Санде вычислили поперечники множеств

$$\begin{aligned} A_i^r &= \{u \in H_i^r : \|u^{(r)}\|_{L_2[0, \pi]} \leq 1\}, \quad i = 0, 1, \\ A_2^r &= \left\{u \in H_2^r : \|u^{(r)}\|_{L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \leq 1\right\} \end{aligned}$$

и привели примеры экстремальных подпространств. А именно, они показали, что

$$d_n(A_0^r) = \frac{1}{(n+1)^r}, \quad d_n(A_1^r) = \frac{1}{n^r}, \quad d_n(A_2^r) = \frac{1}{(2n+1)^r},$$

а пространства

$$\text{span}\{x \mapsto \sin kx\}_{k=1}^n, \quad \text{span}\{x \mapsto \cos kx\}_{k=0}^{n-1}, \quad \text{span}\{x \mapsto \sin(2k-1)x\}_{k=1}^n \quad (1)$$

являются экстремальными для A_0^r , A_1^r и A_2^r соответственно. Отметим, что для пространства A_1^r соответствующий результат был получен Колмогоровым [2]. Кроме того, авторы доказали, что для классов A_i^r существуют экстремальные сплайновые пространства, которые определяются следующим образом.

Пусть $P_0 = P_1 = \pi$, $P_2 = \pi/2$, τ — вектор узлов, расположенных на $(0, P_i)$ и различных. Обозначим через $S_{d,\tau,i}$ пространства сплайнов степени d дефекта 1 на $[0, P_i]$ и рассмотрим их n -мерные подпространства

$$\begin{aligned} S_{d,0} &= \{s \in S_{d,\tau_0,0}: s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq k \leq d, \quad k \text{ четно}\}, \\ S_{d,1} &= \{s \in S_{d,\tau_1,1}: s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq k \leq d, \quad k \text{ нечетно}\}, \\ S_{d,2} &= \left\{s \in S_{d,\tau_2,2}: s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq k, l \leq d, \quad k \text{ четно, } l \text{ нечетно}\right\}, \end{aligned}$$

где векторы узлов τ_i при $i = 0, 1, 2$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \begin{cases} \left\{ \left\{ \frac{k\pi}{n+1} \right\}_{k=1}^n \right\}, & d \text{ нечетно,} \\ \left\{ \left\{ \frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)} \right\}_{k=0}^n \right\}, & d \text{ четно,} \end{cases} \\ \tau_1 &= \begin{cases} \left\{ \left\{ \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} \right\}_{k=0}^{n-1} \right\}, & d \text{ нечетно,} \\ \left\{ \left\{ \frac{k\pi}{n} \right\}_{k=1}^{n-1} \right\}, & d \text{ четно,} \end{cases} \\ \tau_2 &= \begin{cases} \left\{ \left\{ \frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)} \right\}_{k=0}^{n-1} \right\}, & d \text{ четно,} \\ \left\{ \left\{ \frac{k\pi}{2n+1} \right\}_{k=1}^n \right\}, & d \text{ нечетно.} \end{cases} \end{aligned}$$

В [1] было доказано, что для всех $d \geq r - 1$ пространства сплайнов $S_{d,i}$ являются оптимальными приближающими пространствами для классов A_i^r , $i = 0, 1, 2$.

Как мы видим, узлы в каждом из пространств $S_{d,i}$ равноотстоящие, однако конкретный вид вектора узлов определяется четностью d . В настоящей работе мы показываем, что классы A_i^r имеют экстремальные сплайновые приближающие пространства с обоими типами узлов, указанными в определении τ_i . Разумеется, в случае узлов τ_i при противоположных четностях d необходимо добавить или, наоборот, ослабить граничные условия, чтобы размерность полученного пространства равнялась n .

Наша техника заключается в следующем. В [3] мы изучали периодическую ситуацию и получили широкий класс оптимальных приближающих подпространств, порожденных равноотстоящими сдвигами одной функции, в том числе пространств сплайнов. Условия экстремальности формулировались в терминах коэффициентов Фурье функции, порождающей пространство сдвигов. В данной работе мы сводим задачу для функций на отрезке к аналогичной для периодических функций и, используя результаты [3], получаем серию экстремальных подпространств для неперодической ситуации, в том числе полученных в [1].

