

УДК 519.634

ПРЕДОБУСЛОВЛИВАНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В РАСЧЕТАХ СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ¹⁾

© 2015 г. К. Н. Волков, В. Н. Емельянов, А. Г. Карпенко

(190005 С.-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1, Балтийский гос. техн. ун-т “Военмех”)

e-mail: dsci@mail.ru

Поступила в редакцию 11.03.2014 г.

Рассматриваются особенности моделирования свободно-конвективных течений вязкого сжимаемого газа на основе полных уравнений Навье–Стокса. Обсуждается конечно-объемная дискретизация уравнений Навье–Стокса при малых числах Маха. Для стабилизации численных расчетов применяется метод предобусловливания, основанный на использовании физических переменных, и метод двойных шагов по времени, связанный с введением внутренних итераций по искусственному времени. Возможности подхода демонстрируются на примере моделирования свободной конвекции в зазоре между коаксиальными цилиндрами. Библ. 27. Фиг. 13.

Ключевые слова: предобусловливание, метод конечных объемов, метод двойных шагов по времени, газовая динамика, свободная конвекция, уравнения Навье–Стокса.

DOI: 10.7868/S0044466915120170

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения неразрывности и изменения количества движения, описывающие течения вязкой несжимаемой жидкости, образуют смешанную систему уравнений эллиптически-параболического типа относительно скорости и давления. При этом уравнение неразрывности содержит лишь компоненты скорости, в связи с чем нет прямой связи с давлением, которая для сжимаемых течений осуществляется через плотность (см. [1]). Методы решения уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости делятся на методы, использующие процедуру коррекции давления (Pressure-based method), и методы, основанные на принципе расщепления неизвестных (Pressure-velocity coupling).

Для моделирования течений вязкого сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Маха при наличии низкоскоростных подобластей течения (зоны торможения и присоединения потока, рециркуляционные области) используются полные уравнения Навье–Стокса. Численное решение уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа при малых числах Маха сталкивается с рядом трудностей вычислительного характера, которые заключаются в ухудшении сходимости и падении точности численного решения задачи.

Для устранения вычислительных трудностей, возникающих при моделировании низкоскоростных течений, широкое применение находят методы предобусловливания (Preconditioning) исходных уравнений, направленные на выравнивание порядков собственных значений якобиана при всех $M < 1$ (см. [2]–[7]). Предобусловливание модифицирует члены с производной по времени в уравнениях изменения количества движения (жесткость проявляется на дифференциальном уровне). При установлении решение модифицированной (предобусловленной) системы совпадает с решением исходных уравнений газовой динамики. Метод, позволяющий исключить жесткость предобусловленных уравнений Навье–Стокса, возникающую в расчетах на сетках с вытянутыми ячейками в пограничном слое, предлагается в [8]. Обзор и сравнительная характеристика различных подходов к предобусловливанию уравнений газовой динамики даются в [6], [7], [9]. Для моделирования нестационарных течений применяется метод двойных шагов по времени (Dual time-stepping) (см. [10], [11]) На каждом шаге интегрирования по физическому времени (Physical time) вводятся дополнительные итерации по искусственному времени (Pseudo-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13-07-12079).

time). Для интегрирования по физическому времени (внешние итерации) и по искусственному времени (внутренние итерации) используются различные разностные схемы (например явные или неявные), а для ускорения сходимости внутренних итераций – различные подходы (см. [12]–[14]) (например многосеточный метод или сглаживание невязки). В [15] метод двойных шагов по времени модифицируется таким образом, чтобы использовать многшаговые разностные схемы по физическому времени. Решение сложных задач различного класса приводится в [16], а сравнение различных подходов – в [17].

Исследование устойчивости показывает, что шаг интегрирования по искусственному времени составляет 2/3 шага по физическому времени (см. [18]), что приводит к медленной скорости сходимости при имеющихся ограничениях на шаг по физическому времени, например при использовании явных разностных схем. Для устранения ограничений на шаг по времени находят применение неявные схемы как по физическому, так и по искусственному времени (Fully implicit dual time-stepping scheme) (см. [19], [20]).

В данной работе развивается метод предобусловливания уравнений Навье–Стокса и подход к расчету свободноконвективных течений вязкого сжимаемого газа в рамках процедуры двойных шагов по времени. Для построения матрицы предобусловливания применяется подход, предложенный в [5] и основанный на использовании физических переменных (в качестве одной из физических переменных принимается температура). Возможности подхода демонстрируются на примере решения модельной задачи свободной конвекции.

2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

В консервативных переменных уравнение, описывающее нестационарное течение вязкого сжимаемого газа, записывается в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F = H, \tag{1}$$

где U , F и H представляют собой вектор консервативных переменных, вектор потоков и источниковый член. Источниковый член H учитывает действие массовых сил и имеет вид

$$H = (0, \rho g_x, \rho g_y, \rho g_z, 0)$$

где $\mathbf{g} = \{g_x, g_y, g_z\}$ – ускорение свободного падения.

Интегрируя уравнение (1) по контрольному объему V с границей ∂V , ориентация которой задается внешней единичной нормалью \mathbf{n} , и применяя теорему Гаусса-Остроградского, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_{\partial V} F \cdot \mathbf{n} dS = \int_V H dV. \tag{2}$$

Для дискретизации уравнений Навье–Стокса, записанных в виде (2), используется метод конечных объемов на неструктурированной сетке (контрольный объем центрируется относительно узла сетки). Для дискретизации по времени применяются явные и неявные разностные схемы. Дискретизация невязких потоков осуществляется при помощи схемы Рунге, а вязких потоков – при помощи центрированной схемы 2-го порядка точности. Некоторые детали реализации метода конечных объемов обсуждаются в [9], [21] (в разработанном подходе не делается различий между структурированными и неструктурированными сетками).

3. МЕТОД ПРЕДОБУСЛОВЛИВАНИЯ

При моделировании низкоскоростных течений в рамках модели несжимаемой жидкости вместо консервативных переменных U используются физические переменные Q . Выбор примитивных переменных обеспечивает точный расчет градиентов скорости при дискретизации вязких потоков, а также градиента давления при дискретизации конвективных потоков.

