УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3
MSC 34C20, 34C05

Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — VI

В. В. Басов, А. С. Чермных

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — VI // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 377–391. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.302

Данная статья является шестой в цикле работ, посвященном двумерным однородным кубическим системам. В ней рассматривается случай, когда однородный векторный многочлен в правой части системы не имеет общего множителя. Множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых на основании определенным образом введенных принципов выделяется простейшая система — нормальная форма третьего порядка, задаваемая матрицей коэффициентов своей правой части, которая называется канонической формой (КФ). Каждая КФ имеет свою структуру расположения ненулевых элементов, их определенную нормировку и каноническое множество допустимых значений для ненормированных элементов, относящее КФ в выбранному классу эквивалентности. Помимо классификации для каждой КФ приводятся: a) условия на коэффициенты исходной системы, b) линейные неособые замены, преобразующие правую часть системы при этих условиях в выбранную КФ, c) получаемые значения ненормированных элементов КФ. Предложенная классификация в первую очередь создавалась для получения всех возможных структур обобщенных нормальных форм систем с КФ в невозмущенной части. В статье приводится еще одно приложение полученной классификации, связанное с нахождением для КФ фазовых портретов в круге Пуанкаре.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

1. Введение. Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1–5], и в ней сохраняются все введенные ранее обозначения. В работе имеются ссылки на доказательства, выполненные в пакете Maple и размещенные в любом из хранилищ: https://github.com/Vladimir-Basov/DE, https://github.com/A-Cherm/DE.

Эта работа завершает классификацию вещественных систем (2.1) из [1, разд. 2]

$$\dot x_1 = P_1(x_1, x_2), \quad \dot x_2 = P_2(x_1, x_2) \qquad (P_i = a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3 \not\equiv 0),$$

отождествляемых с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

В ней рассматривается оставшийся неисследованным случай $l = 0$, означающий, что многочлены P_1 и P_2 не имеют общего множителя ненулевой степени.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

Ранее, в [2] для систем с $l=3$, в [3, 4] для систем с $l=2$ и в [5] для систем с $l=1$, где l — степень общего множителя P_1 и P_2, были получены следующие результаты.

Множество систем (1.1) удалось разбить на классы эквивалентности относительно линейных неособых замен (2.2) из [1, разд. 2] $x_1 = r_1y_1+s_1y_2$, $x_2 = r_2y_1+s_2y_2$, отождествляемых с матрицей

$$L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}, \quad \delta = \det L \neq 0. \tag{1.2}$$

В каждом классе удалось выделить образующую — «простейшую» систему, названную кубической нормальной формой, с матрицей A, названной канонической формой, и обозначенной $CF_i^{m,l}$ (см. [2, опред. 1.10]), где m — число ненулевых элементов A, а l — максимальная степень вещественного общего множителя.

Выделение канонических форм основано на структурных и нормировочных принципах, разработанных в [1, разд. 1.1, 1.2] с целью максимально упростить сведение возмущенных систем с различными CF в невозмущенной части к обобщенным нормальным формам. Определение обобщенных нормальных форм и конструктивный метод получения их всевозможных структур приведены в [1, разд. 1.3].

Понятие канонической формы, помимо выбора расположения ненулевых элементов и выбора нормируемых элементов для каждой $CF_i^{m,l}$, предполагает наличие введенного в [2, опред. 1.9] канонического множества $cs_i^{m,l}$, описывающего множество значений ненормированных элементов канонической формы, при которых она заменой (1.2) не может быть сведена ни к какой из предшествующих структурных форм SF (см. [2, опред. 1.3]). В работах [2–5] удалось выписать все $cs_i^{m,l}$ с $l = 1, 2, 3$.

Кроме того, для каждой полученной канонической формы с $l \geq 1$ удалось в явном виде выписать условия на коэффициенты исходной системы и замену (1.2), сводящую эту систему к выбранной форме $CF_i^{m,l}$, а также конкретные значения параметров из $cs_i^{m,l}$.

В настоящей работе аналогичные исследования проведены для систем с $l = 0$.

В разделе 2 приведен список канонических форм с $l = 0$ и $m \leq 4$ и выделены соответствующие им канонические множества значений параметров. К сожалению, получить $CF_i^{m,0}$ и $cs_i^{m,0}$ с $m \geq 5$ не представляется возможным из-за непреодолимых технических трудностей. Конечно, это не позволяет осуществить классификацию однородных кубических систем в полном объеме, но отсутствующая часть представляет минимальный практический интерес, поскольку основная цель классификации, связанная с нормализацией возмущенных систем, имеющих каноническую форму в невозмущенной части, при $m \geq 5$ реально не может быть проведена опять-таки в силу непреодолимых технических трудностей. Даже при $m = 4$ получить все структуры обобщенных нормальных форм пока удалось только с одной канонической формой, задаваемой квадратичным полиномом $(-x_1^2 - x_1x_2, x_1^2 + x_1x_2)$.

В разделе 3 в полном объеме исследован вопрос, при каких условиях исходная система (1.1) сводится к какой-либо из выделенных форм $CF_i^{m,0}$ с $m = 1, 2, 3$.

Наконец, в разделе 4 приведено еще одно приложение полученной классификации, а именно, для одной из канонических форм осуществлена топологическая классификация в круге Пуанкаре. Для этого полученная классификация сопоставляется с другой классификацией, предложенной А. Сима (A. Cima), Ж. Либре (J. Llibre) в [6], в которой множество систем (1.1) разбито на десять линейно неэквивалентных классов с явно выписанными образующими, после чего для представителей каждого из классов при $l = 0$ найдены все возможные фазовые портреты в круге Пуанкаре.

2. Выделение канонических форм и канонических множеств при $l = 0$. Выделим из списка 1.1 работы [2] структурные формы $SF_i^{m,0}$ с $m = 2, 3, 4$ системы (1.1) (имеются 32 такие формы), нормируем их согласно нормировочным принципам и выясним, какие из полученных нормированных структурных форм NSF (см. [2, опред. 1.6]) являются каноническими формами.

Утверждение 2.1. *Только* $NSF_4^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *и* $NSF_9^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *при всех ненулевых значениях параметров* u, v *заменами* (1.2) *сводятся к какимлибо предшествующим согласно структурным принципам структурным формам.*

Доказательство. $NSF_4^{4,0}$ и $NSF_9^{4,0}$ заменой с $r_2 = 0$, $s_2 = \theta_* s_1$, в которой $\theta_*\colon\ \theta^3 - \theta^2 + v\theta + u$, сводятся к $SF_2^{4,0}$. Проверка показывает, что остальные тридцать форм $NSF^{m,0}$ $(m = 2, 3, 4)$ являются $CF^{m,0}$. $\square$

Замечание 2.1. Здесь и в дальнейшем: 1) запись «сводится к какой-либо $SF^{m,0}$» означает, что получена указанная форма или одна из предшествующих ей форм; 2) запись «θ_* : полином от θ» означает, что θ_* — любой вещественный нуль полинома.

Выпишем все канонические формы, их канонические множества и результанты R (см. [7; 1, опред. 2.1]), причем вид $cs^{m,0}$ будет обоснован ниже в утверждении 2.2.

Список 2.1. Тридцать $CF_i^{m,0}$, $cs^{m,0}$, их R $(m = 2, 3, 4;\ \sigma, \kappa = \pm 1;\ R, u, v \neq 0)$:

$CF_{1,\kappa}^{2,0} = \sigma\begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2$, $CF_{10,\kappa}^{2,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8$; $CF_1^{3,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_4$;
$CF_{2,\kappa}^{3,0} = \sigma\begin{pmatrix} \kappa & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_5$, $CF_4^{3,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_6$, $CF_9^{3,0} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_7$,
$CF_{15}^{3,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8$, $CF_{20}^{3,0} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9$, $CF_{23,\kappa}^{3,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10}$,
$CF_{24}^{3,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}$, $CF_1^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_6$; $CF_2^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_7$,
$CF_3^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_7$, $CF_6^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_8$, $CF_{8,\kappa}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix}_8$,
$CF_{10}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & u & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_9$, $CF_{13}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & v \end{pmatrix}_9$, $CF_{16}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{10}$,
$CF_{17}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10}$, $CF_{21}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{10}$, $CF_{22}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{10}$,
$CF_{25}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & v & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}$, $CF_{26}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & u & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}$, $CF_{28}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{11}$,
$CF_{31}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 1 & v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{12}$, $CF_{32}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{12}$, $CF_{34,\kappa}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & v \\ 1 & 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix}_{12}$,
$CF_{35}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 1 & v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{13}$, $CF_{36}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & v & 0 \end{pmatrix}_{13}$, $CF_{37}^{4,0} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & v \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{14}$;

$tcs_{1,\kappa}^{2,0}$, $R = \kappa$; $tcs_{10,\kappa}^{2,0}$, $R = -\kappa$; $tcs_1^{3,0}$, $R = u^3$; $cs_{2,\kappa}^{3,0} = \{u \neq 3/2$ при $\kappa = -1\}$, $R = 1$;
$tcs_4^{3,0}$, $R = u^3$; $tcs_9^{3,0}$, $R = -u$; $tcs_{15}^{3,0}$, $R = u$; $tcs_{20}^{3,0}$, $R = -u^3$; $tcs_{23,\kappa}^{3,0}$, $R = -\kappa$;
$tcs_{24}^{3,0}$, $R = -u^3$; $cs_1^{4,0} = \{v \neq u;\ (u, v) \neq (1/9, 1), (1/3, 1), (-1/9, -1)\}$, $R = u^2(u - v)$;
$cs_2^{4,0} = \{v \neq (3u)^{-1},\ 1 + 2(9u)^{-1},\ (12u + 1 \pm (1 - 8u)^{1/2})(8u)^{-1}\}$, $R = u^3$;
$cs_3^{4,0} = \{v \neq -u,\ 3/2 \pm (-2u)^{-1/2}\}$, $R = u^2(u + v)$;
$cs_6^{4,0} = \{v \neq u,\ (9u + 2)u^{-2}/27\}$, $R = u^2(u - v)$;

