ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.925
MSC 34C15, 34C25, 34C55

Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью

А. М. Камачкин, Д. К. Потапов, В. В. Евстафьева

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В.* Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.210

Рассматривается динамика сложных систем со связями циклического типа. Структура этих систем представлена в виде кольца, составленного из осцилляторов с гистерезисной обратной связью. В одной из систем каждый осциллятор имеет дополнительную обратную связь со следующим за ним осциллятором. Установлены достаточные условия существования периодических и рекуррентных движений. Периодическое движение соответствует синхронному процессу, возникающему в циклических структурах. В частных случаях получены условия синхронизации системы, а также условия устойчивости синхронных колебательных процессов.

Ключевые слова: динамика сложной системы, циклическая структура, осциллятор, гистерезисная обратная связь, синхронизация, устойчивость.

Введение. В данной работе исследуются сложные динамические системы, которые описываются системами дифференциальных уравнений. Рассматриваемые системы можно отнести к классу гибридных систем на том основании, что для их решения недостаточно задать только начальные условия, а необходимо также описать последовательность работы звеньев. Под звеном системы подразумевается осциллятор, который состоит из интегратора и блока обратной связи, содержащего релейную гистерезисную нелинейность. Особый интерес для приложений представляет случай, когда осцилляторы соединены в кольцо, и эта система имеет общий полупериод, т. е. синхронизируется работа всех звеньев после ее включения. Циклические структуры, которые продуцируют процессы синхронизации, широко распространены и часто используются в промышленности [1, 2], в частности при конструировании систем дозаторов [3, 4], в медицине [5], а также при математическом описании различных биологических и химических осцилляторов [6–9].

Рассмотрим следующую математическую модель системы:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -\frac{2}{T_1}\left(u_1(y_1(t)) + \gamma u_n(y_n(t))\right), \\ \dot{y}_2(t) = -\frac{2}{T_2}\left(u_2(y_2(t)) + \gamma u_1(y_1(t))\right), \\ \dot{y}_3(t) = -\frac{2}{T_3}\left(u_3(y_3(t)) + \gamma u_2(y_2(t))\right), \\ \qquad\qquad \dots \\ \dot{y}_n(t) = -\frac{2}{T_n}\left(u_n(y_n(t)) + \gamma u_{n-1}(y_{n-1}(t))\right), \end{cases} \tag{1}$$

где T_1, T_2, $\ldots$, T_n — полупериоды соответствующих осцилляторов; $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

$$u_i(y_i(t)) = \begin{cases} -1, & \text{если } (y_i(t) < 1 \wedge u_i(t-0) = -1) \vee (y_i(t) = -1), \\ 1, & \text{если } (y_i(t) > -1 \wedge u_i(t-0) = 1) \vee (y_i(t) = 1), \\ u_i^0, & \text{если } y_i(\tau) \in (-1, 1) \text{ для любого } \tau \in [t_0, t], \end{cases} \tag{2}$$

$u_i^0 \in \{-1, 1\}$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Формулой (2) описана работа гистерезисного блока обратной связи в осцилляторе. На плоскостях $(y_i O u_i)$, $i = \overline{1, n}$, имеем гистерезисную петлю с обходом против часовой стрелки. Петля симметричная относительно начала координат, поскольку и пороговые числа реле $y_i = \pm 1$, и выходные значения $u_i = \pm 1$ $(i = \overline{1, n})$ отличаются только знаком. Осцилляторы соединены в циклическую структуру типа кольцо. Первое уравнение системы (1) задает сумму значений $u_1(t)$ и $\gamma u_n(t)$, которая поступает в интегратор первого осциллятора, где γ — коэффициент усиления. Второй осциллятор получает на вход сигнал $\gamma u_1(t)$ и передает сигнал $\gamma u_2(t)$ на вход третьего осциллятора и т. д., что описано системой уравнений (1).

Возможен и другой вариант работы звеньев, когда каждый i-й осциллятор передает на вход следующего $(i+1)$-го звена сигнал γu_i и получает на его выходе сигнал $-\gamma u_{i+1}$. Математическая модель системы в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -\frac{2}{T_1}\left(u_1(y_1(t)) + \gamma u_n(y_n(t)) - \gamma u_2(y_2(t))\right), \\ \dot{y}_2(t) = -\frac{2}{T_2}\left(u_2(y_2(t)) + \gamma u_1(y_1(t)) - \gamma u_3(y_3(t))\right), \\ \dot{y}_3(t) = -\frac{2}{T_3}\left(u_3(y_3(t)) + \gamma u_2(y_2(t)) - \gamma u_4(y_4(t))\right), \\ \qquad\qquad \dots \\ \dot{y}_n(t) = -\frac{2}{T_n}\left(u_n(y_n(t)) + \gamma u_{n-1}(y_{n-1}(t)) - \gamma u_1(y_1(t))\right). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $u_i(y_i(t))$ также задается формулой (2).

Если осцилляторы являются управляющими, т. е. контроллерами, то необходимо знать последовательность переключений $\{u_i(y_i(t))\}_{i=1}^n$. Другими словами, на решение систем (1) и (3) существенно влияет порядок взаимных переключений реле в обратных связях осцилляторов.

Далее наряду с системой (3) рассмотрим ее частный случай, а именно систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -\frac{2}{T_1}\left(u_1(y_1(t)) - \gamma u_2(y_2(t))\right), \\ \dot{y}_2(t) = -\frac{2}{T_2}\left(u_2(y_2(t)) + \gamma u_1(y_1(t))\right). \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что если в системе (4) один из двух осцилляторов имеет постоянные параметры, то его выходной сигнал является периодическим и поступает на вход другого осциллятора. Системы, в которых на осцилляторы влияют периодические внешние воздействия, в том числе системы с более сложным описанием работы в блоке интегратора, давно и успешно изучаются (см. [10–21]). Из последних публикаций в данном направлении отметим [22–26].

В настоящей статье в отличие от [11, 16] анализируются синхронные режимы с другими полупериодами.

Структура фазового пространства. Изучим сначала общие свойства систем (1) и (3). Полагаем, что для любой последовательности переключений $\{u_i\}_{i=1}^n$ каждый осциллятор не может переключиться дважды до тех пор, пока все остальные осцилляторы в кольце не переключатся. С одной стороны, это предположение сужает разнообразие рассматриваемых систем, но, с другой, — позволяет провести аналитические исследования.