2. Пространства сдвигов. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $B \in L_1$. Обозначим через $\mathbb{S}_{B,n}$ пространство функций s , заданных на \mathbb{R} и представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B \left(x - \frac{j\pi}{n} \right), \quad (2)$$

а через $\mathbb{S}_{B,n}^\times$ — пространство функций из $\mathbb{S}_{B,n}$, представимых в виде (2) с дополнительным условием

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0. \quad (3)$$

Подставляя в (2) разложение функции B в ряд Фурье, получаем

$$s(x) \sim \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l(B) e^{il(x - \frac{j\pi}{n})} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l(B) \widehat{\beta}_l e^{ilx} \sim \sum_{l=0}^{2n-1} \widehat{\beta}_l \Phi_{B,l}(x),$$

где

$$\Phi_{B,l}(x) = \Phi_{B,n,l}(x) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} e^{\frac{ilj\pi}{n}} B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right) \sim \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_{l+2n\nu}(B) e^{i(l+2n\nu)x}.$$

Ясно, что $\Phi_{B,l} = \Phi_{B,l+2n}$, а условие (3) равносильно $\widehat{\beta}_n = 0$. Таким образом, пространства $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}_{B,n}^\times$ совпадают с линейными оболочками наборов $\{\Phi_{B,l}\}_{l=0}^{2n-1}$ (или, что то же самое, $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^n$ и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$). При $m \in [1 : n]$ обозначим через $\mathbb{S}_{B,n,m}^\times$ линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m-1}$.

Функции $\Phi_{B,l}$ ортогональны: $\langle \Phi_{B,l}, \Phi_{B,j} \rangle_{L_2} = 0$ при $l \neq j$, а

$$\frac{1}{2\pi} \|\Phi_{B,l}\|_2^2 = D_{B,l} = D_{B,n,l} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_{l+2n\nu}(B)|^2.$$

Линейная независимость наборов $\{B(\cdot - \frac{j\pi}{n})\}_{j=0}^{2n-1}$ и $\{B(\cdot - \frac{j\pi}{n})\}_{j=1-n}^{n-1}$ равносильна тому, что функции $\Phi_{B,l}$ ненулевые при $l \in [1-n : n]$ и $l \in [1-n : n-1]$ соответственно. В этом случае системы $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^n$ и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ образуют ортогональные базисы в пространствах $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}_{B,n}^\times$. Ортонормированные базисы образуют функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{B,l}}} \Phi_{B,l}$.

Если B есть ядро Дирихле

$$D_{n-1}(t) = \sum_{k=1-n}^{n-1} e^{ikt},$$

то $\mathbb{S}_{B,n} = \mathbb{S}_{B,n}^\times = \mathcal{T}_{2n-1}$, $\mathbb{S}_{B,n,m}^\times = \mathcal{T}_{2m-1}$, $\Phi_{B,n} = 0$, а $\Phi_{B,l}$ при $|l| < n$ суть обычные экспоненты.

В случае, когда B есть B -сплайн

$$B_{n,\mu}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k} - 1}{i\frac{\pi}{n}k} \right)^{\mu+1} e^{ikt}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+$$

(здесь и далее при $k = 0$ дробь считается равной 1), получаем, что $\mathbb{S}_{B,n}$ — это пространство сплайнов $\mathbf{S}_{n,\mu}$. Функции

$$\Phi_{B_{n,\mu},l}(x) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}l} - 1}{i\frac{\pi}{n}} \right)^{\mu+1} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(l+2n\nu)x}}{(l+2n\nu)^{\mu+1}},$$

образующие в нем ортогональный базис, называются *экспоненциальными сплайнами* (по принятому соглашению $\Phi_{B_{n,\mu},0}(x) = 1$). Линейную оболочку системы $\{\Phi_{B_{n,\mu},l}\}_{l=1}^{n-1}$ обозначим через $\mathbf{S}_{n,\mu}^\times$. Экспоненциальные сплайны, вообще говоря, непериодические, введены в рассмотрение Шенбергом, основы теории и исторические комментарии содержатся в [4]. Ортогональность периодических экспоненциальных сплайнов отмечалась многими авторами; по-видимому, самые ранние работы на эту тему — [5, 6]. Пространства $\mathbf{S}_{n,\mu}^\times$ и $\mathbf{S}_{B,n}^\times$ рассматривались Виноградовым [7, 8].

Следующая лемма дает описание свойств симметрии пространств сдвигов в терминах коэффициентов Фурье.

Лемма 1. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $B \in L_1$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Из включения $s \in \mathbf{S}_{B,n,m}^\times$ следует $s(-\cdot) \in \mathbf{S}_{B,n,m}^\times$.

2. Для каждого $l \in [0 : m - 1]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что $\gamma_0 \in \{-1, 1\}$ и

$$c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B) \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение означает, что $\Phi_{B,l}(-\cdot) \in \mathbf{S}_{B,n,m}^\times$ для всех $l \in [1 - m : m - 1]$. Заменяя для удобства l на $-l$, перепишем включение в виде равенства

$$\Phi_{B,-l}(-x) = \sum_{j=1-m}^{m-1} \gamma_j \Phi_{B,j}(x)$$

для некоторых γ_j . Поскольку функция $\Phi_{B,j}$ ортогональна $\Phi_{B,-l}(-\cdot)$ при $j \neq l$, имеем

$$\Phi_{B,-l}(-x) = \gamma_l \Phi_{B,l}(x).$$

Приравнивая коэффициенты Фурье функций в обеих частях последнего равенства, приходим к (4). Меняя l на $-l$ и k на $-k$, получаем $c_{l+2nk}(B) = \gamma_{-l} c_{-l-2nk}(B)$. Если $\gamma_l = 0$ для некоторого l , то $c_{l+2nk}(B) = c_{-l-2nk}(B) = 0$ и равенства выполнены для любого γ_l . Следовательно, можно считать, что $\gamma_l \neq 0$.