$cs^{4,0}_{8,\kappa} = \{v \neq u\kappa;\ (\kappa, u, v) \neq (1, -1/3, -3);\ v \neq \kappa(3u-2)(2u-1)^{-1}$ при $\kappa(1-2u) > 0\}$, $R = u\kappa(u\kappa - v)^2$;
$cs^{4,0}_{10} = \{u \neq 1;\ v \neq (2u-1)^2(2-u)/27,\ u^2(3-2u)/27;\ (u,v) \neq (2/3, 4/729)\}$, $R = -v$;
$cs^{4,0}_{13} = \{v \neq -u^{-2/3};\ u \neq 2/3$ при $3((\theta_*^2 - 4v)/2\theta_*)^2 + 12v \leq 0,\ \theta_*:\ \theta^3 + 3v\theta - 3\}$, $R = u(u^2v^3+1)$;
$cs^{4,0}_{16} = \{(u,v) \neq (1/3, -2/3);\ v \neq (1 - 9u \pm (1-3u)(1-12u)^{1/2})u^{-2}/27\}$, $R = -u^2v$;
$cs^{4,0}_{17} = \{(u,v) \neq (1/3, -6^{1/3});\ v \neq 2^{1/3}(2-3u)u^{-1/3}/2\}$, $R = u$;
$cs^{4,0}_{21} = \{v \neq u;\ v \neq u^{-2}$ при $u > 0\}$, $R = (u-v)^3$;
$cs^{4,0}_{22} = \{(u,v) \neq (1/3, 1/6);\ v \neq u, (2u-1)(3u-2)^{-3}, -16u^2(u-1)^{-1}(3u+1)^{-3}\}$, $R = uv(v-u)$;
$cs^{4,0}_{25} = \{(u,v) \neq (1/3, 3^{2/3}), (5/9, 3^{1/3}), ((\theta_*^3+1)\theta_*^{-3}/2, (\theta_*^3 - 3)(2\theta_*)^{-1}),\ \theta_*:\ \theta^9 - \theta^6 + 15\theta^3 + 9\}$, $R = u$;
$cs^{4,0}_{26} = \{(u,v) \neq (9/8, -27/32), (-18, 216)\}$, $R = -v^3$;
$cs^{4,0}_{28} = \{v \neq -u;\ (u,v) \neq (3(2\pm\sqrt{2})^{2/3}/2, \mp 2^{-1/2}(2\pm\sqrt{2})^{1/3}), (3 \cdot 2^{-1/3}(\pm\sqrt{5}-1)^{1/3}, (28 \pm 12\sqrt{5})^{1/3}/2), (3^{2/3}, -3^{1/3})\}$, $R = -u^3 - v^3$;
$cs^{4,0}_{31} = \{(u,v) \neq (-2^{1/3}/6, -2^{1/3}/3), (2^{1/3}/3, 2^{1/3}/3)\}$, $R = -v^3$;
$cs^{4,0}_{32} = \{(u,v) \neq (3, -1)\}$, $R = u^3 - v^3$;
$cs^{4,0}_{34,\kappa} = \{v \neq u\kappa;\ (u,v) \neq (-\kappa, 1/3), ((\sqrt{5} + 3\kappa)/2, -(3 + \sqrt{5}\kappa)/18), (2\kappa + \sqrt{3}, -(2 + \sqrt{3}\kappa)/3);\ (v,\kappa) \neq (u/9, 1);\ (u,v,\kappa) \neq (1, -1/9, -1);\ v \neq -(2u-\kappa)(u-2\kappa)/9$ при $u > \kappa/2$; $u \neq \kappa$ при $v > 0$; $(u,\kappa) \neq (-1,1)$ при $v \geq -1/9$; $(u,\kappa) \neq (1,-1)$ при $v \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)\}$, $R = -v(u\kappa - v)^2$;
$cs^{4,0}_{35} = \{(u,v) \neq (2 \cdot (3/5)^{1/3}, 2 \cdot 75^{-1/3}/3), (3^{1/6}(\sqrt{3} \pm 1)/2, 3^{-1/6}(\pm 3 - \sqrt{3})/6);\ v \neq (3u)^{-1}\}$, $R = -v^3$;
$cs^{4,0}_{36} = \{v \neq -u^2;\ (u,v) \neq ((2/81)^{1/3}, -(3/2)^{1/3}), (-2^{-5/3}, 2^{-4/3}), ((8/3 \pm 2\sqrt{2})^{1/3}/3, (3 \pm 3\sqrt{2})^{1/3}), (2^{2/3}, -2^{1/3}), (-2\theta_*^4, (1 - 3\theta_*^3)\theta_*^{-1}),\ \theta_*:\ 54\theta^9 - 18\theta^6 + 1\}$, $R = -u(u^2 + v)$;
$cs^{4,0}_{37} = \{v \neq u;\ (u,v) \neq (1/9, -1/81);\ v \neq u^2$ при $u > 0$; $v \neq -u^2, u(4u \mp (3u-1)(-u)^{1/2})(9u+1)^{-1}$ при $u < 0\}$, $R = v^2(u - v)$.

Здесь запись tcs означает, что данное семейство не имеет ограничений на параметры.

Утверждение 2.2. *Только при указанных значениях параметров приведенные ниже формы $NSF^{m,0}_i$ сводятся к предшествующим согласно структурным принципам:*

1) $NSF^{3,0}_{2,\kappa}$ *при* $u = 3/2$, $\kappa = -1$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = \sqrt{2}s_1$ *сводится к* $SF^{3,0}_1$;

2) $NSF^{4,0}_1$: *a) при* $u = 1/9$, $v = 1$ *заменой с* $r_1 = -3r_2$, $s_1 = 0$ *сводится к* $SF^{3,0}_1$; *b) при* $u = 1/3$, $v = 1$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF^{3,0}_9$; *c) при* $u = -1/9$, $v = -1$ *заменой с* $r_1 = 3r_2$, $s_1 = -3s_2$ *сводится к* $SF^{3,0}_{23}$;

3) $NSF^{4,0}_2$: *a) при* $v = (12u + 1 \pm (1-8u)^{1/2})(8u)^{-1}$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = (-1 \pm (1-8u)^{1/2})s_1/2$ *сводится к* $SF^{3,0}_1$; *b) при* $v = 1 + 2(9u)^{-1}$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -3us_1$ *сводится к* $SF^{3,0}_2$; *c) при* $v = (3u)^{-1}$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = -3us_1$ *сводится к* $SF^{3,0}_4$;

4) $NSF^{4,0}_3$ *при* $v = 3/2 \pm (-2u)^{-1/2}$ *заменой с* $r_1 = \pm(-2u)^{-1/2}r_2$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$;

5) $NSF^{4,0}_6$ *при* $v = (9u+2)u^{-2}/27$ *заменой с* $r_2 = 0$, $s_2 = 3us_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$;

6) $NSF^{4,0}_{8,\kappa}$: *a) при* $\kappa = 1$, $u = -1/3$, $v = -3$ *заменой с* $r_1 = -\sqrt{3}r_2$, $s_1 = \sqrt{3}s_2$ *сводится к* $SF^{2,0}_{10}$; *b) при* $v = \kappa(3u-2)(2u-1)^{-1}$, $\kappa(1-2u) > 0$ *заменой с* $r_2 = (\kappa(1-2u))^{1/2}r_1$, $s_2 = -(\kappa(1-2u))^{1/2}s_1$ *сводится к* $SF^{4,0}_1$;

7) $NSF_{10}^{4,0}:$ *a) при* $v=(2u-1)^2(2-u)/27$ *заменой с* $r_1=(1-2u)r_2/3$, $s_2=0$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$; *b) при* $v=u^2(3-2u)/27$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-3u^{-1}s_1$ *сводится к* $SF_3^{4,0}$; *c) при* $u=2/3$, $v=4/729$ *заменой с* $r_2=-9r_1$, $s_2=9s_1/2$ *сводится к* $SF_3^{4,0}$; *d) при* $u=1$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-3s_1$ *сводится к* $SF_6^{4,0}$;

8) $NSF_{13}^{4,0}$ *при* $u=2/3$, $3((\theta_*^2-4v)/2\theta_*)^2+12v\le 0$, $\theta_*:\ \theta^3+3v\theta-3$ *заменой с* $r_1=-(\theta_*^2-4v)/4\theta_*+(-3((\theta_*^2-4v)/2\theta_*)^2-12v)^{1/2}/2$, $s_1=\theta_* s_2$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$;

9) $NSF_{16}^{4,0}:$ *a) при* $u=1/3$, $v=-2/3$ *заменой с* $r_1=2r_2$, $s_1=-s_2$ *сводится к* $SF_{15}^{3,0}$; *b) при* $u\le 1/12$, $v=(1-9u\pm(1-3u)(1-12u)^{1/2})u^{-2}/27$ *заменой с* $r_1=(1\pm(1-12u)^{1/2})(6u)^{-1}r_2$, $s_2=0$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$;

10) $NSF_{17}^{4,0}:$ *a) при* $u=1/3$, $v=-6^{1/3}$ *заменой с* $r_1=-(60+36\sqrt{3})^{1/3}r_2/2$, $s_1=((9\sqrt{3}-15)/2)^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,0}$; *b) при* $v=2^{1/3}(2-3u)u^{-1/3}/2$ *заменой с* $r_2=(u/2)^{1/3}r_1$, $s_2=-(4u)^{1/3}s_1$ *сводится к* $SF_{16}^{4,0}$;

11) $NSF_{21}^{4,0}$ *при* $u>0$, $v=u^{-2}$ *заменой с* $r_2=-u^{1/2}r_1$, $s_2=u^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,0}$;

12) $NSF_{22}^{4,0}:$ *a) при* $u=1/3$, $v=1/6$ *заменой с* $r_2=0$, $s_2=-2s_1$ *сводится к* $SF_8^{4,0}$; *b) при* $v=(2u-1)(3u-2)^{-3}$ *заменой с* $r_2=(3u-2)r_1$, $s_2=u(3u-2)(1-2u)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF_{16}^{4,0}$; *c) при* $v=-16u^2(u-1)^{-1}(3u+1)^{-3}$ *заменой с* $r_2=(u-1)(3u+1)(4u)^{-1}r_1$, $s_2=-(3u+1)s_1/2$ *сводится к* $SF_{17}^{4,0}$;

13) $NSF_{25}^{4,0}:$ *a) при* $u=1/3$, $v=3^{2/3}$ *заменой с* $r_1=-3^{1/3}r_2$, $s_2=0$ *сводится к* $SF_2^{4,0}$; *b) при* $u=5/9$, $v=3^{1/3}$ *заменой с* $r_1=3^{2/3}r_2$, $s_1=-3^{2/3}s_2/2$ *сводится к* $SF_3^{4,0}$; *c) при* $u=(\theta_*^3+1)\theta_*^{-3}/2$, $v=(\theta_*^3-3)(2\theta_*)^{-1}$, $\theta_*:\ \theta^9-\theta^6+15\theta^3+9$ *заменой с* $r_1=\theta_* r_2$, $s_2=-(\theta_*^3+1)(2\theta_*)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF_{10}^{4,0}$;

14) $NSF_{26}^{4,0}:$ *a) при* $u=9/8$, $v=-27/32$ *заменой с* $r_1=3r_2/2$, $s_1=-3s_2/4$ *сводится к* $SF_{10}^{4,0}$; *b) при* $u=-18$, $v=216$ *заменой с* $r_1=3r_2$, $s_1=-6s_2$ *сводится к* $SF_{25}^{4,0}$;

15) $NSF_{28}^{4,0}:$ *a) при* $u=3(2\pm\sqrt{2})^{2/3}/2$, $v=\mp 2^{-1/2}(2\pm\sqrt{2})^{1/3}$ *заменой с* $r_1=(2\pm\sqrt{2})^{1/3}r_2$, $s_2=-(2\pm\sqrt{2})^{2/3}s_1$ *сводится к* $SF_3^{4,0}$; *b) при* $u=3\cdot 2^{-1/3}(\pm\sqrt{5}-1)^{1/3}$, $v=(28\pm 12\sqrt{5})^{1/3}/2$ *заменой с* $r_1=-(28\pm 12\sqrt{5})^{1/3}r_2/2$, $s_1=2^{-1/3}(3\mp\sqrt{5})^{1/3}s_2$, *сводится к* $SF_{13}^{4,0}$; *c) при* $u=3^{2/3}$, $v=-3^{1/3}$ *заменой с* $r_1=-3^{1/3}r_2$, $s_1=0$ *сводится к* $SF_{25}^{4,0}$;

16) $NSF_{31}^{4,0}:$ *a) при* $u=-2^{1/3}/6$, $v=-2^{1/3}/3$ *заменой с* $r_2=2^{2/3}r_1$, $s_1=-2^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF_{10}^{4,0}$; *b) при* $u,v=2^{1/3}/3$ *заменой с* $r_1=2^{1/3}r_2$, $s_2=-2^{2/3}s_1$ *сводится к* $SF_{25}^{4,0}$;

17) $NSF_{32}^{4,0}$ *при* $u=3$, $v=-1$ *заменой с* $r_1=r_2$, $s_1=-s_2$ *сводится к* $SF_6^{4,0}$;