Уравнения, описывающие течение вязкого сжимаемого газа при малых числах Маха, записываются в физических переменных в виде

$$\Gamma \frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_{\partial V} F dS = 0. \tag{3}$$

Матрица преобусловливания представляется в виде (см. [21])

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \Theta v_x & \rho & 0 & 0 & \rho_T v_x \\ \Theta v_y & 0 & \rho & 0 & \rho_T v_y \\ \Theta v_z & 0 & 0 & \rho & \rho_T v_z \\ \Theta H - \delta \rho v_x & \rho v_x & \rho v_y & \rho v_z & \rho_T H + \rho c_p \end{pmatrix},$$

где $H = c_p T + |\mathbf{v}|^2/2$. При этом $\delta = 0$ для идеального газа и $\delta = 1$ для несжимаемой жидкости. Под c_p понимается удельная теплоемкость при постоянном давлении. Производная от плотности по давлению при постоянной температуре и производная от плотности по температуре при постоянном давлении находятся из соотношений

$$\rho_p = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T, \quad \rho_T = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p.$$

Параметр Θ находится из соотношения

$$\Theta = \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T}{\rho c_p} \right),$$

где U_r – скорость распространения возмущений давления. Параметр U_r выбирается так, чтобы собственные значения якобиана были одного порядка с конвективными и диффузионными масштабами (см. [5]). Для идеального газа $\rho_p = 1/RT = \gamma/c^2$, а для течений с постоянной плотностью $\rho_p = 0$.

4. МЕТОД ДВОЙНЫХ ШАГОВ ПО ВРЕМЕНИ

В расчетах нестационарных течений вязкого сжимаемого газа производная по времени в уравнении (3) при $t \rightarrow \infty$ к нулю не стремится, поэтому в уравнение (2) добавляется член с производной по искусственному времени (метод двойных шагов по времени). Уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \Gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V Q dV + \int_V F dS = \int_V H dV, \quad (4)$$

где t – физическое время, τ – искусственное время. Решение системы уравнений (4) является решением исходной системы уравнений (2), если на каждом шаге по физическому времени член с производной по искусственному времени стремится к нулю. Для расчета одного шага по физическому времени выполняется несколько шагов по искусственному времени до тех пор, пока решение не перестанет изменяться (пока не будет достигнут заданный уровень невязки).

4.1. Явная схема

Дискретизируя в уравнении (4) производные по физическому времени с первым или вторым порядком точности, а производные по искусственному времени – с первым порядком точности, для контрольного объема i получаем (для упрощения записи индекс i опускается)

$$\frac{a_0 U^k - a_1 U^n + a_2 U^{n-1}}{\Delta t} + \Gamma^n \frac{Q^k - Q^{k-1}}{\Delta \tau} = R(Q^{k-1}). \quad (5)$$

При этом $a_0 = a_1 = 1/2$, $a_2 = 0$ для схемы 1-го порядка и $a_0 = 3/2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1/2$ для схемы 2-го порядка. Невязка находится из соотношения

$$R = -\frac{1}{V} \left[\sum_{j=1}^{N_i} F_j S_j - H \right].$$

Индекс n относится к слою по физическому времени, а индекс k представляет собой внутренний индекс итераций по искусственному времени. Под Γ^n понимается матрица предобусловливания, вычисленная в контрольном объеме i на слое n по времени.

После перегруппировки слагаемых в уравнении (5) получим

$$\left(\Gamma + a_0 \frac{\Delta\tau \partial U}{\Delta t \partial Q}\right)^n (Q^k - Q^{k-1}) = \Delta\tau \left[R(Q^{k-1}) - \frac{1}{\Delta t} (a_0 U^{k-1} - a_1 U^n + a_2 U^{n-1}) \right].$$

При этом учитывается, что $U^{k-1} = (\partial U / \partial Q)^n Q^{k-1}$. Переменные на итерации k по псевдовремени находятся из соотношения

$$Q^k = Q^{k-1} + \Delta\tau K^{-1} \left[R(Q^{k-1}) - \frac{1}{\Delta t} (a_0 U^{k-1} - a_1 U^n + a_2 U^{n-1}) \right].$$

Матрица K^{-1} имеет вид

$$K^{-1} = \left(\Gamma + m \frac{\partial U}{\partial Q} \right)^n,$$

где $m = a_0 \Delta\tau / \Delta t$. Структура матрицы K^{-1} приводится в приложении.

При использовании для дискретизации по псевдовремени схемы Рунге–Кутты 2-го порядка внутренний цикл записывается в следующем виде:

$$Q^* = Q^{k-1} + \Delta\tau K^{-1} \left[R(Q^{k-1}) - \frac{1}{\Delta t} (a_0 U^{k-1} - a_1 U^n + a_2 U^{n-1}) \right],$$

$$Q^k = Q^{k-1} + \Delta\tau K^{-1} \left[R(Q^*) - \frac{1}{\Delta t} (a_0 U^* - a_1 U^n + a_2 U^{n-1}) \right].$$

При этом структура матрицы K не изменяется.

За начальное приближение решения на итерации $k - 1$ по псевдовремени выбирается решение на текущем слое по времени ($Q^{k-1} = Q^n$). Выполняется внутренний цикл по итерациям k находится решение Q^k . Внутренние итерации на каждом слое по физическому времени обеспечивают стремление к нулю производной по псевдовремени. Во внутреннем итерационном цикле векторы Q^{n-1} и Q^n полагаются постоянными, а вектор Q^k рассчитывается исходя из решения U^k , полученного на итерации k . Условием прекращения итерационного процесса служит как достижение заданного количества итераций, так и выполнение критерия сходимости (минимальное значение нормы невязки не превосходит заданной точности). За решение на следующем временном слое $n + 1$ выбирается решение на итерации k ($Q^{n+1} = Q^k$).

Шаг по физическому времени Δt выбирается исходя из требований точности, а шаг по псевдовремени $\Delta\tau$ определяется условием Куранта–Фридрихса–Леви.

4.2. Неявная схема

Применение неявной схемы Эйлера 1-го порядка для дискретизации уравнения (1) приводит к соотношению

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = R(U^{n+1}). \tag{6}$$

Индекс n относится к слою по времени. Реализация подхода требует вычисления производной $\partial R / \partial U$ через известные значения вектора решения.

В левую часть уравнения (1) добавляется дифференциальный член по псевдовремени

$$\Gamma \frac{\partial U}{\partial \tau} = R_*(U), \tag{7}$$

где

$$R_*(U) = R(U) - \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Для дискретизации по искусственному времени используется неявная схема Эйлера 1-го порядка, а для дискретизации по физическому времени – неявная трехслойная схема (схема BDS-2). Опуская индекс $n + 1$, относящийся к слою по времени, запишем

$$\Gamma \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta \tau} = R^{m+1}(Q) - \frac{1.5Q^{m+1} - 2Q^n + 0.5Q^{n-1}}{\Delta t}. \quad (8)$$

Индекс n относится к слою по физическому времени (внешние итерации), а индекс m соответствует слою по искусственному времени (внутренние итерации).

