Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №6

Сергею Владимировичу Востокову
с наилучшими пожеланиями

ОБ ОБОЛОЧКАХ И РАЗДЕЛЯЮЩИХ ФУНКТОРАХ ДЛЯ ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ КАТЕГОРИЙ

© М. В. БОНДАРКО, В. А. СОСНИЛО

Наша основная цель — доказать следующее утверждение: на триангулированной категории $\underline{C}$ можно задать когомологический функтор F (со значениями в некоторой абелевой категории), для которого данное множество $E \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$ является множеством нулей, тогда и только тогда, когда E замкнуто относительно ретрактов и расширений. Кроме того, если $\underline{C}$ — R-линейная категория (где R — некоторое коммутативное кольцо), мы можем выбрать R-линейный когомологический функтор $F : \underline{C}^{op} \to R - \mathrm{mod}$, задающий E. Этот результат позволяет доказать, что объект Y лежит в соответствующей ,,оболочке" некоторого множества $D \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$ тогда и только тогда, когда это свойство выполнено для образов D и Y во всех категориях $\underline{C}_p$, полученных из $\underline{C}$ при помощи ,,локализаций коэффициентов" по максимальным идеалам p кольца R. Кроме того, в процессе доказательства теоремы был разработан новый подход, связывающий триангулированную категорию с ее (неполными) счетными триангулированными подкатегориями. Мы планируем применить результаты статьи к изучению весовых структур и триангулированных категорий мотивов.

Введение

Если $\{F_i\}$ — семейство когомологических функторов из триангулированной категории $\underline{C}$ (со значениями в некоторых абелевых категориях

Ключевые слова: триангулированные категории, когомологические функторы, разделяющие функторы, оболочки, локализации коэффициентов.

Первый автор был поддержан грантом 14-01-00393-а РФФИ, фондом Дмитрия Зимина ,,Династия" и грантом НШ-3856.2014.1. Второй автор был поддержан лабораторией Чебышёва (математико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного университета) в рамках гранта правительства РФ 11.Г34.31.0026 и ОАО ,,Газпромнефть". Оба автора были поддержаны грантом РФФИ 15-01-03034-а.

$\underline{A}_i$), то, конечно же, класс E объектов $\underline{C}$, заданный условиями $F_i(c) = 0$ (для всех i), замкнут относительно ретрактов и расширений в $\underline{C}$. В данной статье мы доказываем (несколько неожиданное для авторов) обратное утверждение (во избежание теоретико-множественных трудностей, считая, что объекты $\underline{C}$ образуют множество). Точнее, мы доказываем следующий факт.

Теорема 0.1. *Пусть некоторое множество объектов E в малой R-линейной триангулированной категории $\underline{C}$ (где R — коммутативное кольцо с единицей) замкнуто относительно $\underline{C}$-ретрактов и расширений и содержит 0. Тогда для каждого объекта $Y \in \operatorname{Obj}\underline{C} \setminus E$ существует R-линейный „разделяющий“ когомологический функтор $F^Y : \underline{C}^{op} \to R - \operatorname{mod}$, сужение которого на E равно 0, а $F^Y(Y) \neq \{0\}$.*

Этот результат представляет интерес уже в (самом общем) случае $R = \mathbb{Z}$.

Теперь расскажем, почему авторы заинтересовались этим вопросом. В триангулированных категориях часто большое значения имеют классы объектов специального типа; в частности, значительный интерес представляют множества нулей различных (ко)представимых функторов (которые имеют прямое отношение к т-структурам, весовым структурам, и к их обобщению — Гом-ортогональным парам; см. определение 3.1 статьи [9], а также статьи [10, 8] и [3]). К сожалению, не представляется возможным дать описание всех классов объектов, которые могут быть заданы таким образом (для произвольных семейств представимых функторов; отметим, однако, что в перечисленных статьях был получен ряд важных результатов, связанных с этой классификационной задачей). Поэтому авторы рассмотрели несколько модифицированный классификационный вопрос, исчерпывающий ответ на который и дает теорема 0.1.

Из нашей теоремы мы выводим следствие, которое может представить самостоятельный интерес. Будем называть оболочкой класса $D \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$ наименьший подкласс $\operatorname{Obj}\underline{C}$, содержащий $D \cup \{0\}$ и замкнутый относительно ретрактов и расширений.

Заметим, что если $F : \underline{C}^{op} \to R - \operatorname{mod}$ — когомологический функтор (где R — коммутативное кольцо с единицей), а M — плоский R-модуль, то функтор $F(-) \otimes M : \underline{C}^{op} \to R - \operatorname{mod}$ („наивного тензорного произведения“) также когомологичен. Рассмотрение этих функторов для $M = R_p$, где p пробегает все максимальные идеалы R, легко дает следующий результат.

Следствие 0.2. *Пусть $\underline{C}$ — R-линейная триангулированная категория. Для каждого простого идеала $p \lhd R$ обозначим через R_p локализацию* *кольца R по p, и обозначим через $\underline{C}_p$ триангулированную категорию, объекты которой — это объекты $\underline{C}$, а множества морфизмов получены из соответствующих модулей морфизмов в $\underline{C}$ тензорным умножением на R_p над R (см. предложение 4.1 ниже). Обозначим через L_p естественный функтор $\underline{C} \to \underline{C}_p$ (тождественный на объектах).*

Пусть $D \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$, $Y \in \operatorname{Obj} \underline{C}$. Тогда Y лежит в оболочке E класса D в $\underline{C}$ тогда и только тогда, когда $L_p(Y)$ лежит в $\underline{C}_p$-оболочке класса $L_p(D)$ для каждого максимального идеала p кольца R.

Заметим, что функтор L_p (для $\underline{C}$ и некоторого простого идеала p) — в точности „естественный функтор локализации коэффициентов" (переводящий R-линейные категории в R_p-линейные); эти функторы были подробно описаны в приложении A.2 диссертации [5] в случае $R = \mathbb{Z}$, тогда как общий случай был разобран в предложении B.1.5 статьи [4].