18) $NSF_{34,\kappa}^{4,0}:$ *a) при* $u=-\kappa$, $v=1/3$ *заменой с* $r_1=(6\sqrt{3}-9\kappa)^{1/2}r_2/3$, $s_1=-(6\sqrt{3}-9\kappa)^{1/2}(2+\sqrt{3}\kappa)s_2/3$ *сводится к* $SF_{15}^{3,0}$; *b) при* $u>\kappa/2$, $v=-(2u-\kappa)(u-2\kappa)/9$ *заменой с* $r_1=(6u-3\kappa)^{1/2}r_2/3$, $s_1=-(6u-3\kappa)^{1/2}s_2/3$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$; *c) при* $u=(\sqrt{5}+3\kappa)/2$, $v=-(3+\sqrt{5}\kappa)/18$ *заменой с* $r_1=(6\sqrt{5}-6\kappa)^{1/2}(3+\sqrt{5}\kappa)r_2/12$, $s_1=-(6\sqrt{5}-6\kappa)^{1/2}s_2/6$ *сводится к* $SF_3^{4,0}$; *d) при* $u=\kappa$, $v>0$ *заменой с* $r_1=v^{1/4}r_2$, $s_1=-v^{1/4}s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,0}$; *e) при* $u=1$, $v=-1/9$, $\kappa=-1$ *заменой с* $s_1=\sqrt{3}(1+\sqrt{2})s_2/3$, $r_2=-\sqrt{3}(1+\sqrt{2})r_1$ *сводится к* $SF_8^{4,0}$; *f) при* $u=2\kappa+\sqrt{3}$, $v=-(2+\sqrt{3}\kappa)/3$ *заменой с* $r_1=(6\sqrt{3}+9\kappa)^{1/2}r_2/3$, $s_2=-(2\sqrt{3}+3\kappa)^{1/2}s_1$ *сводится к* $SF_{16}^{4,0}$; *g) при* $v=u/9$, $\kappa=1$ *заменой с* $r_2=\sqrt{3}r_1$, $s_2=-\sqrt{3}s_1$ *сводится к* $SF_{21}^{4,0}$; *h) при* $u=-1$, $v\ge -1/9$, $\kappa=1$ *заменой с* $r_1=(6v+2+2\ell)^{1/2}r_2/2$, $s_2=-(6v+2+2\ell)^{1/2}(3v-1+\ell)(8v)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF_{32}^{4,0}$, $\ell=((v+1)(9v+1))^{1/2}$; *i) при* $u=1$, $v\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, $\kappa=-1$ *заменой с* $r_1=(-6v-2+2\ell)^{1/2}r_2/2$, $s_2=-(-6v-2+2\ell)^{1/2}(-3v+1+\ell)(8v)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF_{32}^{4,0}$, $\ell=((v+1)(9v+1))^{1/2}$;

19) $NSF_{35}^{4,0}$: *a) при* $u=2\cdot(3/5)^{1/3}$, $v=2\cdot 75^{-1/3}/3$ *заменой с* $r_1=-15^{-1/3}(5+2\sqrt{5})^{1/3}r_2$, $s_1=15^{-1/3}(2\sqrt{5}-5)^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$; *b) при* $u=3^{1/6}(\sqrt{3}\pm 1)/2$, $v=3^{-1/6}(\pm 3-\sqrt{3})/6$ *заменой с* $r_1=\mp 3^{-1/6}r_2$, $s_1=-3^{1/3}(3\mp\sqrt{3})s_2/6$ *сводится к* $SF_{10}^{4,0}$; *c) при* $v=(3u)^{-1}$ *заменой с* $s_1=0$, $r_2=-ur_1$ *сводится к* $SF_{21}^{4,0}$;

20) $NSF_{36}^{4,0}$: *a) при* $u=-2\theta_*^4$, $v=(1-3\theta_*^3)\theta_*^{-1}$ *заменой с* $r_1=\theta_* r_2$, $s_1=2\theta_*(3\theta_*^3-1)s_2$, $\theta_*: 54\theta^9-18\theta^6+1$ *сводится к* $SF_3^{4,0}$; *b) при* $u=(2/81)^{1/3}$, $v=-(3/2)^{1/3}$ *заменой с* $r_1=3^{-1/3}(4\pm 2\sqrt{5})^{1/3}r_2$, $s_1=3^{-1/3}(4\mp 2\sqrt{5})^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,0}$; *c) при* $u=-2^{-5/3}$, $v=2^{-4/3}$ *заменой с* $s_1=-2^{1/3}s_2$, $r_2=2^{2/3}r_1$ *сводится к* $SF_{10}^{4,0}$; *d) при* $u=(8/3\pm 2\sqrt{2})^{1/3}/3$, $v=(3\pm 3\sqrt{2})^{1/3}$ *заменой с* $r_1=(36\mp 18\sqrt{2})^{1/3}r_2/3$, $s_1=(-1\mp 2\sqrt{2}/3)^{1/3}s_2$ *сводится к* $SF_{13}^{4,0}$; *e) при* $u=2^{2/3}$, $v=-2^{1/3}$ *заменой с* $r_1=2^{2/3}r_2$, $s_2=-2^{-1/3}s_1$ *сводится к* $SF_{25}^{4,0}$;

21) $NSF_{37}^{4,0}$: *a) при* $u=1/9$, $v=-1/81$ *заменой с* $r_1=(-1+\sqrt{5})r_2/6$, $s_1=(-1-\sqrt{5})s_2/6$ *сводится к* $SF_1^{4,0}$; *b) при* $v=u^2$, $u>0$ *заменой с* $r_1=-u^{1/2}r_2$, $s_1=u^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,0}$; *c) при* $v=u(4u\mp(3u-1)(-u)^{1/2})(9u+1)^{-1}$, $u<0$ *заменой с* $r_1=\pm(-u)^{1/2}r_2$, $s_1=2u(\pm(-u)^{1/2}-3u)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF_{28}^{4,0}$; *d) при* $v=-u^2$, $u<0$ *заменой с* $r_1=(-u)^{1/2}r_2$, $s_1=-(-u)^{1/2}s_2$ *сводится к* $SF_{34}^{4,0}$.

Доказательство приведено в файле statement.mw хранилища (см. введение).

Теперь найдем линейные замены (1.2), которые, сохраняя исследуемую форму $CF_i^{m,0}$ $(m=2,3,4)$, меняют в ней значения параметров с целью максимально ограничить их возможные значения.

Утверждение 2.3. *Только в следующих случаях в* $CF_i^{m,0}$ *заменой* (1.2) *удается изменить значение* σ *с* -1 *на* $+1$ *при сохранении значений остальных параметров:*
$CF_{1,\kappa}^{2,0}$ *с* $\kappa=-1$, *замена с* $r_1,s_2=0$, $s_1,r_2=1$;
$CF_{10,\kappa}^{2,0}$, *замена с* $-r_1,s_2=-1$, $s_1,r_2=0$;
$CF_{15}^{3,0}$ *с* $u=-1/3$, *замена с* $r_1,-s_2=3^{-1/2}$, $s_1=2^{1/3}3^{-1/6}$, $r_2=2^{2/3}3^{-5/6}$;
$CF_{23,\kappa}^{3,0}$, *замена с* $r_1,-s_2=1$, $s_1,r_2=0$;
$CF_3^{4,0}$ *с* $u=-2/9$, $v=3$, *замена с* $-r_1,s_2=5^{-1/2}$, $s_1=-6\cdot 5^{-1/2}$, $r_2=-2\cdot 5^{-1/2}/3$;
$CF_{34,\kappa}^{4,0}$ *с* $u=-\kappa$, $v=-1$, *замена с* $r_1,s_2=0$, $s_1,r_2=1$;
$CF_{35}^{4,0}$ *с* $u=-(3/2)^{1/3}$, $v=2^{1/3}3^{-4/3}$, *замена с* $r_1,s_2=1$, $s_1=-(2/3)^{1/3}$, $r_2=12^{1/3}$.

Утверждение 2.4. *В четырех формах* $CF_i^{m,0}$ *заменой* (1.2) *удается изменить значения параметров* u,v:

1) $CF_1^{4,0}$ *с* $\sigma=\sigma_*$, $u=u_*$, $v=v_*$ *заменой с* $r_1,s_2=0$, $s_1=|u_*|^{1/2}u_*^{-1}$, $s_2=|u_*|^{1/2}v_*^{-1}$ *сводится к себе с* $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}u_*$, $u=u_*v_*^{-2}$, $v=v_*^{-1}$; *в частности, при* $|v_*|>1$ *можно получить* $|v|<1$;

2) $CF_{8,\kappa}^{4,0}$ *с* $\kappa=\kappa_*$, $\sigma=\sigma_*$, $u=u_*$, $v=v_*$ *заменой с* $r_1,s_2=0$, $s_1=|u_*|^{-1/2}$, $r_2=|v_*|^{-1/2}$ *сводится к себе с* $\kappa=\operatorname{sign}(u_*v_*)$, $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}v_*$, $u=\kappa_*v_*^{-1}$, $v=\kappa_*u_*^{-1}$; *в частности, при* $|u_*|,|v_*|>1$ *можно получить* $|u|,|v|<1$;

3) $CF_{21}^{4,0}$ *с* $\sigma=\sigma_*$, $u=u_*$, $v=v_*$ *заменой с* $r_1,s_2=0$, $s_1=|u_*|^{-1/2}$, $r_2=u_*|u_*|^{-7/6}|v_*|^{-1/3}$ *сводится к себе с* $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}u_*$, $u=u_*^{-1/3}v_*^{-2/3}$, $v=v_*^{1/3}u_*^{-4/3}$; *в частности, при* $|u_*|>1$, $1<|v_*|<u_*^4$ *можно получить* $|u|,|v|<1$;

4) $CF_{34,\kappa}^{4,0}$ *с* $u=u_*$, $v=v_*$, $\kappa=\kappa_*$ *заменой с* $r_1,s_2=0$, $s_1=v|uv|^{-3/4}$, $r_2=|uv|^{-1/4}$ *сводится к себе с* $\kappa=\operatorname{sign}(u_*v_*)$, $u=u_*^{-1}\kappa\kappa_*$, $v=v_*u_*^{-2}$ *и тем же* σ; *в частности, при* $|u_*|>1$ *можно получить* $|u|<1$.

3. Сведение исходной системы к каждой из $CF^{m,0}$ при $m=2,3$.