С другой стороны, если равенство (4) выполнено при некотором l , для которого $\gamma_l \neq 0$, то оно также верно при $-l$ для $\frac{1}{\gamma_l}$. Поэтому достаточно рассматривать лишь $l \in [0 : m - 1]$.

Полагая $l = 0$, получаем, что $c_{-2nk}(B) = \gamma_0 c_{2nk}(B)$ для всех k . Замена k на $-k$ дает $c_{2nk}(B) = \gamma_0 c_{-2nk}(B)$. Если $c_{2nk}(B) = 0$ для всех k , можно положить $\gamma_0 = 1$. Если же $c_{2nk}(B) \neq 0$ для некоторого k , то также $c_{-2nk}(B) \neq 0$ и, следовательно, $\gamma_0 = \pm 1$. \square

Заметим, что все четные функции (в частности, ядро Дирихле) удовлетворяют второму условию леммы 1 с $\gamma_l = 1$ для всех l .

Для B -сплайна имеем $\gamma_l = e^{-i\frac{\pi}{n}l(\mu+1)}$, а для сдвинутого B -сплайна $\tilde{B}_{n,\mu} = B_{n,\mu}(\cdot - \frac{\pi}{2n})$ из равенства $c_k(\tilde{B}_{n,\mu}) = e^{-\frac{ik\pi}{2n}} c_k(B_{n,\mu})$ следует, что $\gamma_l = e^{-\frac{i\pi\mu}{n}}$.

Замечание 1. При $l \in [1 : m - 1]$ имеем $\Phi_{B,-l}^e = \gamma_l \Phi_{B,l}^e$, $\Phi_{B,-l}^o = -\gamma_l \Phi_{B,l}^o$. Отсюда следует, что пространство $\mathbf{S}_{B,n,m}^\times$ представимо в виде

$$\mathbf{S}_{B,n,m}^\times = \text{span} \{\Phi_{B,0}\} \oplus \text{span} \{\Phi_{B,l}^e\}_{l=1}^{m-1} \oplus \text{span} \{\Phi_{B,l}^o\}_{l=1}^{m-1}. \quad (5)$$

Замечание 2. Если $s \in \mathbb{S}_{B,n,m}^\times$, то $s(\cdot + \pi) \in \mathbb{S}_{B,n,m}^\times$ и, поскольку $\Phi_{B,l}(x + \pi) = (-1)^l \Phi_{B,l}(x)$, справедливы равенства

$$\Phi_{B,l}^e(\pi - x) = (-1)^l \Phi_{B,l}^e(x), \quad \Phi_{B,l}^o(\pi - x) = (-1)^{l+1} \Phi_{B,l}^o(x).$$

3. Основные результаты. Следующая теорема доказана в [3, теорема 1].

Теорема 1. Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $B \in L_2$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняется неравенство

$$E(f, \mathbb{S}_{B,n,m}^\times)_2 \leq \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2. \quad (6)$$

2. Коэффициенты Фурье функции B удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} c_l(B) &\neq 0 \quad \text{при всех } |l| \in [0 : m - 1], \\ c_{2\nu}(B) &= 0 \quad \text{при всех } \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} &\geq 0 \quad \text{при всех } |l| \in [1 : m - 1]. \end{aligned} \quad (7)$$

В дальнейшем нам понадобится простое следствие теоремы 1 для функций с нулевым средним.

Следствие 1. Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $B \in L_2$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ такой, что $c_0(f) = 0$, выполняется неравенство

$$E(f, \mathbb{S}_{B,n,m}^\times)_2 \leq \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2.$$

2. Для всех $|l| \in [1 : m - 1]$ будет $c_l(B) \neq 0$ и

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $g \in L_2$ положим $g_0(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_{2\nu}(g) e^{i2\nu x}$. Ясно, что неравенство (6) на всем классе $W_2^{(r)}$ равносильно системе

$$E(f_0, \mathbb{S}_{B_0,n,m}^\times)_2 \leq \frac{1}{m^r} \|f_0^{(r)}\|_2,$$

$$E(f - f_0, \mathbb{S}_{B-B_0,n,m}^\times)_2 \leq \frac{1}{m^r} \|(f - f_0)^{(r)}\|_2.$$