Разложение невязки в узле i на слое $m + 1$ по псевдовремени в ряд Тейлора в окрестности решения на итерации m имеет вид

$$R^{m+1} = R^m + \frac{\partial R}{\partial U} \Delta U, \quad (9)$$

где $\Delta U = U^{m+1} - U^m$. Учитывая линейризацию невязки (9), уравнение (8) примет вид

$$\left[\left(\frac{\Gamma}{\Delta \tau} + \frac{I}{\Delta t} \right) + \frac{\partial R^m}{\partial U} \right] \Delta U^m = R^m - \frac{1.5Q^m - 2Q^n + 0.5Q^{n-1}}{\Delta t}.$$

Система разностных уравнений решается обобщенным методом взвешенных невязок (GMRES) (см. [21]). При $m = 1$ решение задачи дает вектор U^{n+1} (при этом $R_* \rightarrow 0$). При $\Delta \tau = \infty$ стационарное решение задачи получается за один шаг.

Условием прекращения итераций по искусственному времени служит как достижение заданного количества итераций, так и выполнение критерия сходимости решения. При достижении сходимости решения по внутренним шагам осуществляется переход на следующий шаг по физическому времени ($Q^{n-1} = Q^n$, $Q^n = Q^m$).

4.3. Сглаживание невязки

Для ускорения сходимости итераций по псевдовремени используется сглаживание невязки (Residual smoothing) (см. [20]). Невязка в узле сетки (в центре контрольного объема) заменяется сглаженным средним или взвешенно-средним невязок в соседних узлах сетки. Для увеличения локального шага по псевдовремени средняя невязка рассчитывается неявным образом.

В узле k неструктурированной сетки средняя невязка находится из решения уравнения (см. [20])

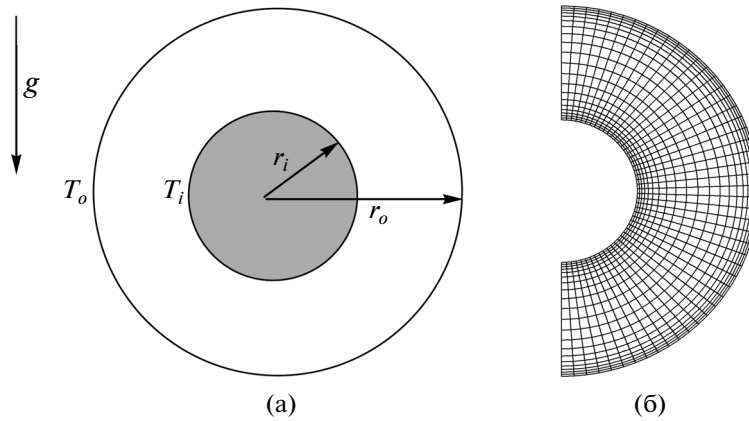
$$\bar{R}_k = R_k + \varepsilon \nabla^2 \bar{R}_k, \quad (10)$$

где R – исходная невязка, \bar{R} – сглаженная невязка. Сглаживающий параметр вычисляется по формуле (см. [20])

$$\varepsilon = \max \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\text{CFL}}{\text{CFL}^*} \right)^2 - 1 \right], 0 \right\}.$$

Под CFL^* понимается максимальное число Куранта основной схемы. Решение уравнения (10) получается при помощи итерационного метода Якоби

$$\bar{R}_k^{(m)} = R_k^{(0)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_k} [\bar{R}_i^{(m)} - \bar{R}_k^{(m)}].$$



Фиг. 1. Схема расчетной области и сетка.

После преобразований получим

$$\bar{R}_k^{(m)} = \left[R_k^{(0)} + \varepsilon \sum_{k=1}^{N_k} \bar{R}_i^{(m-1, m)} \right] (1 + \varepsilon N_k)^{-1}.$$

Под N_k понимается число узлов, соседних с узлом k .

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

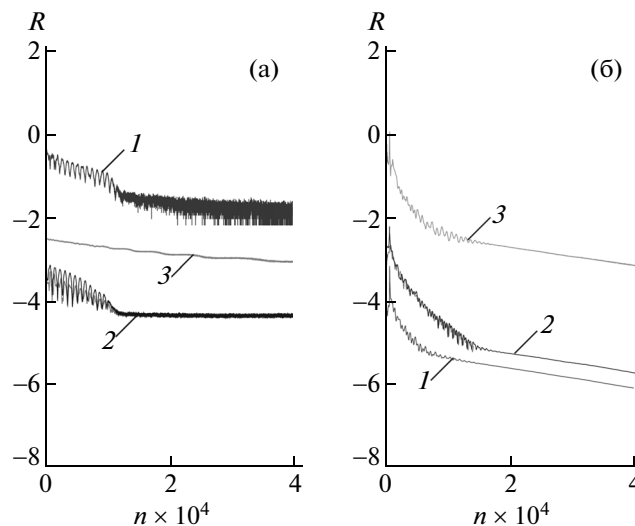
Возможности метода предобусловливания демонстрируются на примере расчета свободно-конвективного течения в зазоре между коаксиальными цилиндрами. В разработанном вычислительном алгоритме для хранения сетки используется информация о связях контрольных объемов (матрица связности). Для упрощения распараллеливания программного кода в расчетах применяются явные разностные схемы. Численные расчеты проводятся на графических процессорах общего назначения (детали реализации и обсуждение ускорения программного кода выходят за рамки статьи).

Для расчетов свободно-конвективных течений в рамках модели несжимаемой жидкости широкое применение находит приближение Буссинеска (в этом случае динамическая и тепловая задачи оказываются взаимосвязанными). В рамках приближения Буссинеска применяется линейная зависимость плотности от температуры $\rho(T) = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$, где β – коэффициент объемного расширения, ρ_0 – плотность при некоторой температуре T_0 . Приближение Буссинеска для описания течения в условиях действия массовых сил является приемлемым, когда разница температур между холодной и горячей стенками не превышает 30 градусов (см. [22]).