Набор 3.1. Константы и линейные неособые замены, используемые ниже:

$\psi_1 = 3\tilde a_1^2 + 4\tilde b_1$, $\psi_2 = 27\tilde d_2^2 - 4\tilde b_1^3$, $\psi_3 = 3\tilde a_1 + (36\tilde c_1)^{1/3}$, $\psi_4 = \tilde d_1 + 2^{2/3}\tilde d_2^{4/3}$, $\psi_5 = (-3\tilde c_1 \tilde a_1^{-1})^{1/2}$;

$L_1 = \{r_1 = 0,\ s_1 = 3^{3/2}d_1,\ r_2 = 3^{1/2},\ s_2 = -3^{1/2}c_1\}$, $L_2 = \{r_1 = 3^{1/2},\ s_1 = -3^{1/2}b_2,\ r_2 = 0,\ s_2 = 3^{3/2}a_2\}$, $L_3 = \{r_1 = \zeta,\ s_1 = (-b_2\zeta^2 + (b_1 - 2c_2)\zeta + 2c_1 - 3d_2)\zeta/3,\ r_2 = 1,\ s_2 = ((2b_2 - 3a_1)\zeta^2 + (c_2 - 2b_1)\zeta - c_1)/3\}$, где ζ — любое вещественное отличное от нуля число, не являющееся нулем многочлена $Q = (a_1 - b_2)\zeta^2 + (b_1 - c_2)\zeta + c_1 - d_2$, поскольку $\det L_3 = -\zeta Q(\zeta)$;

$L^{2,0}_{1;1} = \{r_1 = (3\tilde a_1 - (3\psi_1)^{1/2})r_2/6,\ s_1 = (3\tilde a_1 + (3\psi_1)^{1/2})s_2/6,\ r_2 = 3\sqrt{2}\psi_1^{-1/2}|3\tilde a_1 - (3\psi_1)^{1/2}|^{-1/2},\ s_2 = 3\sqrt{2}\psi_1^{-1/2}|3\tilde a_1 + (3\psi_1)^{1/2}|^{-1/2}\}$,

$L^{2,0}_{10;1} = \{r_1 = |\tilde d_1|^{-1/8},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = r_1^3\}$, $L^{2,0}_{10;2} = \{r_1 = (9\tilde d_2 + (3\psi_2)^{1/2})(6\tilde b_1)^{-1}r_2,\ s_1 = (9\tilde d_2 - (3\psi_2)^{1/2})(6\tilde b_1)^{-1}s_2,\ s_2 = \psi_2(9\tilde d_2 + (3\psi_2)^{1/2})\tilde b_1^{-3}r_2^3/18,\ r_2 = 2^{1/4}\psi_2^{-1/2}|9\tilde d_2 + (3\psi_2)^{1/2}|^{-1/4}|3\tilde b_1|^{7/8}\}$,

$L^{3,0}_{1;1} = \{r_1 = \eta_* r_2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = (\tilde a_1 - \eta_*)(\eta_* - \theta_*)^{-1}(\eta_* + \theta_* - \tilde a_1)^{-1}|\tilde a_1 - \eta_*|^{-1/2}/3,\ s_2 = (\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde a_1 - \eta_*|^{-1/2}\}$,

$L^{3,0}_{2;1} = \{r_1 = \eta_* r_2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = \sqrt{2}(\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde a_1 - 3\eta_* - \theta_*|^{-1/2},\ s_2 = (\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde a_1 - \eta_*|^{-1/2}$,

$L^{3,0}_{4;1} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = |\tilde a_1|^{-1/2},\ r_2 = \tilde a_1^{-1}|\tilde a_1|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{4;2} = \{r_1 = -3\tilde d_1 r_2 \tilde c_1^{-1},\ s_1 = 0,\ r_2 = -s_2,\ s_2 = \sqrt{3}|\tilde c_1|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{4;3} = \{r_1 = \eta_* r_2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = (\eta_* + \theta_* - \tilde a_1)(\tilde a_1 - \eta_*)^{-1}s_2,\ s_2 = (\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde a_1 - \eta_*|^{-1/2}\}$,

$L^{3,0}_{9;1} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = \tilde d_2|\tilde d_2|^{-1/2}\tilde b_1^{-1},\ r_2 = |\tilde d_2|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{9;2} = \{r_1 = \eta_* r_2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = \sqrt{3}(\eta_* - \theta_*)|\tilde a_1 + 2\eta_*|^{-1/2},\ s_2 = -(\tilde a_1 + 2\eta_*)(\tilde a_1 - \eta_*)^{-1}r_2/3\}$, $L^{3,0}_{9;3} = \{r_1 = -\theta_* r_2/2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = 6^{1/3}\tilde c_1^{-1/3}|\psi_3|^{-1/2},\ s_2 = 2\psi_3(\psi_3 - 9\tilde a_1)^{-1}/3\}$,

$L^{3,0}_{15;1} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = \tilde c_1^{1/3}|\tilde c_1|^{-1/2},\ r_2 = |\tilde c_1|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{15;2} = \{r_1 = 0,\ s_1 = -\tilde c_1 \tilde c_2^{-1}s_2,\ r_2 = |\tilde c_1|^{-1/2},\ s_2 = -3^{1/3}\tilde c_2(3\tilde c_1^2 + \tilde c_2^3)^{-1/3}|\tilde c_1|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{15;3} = \{r_1 = |\tilde c_1|^{1/2}\tilde c_2^{-1},\ s_1 = 0,\ r_2 = \tilde c_2 \tilde c_1^{-1}r_1,\ s_2 = -3^{1/3}|\tilde c_1|^{1/2}\tilde c_1^{-1}\}$, $L^{3,0}_{15;4} = \{r_1 = \eta_* r_2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = |\tilde a_1 - \eta_*|^{-1/2}(\eta_* - \theta_*)^{-1},\ s_2 = (3\tilde a_1 - 3\eta_*)^{1/3}(\eta_* + 3\theta_* - \tilde a_1)^{-1/3}r_2\}$, $L^{3,0}_{15;5} = \{r_1 = \pm(-\tilde c_2/3)^{1/2}r_2,\ s_1 = \pm 3^{1/2}(\tilde b_1 + \tilde c_2)(-\tilde c_2)^{-1/2}s_2/6,\ r_2 = 2(-3\tilde c_2)^{1/4}(\tilde b_1 + 3\tilde c_2)^{-1},\ s_2 = -2^{4/3}(-3\tilde c_2)^{7/12}(\tilde b_1 - \tilde c_2)^{-1/3}(\tilde b_1 + 3\tilde c_2)\}$, $L^{3,0}_{15;6} = \{r_1 = -(4\tilde d_2)^{1/3}r_2,\ s_1 = (\tilde d_2/2)^{1/3}s_2,\ r_2 = 2^{1/3}\tilde d_2^{-1/3}|\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3}|^{-1/2}/3,\ s_2 = 6^{1/3}(\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3})^{1/3}((4\tilde d_2)^{1/3} - 2\tilde a_1)^{-1/3}r_2\}$,

$L^{3,0}_{20;1} = \{r_1 = \eta_* r_2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = |\tilde a_1|^{-1/2}(\eta_* - \theta_*)^{-1},\ s_2 = (\eta_* - \tilde a_1)\tilde a_1^{-1}r_2\}$, $L^{3,0}_{20;2} = \{r_1 = |\tilde a_1|^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = |\tilde a_1|^{-1/2}\tilde a_1^{-1}\}$, $L^{3,0}_{20;3} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = \tilde d_1|\tilde d_2|^{-1/2}\tilde d_2^{-1},\ r_2 = |\tilde d_2|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{20;4} = \{r_1 = (4\tilde d_2)^{1/3}r_2/2,\ r_2 = 2^{1/3}|\tilde a_1|^{-1/2}\tilde d_2^{-1/3}/3,\ s_1 = -(4\tilde d_2)^{1/3}s_2,\ s_2 = (1 - 2^{1/3}\tilde a_1 \tilde d_2^{-1/3})\tilde a_1^{-1}|\tilde a_1|^{-1/2}/3\}$, $L^{3,0}_{20;5} = \{r_1 = -\theta_* r_2/2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = 36|(\tilde b_1\theta_*^2 - 4\tilde d_1)\theta_*|^{1/2},\ s_2 = 972\tilde b_1(\tilde b_1\theta_*^2 - 4\tilde d_1)\theta_*^2 r_2\}$, $L^{3,0}_{20;6} = \{r_1 = 0,\ s_1 = -\tilde d_1^{1/3}\tilde a_1^{-1/3},\ r_2 = \tilde d_1^{-1/3}|\tilde a_1|^{-1/6},\ s_2 = -r_2\}$,

$L^{3,0}_{23;1} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = \tilde d_1|\tilde d_1|^{-9/8},\ r_2 = |\tilde d_1|^{-3/8}\}$, $L^{3,0}_{23;2} = \{r_1 = |\tilde d_1|^{-1/8},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = |\tilde d_1|^{-3/8}\}$, $L^{3,0}_{23;3} = \{r_1 = 2^{5/8}|\tilde d_2|^{1/2}|\psi_4|^{-1/2}/3,\ s_1 = (\tilde d_2/2)^{1/3}s_2,\ r_2 = -r_1 s_2(2s_1)^{-1},\ s_2 = -2^{5/24}|\tilde d_2|^{3/2}\psi_4 \tilde d_2^{-4/3}|\psi_4|^{-3/2}/3\}$, $L^{3,0}_{23;4} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \tilde d_1 r_2^3,\ r_2 = 2^{1/8}|2\tilde d_1^3 - \tilde d_2^4|^{1/8},\ s_2 = \tilde d_2 \tilde d_1^{-1}s_1\}$, $L^{3,0}_{23;5} = \{r_1 = \eta_* r_2,\ s_1 = \theta_* s_2,\ r_2 = 2^{1/8}(\eta_* - \theta_*)^{-1}|\tilde a_1 + 2\theta_*|^{-1/8}|\tilde a_1 - \eta_*|^{-3/8},\ s_2 = (\eta_* - \tilde a_1)(\eta_* - \theta_*)^2 r_2^3\}$, $L^{3,0}_{23;6} = \{r_1 = -2(\tilde c_1/18)^{1/3}r_2,\ r_2 = \sqrt{6}|\tilde c_1|^{-1/4}|(9\tilde a_1 + 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})^3(18^{1/3}\tilde a_1 \tilde c_1^{2/3} - 2\tilde c_1)|^{-1/8},\ s_1 = -(\tilde c_1/18)^{1/3}s_2,\ s_2 = -\tilde c_1^{2/3}(9 \cdot 18^{-2/3}\tilde a_1 + \tilde c_1)r_2^3/9\}$, $L^{3,0}_{23;7} = \{r_1 = \mp(-\tilde d_1)^{1/4}r_2,\ s_1 = \pm(-\tilde d_1)^{1/4}s_2,\ s_2 = 4(\pm\tilde d_1 +$

$(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2)(-\tilde d_1)^{-1/4}r_2^3$, $r_2=(-2\tilde d_1)^{1/8}|2\tilde d_1\pm(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2|^{-1/8}|\tilde d_1\pm(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2|^{-3/8}/2\}$, $L^{3,0}_{23;8}=\{r_1=-(4\tilde d_2)^{1/3}r_2,\ s_1=(\tilde d_2/2)^{1/3}s_2,\ r_2=2^{11/24}\tilde d_2^{-1/3}|\tilde a_1+(4\tilde d_2)^{1/3}|^{-1/2}/3,\ s_2=-9\cdot 2^{-2/3}\tilde d_2^{2/3}(\tilde a_1+(4\tilde d_2)^{1/3})r_2^3\}$, $L^{3,0}_{23;9}=\{r_1=\pm(-\tilde c_2/3)^{1/2}r_2,\ s_1=\mp\tilde b_1(-3\tilde c_2)^{-1/2}s_2,\ r_2=3^{3/4}|\tilde c_2|^{3/8}|\tilde b_1+\tilde c_2|^{-1/8}(\tilde b_1-\tilde c_2)^{-1},\ s_2=\mp(\tilde b_1-\tilde c_2)^2(-3\tilde c_2)^{-1/2}r_2^3/3\}$, $L^{3,0}_{23;10}=\{r_1=\pm(-3\tilde d_1\tilde c_2)^{1/2}\tilde c_2^{-1}r_2,\ s_1=0,\ r_2=3^{1/4}|\tilde c_2|^{1/2}|\tilde d_1|^{-1/4}|2\tilde c_2^2-9\tilde d_1|^{-3/8},\ s_2=\mp\tilde d_1(2\tilde c_2^2-9\tilde d_1)(-3\tilde d_1\tilde c_2)^{-1/2}\tilde c_2^{-1}r_2^3\}$,