(1) \implies (2). Рассмотрим функцию $\tilde{B} \in L_2$, для которой $c_0(\tilde{B}) = 1$, $c_{2\nu}(\tilde{B}) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $c_k(\tilde{B}) = c_k(B)$ при $k \neq 2\nu$. Для всякой $f \in W_2^{(r)}$ имеем

$$E\left(f_0, \mathbb{S}_{\tilde{B}_0,n,m}^\times\right)_2 \leq \|f_0 - c_0(f)\|_2 \leq \frac{1}{m^r} \|f_0^{(r)}\|_2, \quad (8)$$

$$E\left(f - f_0; \mathbb{S}_{\tilde{B}-\tilde{B}_0, n, m}^\times\right)_2 \leq \frac{1}{m^r} \|(f - f_0)^{(r)}\|_2. \quad (9)$$

Неравенство (8) очевидно, поскольку пространство $\mathbb{S}_{\tilde{B}_0, n, m}^\times$ содержит константы, а (9) выполнено по условию. Следовательно, верно (6), а коэффициенты Фурье функции \tilde{B} удовлетворяют второму условию теоремы 1. По определению \tilde{B} то же самое верно и для $c_k(B)$ при $k \neq 2nv$.

(2) \implies (1). Пусть $f \in W_2^{(r)}$, $c_0(f) = 0$, а \tilde{B} определена как выше. По теореме 1 неравенство (6) выполнено для \tilde{B} , а из (8) и (9) следует, что оно также верно для B . \square

Рассмотрим следующие классы функций:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0^r &= \{u \in W_2^{(r)} : u \text{ нечетна}\}, \\ \tilde{H}_1^r &= \{u \in W_2^{(r)} : u \text{ четна}\}, \\ \tilde{H}_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)} : u \text{ нечетна, } u\left(\cdot + \frac{\pi}{2}\right) \text{ четна}\right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, каждая функция из \tilde{H}_i^r принадлежит H_i^r . Обратно, в силу граничных условий в определении классов H_i^r 2π -периодизация нечетного продолжения функции $u \in H_0^r$ на отрезок $[-\pi, 0]$ принадлежит \tilde{H}_0^r . Аналогично 2π -периодизация четного продолжения функции $u \in H_1^r$ на отрезок $[-\pi, 0]$ есть функция из \tilde{H}_1^r . Последовательно продолжая $u \in H_2^r$ до четной (относительно $\pi/2$) функции на $[0, \pi]$ и до нечетной функции на $[-\pi, \pi]$, после 2π -периодизации получаем функцию из \tilde{H}_2^r .

Поэтому, полагая

$$\tilde{A}_i^r = \{u \in \tilde{H}_i^r : \|u^{(r)}\|_2 \leq 1\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned} d_n(\tilde{A}_0^r; L_2) &= d_n(A_0^r; L_2[0, \pi]) = \frac{1}{(n+1)^r}, \\ d_n(\tilde{A}_1^r; L_2) &= d_n(A_1^r; L_2[0, \pi]) = \frac{1}{n^r}, \\ d_n(\tilde{A}_2^r; L_2) &= d_n\left(A_2^r; L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \frac{1}{(2n+1)^r}. \end{aligned}$$

Таким образом, упомянутые во введении задачи для непериодических классов могут быть сведены к аналогичным для периодической ситуации, в которой применима теорема 1. Мы будем формулировать наши результаты для периодических классов (обозначаемых с волнами).

Замечание 3. Пусть S — замкнутое подпространство L_2 , которое вместе с каждой функцией s содержит $s(-\cdot)$. Тогда элемент наилучшего приближения любой функции $u \in \tilde{H}_0^r$ в L_2 пространством S нечетен. Действительно, пусть $\|u - s\|_2 = \inf_{T \in S} \|f - T\|_2$, тогда

$$\begin{aligned} \|u - s\|_2 &\leq \left\|u - \frac{s - s(-\cdot)}{2}\right\|_2 = \left\|\frac{u - s}{2} + \frac{u + s(-\cdot)}{2}\right\|_2 = \\ &= \left\|\frac{u - s}{2} + \frac{-u(-\cdot) + s(-\cdot)}{2}\right\|_2 \leq \frac{1}{2} (\|u - s\|_2 + \|u(-\cdot) - s(-\cdot)\|_2) = \|u - s\|_2. \end{aligned}$$

Это означает, что все неравенства в цепочке обращаются в равенства. В частности, $\|u - s\|_2 = \|u - s^o\|_2$. По единственности элемента наилучшего приближения в L_2 получаем, что s нечетна.

Аналогично, элемент наилучшего приближения любой функции $u \in \tilde{H}_1^r$ пространством S четен. Если, кроме того, пространство S инвариантно относительно сдвига на π , то элемент наилучшего приближения $u \in \tilde{H}_2^r$ пространством S удовлетворяет тем же условиям симметрии, что и сама функция u .

Рассмотрим m -мерные подпространства $S_{B,n,m}^\times$:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{B,n,m}^0 &= \text{span} \{ \Phi_{B,l}^o \}_{l=1}^m \quad \text{при } m+1 \leq n, \\ \tilde{S}_{B,n,m}^1 &= \text{span} \{ \Phi_{B,0}^e \} \oplus \text{span} \{ \Phi_{B,l}^e \}_{l=1}^{m-1} \quad \text{при } m \leq n, \\ \tilde{S}_{B,n,m}^2 &= \text{span} \{ \Phi_{B,2l-1}^o \}_{l=1}^m \quad \text{при } 2m+1 \leq n.\end{aligned}$$

Следующие три теоремы дают достаточные условия экстремальности этих пространств.