Напомним, что системы (1) и (3) относятся к классу динамических. Выясним, какие типы движений могут возникать в таких системах. Пусть $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E^n$, где E^n — n-мерное евклидово пространство. Обозначим n-мерный замкнутый куб в E^n через Q:

$$Q = \{Y \in E^n : y_i \in [-1, 1] \text{ для любого } i = \overline{1, n}\}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) *или* (3) *параметры* T_1, T_2, $\ldots$, T_n *и* γ *выбраны так, что при любых начальных условиях, начиная с некоторого конечного значения* t*, фазовые траектории остаются в множестве* Q*. Тогда существует хотя бы одно периодическое решение системы, которое расположено в* Q*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из вида правых частей системы (1) или (3), можно утверждать, что для любой допустимой последовательности $\{u_i\}_{i=1}^n$ фазовые траектории состоят из отрезков пространственных прямых. Если изображающая точка решения, двигаясь по какому-либо отрезку, достигает гиперплоскости $y_i = 1$ или $y_i = -1$ $(i = \overline{1, n})$, то изображающая точка переходит на другой отрезок и движется по нему, пока не достигнет другой из указанных гиперплоскостей. Такой тип движения не зависит от начальной точки $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ и начальной последовательности $\{u_i^0\}_{i=1}^n$. Величины T_1, T_2, $\ldots$, T_n и γ являются параметрами системы, от которых зависит пространственное расположение отрезков, составляющих фазовую траекторию. В силу предположения относительно динамики осцилляторов, соединенных в циклическую структуру кольцо, имеет место следующее утверждение: если точка $Y_0 \in Q$, то решение $Y(t, t_0, Y_0) \in Q$ при любом $t > t_0$. Очевидно, что данное решение является суперпозицией конечного числа отображений одной из фиксированных граней куба Q в себя. Действительно, пусть точка Y_0 лежит на грани куба Q, которая принадлежит, в свою очередь, например, гиперплоскости $y_i = 1$. Возьмем начальную последовательность $\{u_i^0\}_{i=1}^n$ с элементами, принимающими два значения: $u_i = -1$ или $u_i = 1$. Изображающая точка решения, начав свое движение в Y_0, продолжает двигаться по отрезку, соответствующему $\{u_i^0\}_{i=1}^n$, до тех пор, пока она не достигнет гиперплоскости $y_i = -1$ или $y_i = 1$. В этот момент происходит переключение u_i с -1 на 1 или наоборот. Далее движение по следующему отрезку продолжается в силу другой последовательности $\{u_i\}_{i=1}^n$. Отображение каждой грани куба Q в силу одной последовательности есть отображение, непрерывное от начального условия. Таким образом, отображение $Y(t, t_0, Y_0)$ одной из граней куба — суперпозиция конечного числа m частных непрерывных отображений в силу m различных последовательностей. Нетрудно заметить, что число m не превосходит $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Можно сделать вывод о непрерывности отображения $Y(t, t_0, Y_0)$ на ограниченном замкнутом множестве, которым и является любая грань куба Q. Отсюда следует, что любая траектория движения, которая начинается в точке $Y_0 \in Q$, остается в множестве Q. Последнее означает, что Q — это инвариантное множество системы, и существует по крайней мере одно периодическое движение, находящееся в Q полностью. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. *Периодическое движение из теоремы* 1 *соответствует процессу синхронизации системы из* n *осцилляторов. Этот процесс означает установление режима колебаний в системе, когда все осцилляторы имеют одинаковый полупериод. Поддержание такого режима при* $t \to +\infty$ *свидетельствует об устойчивости периодического движения.*

З а м е ч а н и е 2. *Рассмотренный в теореме* 1 *тип фазовых траекторий напоминает тип движений, который возникает в прямоугольных биллиардах* [27].

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда все решения системы* (1) *или* (3) *с начальным условием* $Y_0 \in Q$ *являются рекуррентными функциями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $Y(t, t_0, Y_0)$, где $Y_0 \in Q$, удовлетворяет всем свойствам динамической системы. Множество Q является непустым замкнутым инвариантным множеством динамической системы $Y(t, t_0, Y_0)$. Кроме того, множество Q минимально, поскольку не имеет собственного подмножества с такими же свойствами. Следовательно, по теореме Биркгофа каждое движение, которое начинается в таком множестве, рекуррентное. Рекуррентные движения порождают соответствующие рекуррентные функции, которые есть решения системы (1) или (3). Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что в континуальном множестве ограниченных рекуррентных решений системы существует по крайней мере одно периодическое решение. Дальнейшая цель работы состоит в выделении периодических решений. Важно отметить, что общая теория динамических систем не дает конструктивных методов нахождения таких решений.

Необходимые и достаточные условия синхронизации. Фазовые траектории системы (1) или (3), которые состоят из отрезков пространственных прямых, сплошь заполняют замкнутый n-мерный куб Q. Выделим из этого континуального множества хотя бы одну периодическую траекторию в частных случаях. Рассмотрим примеры циклических структур из двух и трех осцилляторов и проведем анализ динамических процессов в данных колебательных системах.

Случай 1. Исследуем систему (4), которая является частным случаем системы (3) при $n = 2$. Система (4) описывает случай, когда два осциллятора (обозначим их O_1 и O_2), имеющие полупериоды T_1 и T_2, соединены в кольцо с взаимными обратными связями и коэффициентами γ и $-\gamma$ соответственно. Для определенности пусть $T_2 \geqslant T_1$. Получим условия, при которых возникает синхронизация, т. е. когда осцилляторы O_1 и O_2 начинают колебаться с общим полупериодом T. Осцилляторы расположены симметрично в кольце. Поэтому, если $\gamma > 0$, то $-\gamma < 0$, и наоборот. Рассмотрим только один случай, когда O_1 запаздывает относительно O_2. В противном случае рассуждения проводятся аналогично. В $\{u_i\}_{i=1}^2$ входят только два элемента u_1 и u_2, которые меняют свои значения в соответствии с предположением, что любой из осцилляторов не может дважды переключиться, пока не переключится другой. Пусть t_k^i — это время k-го переключения i-го осциллятора. Условие $t_k^1 < t_k^2$ соответствует случаю, когда O_1 запаздывает относительно O_2. Возникает последовательность переключений $\{u_1 \uparrow u_2 \downarrow u_1 \downarrow u_2 \uparrow \dots\}$, где $\uparrow$ означает, что переключение осуществляется с -1 на 1, а $\downarrow$ — наоборот, с 1 на -1. В силу симметричности расположения осцилляторов возможен и второй вариант $\{u_1 \uparrow u_2 \uparrow u_1 \downarrow u_2 \downarrow \dots\}$, который мы здесь не рассматриваем.