$L^{3,0}_{24;1}=\{r_1=0,\ s_1=\tilde d_1\tilde d_2^{-1}s_2,\ r_2=-3^{-1/6}|\tilde d_2|^{-1/2},\ s_2=|3\tilde d_2|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{24;2}=\{r_1=\tilde c_1^{1/3}|\tilde c_1|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde c_1|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{24;3}=\{r_1=\tilde a_1r_2,\ s_1=|3\tilde a_1|^{-1/2},\ r_2=3^{-1/6}\tilde a_1^{1/3}|\tilde a_1|^{-1/2}(\tilde d_1-2\tilde a_1^4)^{-1/3},\ s_2=0\}$, $L^{3,0}_{24;4}=\{r_2=2(4\tilde d_2)^{-1/3}r_1,\ r_1=(2/3)^{7/6}\ \tilde d_2^{1/3}|\tilde d_2|^{1/6}(2^{1/3}\tilde d_1+3\tilde d_2^{4/3})^{1/3}|2^{1/3}\tilde d_1+3\tilde d_2^{4/3}|^{-1/2}(\tilde d_2^{4/3}-2^{1/3}\tilde d_1)^{-1/3},\ s_1=-(4\tilde d_2)^{1/3}s_2,\ s_2=(2/3)^{3/2}|\tilde d_2|^{1/6}|2^{1/3}\tilde d_1+3\tilde d_2^{4/3}|^{-1/2}\}$, $L^{3,0}_{24;5}=\{r_1=\eta_*r_2,\ s_1=\theta_*s_2,\ s_2=|3\tilde a_1|^{-1/2}(\eta_*-\theta_*)^{-1}\}$, $r_2=3^{-1/6}\tilde a_1^{1/3}|\tilde a_1|^{-1/2}(\eta_*-\theta_*)^{-1}(\eta_*-\tilde a_1)^{-1/3}$, $L^{3,0}_{24;6}=\{r_1=\mp(-\tilde c_1(3\tilde a_1)^{-1})^{1/2}r_2,\ s_1=\pm(-\tilde c_1(3\tilde a_1)^{-1})^{1/2}s_2,\ s_2=|\tilde c_1|^{-1/2}/2,\ r_2=\mp3^{2/3}\tilde a_1^{1/3}|\tilde c_1|^{-1/2}(\psi_5\pm3\tilde a_1)^{-1/3}/2\}$.

Множество систем (1.1) с $R\neq0$ разобьем на три непересекающихся класса: 1] $d_1\neq0$; 2] $d_1=0,\ a_2\neq0$; 3] $d_1=a_2=0$.

Лемма 3.1. *Любая система* (1.1) *из класса* $k]$ *заменой* L_k *сводится к системе*

$$\widetilde A=\begin{pmatrix}\tilde a_1 & \tilde b_1 & \tilde c_1 & \tilde d_1\\ 1 & 0 & \tilde c_2 & \tilde d_2\end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

в которой

в 1]: $\tilde b_1=-9c_1d_2+9c_2d_1,\ \tilde c_1=9b_1c_1d_1+27b_2d_1^2-3c_1^3+9c_1^2d_2-18c_1c_2d_1,$
$\tilde d_1=c_1(27a_1d_1^2-9b_1c_1d_1-27b_2d_1^2+2c_1^3-3c_1^2d_2+9c_1c_2d_1)+81a_2d_1^3,$
$\tilde a_1=c_1+3d_2,\ \tilde c_2=9b_1d_1-3c_1^2,\ \tilde d_2=27a_1d_1^2-9b_1c_1d_1+2c_1^3$ *при* $d_1\neq0$;

в 2]: $\tilde b_1=-9a_1b_2+9b_1a_2, \tilde c_1=9a_1b_2^2-18b_1a_2b_2+27c_1a_2^2+9a_2b_2c_2-3b_2^3,$
$\tilde a_1=3a_1+b_2,\ \tilde d_1=b_2(27a_2^2d_2-3a_1b_2^2+9b_1a_2b_2-27c_1a_2^2-9a_2b_2c_2+2b_2^3),$
$\tilde c_2=9a_2c_2-3b_2^2,\ \tilde d_2=27a_2^2d_2-9a_2b_2c_2+2b_2^3$ *при* $d_1=0,\ a_2\neq0$;

в 3]: $\tilde a_1,\tilde b_1,\tilde c_1,\tilde d_1,\tilde c_2,\tilde d_2$ *при* $d_1=a_2=0$ *есть в файле lemma.mw хранилища.*

Доказательство леммы 3.1 также содержится в файле lemma.mw хранилища.

Теорема 3.1. *Для любой* $CF_i^{m,0}$ $(m=2,3)$ *из списка* 2.1 *указаны:* a) *условия на коэффициенты системы* (3.1), b) *замена* $L_i^{m,0}$, *преобразующая* (3.1) *при указанных условиях в* $CF_i^{m,0}$, c) *получаемые в результате значения параметров из* $cs_i^{m,0}$:

$CF^{2,0}_{1,\kappa}$: a) $\tilde c_1=0,\ \tilde d_1=\tilde b_1^2/9,\ \tilde c_2=\tilde b_1,\ \tilde d_2=-\tilde a_1\tilde b_1/3,\ \psi_1>0,$ b) $L_1^{2;1}$, c) $\kappa=-\operatorname{sign}\tilde b_1,\ \sigma=\operatorname{sign}(3\tilde a_1+(3\psi_1)^{1/2})$;

$CF^{2,0}_{10,\kappa}$: 1) a) $\tilde a_1=0,\tilde b_1=0,\tilde c_1=0,\tilde c_2=0,\tilde d_2=0,$ b) $L^{2,0}_{10;1}$, c) $\kappa=\operatorname{sign}\tilde d_1$, $\sigma=1$;
2) a) $\tilde a_1=0,\ \tilde c_1=-3\tilde d_2,\ \tilde d_1=(27\tilde d_2^2-\tilde b_1^3)(9\tilde b_1)^{-1},\ \tilde c_2=-\tilde b_1,\ \psi_2>0,$ b) $L^{2,0}_{10;2}$, c) $\sigma=1$, $\kappa=\operatorname{sign}\tilde b_1$;

$CF^{3,0}_1$: a) $\psi_1\geq0,\ 3\eta_*^2(\tilde a_1-\eta_*)^2-4\tilde c_1\eta_*\geq0,\ \tilde d_1=\theta_*\eta_*(2\theta_*\eta_*+\eta_*\tilde a_1+2\theta_*^2-\eta_*^2-2\theta_*\tilde a_1),\ \tilde c_2=3(\tilde a_1-\eta_*)(\theta_*-\eta_*)-3\theta_*^2,\ \tilde d_2=2\theta_*^3+(\tilde a_1-\eta_*)(\eta_*^2+\eta_*\theta_*-2\theta_*^2)$, *где*

θ_*: $3\eta_*\theta^2 - 3\eta_*(\tilde a_1-\eta_*)\theta + \tilde c_1 = 0$, $\eta_* = (3\tilde a_1 \pm (3\psi_1)^{1/2})/6$, b) $L^{3,0}_{1;1}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1-\eta_*)$, $u = (3\eta_* + 2\theta_* - 2\tilde a_1)(\tilde a_1 - \eta_*)(\eta_* + \theta_* - \tilde a_1)^{-2}/9$;

$CF^{3,0}_{2,\kappa}$: a) $\psi_1 \ge 0$, $(6\eta_* - 3\tilde a_1)^2 - 12(3\tilde a_1\eta_* - 3\eta_*^2 + 2\tilde c_2) \ge 0$, $\tilde a_1 \ne \eta_* + \theta_*$, $\tilde c_1 = 3\eta_*(\eta_*+\theta_*)(\tilde a_1 - \eta_* - \theta_*)/2$, $\tilde d_1 = \theta_*\eta_*(\eta_*^2 + 4\eta_*\theta_* + \theta_*^2 - \tilde a_1(\eta_*+\theta_*))/2$, $d_2 = ((2\eta_* + \theta_*)(\eta_* - \theta_*)\tilde a_1 + (\eta_*+\theta_*)(\theta_*^2 + 3\eta_*\theta_* - 2\eta_*^2))/2$, *где* θ_*: $3\theta^2 + (6\eta_* - 3\tilde a_1)\theta + 3\tilde a_1\eta_* - 3\eta_*^2 + 2\tilde c_2$, $\eta_* = (3\tilde a_1 \pm (3\psi_1)^{1/2})/6$, b) $L^{3,0}_{2;1}$, c) $\kappa = -\sigma\operatorname{sign}(\tilde a_1 - 3\eta_* - \theta_*)$, $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1 - \eta_*)$, $u = 3(\tilde a_1 - \eta_* - \theta_*)(\tilde a_1 - \eta_*)^{-1}/2$;

$CF^{3,0}_4$: 1) a) $\tilde b_1 = 0$, $\tilde c_1 = 0$, $\tilde d_1 = 0$, $\tilde c_2 = 0$, b) $L^{3,0}_{4;1}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = \tilde d_2\tilde a_1^{-3}$;
2) a) $\tilde a_1 = (\tilde c_1^4 - 81\tilde d_1^3)(27\tilde d_1^2\tilde c_1)^{-1}$, $\tilde b_1 = \tilde c_1^2\tilde d_1^{-2}/3$, $\tilde c_2, \tilde d_2 = 0$, b) $L^{3,0}_{4;2}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde c_1$, $u = -81\tilde d_1^3\tilde c_1^{-4}$;
3) a) $\tilde a_1 \ne \eta_* + \theta_*$, $\tilde b_1 = 3\eta_*^2 - 3\tilde a_1\eta_*$, $\tilde d_1 = \eta_*^4 + (\theta_* - \tilde a_1)\eta_*^3 - \theta_*^2\eta_*^2$, $\tilde d_2 = \eta_*\theta_*(\eta_* + \theta_*)$, *где* η_*: $3\eta^3 - 3\tilde a_1\eta^2 - \tilde c_2\eta + \tilde c_1$, $\theta_* = -\tilde c_2\eta_*^{-1}/3$, b) $L^{3,0}_{4;3}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1 - \eta_*)$, $u = \eta_*(\eta_* + \theta_* - \tilde a_1)^2(\tilde a_1 - \eta_*)^{-3}$;

$CF^{3,0}_9$: 1) a) $\tilde a_1 = 0$, $\tilde c_1 = 0$, $\tilde d_1 = 0$, $\tilde c_2 = 0$, b) $L^{3,0}_{9;1}$, c $\sigma = \operatorname{sign}\tilde d_2$, $u = \tilde d_2^2\tilde b_1^{-3}$;
2) a) $\tilde c_1 = \eta_*\theta_*(\tilde a_1 - 4\eta_*) + 2\eta_*^2(\tilde a_1 - \eta_*)$, $\tilde d_1 = (\eta_*(\tilde a_1 + 2\eta_*)\theta_*^2 - \eta_*^2(2\tilde a_1 - 5\eta_*)\theta_* - 2\eta_*^3(\tilde a_1 - \eta_*))/3$, $\tilde d_2 = ((\tilde a_1 + 2\eta_*)\theta_*^2 + \eta_*(\tilde a_1 + 2\eta_*)\theta_* - 2\eta_*^2(\tilde a_1 - \eta_*))/3$, *где* $\eta_*: 3\eta^3 - (3\tilde a_1^2 + 2\tilde b_1 + \tilde c_2)\eta - \tilde a_1(\tilde b_1 - \tilde c_2)$, $\theta_* = -(\eta_*^2 - \tilde a_1\eta_* + \tilde c_2)(\tilde a_1 + 2\eta_*)^{-1}$, b) $L^{3,0}_{9;2}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1 + 2\eta_*)$, $u = (\tilde a_1 + 2\eta_*)^2(2\tilde a_1 - 2\eta_* - 3\theta_*)(\tilde a_1 - \eta_*)^{-3}/27$;
3) a) $\tilde b_1 = 0$, $\tilde d_1 = \tilde a_1\tilde c_1/3$, $\tilde c_2 = 3\theta_*(\theta_* - 2\tilde a_1)/4$, $\tilde d_2 = \tilde c_1/3$, *где* $\theta_* = -(4\tilde c_1/3)^{1/3}$, b) $L^{3,0}_{9;3}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\psi_3$, $u = 16\psi_3^3(9\tilde a_1 - \psi_3)^{-3}/27$;