В общем случае для моделирования свободно-конвективных течений используются уравнения Навье–Стокса (1) с источником членом в уравнении изменения импульса, учитывающим действие потенциальных массовых сил. Для свободно-конвективных течений характерны малые скорости, в связи с чем для их расчета находят применение методы предобусловливания (см. [21]).

Свободно-конвективные течения на основе полных уравнений Навье–Стокса моделируются в [5], [23]. В [5] метод предобусловливания применяется для моделирования свободной конвекции между концентрическими окружностями (число Рэлея составляет 4.7×10^4 , а отношение диаметров внешнего и внутреннего цилиндров – 2.6). Результаты расчетов сравниваются с данными физического и вычислительного эксперимента, приведенными в [24], [25] (число Рэлея изменяется от 2.11×10^4 до 9.76×10^5 , а расчеты проводятся в рамках приближения Буссинеска). Нестационарная картина течения возникает при числах Рэлея, больших 10^5 . Трехмерные расчеты в рамках приближения Буссинеска проводятся в [26], а сравнение различных моделей турбулентности дается в [27]. Наличие боковых стенок приводит к уменьшению коэффициента теплоотдачи вблизи них, что проявляется в наиболее существенной степени при высоких числах Рэлея.

Рассмотрим ламинарную свободную конвекцию воздуха в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями (см. [5]) (Natural convection in a horizontal annulus). Схема



Фиг. 2. Сходимость итерационного процесса на основе схемы Рое (а) и при использовании опции предобусловливания (б).

расчетной области приводится на фиг. 1а. Диаметры внутреннего и внешнего цилиндров равны $d_i = 3.56$ см и $d_o = 9.25$ см, а их длина $l = 20.32$ см.

Структура течения зависит от отношения диаметров внешнего и внутреннего цилиндров (в расчетах $d_o/d_i = 2.6$) и от числа Рэлея

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_i - T_o)L^3}{\nu\alpha},$$

где $L = r_o - r_i$. В расчетах число Рэлея изменяется от 10^2 до 10^5 , а в основном расчетном варианте для сравнения с экспериментальными и расчетными данными [24], [25] полагается, что $Ra_L = 4.7 \times 10^4$ (при этом перепад температур составляет $\Delta T = 26.3$ К, а температуры внутреннего и внешнего цилиндров полагаются равными 321.38 К и 295.08 К). Для обработки результатов расчетов используются безразмерная температура и безразмерный радиус

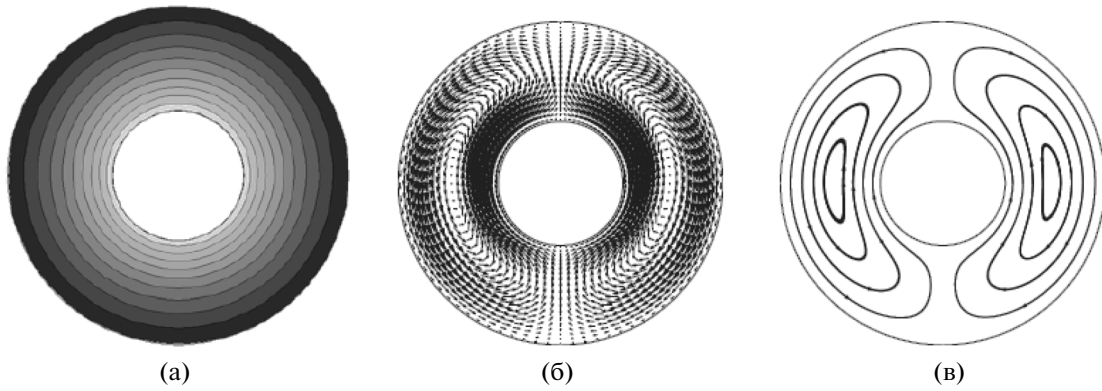
$$\varphi = \frac{T - T_o}{T_i - T_o}, \quad \eta = \frac{r - r_i}{r_o - r_i}.$$

Расчеты проводятся на сетке, содержащей 980 ячеек, со сгущением узлов к поверхности внутреннего и внешнего цилиндров для надлежащего разрешения пограничного слоя. Сетка для половины расчетной области приводится на фиг. 1б (сетка хранится в неструктурированном виде).

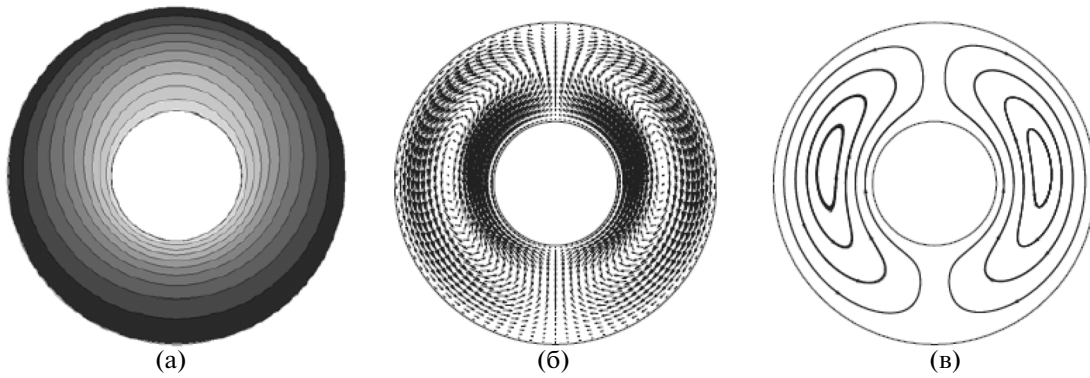
В расчетах с выключенной опцией предобусловливания имеет место стагнация итерационного процесса – невязка практически не изменяется при увеличении числа итераций, что показывает фиг. 2а. При использовании предобусловливания скорость сходимости в существенной степени улучшается. При этом невязка уменьшается на шесть порядков величины за 10^4 итераций, как показывает фиг. 2б. Линии 1 соответствуют невязке давления, линии 2 – невязке скорости, а линии 3 – невязке температуры.

Линии уровня температуры, направление течения и линии тока в срединной плоскости между двумя горизонтально расположенными цилиндрами приводятся на фиг. 3–6 при различных числах Рэлея.