Перейдем к интегрированию системы (4). Решение системы с начальными условиями $y_1(t_0) = y_1^0$ и $y_2(t_0) = y_2^0$ имеет вид

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1^0 - \frac{2}{T_1}\int\limits_{t_0}^{t} (u_1(y_1(\tau)) - \gamma u_2(y_2(\tau)))\, d\tau, \\ y_2(t) = y_2^0 - \frac{2}{T_2}\int\limits_{t_0}^{t} (u_2(y_2(\tau)) + \gamma u_1(y_1(\tau)))\, d\tau. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ являются кусочно-постоянными и периодическими с периодами $2T_1$ и $2T_2$ соответственно. Поэтому и функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ $2T_1$- и $2T_2$-периодические и кусочно-постоянные. Рассмотрим $y_1(t)$ из (5). Пусть $t_0 = t_k^1$, $y_1(t_0) = y_1(t_k^1) = 1$, и в момент t_k^1 функция $u_1(t)$ меняет значение с -1 на 1. Учитывая, что $y_1(2T_1) = 1$, интегрирование происходит на отрезке $[t_k^1, t_k^1 + 2T_1]$. При этом на частичных промежутках из данного отрезка имеем следующие подынтегральные функции: $1-\gamma$ на $[t_k^1, t_k^2]$, $1+\gamma$ на $[t_k^2, t_{k+1}^1]$, $-1+\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^2]$ и $-1-\gamma$ на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^1 + T_1]$. Отсюда получаем равенство

$$T_1 = (2\gamma - 1)t_k^1 + (1 - 2\gamma)t_{k+1}^1 - 2\gamma t_k^2 + 2\gamma t_{k+1}^2. \tag{6}$$

Во втором выражении (5) интегрируем с учетом того, что функция $y_2(t)$ принимает одно из значений $\{-1, 1\}$ с периодом $2T_2$ и с учетом сдвига по времени (осциллятор O_1 запаздывает относительно O_2). Здесь полагаем, что $t_0 = t_k^2$ и $y_2^0 = -1$. Тогда $y_2(2T_2) = -1$, и интегрирование происходит на отрезке $[t_k^2, t_k^2 + 2T_2]$. При этом имеем подынтегральные функции $-1+\gamma$ на $[t_k^2, t_{k+1}^1]$, $-1-\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^2]$, $1-\gamma$ на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^1 + T_1]$ и $1+\gamma$ на $[t_{k+1}^1 + T_1, t_{k+1}^2 + T_2]$. Отсюда находим, что

$$T_2 = 2\gamma t_{k+1}^1 + (2\gamma - 1)t_k^2 - (2\gamma - 1)t_{k+1}^2 - 2\gamma t_k^1. \tag{7}$$

Допустим, что возможна синхронизация с общим полупериодом. Перепишем равенства (6) и (7) в другом виде, а именно,

$$\begin{cases} T_1 = t_{k+1}^1 - t_k^1 - 2\gamma(t_k^2 - t_k^1) + 2\gamma(t_{k+1}^2 - t_{k+1}^1), \\ T_2 = (1 - 2\gamma)(t_{k+1}^2 - t_k^2) + 2\gamma(t_{k+1}^1 - t_k^1). \end{cases} \tag{8}$$

Отметим, что (8) является одним из возможных видов такой системы в силу периодичности функций $u_1(t)$, $u_2(t)$, $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Пусть T — общий полупериод. Тогда для любого k имеет место $t_{k+1}^i - t_k^i = T$, где $i = 1, 2$. Обозначим через η коэффициент опережения такой, что для всех k выполняется $t_{k+1}^1 - t_k^2 = \eta T$, где $\eta \in [0, 1]$. Тогда $t_k^2 - t_k^1 = T - \eta T$ и $t_{k+1}^2 - t_{k+1}^1 = T - \eta T$. Подставляя в (8), получаем систему

$$\begin{cases} T_1 = T - 2\gamma(1 - \eta)T + 2\gamma(1 - \eta)T, \\ T_2 = (1 - 2\gamma)T + 2\gamma T. \end{cases} \tag{9}$$

Из первого уравнения (9) следует $T = T_1$, а из второго — $T = T_2$.

Таким образом, необходимыми условиями синхронизации системы с общим полупериодом T являются следующие условия: $\gamma > 0$ и $\eta \in [0, 1]$.

Далее установим достаточные условия для существования и устойчивости такого синхронного колебательного процесса. Введем фазовые временные переменные

$\theta_k^i = t_k^i - kT$ по обеим координатам ($i = 1, 2$), т. е. $\theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2)^*$. Здесь и далее символ $*$ обозначает транспонирование. Тогда $t_k^i = \theta_k^i + kT$. Соответственно $t_{k+1}^i = \theta_{k+1}^i + (k+1)T$. Подставив в систему (8) и собрав коэффициенты при одинаковых θ_k^i, получаем

$$\begin{pmatrix} 1-2\gamma & 2\gamma \\ 2\gamma & 1-2\gamma \end{pmatrix} \theta_{k+1} = \begin{pmatrix} 1-2\gamma & 2\gamma \\ 2\gamma & 1-2\gamma \end{pmatrix} \theta_k,$$

откуда

$$\theta_{k+1} = A\theta_k, \tag{10}$$

где $A = E$ (E — единичная матрица).

С одной стороны, система (10) определяет сходящийся итерационный процесс по обеим координатам, если вещественные собственные числа $\lambda_{1,2}$ матрицы A удовлетворяют условию $|\lambda_{1,2}| < 1$. С другой стороны, в системе (10) рассматриваем преобразование фазовых временных координат, поэтому условие на собственные числа матрицы можно ослабить. Если собственные числа равны единице, то имеет место постоянный сдвиг по времени временных координат относительно друг друга. В данном частном случае это тоже означает устойчивость синхронного состояния системы. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Пусть в системе* (4) *выполняются условия* $T_1 = T_2$, $\gamma > 0$ *и осциллятор* O_1 *запаздывает относительно осциллятора* O_2. *Тогда система синхронизируется с полупериодом* $T = T_1 = T_2$, *при этом запаздывание равно* $(1-\eta)T$, *где* $\eta \in [0, 1]$.