$CF^{3,0}_{15}$: 1) a) $\tilde a_1 = 0$, $\tilde b_1 = 0$, $\tilde d_1 = 0$, $\tilde c_2 = 0$, b) $L^{3,0}_{15;1}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde c_1$, $u = \tilde d_2\tilde c_1^{-1}$;
2) a) $\tilde a_1 = \tilde c_2^2\tilde c_1^{-1}$, $\tilde b_1 = 2\tilde c_2$, $\tilde d_1 = 0$, $\tilde d_2 = 2\tilde c_1/3$, b) $L^{3,0}_{15;2}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde c_1$, $u = 2/3$;
3) a) $\tilde a_1 = (\tilde c_1^2 + \tilde c_2^3)(\tilde c_1\tilde c_2)^{-1}$, $\tilde b_1 = -\tilde c_2$, $\tilde d_1 = -\tilde c_1^2\tilde c_2^{-1}/3$, $\tilde d_2 = -\tilde c_1/3$, b) $L^{3,0}_{15;3}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde c_1$, $u = (3\tilde c_1^2 + 2\tilde c_2^3)\tilde c_2^{-3}/3$;
4) a) $(3\tilde a_1^2 + 2\tilde b_1 + 2\tilde c_2)^2 + 12\tilde a_1^2(\tilde b_1 - 2\tilde c_2) \ge 0$, $\tilde c_1 = (\tilde a_1 - \eta_*)\theta_*^2 + (\tilde a_1 - 4\eta_*)\eta_*\theta_* + (\tilde a_1 - \eta_*)\eta_*^2$, $\tilde d_1 = -((\tilde a_1 - 4\eta_*)(\eta_* + \theta_*)\eta_*\theta_* + (\tilde a_1 - \eta_*)\eta_*^3)/3$, $\tilde d_2 = ((2\tilde a_1 + \eta_*)\theta_*^2 - (\tilde a_1 - 4\eta_*)\eta_*\theta_* - (\tilde a_1 - \eta_*)\eta_*^2)/3$, *где* η_*: $3\tilde a_1\eta^2 - (3\tilde a_1^2 + 2\tilde b_1 + 2\tilde c_2)\eta - \tilde a_1(\tilde b_1 - 2\tilde c_2)$, $\theta_* = -(\tilde b_1 + \tilde c_2)(3\tilde a_1)^{-1}$, b) $L^{3,0}_{15;4}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1 - \eta_*)$, $u = (2\tilde a_1 + \eta_*)(\tilde a_1 - \eta_*)^{-1}/3$;
5) a) $\tilde a_1 = \mp 2(-\tilde c_2/3)^{1/2}$, $\tilde c_1 = \mp 3^{1/2}(\tilde b_1 - \tilde c_2)^2(-\tilde c_2)^{-1/2}/12$, $\tilde d_1 = (\tilde b_1^2 + \tilde c_2^2)/18$, $\tilde d_2 = \mp 3^{1/2}(\tilde b_1^2 + 6\tilde b_1\tilde c_2 + \tilde c_2^2)(-\tilde c_2)^{-1/2}/36$, b) $L^{3,0}_{15;5}$, c) $\sigma = \mp 1$, $u = 1/3$;
6) a) $\tilde b_1 = 0$, $\tilde c_1 = 3\tilde d_2^{2/3}(2^{-2/3}\tilde a_1 - \tilde d_2^{1/3})$, $\tilde d_1 = \tilde a_1\tilde d_2$, $\tilde c_2 = -3\cdot 2^{-1/3}\tilde a_1\tilde d_2^{1/3}$, b) $L^{3,0}_{15;6}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3})$, $u = (2\tilde a_1 - (4\tilde d_2)^{1/3})(\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3})^{-1}/3$;

$CF^{3,0}_{20}$: 1) a) $\tilde b_1 \ne 0$, $\tilde c_1 = 3(\tilde a_1 - \eta_*)\theta_*^2 - 3\eta_*^2\theta_*$, $\tilde d_1 = (\eta_* - \tilde a_1)\theta_*^3 + \eta_*^2\theta_*^2 + \eta_*^3\theta_*$, $\tilde d_2 = \eta_*\theta_*(\eta_* + \theta_*)$, *где* $\eta_* = \tilde a_1\tilde c_2(\tilde b_1 + \tilde c_2)^{-1}$, $\theta_* = -(\tilde b_1 + \tilde c_2)\tilde a_1^{-1}/3$, b) $L^{3,0}_{20;1}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = \tilde b_1^3\tilde a_1^{-2}(\tilde b_1 + \tilde c_2)^{-2}/3$;
2) a) $\tilde b_1 = 0$, $\tilde c_1 = 0$, $\tilde c_2 = 0$, $\tilde d_2 = 0$, $\tilde d_1 \ne 0$, b) $L^{3,0}_{20;2}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = \tilde d_1\tilde a_1^{-4}$;
3) a) $\tilde a_1 = 0$, $\tilde b_1 = 0$, $\tilde c_1 = 0$, $\tilde c_2 = 0$, $\tilde d_1 \ne 0$, $\tilde d_1 \ne 0$, b) $L^{3,0}_{20;3}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde d_2$, $u = \tilde d_1^3\tilde d_2^{-4}$;
4) a) $\tilde d_2 \ne 2\tilde a_1^3$, $\tilde b_1 = 3(\tilde d_2/2)^{1/3}(2\tilde a_1 - (4\tilde d_2)^{1/3})$, $\tilde c_1 = 3(\tilde a_1(4\tilde d_2)^{2/3} - 3\tilde d_2)$, $\tilde d_1 = \tilde d_2(8\tilde a_1 - 3(4\tilde d_2)^{1/3})/2$, $\tilde c_2 = 3(4\tilde d_2)^{2/3}/2$, b) $L^{3,0}_{20;4}$, c) $u = (2^{1/3}\tilde a_1 - \tilde d_2^{1/3})^3(\tilde d_2/2)^{1/3}\tilde a_1^{-4}$, $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$;
5) a) $\tilde a_1 = -(3\theta_*^2 + 2\tilde b_1)(6\theta_*)^{-1}$, $\tilde c_1 = (\tilde b_1\theta_*^2 - 6\tilde d_1)\theta_*^{-1}$, $\tilde c_2 = -4(\tilde b_1\theta_*^2 - 3\tilde d_1)\theta_*^{-2}$, $\tilde d_2 = 2(\tilde b_1\theta_*^2 - 3\tilde d_1)(3\theta_*)^{-1}$, $\tilde b_1\theta_*^2 \ne 3\tilde d_1, 4\tilde d_1$; $4\tilde b_1^2 + 18\tilde d_1 \ge 0$, *где* θ_* : $3\theta^4 + 8\tilde b_1\theta^2 - 24\tilde d_1$, b) $L^{3,0}_{20;5}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde b_1\theta_*^2 - 4\tilde d_1)\theta_*$, $u = -2^{11}3^{20}(\tilde b_1\theta_* - 3\tilde d_1)\theta_*^6\tilde b_1^3(\tilde b_1\theta_*^2 - 4\tilde d_1)^4$;

6) a) $\tilde b_1 = 3\tilde a_1^{2/3}\tilde d_1^{1/3}$, $\tilde c_1 = 3\tilde a_1^{1/3}\tilde d_1^{2/3}$, $\tilde c_2 = 0$, $\tilde d_2 = 0$, b) $L^{3,0}_{20;6}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = \tilde d_1^{1/3}\tilde a_1^{-4/3}$;

$CF^{3,0}_{23,\kappa}$: 1) a) $\tilde a_1 = 0$, $\tilde b_1 = 0$, $\tilde c_1 = 0$, $\tilde c_2 \neq 0$, $\tilde d_2 = 0$, b) $L^{3,0}_{23;1}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = \operatorname{sign}\tilde d_1$, $u = \tilde d_1\tilde c_2|\tilde d_1|^{-3/2}$;
2) a) $\tilde a_1 = 0$, $\tilde b_1 \neq 0$, $\tilde c_1 = 0$, $\tilde c_2 = 0$, $\tilde d_2 = 0$, b) $L^{3,0}_{23;2}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = \operatorname{sign}\tilde d_1$, $u = \tilde b_1|\tilde d_1|^{-1/2}$;
3) a) $\tilde a_1 = -2^{2/3}(2^{1/3}\tilde d_1 + 3\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-1}$, $\tilde a_1 \neq 0$, $\tilde b_1 = 3\cdot 2^{2/3}(\tilde d_1 + 2\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-2/3}$, $\tilde c_1 = 3(2^{4/3}\tilde d_1 + 5\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-1/3}$, $\tilde c_2 = -3(3\cdot 2^{1/3}\tilde d_1 + 7\tilde d_2^{4/3})(2\tilde d_2)^{-2/3}$, b) $L^{3,0}_{23;3}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = -1$, $u = 3\cdot 2^{-5/6}(2^{1/3}\tilde d_1 + 3\tilde d_2^{4/3})\psi_4^{-1}$;
4) a) $\tilde a_1 = -\tilde d_2^3\tilde d_1^{-2}$, $\tilde b_1 = 3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}$, $\tilde c_1 = -3\tilde d_2$, $\tilde c_2 = -3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}/2$, $\tilde d_2 \neq 0$, b) $L^{3,0}_{23;4}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = \operatorname{sign}(2\tilde d_1^3 - \tilde d_2^4)$, $u = 3\tilde d_2^2|4\tilde d_1^3 - 2\tilde d_2^4|^{-1/2}$;
5) a) $\tilde d_1 = (\eta_* - \tilde a_1)\theta_*^3 + (\eta_* - \tilde a_1)\eta_*\theta_*^2 + (2\eta_* + \tilde a_1)\eta_*^2\theta_*/2 + \tilde a_1\eta_*^3/2$, $\tilde c_2 = 3\tilde a_1(\theta_* - \eta_*)/2 - 3\eta_*\theta_*$, $\tilde d_2 = (\eta_* - \tilde a_1)\theta_*^2 + (2\eta_* + \tilde a_1)\eta_*\theta_*/2 + \tilde a_1\eta_*^2/2$, *где* $\eta_* = (3\tilde a_1\theta_* + \tilde b_1)(3\theta_*)^{-1}$, θ_* : $(9\tilde a_1^2 + 6\tilde b_1)\theta^3 + (9\tilde a_1^3 + 9\tilde a_1\tilde b_1 + 6\tilde c_1)\theta^2 + (6\tilde a_1^2\tilde b_1 + 2\tilde b_1^2)$, b) $L^{3,0}_{23;5}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = \operatorname{sign}(\eta_* - \tilde a_1)(\tilde a_1 + 2\theta_*)$, $u = 3\tilde a_1(\tilde a_1 - \eta_*)|\tilde a_1 - \eta_*|^{-3/2}|2\tilde a_1 + 4\theta_*|^{-1/2}$;
6) a) $\tilde a_1 \neq 0$, $\tilde b_1 = 18^{1/3}(18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{1/3} + 2\tilde c_1^{2/3})/6$, $\tilde d_1 = \tilde c_1(7\cdot 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3} - 27\tilde a_1)/162$, $\tilde c_2 = 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3}(9\tilde a_1 - 2\cdot 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})/108$, $\tilde d_2 = (18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{2/3} - 3\tilde c_1)/9$, b) $L^{3,0}_{23;6}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = -\operatorname{sign}(9\tilde a_1 + 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})(18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{2/3} - 2\tilde c_1)$, $u = 3\cdot 18^{2/3}\tilde a_1\tilde c_1^{4/3}(9\tilde a_1 + 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})|\tilde c_1|^{-1}|(9\tilde a_1 + 18^{2/3}\tilde c_1^{1/3})^3(18^{1/3}\tilde a_1\tilde c_1^{2/3} - 2\tilde c_1)|^{-1/2}/2$;
7) a) $\tilde a_1 = -\tilde d_2(-\tilde d_1)^{-1/2}$, $\tilde b_1 = 3(\tilde d_1 \pm (-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2))(-\tilde d_1)^{-1/2}$, $\tilde c_1 = 0$, $\tilde c_2 = -\tilde b_1$, $\tilde d_1 < 0$, b) $L^{3,0}_{23;7}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = -\operatorname{sign}(\tilde d_1 \pm (-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2)(2\tilde d_1 \pm (-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2)$, $u = 3(-\tilde d_1)^{1/4}(\pm\tilde d_1 + (-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2)\tilde d_2|\tilde d_1 \pm (-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2|^{-3/2}|4\tilde d_1 \pm 2(-\tilde d_1)^{1/4}\tilde d_2|^{-1/2}$;
8) a) $\tilde a_1 \neq 0$, $\tilde b_1 = -3\cdot 2^{-1/3}\tilde d_2^{1/3}(\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3})$, $\tilde c_1 = -3\tilde d_2^{2/3}(2^{1/3}\tilde a_1 + \tilde d_2^{1/3})$, $\tilde c_2 = 3\cdot 2^{2/3}\tilde d_2^{1/3}(3\tilde a_1 + 2^{5/3}\tilde d_2^{1/3})/4$, $\tilde d_1 = -\tilde d_2(\tilde a_1 + 3(4\tilde d_2)^{1/3})/2$, b) $L^{3,0}_{23;8}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = -1$, $u = 3\cdot 2^{-1/2}\tilde a_1(\tilde a_1 + (4\tilde d_2)^{1/3})^{-1}$;
9) a) $\tilde a_1 = \pm 2(-\tilde c_2/3)^{1/2}$, $\tilde c_1 = \pm(\tilde b_1^2 - \tilde c_2^2)(-3\tilde c_2)^{-1/2}$, $\tilde d_1 = -(\tilde b_1^3 + \tilde b_1^2\tilde c_2 - 2\tilde b_1\tilde c_2^2 - \tilde c_2^3)(9\tilde c_2)^{-1}$, $\tilde c_2 < 0$, $\tilde d_2 = \mp(\tilde b_1^2 - 2\tilde b_1\tilde c_2 - \tilde c_2^2)(-3\tilde c_2)^{-1/2}/3$, b) $L^{3,0}_{23;9}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = -\operatorname{sign}\tilde c_2(\tilde b_1 + \tilde c_2)$, $u = -3|\tilde c_2|^{3/2}\tilde c_2^{-1}|\tilde b_1 + \tilde c_2|^{-1/2}$;
10) a) $\tilde a_1 = \mp 2\tilde c_2^2(-3\tilde d_1\tilde c_2)^{-1/2}/3$, $\tilde c_1 = -3\tilde d_2$, $\tilde d_2 = \pm\tilde d_1\tilde c_2(-3\tilde d_1\tilde c_2)^{-1/2}$, $\tilde d_1\tilde c_2 < 0$, b) $L^{3,0}_{23;10}$, c) $\sigma = 1$, $\kappa = -\operatorname{sign}(2\tilde c_2^2 - 9\tilde d_1)$, $u = -3\tilde d_1\tilde c_2(2\tilde c_2^2 - 9\tilde d_1)|2\tilde c_2^2 - 9\tilde d_1|^{-3/2}|\tilde d_1|^{-1}$;