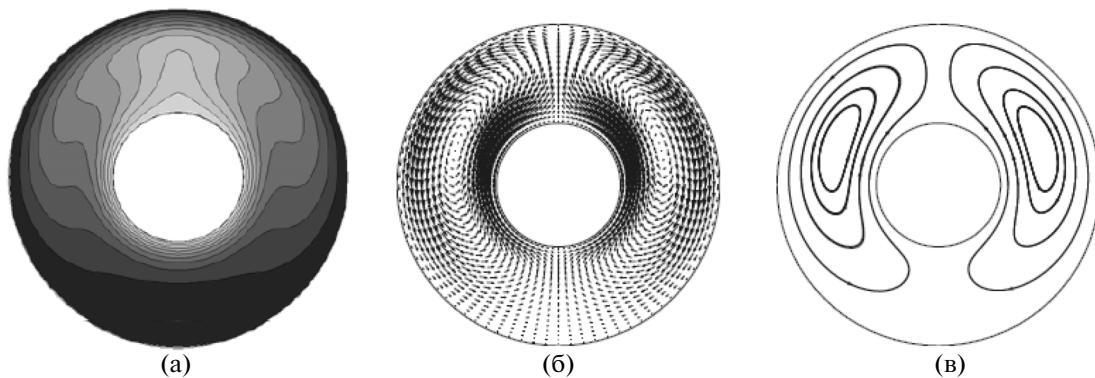
При $Ra = 10^2$ теплообмен происходит за счет эффектов теплопроводности, а линии уровня температуры представляют собой концентрические окружности (фиг. 3). Увеличение числа Рэлея до 10^3 приводит к усилению роли конвективного теплопереноса, а линии уровня температуры перестают быть концентрическими окружностями, принимая слегка вытянутую форму в вертикальном направлении (фиг. 4). Дальнейший рост числа Рэлея до 10^4 приводит к тому, что конвективный перенос играет определяющую роль в формировании картины течения и теплообмена (фиг. 5). Увеличение числа Рэлея изменяет также положение рециркуляционных зон, приводя к



Фиг. 3. Линии уровня температуры (а), векторное поле скорости (б) и линии тока (в) при $Ra = 10^2$.



Фиг. 4. Линии уровня температуры (а), векторное поле скорости (б) и линии тока (в) при $Ra = 10^3$.

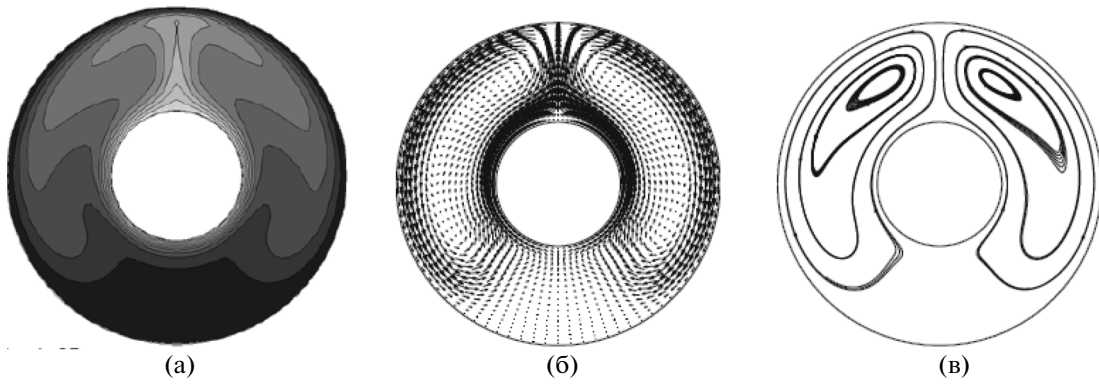


Фиг. 5. Линии уровня температуры (а), векторное поле скорости (б) и линии тока (в) при $Ra = 10^4$.

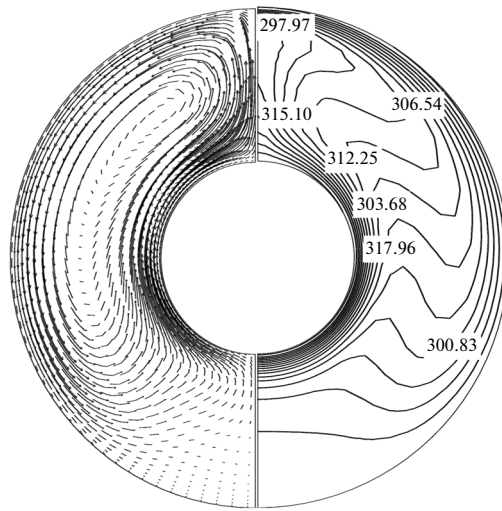
перемещению их центров в вертикальном направлении (вверх). При $Ra = 10^5$ (фиг. 6) толщина теплового пограничного слоя на поверхности цилиндра увеличивается, а линии уровня температуры в верхней части расчетной области принимают более вытянутую в вертикальном направлении форму.

Векторное поле скорости и линии уровня температуры в основном расчетном варианте (при $Ra = 4.7 \times 10^4$) показаны на фиг. 7.

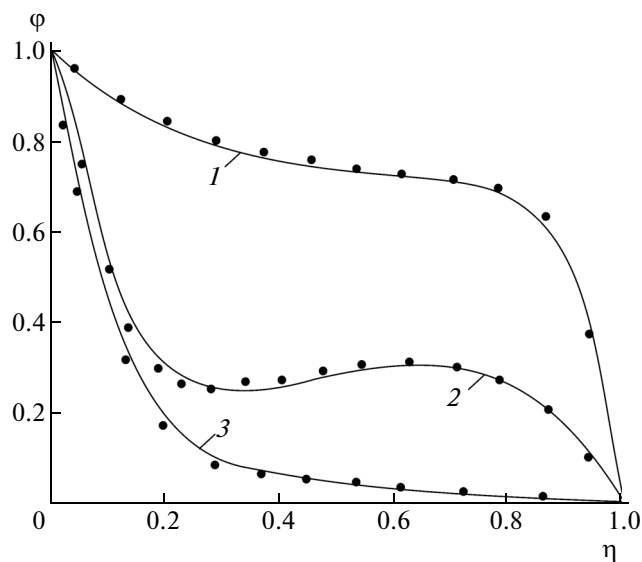
При $Ra = 4.7 \times 10^4$ распределения безразмерной температуры как функции безразмерного радиуса в плоскостях симметрии, расположенных под углами 0, 90 и 180 градусов к вертикальной