Случай 2. Рассмотрим систему (1) при $n = 3$. Такая размерность позволяет показать сложность аналитического исследования этой системы. Проведем анализ системы, если имеет место последовательность переключений $\{u_1 \uparrow u_2 \downarrow u_3 \uparrow \dots\}$ или $\{u_1 \uparrow u_3 \downarrow u_2 \uparrow \dots\}$ с учетом предположения, что любой осциллятор-контроллер не переключается дважды до тех пор, пока два других осциллятора не переключатся. Решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1^0 - \frac{2}{T_1} \int\limits_{t_0}^{t} (u_1(y_1(\tau)) + \gamma u_3(y_3(\tau)))d\tau, \\ y_2(t) = y_2^0 - \frac{2}{T_2} \int\limits_{t_0}^{t} (u_2(y_2(\tau)) + \gamma u_1(y_1(\tau)))d\tau, \\ y_3(t) = y_3^0 - \frac{2}{T_3} \int\limits_{t_0}^{t} (u_3(y_3(\tau)) + \gamma u_2(y_2(\tau)))d\tau. \end{cases} \tag{11}$$

Положим, что все контроллеры, входящие в кольцо, являются идентичными. Кроме того, пусть $T_1 = T_2 = T_3 = 1$. Принятые допущения не сужают общность рассмотрений в связи с возможностью изменения масштаба времени. Как и ранее, t_k^i — время k-го переключения i-го осциллятора.

1. Рассмотрим последовательность $\{u_1 \uparrow u_2 \downarrow u_3 \uparrow \dots\}$. Здесь $t_k^1 \leqslant t_k^2 \leqslant t_k^3$ и $t_{k+1}^i - t_k^i = 1$, где $i = 1, 2, 3$.

Анализируем только периодические решения системы (11). Полагая, что $t_0 = t_k^1$ и $y_1^0 = 1$, после интегрирования в (11) получим функцию $y_1(t)$. Тогда $y_1(2T_1) = y_1(2) = 1$. Пользуясь периодичностью функций и идентичностью всех осцилляторов, при интегрировании во втором и третьем решениях системы (11) сдвигаем начальные условия по t на периоде и получаем, что $y_2(t_0) = y_2(t_k^2) = -1$, тогда $y_2(2T_2) = y_2(2) = -1$ и $y_3(t_0) = y_3(t_k^3) = 1$, откуда $y_3(2T_3) = y_3(2) = 1$. Интегрирование в первом решении происходит на отрезке $[t_k^1, t_{k+1}^1 + 1]$. На частичных промежутках из данного отрезка под знаком интеграла имеем $1-\gamma$ на $[t_k^1, t_k^3]$, $1+\gamma$ на $[t_k^3, t_{k+1}^1]$, $-1+\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^3]$ и $-1-\gamma$ на $[t_{k+1}^3, t_{k+1}^1+1]$. Для второго решения имеем $-1+\gamma$ на $[t_k^2, t_{k+1}^1]$, $-1-\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^2]$, $1-\gamma$ на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^1+1]$ и $1+\gamma$ на $[t_{k+1}^1+1, t_{k+1}^2+1]$; для третьего — $1-\gamma$ на $[t_k^3, t_{k+1}^2]$, $1+\gamma$ на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^3]$, $-1+\gamma$ на $[t_{k+1}^3, t_{k+1}^2+1]$ и $-1-\gamma$ на $[t_{k+1}^2+1, t_{k+1}^3+1]$. После интегрирования получаем систему

$$\begin{cases} 1=\gamma(t_{k+1}^1-t_k^1)+(1-\gamma)(t_k^3-t_k^1)+(1-\gamma)(t_{k+1}^1-t_k^3), \\ 1=(1+\gamma)(t_{k+1}^2-t_k^2)-\gamma(t_{k+1}^1-t_k^2)-\gamma(t_{k+1}^2-t_{k+1}^1), \\ 1=(1-\gamma)(t_{k+1}^3-t_k^3)+\gamma(t_{k+1}^3-t_k^2)-\gamma(t_{k+1}^3-t_{k+1}^2). \end{cases} \tag{12}$$

В (12) слева стоят единицы, поскольку $T_1=T_2=T_3=1$.

Пусть T — общий полупериод, возникающий после синхронизации системы. Далее полагаем, что $t_k^2-t_k^1=t_k^3-t_k^2=\xi T$. Число ξ выбираем так, что запаздывание O_1 относительно O_2 равно ξT и запаздывание O_2 относительно O_3 равно ξT. Тогда $\xi\in(0,\frac{1}{2})$, так как $2\xi T<T$. Тем самым были заданы временные сдвиги по координатам в синхронном процессе. Подставим эти условия в (12). Тогда находим систему

$$\begin{cases} 1=\gamma T+(1-\gamma)2\xi T+(1-\gamma)(1-2\xi T), \\ 1=(1+\gamma)T-\gamma(1-\xi T)-\gamma\xi T, \\ 1=(1-\gamma)T+\gamma(1+\xi T)-\gamma\xi T. \end{cases} \tag{13}$$

Из второго и третьего уравнений имеем $T=1$ при любом $\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, что удовлетворяет и первому уравнению. Из необходимых условий существования синхронного режима, задаваемого системой (13), получаем $T=1$ при любых $\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\xi\in(0,\frac{1}{2})$.

Если считать, что запаздывания различные, т. е. $t_k^2-t_k^1=\xi_1 T$ и $t_k^3-t_k^2=\xi_2 T$, где $\xi_1,\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$, то из (12) имеем $T=1$ и $\gamma=1$. Если запаздывания одинаковые, т. е. $t_k^2-t_k^1=t_k^3-t_k^2=\xi T$, где $\xi\in(0,\frac{1}{2})$, то из (13) имеем $T=1$ при любом $\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Исследуем синхронный процесс на устойчивость.

Введем $\theta_k=(\theta_k^1,\theta_k^2,\theta_k^3)^*$, здесь $\theta_k^i=t_k^i-kT-(i-1)T\xi=t_k^i-k-(i-1)\xi$ $(i=1,2,3)$. Тогда $t_k^i=\theta_k^i+k+(i-1)\xi$. Подставим в систему (12) и соберем коэффициенты при переменных θ_k^1, θ_{k+1}^1, θ_k^2, θ_{k+1}^2, θ_k^3 и θ_{k+1}^3. Имеем

$$\theta_{k+1}=A\theta_k, \tag{14}$$

где $A=E$, т. е. матрица A не зависит от ξ. Такая матрица A соответствует постоянному сдвигу по времени между фазовыми временными переменными θ_k^1, θ_k^2 и θ_k^3, описывающими синхронный процесс. С точки зрения итерационного процесса, в (14) нет сжатия, но нет и расходимости процесса. Следовательно, синхронный процесс устойчив. Сформулируем выводы.