$CF^{3,0}_{24}$: 1) a) $\tilde d_2 \neq 0$, $\tilde a_1 = -\tilde d_2^3\tilde d_1^{-2}$, $\tilde b_1 = 3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}$, $\tilde c_1 = -3\tilde d_2$, $\tilde c_2 = -3\tilde d_2^2\tilde d_1^{-1}$, b) $L^{3,0}_{24;1}$, c) $\sigma = -\operatorname{sign}\tilde d_2$, $u = 9^{-2/3}(\tilde d_1^3 - 2\tilde d_2^4)\tilde d_2^{-4}$;
2) a) $\tilde a_1 = 0$, $\tilde b_1 = 0$, $\tilde d_1 \neq 0$, $\tilde c_2 = 0$, $\tilde d_2 = 0$, b) $L^{3,0}_{24;2}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde c_1$, $u = \tilde d_1\tilde c_1^{-4/3}$;
3) a) $\tilde b_1 = 0$, $\tilde c_1 = -3\tilde a_1^3$, $\tilde c_2 = -3\tilde a_1^2$, $\tilde d_2 = 2\tilde a_1^3$, b) $L^{3,0}_{24;3}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = (\tilde d_1 - 2\tilde a_1^4)^{1/3}(3\tilde a_1)^{-4/3}$;
4) a) $\tilde a_1 = (2\tilde d_1 + 3\cdot 4^{1/3}\tilde d_2^{4/3})(8\tilde d_2)^{-1}$, $\tilde b_1 = 3\cdot 2^{-5/3}(2^{1/3}\tilde d_1 - \tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-2/3}$, $\tilde c_1 = 24(2^{1/3}\tilde d_1 - 5\tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-1/3}$, $\tilde c_2 = -3\cdot 2^{-8/3}(3\cdot 2^{1/3}\tilde d_1 + \tilde d_2^{4/3})\tilde d_2^{-2/3}$, $\tilde d_1 \neq 2^{-1/3}\tilde d_2^{4/3}$, b) $L^{3,0}_{24;4}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde d_2(2^{1/3}\tilde d_1 + 3\tilde d_2^{4/3})$, $u = -2\cdot 3^{-4/3}(2^{1/3}\tilde d_1 - \tilde d_2^{4/3})^{4/3}(2^{1/3}\tilde d_1 + 3\tilde d_2^{4/3})^{-4/3}$;
5) a) $\tilde c_1 = 3(\tilde a_1 - \eta_*)(\eta_* + \theta_*)\theta_* - 3\tilde a_1\eta_*^2$, $\tilde d_1 = (\eta_* - \tilde a_1)(\eta_*^2 + \eta_*\theta_* + \theta_*^2)\theta_* + 2\tilde a_1\eta_*^3$, $\tilde d_2 = (\eta_* - \tilde a_1)(\eta_* + \theta_*)\theta_* + 2\tilde a_1\eta_*^2$, *где* $\eta_* = -(\tilde b_1 + \tilde c_2)(3\tilde a_1)^{-1}$, $\theta_* = -\tilde a_1\tilde b_1(3\tilde a_1^2 + \tilde b_1 + \tilde c_2)^{-1}$, b) $L^{3,0}_{24;5}$, c) $\sigma = \operatorname{sign}\tilde a_1$, $u = 3^{-4/3}(\eta_* - \tilde a_1)^{1/3}(2\tilde a_1 + \theta_*)^{-2/3}\tilde a_1^{-4/3}$;
6) a) $\tilde b_1 = \tilde c_1\tilde a_1^{-1} \mp \psi_5\tilde a_1$, $\tilde d_1 = \tilde c_1(\pm 3\psi_5\tilde a_1^2 - \tilde c_1)\tilde a_1^{-2}/9$, $\tilde c_2 = \pm 2\psi_5\tilde a_1 - \tilde c_1\tilde a_1^{-1}$, $\tilde d_2 =$

$-2\tilde{c}_1/3$, $\tilde{a}_1\tilde{c}_1 < 0$, b) $L^{3,0}_{24;6}$, c) $CF^{3,0}_{24}$ с $\sigma = -\operatorname{sign}\tilde{c}_1$, $u = -3^{-5/3}(2\psi_5\tilde{a}_1^2 - \tilde{c}_1)(\psi_5 + 3\tilde{a}_1)^{1/3}\tilde{a}_1^{-7/3}\psi_5^{-1}$.

Доказательство приведено в файле theorem.mw хранилища (см. введение).

В результате для любой системы (1.1) с $R \neq 0$, используя лемму 3.1 и теорему 3.1, можно установить, эквивалентна ли она какой-либо форме $CF_i^{m,0}$ $(m = 2, 3)$ из списка 2.1, и в случае положительного ответа указать композицию замен, сводящую ее к линейно эквивалентной форме $CF_i^{m,0}$, а также конкретные значения параметров из $cs_i^{m,0}$.

4. Приложение полученных результатов. В работе [6] А. Сима и Ж. Либре разбили множество систем (1.1) на десять линейно неэквивалентных канонических классов (КК) с целью получить полную топологическую классификацию фазовых портретов в круге Пуанкаре.

Работа позволяет нарисовать фазовый портрет выбранной системы с $l = 0$, если установлен КК, к которому она относится, и найдена линейная неособая замена (1.2), сводящая (1.1) к какому-либо представителю установленного КК. А для систем с $l > 0$ указан только набор возможных фазовых портретов в круге Пуанкаре.

Точнее, в [6] произвольной системе (1.1) $\dot{x} = P(x_1, x_2)$ была сопоставлена бинарная форма $f = x_1P_2(x_1, x_2) - x_2P_1(x_1, x_2) = a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4$.

Далее, основываясь на работе Г. Гуревича (G. Gurevich) [8], была осуществлена классификация бинарных форм $f(x_1, x_2)$ относительно замен (1.2), основанная на использовании алгебраических инвариантов $H_f = (f_{x_1x_1}f_{x_2x_2} - f^2_{x_1x_2})/144$ — гессиан, $D_f = i_f^3 - 27j_f^2$ — дискриминант, а также $12H_f^2 - i_f f^2$ и $2i_fH_f - 3j_f f$, где $i_f = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$, $j_f = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 - a_2^3$. Было получено десять линейно неэквивалентных классов и в каждом из них выделена образующая — каноническая бинарная форма (КБФ) F_i $(i = \overline{1, 10})$ (см. список КБФ в [6, стр. 437]).

Кроме того, для каждой КБФ был указан канонический класс систем, которым она сопоставима, зависящий от параметров p_1, p_2, p_3 и, возможно, α, μ. Список КК$_i$ $(i = \overline{1, 10})$ приведен в [6, стр. 436]. Было доказано, что для любой системы (1.1) найдется замена (1.2), сводящая (1.1) к представителю одного из выделенных КК.

Отметим, что КБФ выбирались так, чтобы было удобно их использовать при нахождении фазовых портретов в круге Пуанкаре. Основываясь на результатах работ [9, 10], были получены условия на значения многочлена $P_1(1, x_2^*)$ из любого канонического класса, где x_2^* — произвольный нуль сопоставленной КБФ (см. [6, стр. 446]), которые позволяют выделить фазовый портрет из списка, приведенного в [6, стр. 444].

Таким образом, основная техническая проблема, стоящая на пути практического применения сделанной в [6] классификации, заключается в том, чтобы найти в явном виде упомянутую выше линейную замену.

Продемонстрируем, как полученные в настоящей работе результаты можно использовать для конструктивного построения фазовых портретов систем (1.1). Для этого исходную систему с $l = 0$, коэффициенты которой после замены L_k с должным k (см. формулы (3.1)) удовлетворяют одному из условий теоремы 3.1, сведем к соответствующей канонической форме из списка 2.1.

Предположим, что полученная после замены L_k система (3.1) указанной в теореме 3.1 заменой сводится к $CF^{3,0}_{2,\kappa} = \sigma\begin{pmatrix}\kappa & 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ с $u \neq 3/2$ при $\kappa = -1$.