Кроме того, мы хотели бы отметить, что стали рассматривать функторы типа L_p и сформулированное выше утверждение по следующей „мотивной" причине: доказанные О. Габбером утверждения о разрешении особенностей, необходимые для изучения триангулированных мотивных категорий, могут быть применены непосредственно только к различным R_p-линейным категориям (при этом в качестве R обычно рассматривают локализации $\mathbb{Z}$). Заметим, что хотя для доказательств, связанных с „глобализацией коэффициентов", в [5] и [4] было достаточно применения „триангулированных" свойств L_p (так как было достаточно рассмотреть „триангулированную" оболочку $\cup_{i\in\mathbb{Z}} D[i]$ для некоторого D, и поэтому была применена теория локализаций Вердье), в некоторых ситуациях (в частности, в той, что была рассмотрена в [2]) произвольные оболочки весьма актуальны.

Теперь расскажем о содержании статьи более подробно.

В §1 мы вводим некоторые простые (и достаточно общепринятые) категорные определения.

В §2 теорема 0.1 доказывается для случая, когда E и все множества морфизмов в $\underline{C}$ счетны. Мы строим F^Y как (прямой) предел представимых функторов, тогда как процедура построения представляющих их объектов непосредственно связана с „аппроксимационными" методами, разработанными в §III.2 книги [1] (и которые также применялись для доказательства основного утверждения в [8]; естественные двойственные к этим рассуждениям были применены в доказательстве теоремы 2.2.6 статьи [3]).

В §3 описаны новые методы, связывающие произвольные триангулированные категории с категориями, в которых множества объектов и морфизмов счетны. Они легко дают доказательство теоремы для случая счетного R. Далее, в п. 3.2 наша теорема доказывается в общем случае (с помощью ,,приближения" кольца R его не более чем счетными подкольцами). Отметим, что эти рассуждения, возможно, представляют самостоятельный интерес (особенно в сочетании с другими методами этого параграфа); описание этих методов было основной причиной для рассмотрения R-линейных категорий в этой статье. Читатель, конечно же, может ограничиться изучением случая $R = \mathbb{Z}$ (который, видимо, достаточен для мотивных приложений, которые интересуют авторов).

Наконец, в §4 доказывается следствие 0.2.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору А. И. Генералову за ряд полезных замечаний к статье.

§1. Обозначения и соглашения

- Для категории C и $X, Y \in \operatorname{Obj} C$ мы будем обозначать через $C(X,Y)$ множество морфизмов из X в Y (в C).
- R — коммутативное кольцо с единицей.
- $\underline{C}$ всегда будет R-линейной триангулированной категорией; в §2–3 мы будем считать ее малой.
- $\underline{A}$ — абелева категория.
- Для категорий C и C' мы будем писать $H : C \to C'$, только если H — ковариантный функтор. Соответственно мы будем называть F когомологическим функтором из $\underline{C}$ в $\underline{A}$ и писать $F : \underline{C}^{op} \to \underline{A}$, если F контравариантен на $\underline{C}$ и переводит выделенные треугольники в длинные точные последовательности. Заметим, что некоторые авторы в такой ситуации называют F когомологическим функтором из $\underline{C}^{op}$ в $\underline{A}$ (например, см. [6]).
- Если A, B и C — объекты категории $\underline{C}$ и существует выделенный треугольник $A \to C \to B \to A[1]$, мы будем называть C *расширением* B при помощи A.
- Будем называть объект X категории $\underline{C}$ *ретрактом* $Y \in \operatorname{Obj} \underline{C}$, если id_X пропускается через Y (так как $\underline{C}$ — триангулированная категория, X — ретракт Y тогда и только тогда, когда X — прямое слагаемое Y).
- Мы будем называть наименьший класс объектов $\underline{C}$, содержащий данный класс $D \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$, 0 и замкнутый относительно ретрактов и расширений, *оболочкой* D (в $\underline{C}$).
- Если $f \in \underline{C}(X,Y)$ (при $X, Y \in \operatorname{Obj} \underline{C}$), будем называть третью вершину (любого) выделенного треугольника $X \xrightarrow{f} Y \to Z$ *конусом* f и обозначать $\operatorname{Cone} f$ (напомним, что все конусы f в $\underline{C}$ изоморфны, но выбор этих изоморфизмов ,,неканоничен").

- Множество, снабженное частичным порядком, называется направленным, если любые два его элемента мажорируются каким-то третьим.
- Пусть $(I, \succeq)$ — направленное множество; пусть $x \in I$. Мы будем обозначать через I_x множество тех элементов $y \in I$, для которых $y \succeq x$. Будем говорить, что некоторое свойство элементов $i \in I$ выполнено для достаточно больших i, если оно выполнено для всех $i \in I_x$ (для какого-то $x \in I$).

§2. Доказательство теоремы в счетном случае

В этом параграфе мы докажем теорему 0.1 в случае, когда E и $\underline{C}$ удовлетворяют некоторым условиям счетности.

Предложение 2.1. *Пусть все множества морфизмов в $\underline{C}$ счетны, а $E = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — счетное множество объектов $\underline{C}$, содержащее 0 и замкнутое относительно расширений и ретрактов (т.е. являющееся своей собственной оболочкой).*

Тогда для любого $Y \in \mathrm{Obj}\,\underline{C} \setminus E$ существует R-линейный когомологический „разделяющий“ функтор $F^Y : \underline{C}^{op} \to R-\mathrm{mod}$, равный нулю на E, для которого $F^Y(Y) \neq \{0\}$.

Доказательство. Для каждого $Z \in \mathrm{Obj}\,\underline{C}$, $i \in \mathbb{N}$, зафиксируем некоторую сюръекцию $\mathbb{N} \to \underline{C}(e_i, Z)$. Обозначим через $f_{Z,i,j}$ образ j при этом отображении.