Теорема 4. *Пусть в системе* (1) *при* $n=3$ *выполняются условия* $T_1=T_2=T_3=1$ *и осциллятор* O_1 *запаздывает относительно осциллятора* O_2*, который запаздывает относительно осциллятора* O_3*. Тогда*

1) *если запаздывания одинаковые с коэффициентом* $\xi\in(0,\frac{1}{2})$*, то система синхронизируется с полупериодом* $T=1$ *при любом* $\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$*;*

2) *если запаздывания различные с коэффициентами* ξ_1 *и* ξ_2*, где* ξ_1*,* $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$*, то система синхронизируется с полупериодом* $T=1$ *при* $\gamma=1$*.*

2. Рассмотрим последовательность переключений $\{u_1\uparrow u_3\downarrow u_2\uparrow\dots\}$. Тогда $t_k^1\leqslant t_k^3\leqslant t_k^2$ и меняются промежутки интегрирования. Для решения $y_1(t)$ из системы (11) имеем подынтегральные функции $1+\gamma$ на $[t_k^1, t_k^3]$, $1-\gamma$ на $[t_k^3, t_{k+1}^1]$, $-1-\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^3]$

и $-1+\gamma$ на $[t^3_{k+1}, t^1_{k+1}+1]$; для решения $y_2(t)$ — подынтегральные функции $1+\gamma$ на $[t^2_k, t^1_{k+1}]$, $1-\gamma$ на $[t^1_{k+1}, t^2_{k+1}]$, $-1-\gamma$ на $[t^2_{k+1}, t^1_{k+1}+1]$ и $-1+\gamma$ на $[t^1_{k+1}+1, t^2_{k+1}+1]$; для решения $y_3(t)$ — подынтегральные функции $-1-\gamma$ на промежутке $[t^3_k, t^2_k]$, $-1+\gamma$ на $[t^2_k, t^3_{k+1}]$, $1+\gamma$ на $[t^3_{k+1}, t^2_{k+1}]$ и $1-\gamma$ на $[t^2_{k+1}, t^3_{k+1}+1]$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} T_1 = 1 = (1-2\gamma)(t^1_{k+1}-t^1_k) + 2\gamma(t^3_k - t^1_k) + 2\gamma(t^1_{k+1} - t^3_k), \\ T_2 = 1 = (1-\gamma)(t^2_{k+1}-t^2_k) + \gamma(t^1_{k+1} - t^2_k) + \gamma(t^2_{k+1} - t^1_{k+1}), \\ T_3 = 1 = t^3_{k+1} - t^3_k + 2\gamma(t^2_k - t^3_k) + 2\gamma(t^3_{k+1} - t^2_{k+1}). \end{cases} \tag{15}$$

Сначала полагаем, что запаздывания в синхронном режиме с полупериодом T одинаковые, т. е. $t^3_k - t^1_k = \xi T$ и $t^2_k - t^3_k = \xi T$, где $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. Тогда из (15) имеем систему

$$\begin{cases} 1 = (1-2\gamma)T + 2\gamma\xi T + 2\gamma(1-\xi T), \\ 1 = (1-\gamma)T + \gamma(1-2\xi T) + 2\gamma\xi T, \\ 1 = T + 2\gamma\xi T - 2\gamma\xi T. \end{cases} \tag{16}$$

Из системы (16) следует, что $T = 1$ при любом $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости синхронного режима при одинаковых запаздываниях. Пусть $T = 1$. Тогда $t^2_k - t^1_k = 2\xi T = 2\xi$ и $t^2_k - t^3_k = \xi T = \xi$. Пусть $\theta_k = (\theta^1_k, \theta^2_k, \theta^3_k)^*$, где $\theta^1_k = t^1_k - kT = t^1_k - k$, $\theta^2_k = t^2_k - kT - 2\xi T = t^2_k - k - 2\xi$ и $\theta^3_k = t^3_k - kT - \xi T = t^3_k - k - \xi$. Отсюда вытекает, что

$$t^1_k = \theta^1_k + k, \;\; t^2_k = \theta^2_k + k + 2\xi, \;\; t^3_k = \theta^3_k + k + \xi. \tag{17}$$

Выражения (17) подставляем в (15) при условии, что $T_1 = T_2 = T_3 = T = 1$. Тогда, собрав коэффициенты при переменных θ^i_k, θ^i_{k+1} $(i = 1, 2, 3)$, получаем линейную систему $A_1\theta_{k+1} = A_0\theta_k$, где

$$A_1 = A_0 = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 2\gamma & -2\gamma \end{pmatrix}.$$

Приходим к системе $\theta_{k+1} = A\theta_k$, в которой $A = E$. Матрица A не зависит от ξ.

Теперь полагаем, что запаздывания различные, т. е. $t^3_k - t^1_k = \xi_1 T$ и $t^2_k - t^3_k = \xi_2 T$, где ξ_1, $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$. Подставляя в (15), находим, что

$$\begin{cases} 1 = (1-2\gamma)T + 2\gamma\xi_1 T + 2\gamma(1-\xi_1 T), \\ 1 = (1-\gamma)T + \gamma(1-\xi_1 T - \xi_2 T) + \gamma(\xi_1 T + \xi_2 T), \\ 1 = T + 2\gamma\xi_2 T - 2\gamma\xi_2 T. \end{cases} \tag{18}$$

Из третьего уравнения (18) имеем $T = 1$, что удовлетворяет первому и второму уравнениям (18) при любом $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Рассмотрим устойчивость синхронного режима с полупериодом $T = 1$. В этом случае $t^3_k - t^1_k = \xi_1$, $t^2_k - t^3_k = \xi_2$ и $t^2_k - t^1_k = \xi_1 + \xi_2$. После преобразований имеем, что

$$t^1_k = \theta^1_k + k, \;\; t^2_k = \theta^2_k + k + \xi_1 + \xi_2, \;\; t^3_k = \theta^3_k + k + \xi_1. \tag{19}$$

Выражения (19) подставляем в (15) при условии $T_1 = T_2 = T_3 = T = 1$. Получаем систему

$$\begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 2\gamma & -2\gamma \end{pmatrix} \theta_{k+1} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 2\gamma & -2\gamma \end{pmatrix} \theta_k.$$

Сформулируем выводы для системы (1) при последовательности $\{u_1 \uparrow u_3 \downarrow u_2 \uparrow \dots\}$, которые отличаются от выводов теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть в системе* (1) *при* $n = 3$ *выполняются условия* $T_1 = T_2 = T_3 = 1$, $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *и осциллятор* O_1 *запаздывает относительно осциллятора* O_3, *который запаздывает относительно осциллятора* O_2. *Тогда система синхронизируется с полупериодом* $T = 1$ *как при одинаковых запаздываниях с коэффициентом* $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, *так и при различных запаздываниях с коэффициентами* ξ_1 *и* ξ_2, *где* ξ_1, $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$.

Случай 3. Рассмотрим систему (3), задающую кольцо, в котором каждая изолированная пара осцилляторов описывается системой (4).