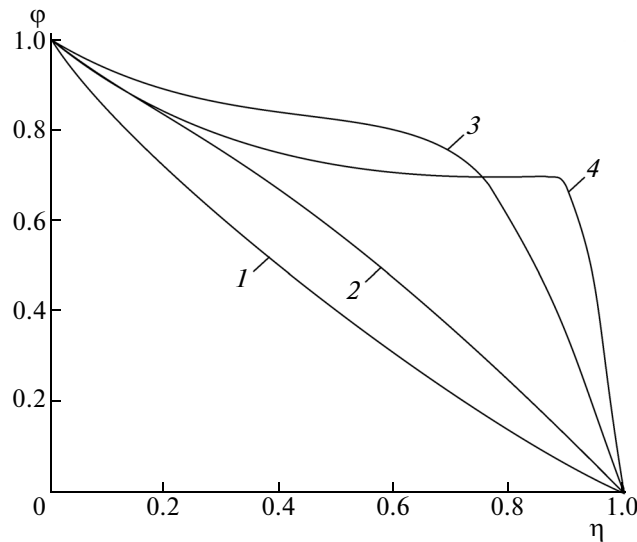
Фиг. 6. Линии уровня температуры (а), векторное поле скорости (б) и линии тока (в) при $Ra = 10^5$.



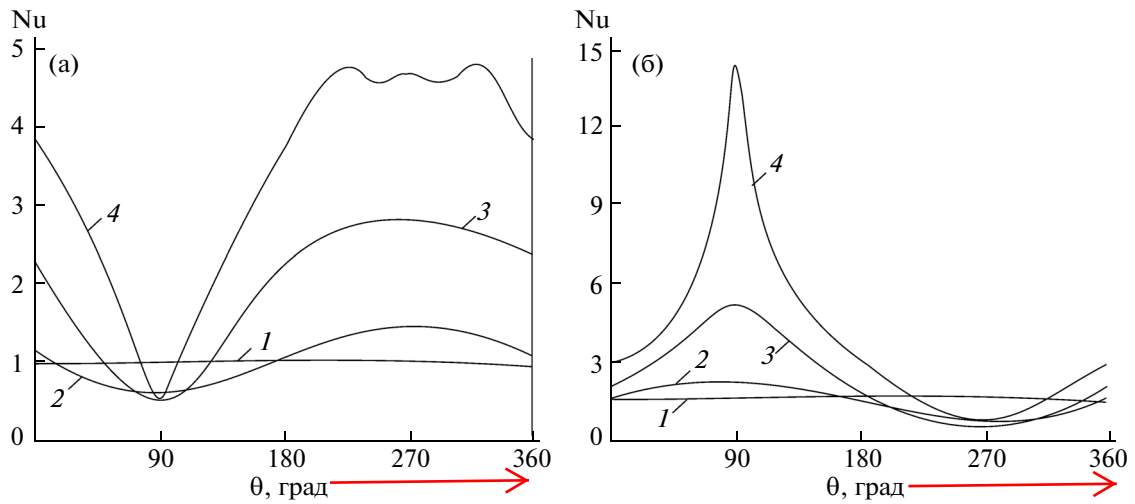
Фиг. 7. Векторное поле скорости (слева) и линии уровня температуры (справа).



Фиг. 8. Распределения температуры в плоскостях симметрии, расположенных под углами 0 градусов (линия 1), 90 градусов (линия 2) и 180 (линия 3) градусов к вертикальной плоскости в сравнении с данными из [24] (значки ●).



Фиг. 9. Распределения температуры при $Ra = 10^2$ (1), $Ra = 10^3$ (2), $Ra = 10^4$ (3), $Ra = 10^5$ (4).

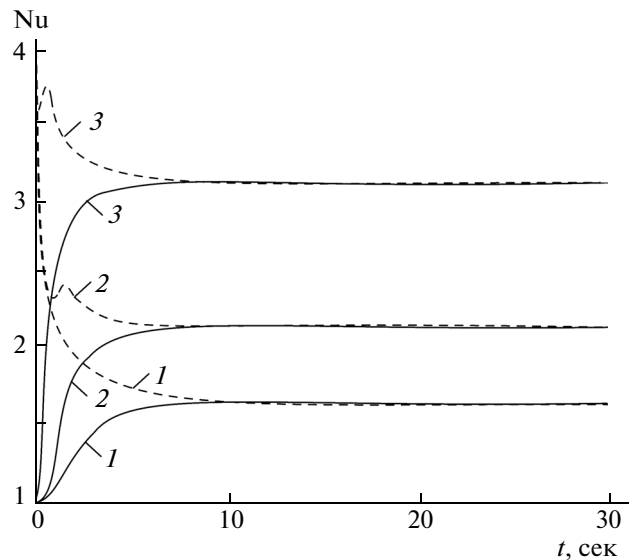


Фиг. 10. Распределения локального числа Нуссельта по поверхности внутреннего (а) и внешнего (б) цилиндра при $Ra = 10^2$ (1), $Ra = 10^3$ (2), $Ra = 10^4$ (3), $Ra = 10^5$ (4).

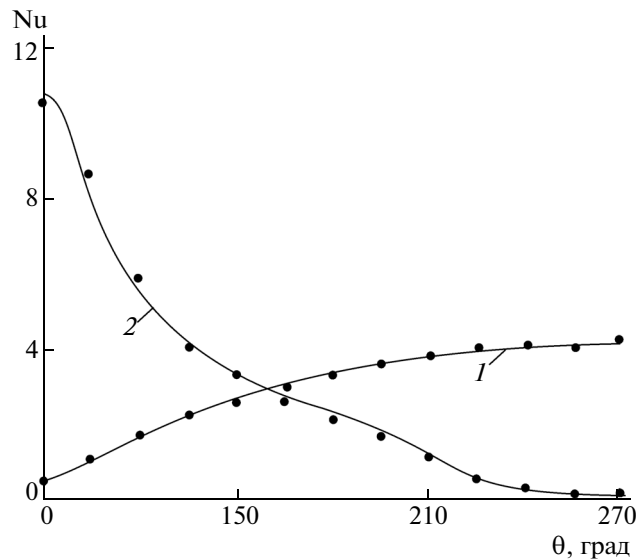
плоскости, показывает фиг. 8 в сравнении с данными физического и вычислительного эксперимента, приведенными в [5], [24]. Имеет место достаточно хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных в различных плоскостях.

Температура понижается в области между стенкой внешнего цилиндра и внутреннего цилиндра, что соответствует разности фиксированных температур поверхностей двух цилиндров. Теплый воздух поднимается и движется от стенки внутреннего цилиндра к внешнему и опускается в нижнюю часть кольца после охлаждения. Воздух рециркулирует внутри кольца вследствие естественной конвекции. Наибольшая скорость наблюдается у стенок цилиндра в верхней части.