Построим индуктивную систему $\{Y_i \in \mathrm{Obj}\,\underline{C}\}_{i \geqslant 0}$ и связывающие морфизмы $\alpha_i : Y_i \to Y_{i+1}$ (для $i \geqslant 0$). Положим $Y_0 = Y$. Теперь выберем Y_i и соответствующие морфизмы, используя индукцию по i. Для $n \in \mathbb{N}$ предположим, что для всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$ уже выбраны $Y_k \in \mathrm{Obj}\,\underline{C}$, а для $0 \leqslant k \leqslant n-2$ заданы $\alpha_k \in \underline{C}(Y_k, Y_{k+1})$. Для $0 \leqslant k \leqslant n-1$ обозначим через $\alpha_{k,n-1}$ композицию $\alpha_{n-2} \circ \cdots \circ \alpha_k$ (соответственно $\alpha_{n-1,n-1} = \mathrm{id}_{Y_{n-1}}$). Положим

$$Y_n = \mathrm{Cone}\left(\bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant n} \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i \xrightarrow{p_{n-1} \circ \bigoplus (\alpha_{k,n-1} \circ f_{Y_k,i,j})} Y_{n-1} \right),$$

где p_{n-1} — проекция $\bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant n} \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_{n-1}$ на Y_{n-1}.

Наконец, определим α_{n-1} как морфизм $Y_{n-1} \to Y_n$, существующий по определению конуса.

Определим наш функтор $F^Y(-)$ как $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{C}(-, Y_n)$ (здесь связывающие морфизмы индуцированы соответствующими $\alpha_{k,n}$). Конечно же, функтор F^Y когомологичен и R-линеен.

Теперь докажем, что F^Y удовлетворяет (остальным) нужным нам свойствам. Покажем сначала, что каждый элемент $x \in \underline{C}(e_i, Y_n)$ (для любых $i, n \in \mathbb{N}$) обращается в нуль в $\underline{C}(e_i, Y_N)$ для некоторого $N > n$. Действительно, пусть k — такое натуральное число, что $x = f_{Y_n,i,k}$. Пусть $N = \max\{k, n+1\}$. По определению Y_N существует выделенный треугольник

$$e_i \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha_{n,N-1} \circ x & x'\end{pmatrix}} Y_{N-1} \xrightarrow{\alpha_{N-1}} Y_N \longrightarrow (e_i \oplus X)[1],$$

где X принадлежит E, а x' — некоторый элемент $\underline{C}(X, Y_{N-1})$. Тогда последовательность

$$\cdots \to \underline{C}(e_i, e_i \oplus X) \to \underline{C}(e_i, Y_{N-1}) \overset{(\alpha_{N-1})_*}{\to} \underline{C}(e_i, Y_N) \to \cdots$$

точна. Морфизм $e_i \overset{\alpha_{n,N-1} \circ x}{\to} Y_{N-1}$ пропускается через $e_i \oplus X$, а значит, $\alpha_{n,N} \circ x = \alpha_{N-1} \circ \alpha_{n,N-1} \circ x = (\alpha_{N-1})_*(\alpha_{n,N-1} \circ x) = 0$.

По определению прямого предела функторов получаем, что $F^Y(e_i) = \{0\}$ (для всех $i \in \mathbb{N}$), т.е. $F^Y|_E = 0$.

Остается проверить, что $F^Y(Y) \neq \{0\}$. Предположим обратное. Тогда $\mathrm{id}_Y \in \underline{C}(Y, Y) = \underline{C}(Y, Y_0)$ становится нулем в $\underline{C}(Y, Y_N)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Заметим теперь, что $\mathrm{Cone}(\alpha_k)[-1]$ принадлежит E для любого $k \geqslant 0$. При помощи аксиомы октаэдра получаем, что $\mathrm{Cone}(\alpha_{k,n})[-1]$ для $0 \leqslant k \leqslant n$ (и для соответствующих композиций $\alpha_{k,n}$) также принадлежит E. Обозначим $\mathrm{Cone}(\alpha_{0,N})[-1]$ через X' и применим функтор $\underline{C}(Y, -)$ к выделенному треугольнику $X' \to Y \to Y_N \to X'[1]$. Получаем длинную точную последовательность:

$$\cdots \to \underline{C}(Y, X') \to \underline{C}(Y, Y) \overset{(\alpha_{0,N})_*}{\to} \underline{C}(Y, Y_N) \to \cdots$$

Так как $(\alpha_{0,N})_*(\mathrm{id}_Y) = 0$, id_Y пропускается через X'. Это означает, что Y — ретракт некоторого элемента E и, значит, тоже является элементом E. Это противоречит нашему изначальному предположению об Y. $\square$

Замечание 2.2. Представленное выше доказательство не работает без условий счетности, так как авторы не умеют строить соответствующую трансфинитную индуктивную систему. На каждом шаге нашей конструкции нам требуется лишь строить некоторый Y_i как конус некоторого морфизма в Y_{i-1}. Для аналогичного построения в несчетном случае необходимо было бы дополнять последовательность этих Y_i некоторым „трансфинитным конусом“. Авторы не знают, как этого добиться, если $\underline{C}$ не допускает „оснащения“ какого-либо рода (например, дифференциально-градуированного оснащения достаточно для наших целей, так как с помощью него можно строить „канонические“ конусы морфизмов, которые позволяют переходить к „трансфинитному пределу"). Возможно, аналогичная проблема побудила авторов [9] рассматривать дериваторы (в их теореме 3.7).

§3. Доказательство теоремы в общем случае

В этом параграфе мы докажем теорему 0.1 в общем случае (хотя вначале мы вынуждены рассмотреть случай не более чем счетного R).

3.1. „Аппроксимация" категорий счетными подкатегориями. Опишем ряд конструкций и методов, нужных для доказательства основной теоремы. В п. 3.1 мы будем считать, что кольцо R не более чем счетно.

Сначала мы докажем простую „аддитивную" лемму; потом применим ее для доказательства сходного (но несколько более сложного) триангулированного утверждения.