1. Пусть $n = 3$ и $T_1 = T_2 = T_3 = 1$. Пусть имеет место последовательность переключений $\{u_1 \uparrow u_2 \downarrow u_3 \uparrow \dots\}$, т. е. $t_k^1 \leqslant t_k^2 \leqslant t_k^3$. Выбор начальных и конечных условий делаем из тех же соображений, что и в случаях 1, 2. Далее для получения $y_1(t)$ интегрируем первое уравнение системы (3). Имеем на частичных промежутках следующие подынтегральные функции: $1-2\gamma$ на $[t_k^1, t_k^2]$, 1 на $[t_k^2, t_k^3]$, $1+2\gamma$ на $[t_k^3, t_{k+1}^1]$, $-1+2\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^2]$, -1 на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^3]$ и $-1-2\gamma$ на $[t_{k+1}^3, t_{k+1}^1+1]$. Для решения $y_2(t)$ имеем подынтегральные функции $-1+2\gamma$ на $[t_k^2, t_k^3]$, -1 на $[t_k^3, t_{k+1}^1]$, $-1-2\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^2]$, $1-2\gamma$ на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^3]$, 1 на $[t_{k+1}^3, t_{k+1}^1+1]$ и $1+2\gamma$ на $[t_{k+1}^1+1, t_{k+1}^2+1]$; для решения $y_3(t)$ на частичных промежутках — подынтегральные функции $1-2\gamma$ на $[t_k^3, t_{k+1}^1]$, 1 на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^2]$, $1+2\gamma$ на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^3]$, $-1+2\gamma$ на $[t_{k+1}^3, t_{k+1}^1+1]$, -1 на $[t_{k+1}^1+1, t_{k+1}^2+1]$ и $-1-2\gamma$ на $[t_{k+1}^2+1, t_{k+1}^3+1]$. Тогда из необходимых условий существования периодического решения получаем систему

$$\begin{cases} T_1 = 1 = (1-2\gamma)(t_{k+1}^1 - t_k^1) - 2(1+\gamma)(t_{k+1}^3 - t_{k+1}^1) + 2\gamma(t_{k+1}^1 - t_k^3), \\ T_2 = 1 = t_{k+1}^2 - t_k^2 + 2\gamma(t_{k+1}^3 - t_{k+1}^2) - 2\gamma(t_k^3 - t_k^2), \\ T_3 = 1 = t_{k+1}^3 - t_k^3 - 2\gamma(t_{k+1}^3 - t_{k+1}^1) + 2\gamma(t_k^3 - t_k^1). \end{cases} \tag{20}$$

Пусть запаздывания одинаковые, т. е. $t_k^2 - t_k^1 = t_k^3 - t_k^2 = \xi T$, где T — общий полупериод синхронного режима. Тогда из (20) следует система

$$\begin{cases} 1 = (1-2\gamma)T - 2(1+\gamma)2\xi T + 2\gamma(T - 2\xi T), \\ 1 = T + 2\gamma\xi T - 2\gamma\xi T, \\ 1 = T - 4\gamma\xi T + 4\gamma\xi T. \end{cases} \tag{21}$$

Из второго и третьего уравнений (21) имеем $T = 1$. Из первого уравнения при $T = 1$ находим, что $\xi(1+2\gamma) = 0$ при любом $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. Таким образом, $\gamma = -\frac{1}{2}$.

Если считать, что $t_k^2 - t_k^1 = \xi_1 T$, $t_k^3 - t_k^2 = \xi_2 T$, где ξ_1, $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$ и $\xi_1 \neq \xi_2$, то получаем из (20) такой же результат.

Перейдем к вопросу устойчивости синхронного режима. Пусть запаздывания одинаковые и $t_k^i = \theta_k^i + k + (i-1)\xi$, где $i = 1, 2, 3$. Подставим в (20) и приходим к системе, описывающей итерационный процесс $\theta_{k+1} = A\theta_k + B$, где

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{8\gamma^2 + 2\gamma + 1}{3} & 0 & \dfrac{2(1-4\gamma^2)}{3} \\ \dfrac{8\gamma^2(2\gamma+1)}{3(2\gamma-1)} & 1 & -\dfrac{8\gamma^2(2\gamma+1)}{3(2\gamma-1)} \\ \dfrac{4\gamma(2\gamma+1)}{3} & 0 & -\dfrac{8\gamma^2 + 4\gamma - 3}{3} \end{pmatrix},$$

$$B = \left(-\frac{4\xi(2\gamma-1)(2\gamma+1)}{3}, -\frac{16\gamma^2\xi(2\gamma+1)}{3(2\gamma-1)}, -\frac{8\gamma\xi(2\gamma+1)}{3} \right)^*, \quad \theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2, \theta_k^3)^*.$$

Подставим $\gamma = -\frac{1}{2}$ в матрицу A и вектор B. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (0,0,0)^*.$$

Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_{2,3} = 1$. Следовательно, синхронный режим устойчив, так как есть сжатие по координате θ_k^1 и нет расходимости по координатам θ_k^2, θ_k^3. Таким образом, имеем

Теорема 6. *Пусть в системе* (3) *при* $n = 3$ *выполняются условия* $T_1 = T_2 = T_3 = 1$, $\gamma = -\frac{1}{2}$ *и осциллятор* O_1 *запаздывает относительно осциллятора* O_2*, который запаздывает относительно осциллятора* O_3*. Тогда система синхронизируется с полупериодом* $T = 1$ *как при одинаковых запаздываниях с коэффициентом* $\xi \in (0, \frac{1}{2})$*, так и при различных запаздываниях с коэффициентами* ξ_1*,* $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$.

2. Рассмотрим теперь другую последовательность переключений $\{u_1 \uparrow u_3 \downarrow u_2 \uparrow \dots\}$. Здесь $t_k^1 \leqslant t_k^3 \leqslant t_k^2$. Как и ранее, полагаем $T_1 = T_2 = T_3 = 1$. Интегрируя систему (3), для решения $y_1(t)$ на частичных промежутках получаем следующие подынтегральные функции: $1 + 2\gamma$ на $[t_k^1, t_k^3]$, 1 на $[t_k^3, t_k^2]$, $1 - 2\gamma$ на $[t_k^2, t_{k+1}^1]$, $-1 - 2\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^3]$, -1 на $[t_{k+1}^3, t_{k+1}^2]$ и $-1 + 2\gamma$ на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^1 + 1]$. Для $y_2(t)$ имеем функцию $1 + 2\gamma$ на промежутке $[t_k^2, t_{k+1}^1]$, 1 на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^3]$, $1 - 2\gamma$ на $[t_{k+1}^3, t_{k+1}^2]$, $-1 - 2\gamma$ на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^1 + 1]$, -1 на $[t_{k+1}^1 + 1, t_{k+1}^3 + 1]$ и $-1 + 2\gamma$ на $[t_{k+1}^3 + 1, t_{k+1}^2 + 1]$; для $y_3(t)$ на частичных промежутках — подынтегральные функции $-1 - 2\gamma$ на $[t_k^3, t_k^2]$, -1 на $[t_k^2, t_{k+1}^1]$, $-1 + 2\gamma$ на $[t_{k+1}^1, t_{k+1}^3]$, $1 + 2\gamma$ на $[t_{k+1}^3, t_{k+1}^2]$, 1 на $[t_{k+1}^2, t_{k+1}^1 + 1]$ и $1 - 2\gamma$ на $[t_{k+1}^1 + 1, t_{k+1}^3 + 1]$. Тогда для всех трех осцилляторов получаем систему