Теорема 2. Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m+1 \leq n$, а коэффициенты Фурье функции $B \in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Для любого $l \in [1 : m]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.
2. Для всех $\nu \in \mathbb{N}$ верно $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.
3. Для всех $l \in [1 : m]$ будет $c_l(B) \neq 0$ и

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(m+1)^{2r}}} \geq 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \tilde{H}_0^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{S}_{B,n,m}^0)_2 \leq \frac{1}{(m+1)^r} \|u^{(r)}\|_2. \quad (10)$$

Доказательство. Поскольку всякая функция из \tilde{H}_0^r имеет нулевое среднее, а B удовлетворяет условиям второго пункта следствия 1, имеем неравенство

$$E(u, S_{B,n,m+1}^\times)_2 \leq \frac{1}{(m+1)^r} \|u^{(r)}\|_2. \quad (11)$$

По лемме 1 пространство $S_{B,n,m+1}^\times$ вместе с каждой функцией содержит ее четную и нечетную части. Поэтому элемент наилучшего приближения функции $u \in \tilde{H}_0^r$ пространством $S_{B,n,m+1}^\times$ нечетен. Отсюда следует, что пространство $S_{B,n,m+1}^\times$ в левой части (11) можно заменить на его подпространство, состоящее только из нечетных функций. Поскольку по условию 2 функция $\Phi_{B,0}^e$ четна, из разложения (5) следует, что искомое приближающее подпространство совпадает с $\tilde{S}_{B,n,m}^0$. \square

Теорема 3. Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, а коэффициенты Фурье функции $B \in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Для любого $l \in [1 : m - 1]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ верно $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.
2. Для всех $l \in [0 : m - 1]$ $c_l(B) \neq 0$.
3. Для всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $c_{2n\nu}(B) = 0$.
4. Для всех $l \in [1 : m - 1]$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geq 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \tilde{H}_1^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{S}_{B,n,m}^1)_2 \leq \frac{1}{m^r} \|u^{(r)}\|_2. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 1 к $u \in \tilde{H}_1^r$, получаем неравенство

$$E(u, S_{B,n,m}^\times)_2 \leq \frac{1}{m^r} \|u^{(r)}\|_2.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 пространство $S_{B,n,m}^\times$ в левой части последнего неравенства может быть заменено на подпространство его четных функций, т. е. на $\tilde{S}_{B,n,m}^1$. \square

Теорема 4. Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $2m + 1 \leq n$, а коэффициенты Фурье функции $B \in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Для любого $l \in [1 : 2m]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ верно $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.
2. Для всех $\nu \in \mathbb{N}$ $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.
3. Для всех $l \in [1 : 2m]$ будет $c_l(B) \neq 0$ и

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(2m+1)^{2r}}} \geq 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \tilde{H}_2^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{S}_{B,n,m}^2)_2 \leq \frac{1}{(2m+1)^r} \|u^{(r)}\|_2. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как \tilde{H}_2^r — подпространство \tilde{H}_0^r , по теореме 2 имеем

$$E(u, \tilde{S}_{B,n,2m}^0)_2 \leq \frac{1}{(2m+1)^r} \|u^{(r)}\|_2.$$

Поскольку для u выполняется равенство $u = u(\pi - \cdot)$, приближающее пространство $\tilde{S}_{B,n,2m}^0$ может быть заменено на подпространство функций, удовлетворяющих этому условию. По замечанию 2 оно совпадает с $\tilde{S}_{B,n,m}^2$. \square

Замечание 4. Легко показать, что в условиях теоремы 4 пространство $\text{span} \{ \Phi_{B,2l-1}^e \}_{l=1}^m$ экстремально для класса функций, получаемого из H_2^r переменной ролей k и l (или соответствующей заменой условий симметрии в определении \tilde{H}_2^r).

Замечание 5. Отметим, что условия теорем 2–4 инвариантны относительно сдвига B на $\frac{\pi}{2n}$.

Замечание 6. Неравенства (10), (12) и (13) обращаются в равенства на функциях $x \mapsto \sin(m+1)x$, $x \mapsto \cos mx$ и $x \mapsto \sin(2m+1)x$ соответственно.

Оценки из теорем 2–4 можно усилить стандартным способом, заменив правую часть неравенств на наилучшие приближения.

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы 2 $B \in W_2^{(r)}$.