Лемма 3.1. *Для каждой R-линейной категории $\underline{B}$, счетного множества O ее объектов и счетного множества M морфизмов между элементами O существует (неполная!) R-линейная подкатегория $\underline{B}(M;O)$ категории $\underline{B}$ со счетными множествами объектов и морфизмов такая, что O лежит в $\operatorname{Obj}\underline{B}(M;O)$, а M лежит в $\operatorname{Mor}\underline{B}(M;O)$.*

Доказательство. Для каждого конечного множества $o_1, \cdots, o_n$ элементов O ($n \geqslant 0$) выберем по представителю в классе изоморфности $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} o_i$ в $\operatorname{Obj}\underline{B}$ и обозначим его через $S(o_1, \cdots, o_n)$. Обозначим через O' счетное множество $\{S(o_1, \cdots, o_n) | n \geqslant 0, o_i \in O\}$.

Теперь возьмем в качестве $\underline{B}(M;O)$ подкатегорию $\underline{B}$ с множеством объектов O', чьи множества морфизмов определяются следующим образом: $\underline{B}(M;O)(o_1, o_2) = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i f_i^{n_i} \circ \cdots \circ f_i^1\right\}$; здесь мы рассматриваем все цепочки композируемых элементов M (длины $n_i \geqslant 0$) такие, что область определения f_i^1 — o_1, область значения $f_i^{n_i}$ — o_2, а $r_i \in R$. По построению такое множество является R-подмодулем в $\underline{B}(o_1, o_2)$. Далее, для $o_1, \cdots, o_m, o'_1, \cdots, o'_n \in O$ (где $m, n \geqslant 0$) в качестве $\underline{B}(M;O)\Big(\bigoplus\limits_{i=1}^{m} o_i, \bigoplus\limits_{i=1}^{n} o'_i\Big)$ мы возьмем множество таких матриц, (i,j)-й коэффициент которых принадлежит $\underline{B}(M;O)(o_i, o'_j)$ (для всех (i,j)). Конечно же, мы можем ограничить композицию морфизмов в $\underline{B}$ на эти множества; и мы получаем R-линейную (аддитивную) подкатегорию $\underline{B}$. $\square$

Предложение 3.2. *Если $\underline{C}$ — R-линейная триангулированная категория, то для любого счетного множества O ее объектов и счетного* *множества M морфизмов между элементами O существует R-линейная триангулированная подкатегория $\underline{C}_{tr}(M;O)$ категории $\underline{C}$ со счетными множествами объектов и морфизмов такая, что O лежит в $\operatorname{Obj}\underline{C}_{tr}(M;O)$, а M лежит в $\operatorname{Mor}\underline{C}_{tr}(M;O)$.*

Доказательство. Построим сначала некоторые множества $O^{(n)}, M^{(n)}$ объектов и морфизмов в $\underline{C}$ для всех $n \geqslant 0$.

Наша конструкция индуктивна. Возьмем $O^{(0)} = O$, $M^{(0)} = M$.

Для каждого $n \geqslant 1$ мы рассмотрим полученные на предыдущем шаге $(O^{(n-1)}, M^{(n-1)})$ и выберем соответствующую счетную R-линейную подкатегорию $\underline{C}(O^{(n-1)}; M^{(n-1)})$ категории $\underline{C}$ (пользуясь леммой 3.1). Обозначим множества объектов и морфизмов в $\underline{C}(O^{(n-1)}, M^{(n-1)})$ через O' и M' соответственно. Далее, для каждого $f \in M'$ выберем содержащий его выделенный треугольник (рассматривая его как бесконечную цепочку морфизмов) и добавим соответствующие (счетные) множества объектов и морфизмов к (O', M'); обозначим полученные в итоге множества через O'' и M'' соответственно. Наконец, для каждой „нижней шапочки“ октаэдра в $\underline{C}$, чьи морфизмы принадлежат M'', выберем соответствующую верхнюю шапочку в $\underline{C}$ и добавим соответствующие объекты и морфизмы к O'' и M''. Обозначим полученные в результате операций этого типа множества через $O^{(n)}$ и $M^{(n)}$ соответственно.

Множества $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O^{(n)}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^{(n)}$, очевидно, задают некоторую R-линейную подкатегорию $\underline{C}_{tr}(M;O)$ категории $\underline{C}$; мы можем ограничить на нее функторы сдвига в $\underline{C}$ (т.е. функторы $[n]$ для $n \in \mathbb{Z}$). Возьмем в качестве выделенных треугольников в $\underline{C}_{tr}(M;O)$ те треугольники из $\underline{C}_{tr}(M;O)$-морфизмов, которые выделены в $\underline{C}$. По построению $\underline{C}_{tr}(M;O)$ удовлетворяет всем аксиомам триангулированных категорий (заметим: в силу леммы 2.2 статьи [7] нам не нужно отдельно проверять выполнение аксиомы TR3 в $\underline{C}_{tr}(M;O)$). $\square$

Замечание 3.3.

1. Конечно же, доказательства леммы 3.1 и предложения 3.2 близки к известному доказательству теоремы Левенгейма–Сколема.
2. Мы также могли бы „непосредственно добиться“ выполнения аксиомы TR3 в $\underline{C}_{tr}(M;O)$ (путем добавления некоторых морфизмов к $M^{(n)}$ на каждом шаге).

Теперь мы рассмотрим некоторую разновидность фильтрованных произведений объектов, категорий и функторов.

Заметим, для начала, что любое малое произведение триангулированных категорий обладает естественной структурой триангулированной категории (а малое произведение абелевых категорий абелево). Поэтому мы можем дать следующее определение.

Определение 3.4. Пусть $(I, \succeq)$ — направленное множество, $\underline{A}_i$, $i \in I$ — триангулированные (соответственно абелевы) категории.

Определим I-фильтрованное произведение $\prod\limits_{(\to, i \in I)} \underline{A}_i$ как локализацию Вердье (соответственно локализацию Серра) произведения $\prod\limits_{i \in I} \underline{A}_i$ по полной триангулированной категории (соответственно по подкатегории Серра), чьи объекты суть такие семейства (a_i), $a_i \in \operatorname{Obj} \underline{A}_i$, что $a_i = 0$ для достаточно больших i.

Конечно же, если все $\underline{A}_i$ A-линейны (для некоторого коммутативного кольца A с единицей), то их I-фильтрованное произведение также A-линейно.

В случае, когда выбор I ясен, мы будем просто писать $\prod\limits_{\to} \underline{A}_i$.

Замечание 3.5.