$$\begin{cases} T_1 = 1 = t_{k+1}^1 - t_k^1 + 2\gamma(t_k^3 - t_k^1) - 2\gamma(t_{k+1}^3 - t_{k+1}^1), \\ T_2 = 1 = t_{k+1}^2 - t_k^2 - 2\gamma(t_k^2 - t_k^1) + 2\gamma(t_{k+1}^2 - t_{k+1}^1), \\ T_3 = 1 = t_{k+1}^3 - t_k^3 - 2\gamma(t_k^2 - t_k^3) + 2\gamma(t_{k+1}^2 - t_{k+1}^3). \end{cases} \tag{22}$$

Пусть T — общий полупериод. Тогда $t_k^3 - t_k^1 = \xi T$ и $t_k^2 - t_k^3 = \xi T$, где $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. Из (22) получаем, что $T = 1$ для $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. При рассматриваемом сценарии переключений имеем $t_k^1 = \theta_k^1 + k$, $t_k^2 = \theta_k^2 + k + 2\xi$ и $t_k^3 = \theta_k^3 + k + \xi$. Подставляем в (22) при условии $T_1 = T_2 = T_3 = T = 1$ и получаем линейную систему $\theta_{k+1} = A\theta_k$, где $A = E$, т. е. имеем постоянный временной сдвиг по всем координатам θ_k^i $(i = 1, 2, 3)$. Следовательно, синхронный режим устойчивый. Подведем итоги.

Теорема 7. *Пусть в системе* (3) *при* $n = 3$ *выполняются условия* $T_1 = T_2 = T_3 = 1$, $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *и осциллятор* O_1 *запаздывает относительно осциллятора* O_3*, который запаздывает относительно осциллятора* O_2*. Тогда система синхронизируется с полупериодом* $T = 1$ *как при одинаковых запаздываниях с коэффициентом* $\xi \in (0, \frac{1}{2})$*, так и при различных запаздываниях с коэффициентами* ξ_1*,* $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$.

Сравнивая теоремы 6 и 7, видим, какое важное значение в процессе синхронизации играют последовательности переключений, существенно меняя динамику системы.

Заключение. Исходя из необходимых условий существования синхронного режима в циклической структуре типа кольцо, получили условия на параметры T, γ, η и ξ, которые являются достаточными условиями существования устойчивого процесса синхронизации систем (1) и (3). Исследована динамика систем (1) и (3) в случаях, когда два или три осциллятора соединены в кольцо. Вообще говоря, размерность систем (1) и (3) можно увеличить, а следовательно, увеличить и размерность систем (12), (15), (20), (22), но при этом возникают технические сложности с описанием запаздываний, особенно, если полупериоды T_i $(i = \overline{1, n})$ достаточно малы. Поскольку процесс синхронизации работы осцилляторов в системах (1) и (3) соответствует периодическому режиму в указанных системах, то в частных случаях решена задача нахождения периодических решений систем (1) и (3), существование которых установлено в теореме 1.

Литература

1. *Astrom K. J.* Oscillations in systems with relay feedback // Adaptive Control, Filtering and Signal Processing. New York: Springer-Verlag, 1995. P. 1–25.

2. *Yu C.-C.* Autotuning of PID controllers: relay feedback approach. New York: Springer-Verlag, 1999. 235 p.

3. *Zou X., Siegel R. A.* Modeling of oscillatory dynamics of a simple enzyme-diffusion system with hysteresis. The case of lumped permeabilities // J. Chem. Phys. 1999. Vol. 110. N 4. P. 2267–2279.

4. *Northrop R. B.* Endogenous and exogenous regulation and control of physiological systems. London: Chapman & Hall, 2000. 452 p.

5. *Li B., Siegel R. A.* Global analysis of a model pulsing drug delivery oscillator based on chemomechanical feedback with hysteresis // Chaos. 2000. Vol. 10. N 3. P. 682–690.

6. *Grasman J.* Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications. New York: Springer-Verlag, 1987. 221 p.

7. *Jackson E. A.* Perspectives of nonlinear dynamics. In 2 vol. New York: Cambridge University Press, 1991. Vol. 1. 469 p.; Vol. 2. 633 p.

8. *Scott S. K.* Oscillations, waves and chaos in chemical kinetics. New York: Oxford University Press, 1994. 90 p.

9. *Epstein I. R., Showalter K.* Nonlinear chemical dynamics: Oscillations, patterns, and chaos // J. Phys. Chem. 1996. Vol. 100. N 31. P. 13132–13147.

10. *Macki J. W., Nistri P., Zecca P.* Mathematical models for hysteresis // SIAM Review. 1993. Vol. 35. N 1. P. 94–123.

11. *Varigonda S., Georgiou T. T.* Dynamics of relay relaxation oscillators // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. Vol. 46. N 1. P. 65–77.

12. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 380 с.

13. *Александров А. Ю., Соколов С. В.* Устойчивость и оценки решений некоторых классов нелинейных систем // Труды Средневолжск. матем. об-ва. 2005. Т. 7. № 1. С. 113–123.

14. *Barron M. A., Sen M.* Synchronization of four coupled van der Pol oscillators // Nonlin. Dyn. 2009. Vol. 56. N 4. P. 357–367.

15. *Евстафьева В. В.* О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 20–27.

16. *Кузнецова А. С.* Динамика системы управления, содержащей ансамбль осцилляторов, связанных через обратную связь // Журн. Средневолжск. матем. об-ва. 2011. Т. 13. № 2. С. 63–69.

17. *Balanov Z., Krawcewicz W., Rachinskii D., Zhezherun A.* Hopf bifurcation in symmetric networks of coupled oscillators with hysteresis // J. Dyn. Differ. Equations. 2012. Vol. 24. N 4. P. 713–759.