1. Если r четно, то для любой $u \in \tilde{H}_0^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0)_2 \leq \frac{1}{(m+1)^r} E(u^{(r)}, \tilde{\mathcal{S}}_{B^{(r)},n,m}^0)_2.$$

2. Если r нечетно, то для любой $u \in \tilde{H}_0^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0)_2 \leq \frac{1}{(m+1)^r} E(u^{(r)}, \text{span} \{ \Phi_{B^{(r)},l}^e \}_{l=1}^m)_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При четном r обозначим через s элемент наилучшего приближения функции $u^{(r)}$ пространством $\tilde{\mathcal{S}}_{B^{(r)},n,m}^0$, а при нечетном r — пространством $\text{span} \{ \Phi_{B^{(r)},l}^e \}_{l=1}^m$. Поскольку $c_0(s) = 0$, для функции s определена 2π -периодическая r -я первообразная, обозначим ее s_r . Для каждого $l \in [1 : m]$ имеем

$$(\Phi_{B,l}^o)^{(r)} = \begin{cases} \Phi_{B^{(r)},l}^o, & r \text{ четно,} \\ \Phi_{B^{(r)},l}^e, & r \text{ нечетно,} \end{cases}$$

откуда следует, что $s_r \in \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0$. Применяя теорему 2 к функции $u - s_r$, получаем

$$\begin{aligned} E(u, \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0)_2 &= E(u - s_r, \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0)_2 \leq \frac{1}{(m+1)^r} \|u^{(r)} - s\|_2 = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(m+1)^r} E(u^{(r)}, \tilde{\mathcal{S}}_{B^{(r)},n,m}^0)_2, & r \text{ четно,} \\ \frac{1}{(m+1)^r} E(u^{(r)}, \text{span} \{ \Phi_{B^{(r)},l}^e \}_{l=1}^m)_2, & r \text{ нечетно.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Следующие два утверждения доказываются аналогично предыдущему.

Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 3 $B \in W_2^{(r)}$.

1. Если r четно, то для любой $u \in \tilde{H}_1^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^1)_2 \leq \frac{1}{m^r} E(u^{(r)}, \text{span} \{ \Phi_{B^{(r)},l}^e \}_{l=1}^{m-1})_2.$$

2. Если r нечетно, то для любой $u \in \tilde{H}_1^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^1)_2 \leq \frac{1}{m^r} E(u^{(r)}, \tilde{\mathcal{S}}_{B^{(r)},n,m-1}^0)_2.$$

Следствие 4. Пусть в условиях теоремы 4 $B \in W_2^{(r)}$.

1. Если r четно, то для любой $u \in \tilde{H}_2^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^2)_2 \leq \frac{1}{(2m+1)^r} E(u^{(r)}, \tilde{\mathcal{S}}_{B^{(r)},n,m}^2)_2.$$

2. Если r нечетно, то для любой $u \in \tilde{H}_2^r$ выполняется неравенство

$$E(u, \tilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^2)_2 \leq \frac{1}{(2m+1)^r} E(u^{(r)}, \text{span} \{ \Phi_{B^{(r)},2l-1}^e \}_{l=1}^m \}_2).$$

4. Примеры. В [3, теорема 2] мы привели легко проверяемое условие, достаточное для выполнения неравенства (7) (и, следовательно, соответствующих условий теорем 2–4). А именно, неравенство (7) справедливо для всех функций B , удовлетворяющих условию

$$|l + 2nk|^r |c_{l+2nk}(B)| \leq |l|^r |c_l(B)| \quad \text{для всех } |l| \in [1 : m-1], k \in \mathbb{Z}.$$

В частности, функции с коэффициентами вида

$$c_k(B) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k} - 1}{i\frac{\pi}{n}k} \right)^{\mu+1} \eta_k, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+, \mu + 1 \geq r,$$

где $|\eta_{l+2nk}| \leq |\eta_l|$ и $\eta_l \neq 0$ при $|l| < n$, удовлетворяют этому условию при всех $m \leq n$. Для $\eta_k = 1$ эта формула определяет B -сплайн. Если η_k суть коэффициенты Фурье функции $K \in L_1$, то B есть среднее Стеклова порядка $\mu + 1$ от K . Например, в качестве K можно взять ядро Пуассона ($\gamma_k = e^{-\alpha|k|}$, $\alpha > 0$), ядро теплопроводности ($\gamma_k = e^{-\alpha k^2}$, $\alpha > 0$), ядра некоторых дифференциальных операторов ($\gamma_k = \frac{1}{P(ik)}$, P — многочлен, все нули которого вещественны), обобщенное ядро Бернулли ($\gamma_k = |k|^{-s} e^{-i\beta \text{sign } k}$, $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$); в последних двух примерах полагаем $\gamma_0 = 1$.

Выбирая в теоремах 2–4 в качестве B ядро Дирихле соответствующего порядка, мы получаем экстремальные подпространства тригонометрических многочленов (1).

Теперь опишем сплайновые пространства, возникающие в теоремах 2–4, и покажем, что результаты [1] следуют из этих теорем. Напомним, что для рассматриваемых пространств периодических функций \tilde{H}_i^r их ограничения на $[0, \pi]$ (при $i = 1, 2$) или $[0, \pi/2]$ (при $i = 2$) обозначаются через H_i^r .