1. I-фильтрованное произведение может быть описано как прямой категорный предел $\varinjlim\limits_{n \in I} \prod\limits_{i \in I_n} \underline{A}_i$ (где I_n были определены в §1); здесь соответствующий функтор $\prod\limits_{i \in I_n} \underline{A}_i \to \prod\limits_{i \in I_{n'}} \underline{A}_i$ — естественная проекция (при $n' \succeq n$).

2. Семейство $(f_i) \in \prod \underline{A}_i(X, Y)$ дает нулевой морфизм в категории $\prod\limits_{\to} \underline{A}_i$ тогда и только тогда, когда $f_n = 0$ для достаточно больших n (см. §1).

Если категории $\underline{A}_i$ триангулированны, то выделенные треугольники в $\prod\limits_{\to} \underline{A}_i$ можно охарактеризовать следующим образом: семейство морфизмов $(X_n) \xrightarrow{f_n} (Y_n) \xrightarrow{g_n} (Z_n) \to (X_n[1])$ дает выделенный треугольник тогда и только тогда, когда треугольники $X_n \to Y_n \to Z_n \to X_n[1]$ выделены для достаточно больших n. Аналогично если $\underline{A}_i$ абелевы, то семейство морфизмов $(X_n) \xrightarrow{f_n} (Y_n) \xrightarrow{g_n} (Z_n)$ дает точную (в среднем члене) последовательность в $\prod\limits_{\to} \underline{A}_i$ тогда и только тогда, когда $g_n \circ f_n = 0$ для достаточно больших n, и соответствующее отображение $\operatorname{Im} f_n \to \operatorname{Ker} g_n$ — изоморфизм для достаточно больших n. Последнее эквивалентно тому, что $X_n \to Y_n \to Z_n$ — точные последовательности для достаточно больших n.

3. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, $F_i : \underline{C}_i^{op} \to A-\mathrm{mod}$ — семейство A-линейных когомологических функторов (для некоторых A-линейных триангулированных категорий $\underline{C}_i$ и i пробегающего I). Обозначим через G (A-линейный) функтор из „фильтрованной степени“

$\prod\limits_{(\to,i\in I)} A-\mathrm{mod}$ в $A-\mathrm{mod}$, переводящий семейство $(M_i\in\mathrm{Obj}\,A-\mathrm{mod})$ в $\varinjlim\limits_{n\in I}\prod\limits_{i\in I_n} M_i$. Конечно же, $G((M_i))=\{0\}$ тогда и только тогда, когда $M_i=\{0\}$ для достаточно больших i.

Обозначим через F' композицию $\prod\limits_{\to}\underline{C}_i^{op}\stackrel{\prod F_i}{\to}\prod\limits_{\to}A-\mathrm{mod}\stackrel{G}{\to}A-\mathrm{mod}$. Определим I-фильтрованное произведение F_i как функтор $\prod\limits_{\to}F_i:\prod\limits_{\to}\underline{C}_i^{op}\to A-\mathrm{mod}$, для которого композиция $\prod\underline{C}_i^{op}\to\prod\limits_{\to}\underline{C}_i^{op}\to A-\mathrm{mod}$ равна F' (такой функтор существует и единствен в силу универсального свойства локализации).

4. Если I содержит наибольший элемент i^{max}, то, конечно же, $\prod\limits_{\to}\underline{A}_i\cong\underline{A}_{i^{max}}$. Соответственно если категория $\underline{C}$ счетна, то определенная в лемме 3.6 категория $\mathfrak{C}$ изоморфна $\underline{C}$.

Обозначим теперь через I множество счетных (т.е. таких, у которых множество объектов и множество морфизмов счетны) R-линейных триангулированных подкатегорий $\underline{C}$, порядок на которых задается (не обязательно полными) точными вложениями (напомним, что мы считаем категорию $\underline{C}$ малой, и заметим, что в силу предложения 3.2 I является направленным множеством).

Лемма 3.6. *Обозначим I-фильтрованное произведение $\prod\limits_{(\to,C\in I)} C$ через $\mathfrak{C}$. Тогда существует унивалентный точный R-линейный функтор $F:\underline{C}\to\mathfrak{C}$, который переводит $X\in\mathrm{Obj}\,\underline{C}$ в семейство $(X_C)_{C\in I}$; здесь мы полагаем $X_C=X$, если $X\in\mathrm{Obj}\,C$, и $X_C=0$ в обратном случае.*

Доказательство. Для морфизма $f\in\underline{C}(X,Y)$ определим $F(f)$ как класс семейства $(F_C(f))$; здесь мы полагаем $F_C(f)=f$, если $f\in\mathrm{Mor}\,C$ (для $C\in I$), и $F_C(f)=0$ в обратном случае. Теперь проверим, что это соответствие задает функтор. Возьмем композируемые морфизмы f и g в $\underline{C}$. Согласно замечанию 3.5(2) достаточно показать, что $F_C(f)\circ F_C(g)=F_C(f\circ g)$ для достаточно больших C. В силу предложения 3.2 существует категория $C'\in I$, содержащая f и g (и $f\circ g$). Очевидно, $F_C(f)\circ F_C(g)=F_C(f\circ g)$ для любой $C\in I$, содержащей C'.

Далее, функтор F, очевидно, унивалентен, R-линеен и сохраняет сдвиги.