Распределения температуры в зазоре между цилиндрами в плоскости, расположенной под углом 90 градусов к вертикали, показывает фиг. 9 при различных числах Рэлея. При $Ra = 10^2$ (линия 1) температура в зазоре между цилиндрами изменяется по зависимости, близкой к линейной (теплоперенос происходит, в основном, за счет теплопроводности). Увеличение числа Рэлея до 10^5 (линия 4) приводит к возникновению большого градиента температуры на поверхности внешнего цилиндра.



Фиг. 11. Изменение среднего числа Нуссельта во времени при $Ra = 10^3$ (1), $Ra = 10^4$ (2), $Ra = 10^5$ (3).



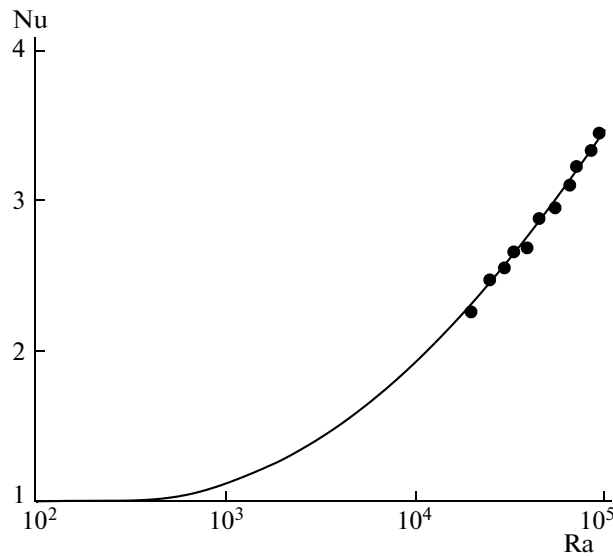
Фиг. 12. Распределения локального числа Нуссельта по поверхности внутреннего (линия 1) и внешнего (линия 2) цилиндра в сравнении с данными из [24] (значки ●) при $Ra = 4.7 \times 10^4$.

Локальные числа Нуссельта на поверхности внутреннего и внешнего цилиндров находятся из соотношений

$$Nu_i = r_i \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_i}, \quad Nu_o = r_o \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_o}.$$

Под средним числом Нуссельта (обозначается при помощи угловых скобок) понимается арифметическое среднее чисел Нуссельта, соответствующих внутреннему и внешнему цилиндрам.

Распределения локальных чисел Нуссельта по поверхности внутреннего и внешнего цилиндра приводятся на фиг. 10 для различных чисел Рэлея. В плоскости, расположенной под углом 90 градусов к вертикали, имеет место минимум числа Нуссельта на поверхности внутреннего цилиндра и максимум числа Нуссельта на поверхности внешнего цилиндра. При этом интересно отметить немонотонное изменение числа Нуссельта на поверхности внутреннего цилиндра при



Фиг. 13. Распределение среднего числа Нуссельта по данным расчета (сплошная линия) и физического эксперимента [24] (значки ●).

$Ra = 10^5$. Локальный максимум числа Нуссельта наблюдается в плоскостях, расположенных под углами 220 и 320 к вертикали, а локальный минимум числа Нуссельта наблюдается на поверхности внешнего цилиндра в плоскости, расположенной под углом 270 градусов к вертикали.

Изменение среднего числа Нуссельта во времени показывает фиг. 11. Штриховые линии соответствуют поверхности внутреннего цилиндра, а сплошные линии — поверхности внешнего цилиндра. Увеличение числа Нуссельта приводит к уменьшению времени, необходимого для достижения стационарного решения.

Сравнение расчетных распределений локального числа Нуссельта с данными физического эксперимента из [24] дается на фиг. 12 и 13. Имеет место хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных как в отношении локальных (локальное число Нуссельта), так и интегральных (среднее число Нуссельта) характеристик теплообмена.

Экспериментальные и численные результаты, приведенные в [24], [25], обработаны при помощи эквивалентной теплопроводности, которая определяется как отношение измеренного теплопереноса в кольце к теплопереносу, полученному только за счет конвективного теплообмена. Для условий задачи при $Ra = 4.7 \times 10^4$ эквивалентная теплопроводность равна 2.58 Вт/м (в расчете на единицу длины цилиндра) (см. [24]). Согласно расчетным данным эквивалентная теплопроводность составляет 2.54 Вт/м, что дает погрешность 1.6% относительно данных физического эксперимента.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для расчета свободно-конвективных течений вязкого сжимаемого газа применяется метод двойных шагов по времени. На каждом шаге по физическому времени осуществляется итерационный процесс интегрирования основных уравнений по искусственному времени. При этом для дискретизации по физическому времени и по искусственному времени применяются разностные схемы различной точности и структуры. Для пространственной дискретизации уравнений газовой динамики используется метод конечных объемов. Расчет конвективных и диффузионных потоков через грани контрольного объема осуществляется при помощи полиномиальной аппроксимации 2-го порядка точности. Система разностных уравнений, полученная при помощи техники введения дополнительных итераций по искусственному времени на каждом шаге по физическому времени, является аналогом системы разностных уравнений, соответствующей установившемуся течению, что позволяет создать универсальный программный код, пригодный для решения как нестационарных, так и стационарных задач.

Результаты решения тестовой задачи свободной конвекции позволяют сделать вывод о том, что разработанный численный метод обладает достаточной точностью разрешения характерных

особенностей свободно-конвективных течений. Предобусловливание позволяет устранить зависимость скорости сходимости от числа Маха. Решение предобусловленных уравнений при малых числах Маха приводит к увеличению времени счета примерно на 10–15% (за счет увеличения числа арифметических операций) по сравнению со случаем, когда предобусловливание не используется и решаются исходные уравнения.

Метод конечных объемов реализован на графических процессорах общего назначения, что делает явные схемы конкурентноспособными по отношению к неявным методам расчета.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приводятся вспомогательные расчетные соотношения, необходимые для реализации метода предобусловливания и метода двойных шагов по времени.