1. Заменим в теореме 2 n на $n + 1$ и положим $m = n$, $B = B_{n+1,d}$. Тогда пространство $\tilde{\mathcal{S}}_{B,n+1,n}^0$ есть n -мерное подпространство нечетных сплайнов из $\mathcal{S}_{B,n+1}^\times$. Рассмотрим пространство $Q_{d,1}$ сплайнов s с узлами $\left\{ \frac{k\pi}{n+1} \right\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq k < d, \quad k \text{ четно.}$$

Его размерность равна n для нечетных d и $n + 1$ для четных d . Следовательно, при нечетном d имеем $\mathcal{S}_{B,n+1,n}^0 = Q_{d,1} = S_{d,0}$. Для четного d пространство $\mathcal{S}_{B,n+1,n}^0$ есть n -мерное подпространство $Q_{d,1}$.

2. Заменяем в теореме 2 n на $n + 1$ и положим $m = n$, $B = B_{n+1,d}(\cdot - \frac{\pi}{2(n+1)})$. Тогда пространство $\tilde{\mathcal{S}}_{B,n+1,n}^0$ есть n -мерное подпространство нечетных сплайнов из $\mathbb{S}_{B,n+1}^\times$. Рассмотрим пространство $Q_{d,2}$ сплайнов s с узлами $\left\{ \frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)} \right\}_{k=0}^n$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq k \leq d, \quad k \text{ четно.}$$

Его размерность равна n для четных d и $n + 1$ для нечетных d . Заметим, что точки 0 и π не являются узлами. Следовательно, при четном d имеем $\mathcal{S}_{B,n+1,n}^0 = Q_{d,2} = S_{d,0}$. Для нечетного d пространство $\mathcal{S}_{B,n+1,n}^0$ есть n -мерное подпространство $Q_{d,2}$.

3. Положим в теореме 3 $m = n$, $B = B_{n,d}$. Тогда пространство $\tilde{\mathcal{S}}_{B,n,n}^1$ есть n -мерное подпространство четных сплайнов из $\mathbb{S}_{B,n}^\times$. Рассмотрим пространство $Q_{d,3}$ сплайнов s с узлами $\left\{ \frac{k\pi}{n} \right\}_{k=1}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq k < d, \quad k \text{ нечетно.}$$

Его размерность равна n для четных d и $n + 1$ для нечетных d . Следовательно, при четном d имеем $\mathcal{S}_{B,n,n}^1 = Q_{d,3} = S_{d,1}$. Для нечетного d пространство $\mathcal{S}_{B,n,n}^1$ есть n -мерное подпространство $Q_{d,3}$.

4. Положим в теореме 3 $m = n$, $B = B_{n,d}(\cdot - \frac{\pi}{2n})$. Тогда пространство $\tilde{\mathcal{S}}_{B,n,n}^1$ есть n -мерное подпространство четных сплайнов из $\mathbb{S}_{B,n}^\times$. Рассмотрим пространство $Q_{d,4}$ сплайнов s с узлами $\left\{ \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} \right\}_{k=0}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq k \leq d, \quad k \text{ нечетно.}$$

Его размерность равна n для нечетных d и $n + 1$ для четных d . Заметим, что точки 0 и π не являются узлами. Следовательно, при нечетном d имеем $\mathcal{S}_{B,n,n}^1 = Q_{d,4} = S_{d,1}$. Для четного d пространство $\mathcal{S}_{B,n,n}^1$ есть n -мерное подпространство $Q_{d,4}$.

5. Заменяем в теореме 4 n на $2n + 1$ и положим $m = n$, $B = B_{2n+1,d}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,5}$ сплайнов s с узлами $\left\{ \frac{k\pi}{2n+1} \right\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq k < d, \quad 0 \leq l \leq d, \quad k \text{ четно, } l \text{ нечетно.}$$

Его размерность равна n для нечетных d и $n + 1$ для четных d . Следовательно, при нечетном d имеем $\mathcal{S}_{B,2n+1,n}^2 = Q_{d,5} = S_{d,2}$. Для четного d пространство $\mathcal{S}_{B,2n+1,n}^2$ есть n -мерное подпространство $Q_{d,5}$.

6. Заменяем в теореме 4 n на $2n + 1$ и положим $m = n$, $B = B_{2n+1,d}(\cdot - \frac{\pi}{2(2n+1)})$. Рассмотрим пространство $Q_{d,6}$ сплайнов s с узлами $\left\{ \frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)} \right\}_{k=0}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq k \leq d, \quad 0 \leq l < d, \quad k \text{ четно, } l \text{ нечетно.}$$

Его размерность равна n для четных d и $n + 1$ для нечетных d . Следовательно, при четном d имеем $\mathcal{S}_{B,2n+1,n}^2 = Q_{d,6} = S_{d,2}$. Для нечетного d пространство $\mathcal{S}_{B,2n+1,n}^2$ есть n -мерное подпространство $Q_{d,6}$.