Вычислим бинарную форму $CF_{2,\kappa}^{3,0}$ и ее инварианты:

$$f = -\kappa x_1^3 x_2 + (1-u)x_1 x_2^3; \quad D_f = -\kappa(u-1)^3/64, \quad H_f = -(\kappa x_1^2 - (u-1)x_2^2)^2/16,$$
$$H_f = -(\kappa x_1^2 - (u-1)x_2^2)^2/16, \quad 12H_f^2 - i_f f^2 = 3x_1^8/64 + \kappa(u-1)x_1^6 x_2^2/16 +$$
$$+25(u-1)^2 x_1^4 x_2^4/32 + \kappa(u-1)^3 x_1^2 x_2^6/16 + 3(u-1)^4 x_2^8/64 \quad (i_f = \kappa(1-u)/4,\ j_f = 0).$$

1. Пусть $u > 1$, $\kappa = 1$ или $u < 1$, $\kappa = -1$. Тогда $D_f < 0$, поэтому $CF_{2,1}^{3,0}$ должна сводиться в КК$_3$ с матрицей $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \mu \\ \mu & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ $(\mu \neq 0)$ и КБФ $F_3 = \mu(x_1^4 - x_2^4)$.

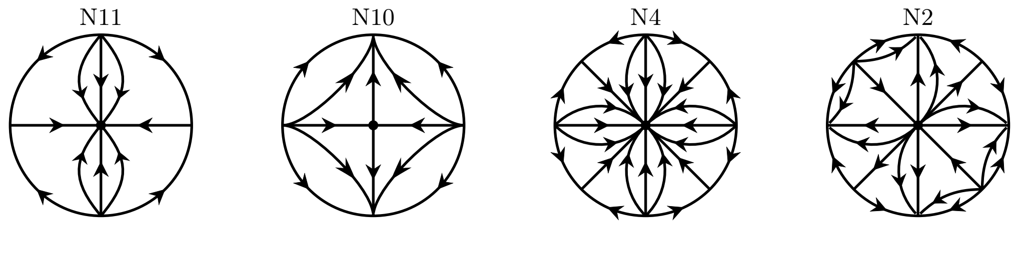
В самом деле, после замены (1.2) с $\{r_1 = 2^{-1/4}\kappa(\kappa(u-1))^{1/8},\ s_1 = -r_1,\ r_2 = 2^{-1/4}(\kappa(u-1))^{-3/8},\ s_2 = r_2\}$ и замены времени $t = \delta_{rs}\tau$ $(\delta_{rs} = r_1 s_2 - s_1 r_2)$ получаем $\widetilde{A}$ с $p_1, p_3 = u(u-1)^{-1}$, $p_2 = -(u-3)(u-1)^{-1}$ и $\mu = -1$.

Многочлен $F_3(1, x_2)$ имеет нули ± 1, тогда $P_1(1,1) = -4(u-1)^{-1}$, $P_1(1,-1) = -4$. Проверяя условия из [6, стр. 446], находим, что при $u > 1$, $\kappa = 1$ данный представитель КК$_3$ имеет фазовый портрет N11 из [6, стр. 444], при $u < 1$, $\kappa = -1$ — N10.

Оставшиеся два случая исследуем аналогично.

2. Пусть $u = 1$, а $\kappa = 1$ или $\kappa = -1$. Тогда $D_f = 0$, $H_f < 0$ при $x_1 \neq 0$, поэтому $CF_{2,1}^{3,0}$ заменой (1.2) с $\{r_1 = 0,\ s_1 = 1,\ r_2 = 4\kappa,\ s_2 = -4\kappa\}$ и заменой времени сводится в КК$_5$ с матрицей $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 + 2 & -4 \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 - 2 \end{pmatrix}$, в которой $p_1 = -64$, $p_2 = 128$, $p_3 = -66$, и КБФ $F_5 = 4(x_2 - x_1)x_2^3$. Поскольку $P_1(1,0) = -64\kappa$, $P_1(1,1) = -4$, находим, что при $\kappa = 1$ данный представитель КК$_5$ имеет фазовый портрет N11, при $\kappa = -1$ — N10.

3. Пусть $u < 1$, $\kappa = 1$ или $u > 1$, $\kappa = -1$. Тогда $D_f > 0$, $H_f < 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ и, как нетрудно убедиться, $12H_f^2 - i_f f^2 > 0$, поэтому $CF_{2,1}^{3,0}$ заменой (1.2) с $\{r_1 = -3^{1/4}(1+\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})^{-1}(\kappa(1-u))^{1/8},\ s_1 = 3^{1/4}(3+2\sqrt{2})^{1/2}(\kappa(1-u))^{1/8},\ r_2 = -\kappa(3(17+12\sqrt{2}))^{1/4}(\kappa(1-u))^{-3/8},\ s_2 = -\kappa 3^{1/4}(\kappa(1-u))^{-3/8}\}$ и заменой времени сводится в КК$_1$ с матрицей $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 + 3(1+\mu^4) & p_3 & -6\mu^2 \\ 6\mu^2 & p_1 & p_2 - 3(1+\mu^4) & p_3 \end{pmatrix}$ $(\mu > 1)$, в которой $p_1 = 6(1+\sqrt{2})(u+3+3\sqrt{2})(1-u)^{-1}$, $p_2 = 12(4+3\sqrt{2})u(1-u)^{-1}$, $p_3 = 6(7+5\sqrt{2})(u+3-3\sqrt{2})(u-1)^{-1}$, $\mu = 1+\sqrt{2}$, и КБФ $F_1 = 6(\mu^2 x_1^4 - (1+\mu^4)x_1^2 x_2^2 + \mu^2 x_2^4)$. Поскольку $P_1(1,-\mu) = 480 + 336\sqrt{2}$, $P_1(1,-1/\mu) = 24(2+\sqrt{2})(u-1)^{-1}$, $P_1(1,1/\mu) = -48(2+\sqrt{2})(u-1)^{-1}$, $P_1(1,\mu) = 24(10+7\sqrt{2})(u-1)^{-1}$, находим, что при $u < 1$, $\kappa = 1$ данный представитель КК$_1$ имеет фазовый портрет N4, при $u > 1$, $\kappa = -1$ — N2.



Фазовые портреты в круге Пуанкаре

Таким образом, любая система, линейно эквивалентная какому-либо представителю $CF_{2,\kappa}^{3,0}$ с $u \geq 1$ и $\kappa = 1$, в круге Пуанкаре имеет фазовый портрет N11, несмотря на то что $CF^{3,0}_{2,\kappa}$ при $u=1$ и $u>1$ относится к разным каноническим классам соответственно КК_3 и КК_5. То же справедливо для значений параметров $u \le 1$ и $\kappa=-1$, относящих $CF^{3,0}_{2,\kappa}$ к фазовому портрету N10.

Возвращаясь к случаям, когда в системе (1.1) имеется общий множитель степени $l \ge 1$, исследованным в работах [2–5], отметим, что для нахождения фазовых портретов в круге Пуанкаре следует заменой времени сводить полученные $CF^{m,l}$ к двумерным однородным квадратичным системам, канонические формы которых найдены в [11], а фазовые портреты в [12, 13].

Кроме того, отметим, что в [14] проведена классификация и получены фазовые портреты в круге Пуанкаре двумерных квадратично-кубических однородных систем, не имеющих общего множителя.

Литература

1. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — I // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 2. С. 181–195. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.201

2. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — II // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 355–371. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.302

3. *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — III // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 179–192. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.201

4. *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — IV // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 370–386. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.302

5. *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — V // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 556–571. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.403

6. *Cima A., Llibre J.* Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane // J. Math. Anal. Appl. 1990. Vol. 147, no. 2. P. 420–448.

7. *Окунев Л. Я.* Высшая алгебра. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1949.

8. *Gurevich G.* Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. Groningen: Noordhoff, 1964.

9. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.

10. *Sotomayor J.* Curvas definidas por equações diferenciais no plano. Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1981.

11. *Басов В. В., Федорова Е. В.* Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные нормальные формы // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2010. № 4. С. 49–85. URL: https://diffjournal.spbu.ru/pdf/basovfr.pdf (дата обращения: 04.05.2020).

12. *Date T.* Classification and analysis of two-dimensional real homogeneous quadratic differential equation systems // J. Differential Equations. 1979. Vol. 32, no. 3. P. 311–334.

13. *Вулпе Н. И., Сибирский К. С.* Геометрическая классификация квадратичной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 803–814.

14. *Андреева И. А., Андреев А. Ф.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. Lambert Academic Publishing, 2017.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2019 г.;
после доработки 20 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Басов Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlvlbasov@rambler.ru
Чермных Александр Сергеевич — аспирант; achermnykh@yandex.ru

Two-dimensional homogeneous cubic systems: Classification and normal forms — VI

V. V. Basov, A. S. Chermnykh

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Basov V. V., Chermnykh A. S. Two-dimensional homogeneous cubic systems: Classification and normal forms — VI. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 377–391.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.302 (In Russian)

The present article is the sixth in a series of papers dedicated to two-dimensional cubic homogeneous systems. It considers a case when a homogeneous polynomial vector in the right-hand part of the system does not have a common factor. A set of such systems is divided into classes of linear equivalence, wherein the simplest system being a third-order normal form is distinguished on the basis of properly introduced principles. Such a form is defined by the matrix of its right-hand part coefficients, which is called the canonical form (CF). Each CF has its own arrangement of non-zero elements, their specific normalization and canonical set of permissible values for the unnormalized elements, which relates the CF to the selected class of equivalence. In addition to classification, each CF is provided with: a) conditions on the coefficients of the initial system, b) non-singular linear substitutions that reduce the right-hand part of the system under these conditions to the selected CF, c) obtained values of CF's unnormalized elements. The proposed classification was primarily created to obtain all possible structures of generalized normal forms for systems with CF in the unperturbed part. The article presents another application of the resulting classification related to finding phase portraits in the Poincare circle for CF.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

References

1. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: Classification and normal forms: I", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **49**, iss. 2, 99–110 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116020023

2. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: Classification and normal forms: II", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **49**, iss. 3, 204–218 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116030031

3. Basov V. V., Chermnykh A. S., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms: III", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **50**, iss. 2, 97–110 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117020029

4. Basov V. V., Chermnykh A. S., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms: IV", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **50**, iss. 3, 217–234 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117030049

5. Basov V. V., Chermnykh A. S., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms: V", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **51**, iss. 4, 327–342 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118040040

6. Cima A., Llibre J., "Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane", *J. Math. Anal. Appl.* **147** (2), 420–448 (1990).

7. Okunev L. Ya., *Higher algebra* (Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury, Moscow, 1949). (In Russian)

8. Gurevich G., *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants* (Noordhoff, Groningen, 1964).

9. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G., *Qualitative theory of second order dynamical systems* (Halsted Press, New York, Toronto, 1973).

10. Sotomayor J., *Curvas definidas por equações diferenciais no plano* (Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981). (In Portuguese)

11. Basov V. V., Fedorova E. V., "Two-dimensional real systems of ODE with quadratic unperturbed parts: classification and degenerate generalized normal forms", *Differential equations and control processes* (4), 49–85 (2010). Available at: https://diffjournal.spbu.ru/pdf/basovfe.pdf (accessed: May 4, 2020).

12. Date T., “Classification and analysis of two-dimensional real homogeneous quadratic differential equation systems”, *J. Differential Equations* **32** (3), 311–334 (1979).

13. Vulpe N. I., Sibirskii K. S., “Geometric classification of a quadratic differential system”, *Differencial'nye Uravnenija* **13** (5), 803–814 (1977). (In Russian)

14. Andreeva I. A., Andreev A. F., *Phase portraits of one family of cubic systems in a Poincare circle* (Lambert Academic Publishing, 2017). (In Russian)

Received: November 20, 2019
Revised: December 20, 2019
Accepted: March 19, 2020

Authors' information:

Vladimir V. Basov — vlvlbasov@rambler.ru
Aleksandr S. Chermnykh — achermnykh@yandex.ru