Осталось проверить, что F переводит выделенные треугольники в выделенные треугольники. Пусть $X \to Y \to Z \to X[1]$ — выделенный треугольник в $\underline{C}$. Согласно замечанию 3.5(2) достаточно проверить, что треугольники $F_C(X) \to F_C(Y) \to F_C(Z) \to F_C(X)[1]$ выделены для достаточно больших C. В силу предложения 3.2 существует категория $C' \in I$, в которой треугольник $X \to Y \to Z \to X[1]$ выделен. Поэтому, конечно же, треугольник $F_C(X) \to F_C(Y) \to F_C(Z) \to F_C(X)[1]$ выделен также в любой категории $C \in I$, содержащей C'. □

Следствие 3.7. *Пусть для каждой $C \in I$ задан R-линейный когомологический функтор $\mathcal{F}_C : C^{op} \to R - \mathrm{mod}$. Тогда существует R-линейный когомологический функтор $\mathcal{F} : \underline{C}^{op} \to R - \mathrm{mod}$, для которого $\mathcal{F}(X) = \{0\}$ в том и только в том случае, если $\mathcal{F}_C(X) = \{0\}$ для достаточно больших C, содержащих X.*

Доказательство. Обозначим через Q унивалентное вложение $\underline{C}$ в категорию $\mathfrak{C} = \prod_{(\to, C \in I)} C$ (существующее в силу леммы 3.6). Обозначим I-фильтрованное произведение когомологических функторов $\mathcal{F}_C$ (см. замечание 3.5(3)) через $\mathcal{F}' : \mathfrak{C}^{op} \to R - \mathrm{mod}$. Теперь возьмем в качестве $\mathcal{F}$ функтор $\mathcal{F}' \circ Q$. По определению $\mathcal{F}'$, если $\mathcal{F}_C(X) = \{0\}$ для достаточно больших C, то $\mathcal{F}'(Q(X)) = \{0\}$. Обратно, предположим, что $\mathcal{F}'(Q(X)) = \{0\}$. Тогда $\mathcal{F}_C(Q(X)) = \{0\}$ для достаточно больших C. Согласно определению Q получаем, что $\mathcal{F}_C(Q(X)) = \mathcal{F}_C(X) = \{0\}$ для достаточно больших C (содержащих X). □

Теперь докажем теорему 0.1 в более общем случае (это утверждение интересно, в частности, в случае $R = \mathbb{Z}$).

Предложение 3.8. *Теорема* 0.1 *верна, если R не более чем счетно.*

Доказательство. Зададим некоторые R-линейные когомологические функторы F_C^Y на C со значениями в $R - \mathrm{mod}$ для всех $C \in I$. Если Y — не объект C, мы положим $F_C^Y = 0$. Если $Y \in \mathrm{Obj}\, C$, выберем в качестве F_C^Y такой когомологический функтор, для которого $F_C^Y|_{E \cap \mathrm{Obj}\, C} = 0$ и $F_C^Y(Y) \neq \{0\}$ (существование такого функтора обеспечено предложением 2.1).

Применяя следствие 3.7, получаем R-линейный когомологический функтор $F^Y : \underline{C}^{op} \to R - \mathrm{mod}$, для которого $F^Y(X) = 0$ в том и только в том случае, если $F_C^Y(X) = \{0\}$ для достаточно больших C (содержащих X). Конечно же, $F^Y|_E = 0$. Кроме того, если $F^Y(Y) = \{0\}$, то $F_C^Y(Y) = \{0\}$ для некоторой категории C, содержащей Y. Поэтому Y принадлежит $E \cap \mathrm{Obj}\, C \subset E$, что противоречит условию теоремы. □

3.2. Случай несчетного R.

Определение 3.9. Для направленного множества I и семейства $(M_i : i \in I)$ объектов некоторой абелевой категории, замкнутой относительно малых фильтрованных пределов и копределов, определим фильтрованное произведение $\prod_{(\to, i\in I)} M_i$ как $\varinjlim_{k\in I} \prod_{i\in I_k} M_i$.

Конечно же, фильтрованное произведение также можно определить как коядро естественного морфизма $\coprod_{k\in I}\left(\prod_{k\not\preceq n} M_n\right) \to \prod_{n\in I} M_n$, так как обе формулы задают объект, обладающий одним и тем же универсальным свойством.

Предложение 3.10. *Пусть для $i \in I$ заданы $M_i \in \operatorname{Obj}\underline{A}$, где I — направленное множество, а $\underline{A}$ — абелева категория. Предположим, что для каждого $i \in I$ на объекте M_i задано действие некоторого коммутативного кольца R_i с единицей, где $(R_i, \phi_{j,i})$ — индуктивная система колец с единицей (с гомоморфизмами $\phi_{j,i} : R_j \to R_i$, соответствующими отношению $\preceq$ на I).*

1. *Тогда на $\prod_{(\to, i\in I)} M_i$ естественным образом задано действие кольца $\varinjlim_{i\in I} R_i$.*

2. *Пусть $(L_i)_{i\in I}$ — семейство объектов $\underline{A}$, причем L_i также R_i-линейны (для всех $i \in I$); пусть $f_i : M_i \to L_i$ — морфизмы, сохраняющие действия R_i. Тогда соответствующий морфизм $f : \prod_{\to} M_i \to \prod_{\to} L_i$ сохраняет действие кольца $\varinjlim_{i\in I} R_i$.*

Доказательство. 1. Достаточно построить кольцевые гомоморфизмы $R_i \xrightarrow{g_i} \operatorname{End}_{\underline{A}}\left(\prod_{(\to, n\in I)} M_n\right)$, для которых композиция $R_j \xrightarrow{\phi_{j,i}} R_i \xrightarrow{g_i} \operatorname{End}_{\underline{A}}\left(\prod_{\to} M_n\right)$ равна g_j для любых $i \succeq j \in I$ (т.е. эти действия должны быть согласованными).

Для любых $i \succeq j \in I$ композиция $R_j \to R_i \to \operatorname{End}_{\underline{A}}(M_i)$ задает действие кольца R_j на M_i. Это дает диагональное действие R_j на $\prod_{k\in I_n} M_k$ для каждого $n \succeq j$. Кроме того, если $n \succeq i$, то это действие согласовано с соответствующим действием R_i. Мы получаем действие g_j кольца

R_j на $\varinjlim_{n\in I_j}\prod_{I_n} M_k \cong \prod_{\to} M_n$. По построению действие R_j на $\varinjlim_{n\in I_i}\prod_{I_n} M_k \cong \varinjlim_{n\in I_j}\prod_{I_n} M_k \cong \prod_{\to} M_n$ согласовано с соответствующим действием R_i.