Выбирая в теоремах 2–4 другие значения m и n и B -сплайн (сдвинутый или нет) в роли функции B , можно получить и другие экстремальные подпространства сплайнов с равноотстоящими узлами.

Литература

1. Floater M. S., Sander E. Optimal spline spaces for L^2 n -width problems with boundary conditions // *Constructive Approximation*. 2018. P. 1–18.
2. Kolmogorov A. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // *Ann. Math.* 1936. Vol. 37. P. 107–110.
3. Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю. Точные оценки среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых периодических функций пространствами сдвигов // *Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия*. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 22–31. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.103>
4. Schoenberg I. J. *Cardinal Spline Interpolation*. 2 ed. Philadelphia: SIAM, 1993.
5. Golomb M. Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes // *Journal of Approximation Theory*. 1968. Vol. 1. P. 26–65. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(68\)90055-5](https://doi.org/10.1016/0021-9045(68)90055-5)
6. Kamada M., Toriachi K., Mori R. Periodic spline orthonormal bases // *Journal of Approximation Theory*. 1988. Vol. 55. P. 27–34. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(88\)90108-6](https://doi.org/10.1016/0021-9045(88)90108-6)
7. Виноградов О. Л. Аналог сумм Ахиезера — Крейна — Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта // *Проблемы математического анализа*. 2003. Вып. 25. С. 29–56.
8. Виноградов О. Л. Точные неравенства для приближений классов периодических свертков пространствами сдвигов нечетной размерности // *Математические заметки*. 2009. Т. 85, № 4. С. 569–584. <https://doi.org/10.4213/mzm4162>

Статья поступила в редакцию 19 февраля 2020 г.;
после доработки 14 марта 2020 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Виноградов Олег Леонидович — д-р физ.-мат. наук, проф.; olvin@math.spbu.ru
Улицкая Анастасия Юрьевна — аспирант; baguadadao@gmail.com

Optimal subspaces for mean square approximation of classes of differentiable functions on a segment*

O. L. Vinogradov, A. Yu. Ulitskaya

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vinogradov O. L., Ulitskaya A. Yu. Optimal subspaces for mean square approximation of classes of differentiable functions on a segment. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 404–417. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.304> (In Russian)

In this paper, we specify a set of optimal subspaces for L_2 approximation of three classes of functions in the Sobolev spaces $W_2^{(r)}$, defined on a segment and subject to certain boundary conditions. A subspace X of dimension not exceeding n is called optimal for a function class A if the best approximation of A by X equals the Kolmogorov n -width of A . These boundary conditions correspond to subspaces of periodically extended functions with

*This work is supported by the Russian Science Foundation under grant no. 18-11-00055.

symmetry properties. All of the approximating subspaces are generated by equidistant shifts of a single function. The conditions of optimality are given in terms of Fourier coefficients of a generating function. In particular, we indicate optimal spline spaces of all degrees $d \geq r - 1$ with equidistant knots of several different types.

Keywords: spaces of shifts, splines, n -widths.

References

1. Floater M. S., Sande E., “Optimal spline spaces for L^2 n -width problems with boundary conditions”, *Constructive Approximation*, 1–18 (2018).
2. Kolmogorov A., “Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse”, *Ann. Math.* **37**, 107–110 (1936).
3. Vinogradov O. L., Ulitskaya A. Yu., “Sharp estimates for mean square approximation of classes of differentiable periodic functions by shift spaces”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **51**, iss. 1, 15–22 (2018). <https://doi.org/10.3103/S1063454118010120>
4. Schoenberg I. J., *Cardinal Spline Interpolation* (2 ed., Philadelphia, SIAM, 1993).
5. Golomb M., “Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes”, *Journal of Approximation Theory* **1**, 26–65 (1968). [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(68\)90055-5](https://doi.org/10.1016/0021-9045(68)90055-5)
6. Kamada M., Toriachi K., Mori R., “Periodic spline orthonormal bases”, *Journal of Approximation Theory* **55**, 27–34 (1988). [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(88\)90108-6](https://doi.org/10.1016/0021-9045(88)90108-6)
7. Vinogradov O. L., “Analog of the Akhiezer–Krein–Favard sums for periodic splines of minimal defect”, *Journal of Mathematical Sciences* **114**(5), 1608–1627 (2003). <https://doi.org/10.1023/A:1022360711364>
8. Vinogradov O. L., “Sharp inequalities for approximations of classes of periodic convolutions by odd-dimensional subspaces of shifts”, *Mathematical Notes* **85**, 544–557 (2009). <https://doi.org/10.1134/S0001434609030250>

Received: February 19, 2020

Revised: March 14, 2020

Accepted: March 19, 2020

Authors' information:

Oleg L. Vinogradov — olvin@math.spbu.ru

Anastasiya Yu. Ulitskaya — baguadadao@gmail.com