Структура вспомогательной матрицы

Матрица, обратная матрице K , записывается в виде

$$K^{-1} = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}.$$

Столбцы матрицы K^{-1} имеют следующий вид:

$$R_1 = \begin{pmatrix} U_r^2 [b(H - |\mathbf{v}|^2) + 1]/a \\ -v_x/e \\ -v_y/e \\ -v_z/e \\ \{(m+1)U_r^2 + (H - |\mathbf{v}|^2)[(m+1)bU_r^2 - a]\}/(c_p a e) \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} bU_r^2 v_x/a \\ 1/e \\ 0 \\ 0 \\ [(m+1)bU_r^2 - a]v_x/(c_p a e) \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} bU_r^2 v_y/a \\ 0 \\ 1/e \\ 0 \\ [(m+1)bU_r^2 - a]v_y/(c_p a e) \end{pmatrix},$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} bU_r^2 v_z/a \\ 0 \\ 0 \\ 1/e \\ [(m+1)bU_r^2 - a]v_z/(c_p a e) \end{pmatrix},$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} -bU_r^2/a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -[(m+1)bU_r^2 - a]/(c_p a e) \end{pmatrix}.$$

Здесь $a = 1 + m\beta U_r^2$, $b = \rho_T/(\rho c_p)$, $e = (m+1)\rho$. Под \mathbf{v} понимается вектор скорости.

Схема Рунге–Кутты

В общем случае явная схема Рунге–Кутты имеет вид

$$\begin{aligned} Q_i^{(0)} &= Q_i^n, \\ Q_i^{(k)} &= Q_i^{(0)} - \alpha_k \Delta t \Gamma R_i [Q^{(k-1)}], \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^{(m)}. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_k = 1/(m-k+1)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Индексы n и m соответствуют слою по времени и порядку схемы Рунге–Кутты. Под R понимается невязка, полученная при дискретизации невязких и вязких потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics. Springer, 2000.
2. *Turkel E.* Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations // J. Comput. Phys. 1987. V. 72. № 1. P. 277–298.
3. *Choi Y.-H., Merkle C.L.* The application of preconditioning in viscous flows // J. Comput. Phys. 1993. V. 105. № 2. P. 207–223.
4. *Volpe G.* Performance of compressible flow codes at low Mach numbers // AIAA J. 1993. V. 31. № 1. P. 49–56.
5. *Weiss J.M., Smith W.A.* Preconditioning applied to variable and constant density flows // AIAA J. 1995. V. 33. № 11. P. 2050–2057.
6. *Turkel E.* Review of preconditioning methods for fluid dynamics // Appl. Numer. Math. 1993. V. 12. № 1–3. P. 257–284.
7. *Turkel E., Radespiel R., Kroll N.* Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics // Computers and Fluids. 1997. V. 26. № 6. P. 613–634.
8. *Buelow P.E.O., Venkateswaran S., Merkle C.L.* Effect of grid aspect ratio on convergence // AIAA J. 1994. V. 32. № 12. P. 2402–2408.
9. *Волков К.Н.* Преобусловливание уравнений Эйлера и Навье–Стокса при моделировании низкоскоростных течений на неструктурированных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 10. С. 1868–1884.
10. *Rogers S.E., Kwak D.* Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier–Stokes equations // AIAA J. 1990. V. 28. № 2. P. 253–262.
11. *Jameson A.* Time dependent calculations using multigrid, with application to unsteady flows past airfoils and wings // AIAA Paper. 1991. № 91-1596.
12. *Venkateswaran S., Merkle C.L.* Dual time stepping and preconditioning for unsteady computations // AIAA Paper. 1995. № 95-0078.
13. *Rumsey C.L., Sanetrik M.D., Biedron R.T., Melson N.D., Parlette E.B.* Efficiency and accuracy of time-accurate Navier–Stokes computations // Computers and Fluids. 1996. V. 25. № 2. P. 217–236.
14. *Zhang L.P., Wang Z.J.* A block LU-SGS implicit dual time-stepping algorithm for hybrid dynamic meshes // Computers and Fluids. 2004. V. 33. № 7. P. 891–916.
15. *Bijl H., Carpenter M.H., Vatsa V.N., Kennedy C.A.* Implicit time integration schemes for the unsteady compressible Navier–Stokes equations: laminar flow // J. Comput. Phys. 2002. V. 179. № 1. P. 313–329.
16. *Tang H.S., Jones S.C., Sotiropoulos F.* An overset grid method for 3D, unsteady, incompressible flows // J. Comput. Phys. 2003. V. 191. № 2. P. 567–600.

17. *Jameson A.* An assessment of dual-time stepping, time spectral and artificial compressibility based numerical algorithms for unsteady flow with applications to flapping wings // AIAA Paper. 2009. № 2009-4273.
18. *Zhao Y.* Computation of complex turbulent flow using matrix-free implicit dual time-stepping scheme and LRN turbulence model on unstructured grids // Computers and Fluids. 2004. V. 33. № 1. P. 119–136.
19. *Luo H., Baum J.D., Lohner R.* An accurate, fast, matrix-free implicit method for computing unsteady flows on unstructured grids // Computers and Fluids. 2001. V. 30. № 2. P. 137–159.
20. *Zhao Y., Tan H.H., Zhang B.L.* A high-resolution characteristics-based implicit dual time-stepping of method for free surface flow simulation on unstructured grids // J. Comput. Phys. 2002. V. 183. № 1. P. 233–273.
21. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012.
22. *Gray D.D., Giorgini A.* The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases // Internat. J. Heat and Mass Transfer. 1976. V. 19. № 5. P. 545–551.
23. *Fu W.-S., Li C.-G., Huang C.-P., Huang J.-C.* An investigation of a high temperature difference natural convection in a finite length channel without Boussinesq assumption // Internat. J. Heat and Mass Transfer. 2009. V. 52. № 11–12. P. 2571–2580.
24. *Kuehn T.H., Goldstein R.J.* An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders // J. Fluid Mechanics. 1976. V. 74. P. 695–719.
25. *Kuehn T.H., Goldstein R.J.* An experimental study of natural convection heat transfer concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli // J. Heat Transfer. 1978. V. 100. P. 635–640.
26. *Desai C.P., Vafai K.* An investigation and comparative analysis of two and three-dimensional turbulent natural convection in a horizontal annulus // Internat. J. Heat and Mass Transfer. 1994. V. 37. № 16. P. 2475–2504.
27. *Char M., Hsu Y.H.* Comparative analysis of linear and nonlinear low-Reynolds-number eddy viscosity models to turbulent natural convection in horizontal cylindrical annuli // Numerical Heat Transfer. 1998. V. 33. P. 191–206.