2. Достаточно проверить, что f согласовано с действием кольца R_i для каждого $i \in I$. Конечно же, морфизм $\varinjlim_{n\in I_i}\prod_{I_n} M_k \to \varinjlim_{n\in I_i}\prod_{I_n} N_k$ согласован с действием R_i, так как он индуцирован R_i-линейными морфизмами $\prod_{I_n} M_k \to \prod_{I_n} N_k$ (при $n \in I_i$). $\square$

Теперь завершим доказательство теоремы 0.1.

Доказательство теоремы 0.1 для произвольного R. Заметим, что любое кольцо R (с единицей) изоморфно прямому пределу своих (не более чем) счетных подколец с единицей, а значит, $R = \varinjlim R_i$ для некоторого направленного множества не более чем счетных коммутативных колец R_i с единицей. Так как категория $\underline{C}$ линейна над каждым из этих колец, согласно предложению 3.8, существуют R_i-линейные когомологические функторы $\hat{F}^Y_{R_i} : \underline{C}^{op} \to R_i - \mathrm{mod}$, для которых $\hat{F}^Y_{R_i}|_E = 0$ и $\hat{F}^Y_{R_i}(Y) \neq \{0\}$. Возьмем $F^Y_{R_i} = G_{R_i} \circ \hat{F}^Y_{R_i} : \underline{C}^{op} \to Ab$, где G_{R_i} — соответствующий забывающий функтор.

Обозначим через $\hat{F}^Y$ соответствующее фильтрованное произведение когомологических функторов $\prod_{\to} F^Y_{R_i}$ (см. замечание 3.5(3)). В силу предложения 3.10 этот функтор пропускается через $R - \mathrm{mod}$. Обозначим соответствующий функтор $\underline{C}^{op} \to R - \mathrm{mod}$ через F^Y. Так как для каждого из R_i функтор F^Y является R_i-линейным, F^Y еще и R-линеен. Согласно замечанию 3.5(3) F^Y обращается в нуль на тех и только тех $X \in \mathrm{Obj}\,\underline{C}$, для которых $\hat{F}^Y_{R_i}(X) = \{0\}$ при достаточно больших R_i. Следовательно, $F^Y|_E = 0$ и $F^Y(Y) \neq \{0\}$. $\square$

Наша теорема легко может быть переформулирована следующим образом.

Следствие 3.11. *Пусть E — подмножество $\mathrm{Obj}\,\underline{C}$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

1. *Существует множество $\{F_i\}$ $(i \in I)$ когомологических функторов из $\underline{C}$ (со значениями в некоторых абелевых категориях $\underline{A}_i$), для которых множество $\{c \in \mathrm{Obj}\,\underline{C} : F_i(c) = 0\ \forall i \in I\}$ равно E.*

2. *E замкнуто относительно расширений, содержит 0 и замкнуто относительно ретрактов в $\mathrm{Obj}\,\underline{C}$.*

3. *Существует семейство R-линейных когомологических функторов $\{F_i\}$ из $\underline{C}$ в категорию $R-\mathrm{mod}$ такое, что множество $\{c \in \operatorname{Obj}\underline{C} : F_i(c) = \{0\}\}$ равно E.*

4. *Существует (один) R-линейный когомологический функтор $F : \underline{C}^{op} \to R-\mathrm{mod}$, для которого множество $\{c \in \operatorname{Obj}\underline{C} : F(c) = \{0\}\}$ равно E.*

5. *Обозначим через $H : \underline{C} :\to \underline{A}(\underline{C})$ универсальный гомологический функтор для $\underline{C}$ ($\underline{A}(\underline{C})$ — абеленизация $\underline{C}$ (см.* [6, приложение A]*). Пусть $\underline{A}(E)$ — подкатегория Серра в $\underline{A}(\underline{C})$, порожденная $H(E)$. Тогда $H(\operatorname{Obj}\underline{C}) \cap \operatorname{Obj}\underline{A}(E) = H(E)$.*

Доказательство. Очевидно, условие (1) влечет (2), (3) влечет (1), а (4) влечет (3). Далее, (2) влечет (3) в силу теоремы 0.1.

Функтор композиции $H_E : \underline{C} \to \underline{A}(\underline{C}) \to \underline{A}(\underline{C})/\underline{A}(E)$ (т.е. в соответствующую локализацию Серра) гомологичен, а его множество нулей равно $H(\operatorname{Obj}\underline{C}) \cap \operatorname{Obj}\underline{A}(E)$. Рассмотрев двойственный к этому функтору (т.е. соответствующий функтор $H_E^{op} : \underline{C}^{op} \to (\underline{A}(\underline{C})/\underline{A}(E))^{op}$; это когомологический функтор со значениями в категории $(\underline{A}(\underline{C})/\underline{A}(E))^{op}$), мы получаем, что (5) $\Rightarrow$ (1). Обратно, для любого множества когомологических функторов $\{F_i\}$ со значениями в категориях $\underline{A}_i$, для которых множество $\{c \in \operatorname{Obj}\underline{C} : F_i(c) = 0\ \forall i \in I\}$ равно E, существуют точные функторы $G_i : (\underline{A}(\underline{C})/\underline{A}(E))^{op} \to \underline{A}_i$ такие, что $G_i \circ H_E^{op} = F_i$ (см. [6, лемма A.2]). Значит, множество $\{c \in \operatorname{Obj}\underline{C} : H_E(c) = 0\} = H(\operatorname{Obj}\underline{C}^{op}) \cap \operatorname{Obj}\underline{A}(E)$ лежит в множестве $\{c \in \operatorname{Obj}\underline{C} : F_i(c) = 0\ \forall i \in I\} = E$. Следовательно, множество $H(\operatorname{Obj}\underline{C}^{op}) \cap \operatorname{Obj}\underline{A}(E)$ равно $H(E)$, и мы получаем условие (5).

Осталось доказать, что (3) влечет (4). Пусть выполнено условие (3). Конечно же, функтор $F(-) = \prod_{Y \in (\operatorname{Obj}\underline{C}) \setminus E} F^Y(-)$ когомологичен и R-линеен. Кроме того, $F(X) = \{0\}$ в том и только в том случае, если $F^Y(X) = \{0\}$ для любого $Y \in (\operatorname{Obj}\underline{C}) \setminus E$. Поэтому $F(X) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $X \in E$. $\square$

§4. Приложение: вычисление оболочек при помощи „локализаций коэффициентов“ категории

Для каждого простого идеала $p \triangleleft R$ обозначим локализацию R по идеалу p через R_p. Рассмотрим категорию $\underline{C}_p$, объекты которой — объекты $\underline{C}$, а множества морфизмов получены тензорным умножением соответствующих множеств морфизмов в $\underline{C}$ на R_p (над R). Обозначим через L_p естественный функтор $\underline{C} \to \underline{C}_p$. Напомним хорошо известные свойства этой конструкции (подробно исследованные в приложении A.2 диссертации [5] в случае $R = \mathbb{Z}$).

Предложение 4.1. $\underline{C}_p$ *— триангулированная категория, а функтор* L_p *изоморфен функтору локализации Вердье для категории* $\underline{C}$ *и ее подкатегории, порожденной всеми объектами вида* $\{\mathrm{Cone}(X \overset{s\,\mathrm{id}_X}{\to} X) | s \in R \setminus p,$ $X \in \mathrm{Obj}\,\underline{C}\}$.

Доказательство. См. предложение B.1.5 статьи [4]. □

Теперь докажем следствие 0.2. Обозначим оболочку $L_p(D)$ в $\underline{C}_p$ через E_p (и напомним, что E обозначает оболочку D в $\underline{C}$). Конечно же, если $Y \in E$, то $L_p(Y) \in L_p(E) \subset E_p$ (для каждого максимального идеала $p \triangleleft R$).

Теперь докажем обратное; положим, что $L_p(Y)$ принадлежит E_p для любого максимального $p \triangleleft R$.

Предположим сначала, что категория $\underline{C}$ мала. Тогда согласно следствию 3.11 существует R-линейный когомологический функтор $F : \underline{C}^{op} \to R - \mathrm{mod}$, для которого $F(X) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $X \in E$. Конечно же, для каждого p (максимального или же простого идеала в R) соответствие $F_p : X \mapsto F(X) \otimes_R R_p$ задает когомологический функтор на $\underline{C}_p$. Так как сужение $F_p|_{L_p(D)}$ равно нулю, мы также имеем $F_p|_{E_p} = 0$. Так как для каждого максимального идеала p (в R) объект $L_p(Y)$ принадлежит E_p, получаем, что $F_p(Y) = F(Y) \otimes_R R_p = \{0\}$ (для каждого p). Следовательно, $F(Y) = \{0\}$, а значит, Y принадлежит E.

Теперь сведем общий случай следствия к „малому“. Конечно же, для каждого максимального идеала p кольца R существует конечное множество $D_p \subset D$, для которого $L_p(Y)$ лежит в $\underline{C}_p$-оболочке $L_p(D_p)$. Далее, выберем малую полную триангулированную R-линейную подкатегорию $\underline{C}'$ категории $\underline{C}$, содержащую $(\cup_p D_p) \cup \{Y\}$. Обозначим $E \cap \mathrm{Obj}\,\underline{C}'$ через E'; для каждого максимального идеала p кольца R обозначим соответствующий функтор локализации коэффициентов по p через $L'_p : \underline{C}' \to \underline{C}'_p$. Так как $\underline{C}'_p$ — полная подкатегория категории $\underline{C}_p$ для каждого p, объект $L'_p(Y)$ лежит в $\underline{C}'_p$-оболочке множества $L'_p(E')$ (так как последняя содержит $\underline{C}'_p$-оболочку $L'_p(D_p)$). Применяя наше следствие к тройке $(\underline{C}', E', Y)$, получаем, что Y принадлежит множеству $E' \subset E$.

Замечание 4.2. В „мотивных“ приложениях, которые собираются рассмотреть авторы, использование габберовского разрешения особенностей (см. введение) не дает „естественного единого“ D для всех p „сразу“. Однако для каждого максимального идеала p кольца R существует некоторое множество $D_p \subset \mathrm{Obj}\,\underline{C}$ такое, что $L_p(Y)$ лежит в $\underline{C}_p$-оболочке множества $L_p(D_p)$. Конечно же, мы можем применить следствие 0.2 и в этой ситуации (аналогично приведенному выше рассуждению); получаем, что Y лежит в $\underline{C}$-оболочке множества $\cup_p D_p$.

Список литературы

[1] Beligiannis A., Reiten I., *Homological and homotopical aspects of torsion theories*, Mem. Amer. Math. Soc. **188** (2007), no. 883; `http://users.uoi.gr/abeligia/torsion.pdf`.

[2] Bondarko M. V., $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-*motivic resolution of singularities*, Compos. Math. **147** (2011), no. 5, 1434–1446.

[3] Bondarko M. V., *Gersten weight structures for motivic homotopy categories; direct summands of cohomology of function fields and coniveau spectral sequences*, Preprint, `http://arxiv.org/abs/1312.7493`.

[4] Cisinski D., Déglise F., *Étale motives*, Compos. Math., published online, DOI: `http://dx.doi.org/10.1112/S0010437X15007459`, 2015; `http://arxiv.org/abs/1305.5361`.

[5] Kelly S., *Triangulated categories of motives in positive characteristic*, Dissertation, 2012, `http://arxiv.org/abs/1305.5349`.

[6] Krause H., *Localization theory for triangulated categories*, Triangulated categories, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 375, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, pp. 161–235.

[7] May J., *The additivity of traces in triangulated categories*, Adv. Math. **163** (2001), no. 1, 34–73.

[8] Pauksztello D., *A note on compactly generated co-t-structures*, Comm. Algebra **40** (2012), no. 2, 386–394.

[9] Pospisil D, Stovicek J., *On compactly generated torsion pairs and the classification of co-t-structures for commutative noetherian rings*, Preprint, `http://arxiv.org/abs/1212.3122`.

[10] Tarrio L. A., Lopez A. J., Salorio M. J., *Construction of t-structures and equivalences of derived categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 6, 2523–2543.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия
E-mail: mbondarko@gmail.com

E-mail: vsosnilo@gmail.com

Поступило 19 августа 2015 г.