18. *Yevstafyeva V. V.* Existence of the unique kT-periodic solution for one class of nonlinear systems // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. 2013. Vol. 6. N 1. P. 136–142.

19. *Евстафьева В. В.* Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 42–56.

20. *Камачкин А. М., Хитров Г. М., Шамберов В. Н.* Нормальные формы матриц в задачах декомпозиции и управления многомерных систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 4. С. 417–430.

21. *Hooton E., Balanov Z., Krawcewicz W., Rachinskii D.* Noninvasive stabilization of periodic orbits in O_4-symmetrically coupled systems near a Hopf bifurcation point // Intern. Journal Bifurcation and Chaos. 2017. Vol. 27. N 6. P. 1750087-1–18.

22. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Intern. Journal Robust Nonlinear Control. 2017. Vol. 27. N 2. P. 204–211.

23. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of subharmonic solutions to

a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. Journal Differential Equations. 2017. N 140. P. 1–10.

24. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Control Syst. 2017. Vol. 23. N 4. P. 825–837.

25. *Евстафьева В. В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. матем. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.

26. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Intern. Journal Control. 2020. Vol. 93. N 4. P. 763–770.

27. *Rozikov U. A.* An introduction to mathematical billiards. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2019. 224 p.

Статья поступила в редакцию 17 февраля 2020 г.
Статья принята к печати 28 мая 2020 г.

Контактная информация:

Камачкин Александр Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.kamachkin@spbu.ru

Потапов Дмитрий Константинович — канд. физ.-мат. наук, доц.; d.potapov@spbu.ru

Евстафьева Виктория Викторовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; v.evstafieva@spbu.ru

Dynamics and synchronization in feedback cyclic structures with hysteresis oscillators

A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, V. V. Yevstafyeva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Dynamics and synchronization in feedback cyclic structures with hysteresis oscillators. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 186–199. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.210 (In Russian)

Consider the dynamics of complex systems with cyclic links. The systems have the ring structures composed of hysteresis-feedback oscillators. In one of these systems, each oscillator has an additional feedback with the next oscillator. Sufficient conditions for the existence of periodic and recurrent motions are established. The periodic motion corresponds to a synchronous process occurring in such cyclic structures. In particular cases, we obtain the conditions for synchronization, as well as the stability conditions for synchronous oscillatory processes.

Keywords: complex system dynamics, cyclic structure, oscillator, hysteresis feedback, synchronization, stability.

References

1. Astrom K. J. Oscillations in systems with relay feedback. *Adaptive Control, Filtering and Signal Processing.* New York, Springer-Verlag Publ., 1995, pp. 1–25.

2. Yu C.-C. *Autotuning of PID controllers: relay feedback approach.* New York, Springer-Verlag Publ., 1999, 235 p.

3. Zou X., Siegel R. A. Modeling of oscillatory dynamics of a simple enzyme-diffusion system with hysteresis. The case of lumped permeabilities. *J. Chem. Phys.*, 1999, vol. 110, no. 4, pp. 2267–2279.

4. Northrop R. B. *Endogenous and exogenous regulation and control of physiological systems.* London, Chapman & Hall Publ., 2000, 452 p.

5. Li B., Siegel R. A. Global analysis of a model pulsing drug delivery oscillator based on chemomechanical feedback with hysteresis. *Chaos*, 2000, vol. 10, no. 3, pp. 682–690.

6. Grasman J. *Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications.* New York, Springer-Verlag Publ., 1987, 221 p.

7. Jackson E. A. *Perspectives of nonlinear dynamics.* In 2 vol. New York, Cambridge University Press, 1991, vol. 1, 469 p., vol. 2, 633 p.

8. Scott S. K. *Oscillations, waves and chaos in chemical kinetics.* New York, Oxford University Press, 1994, 90 p.

9. Epstein I. R., Showalter K. Nonlinear chemical dynamics: Oscillations, patterns, and chaos. *J. Phys. Chem.*, 1996, vol. 100, no. 31, pp. 13132–13147.

10. Macki J. W., Nistri P., Zecca P. Mathematical models for hysteresis. *SIAM Review*, 1993, vol. 35, no. 1, pp. 94–123.

11. Varigonda S., Georgiou T. T. Dynamics of relay relaxation oscillators. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2001, vol. 46, no. 1, pp. 65–77.

12. Zubov V. I. *Dinamika upravlyaemykh sistem* [*Dynamics of control systems*]. St. Petersburg, Saint Petersburg University Press, 2004, 380 p. (In Russian)

13. Aleksandrov A. Yu., Sokolov S. V. Ustojchivost' i otsenki reshenij nekotorykh klassov nelinejnykh sistem [Stability and estimations of solutions for some classes of nonlinear systems]. *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [*Proc. Middle Volga Math. Soc.*], 2005, vol. 7, no. 1, pp. 113–123. (In Russian)

14. Barron M. A., Sen M. Synchronization of four coupled van der Pol oscillators. *Nonlin. Dyn.*, 2009, vol. 56, no. 4, pp. 357–367.

15. Evstaf'eva V. V. O neobhodimykh usloviyakh sushchestvovaniya periodicheskikh reshenij v dinamicheskoj sisteme s razryvnoj nelinejnost'yu i vneshnim periodicheskim vozdejstviem [On necessary conditions for existence of periodic solutions in a dynamic system with discontinuous nonlinearity and an external periodic influence]. *Ufimskij matematicheskij zhurnal* [*Ufa Math. Journal*], 2011, vol. 3, no. 2, pp. 20–27. (In Russian)

16. Kuznetsova A. S. Dinamika sistemy upravleniya, soderzhashchej ansambl' ostsillyatorov, svyazannykh cherez obratnuyu svyaz' [The dynamics of coupled oscillators with a feedback]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [*Middle Volga Math. Soc. Journal*], 2011, vol. 13, no. 2, pp. 63–69. (In Russian)

17. Balanov Z., Krawcewicz W., Rachinskii D., Zhezherun A. Hopf bifurcation in symmetric networks of coupled oscillators with hysteresis. *J. Dyn. Differ. Equations*, 2012, vol. 24, no. 4, pp. 713–759.

18. Yevstafyeva V. V. Existence of the unique kT-periodic solution for one class of nonlinear systems. *J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys.*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 136–142.

19. Evstaf'eva V. V. Ob usloviyakh sushchestvovaniya dvukhtochechno-kolebatel'nogo periodicheskogo resheniya v neavtonomnoj relejnoj sisteme s gurvitsevoj matritsej [On existence conditions for a two-point oscillating periodic solution in an non-autonomous relay system with a Hurwitz matrix]. *Avtomatika i telemekhanika* [*Automat. Remote Control*], 2015, no. 6, pp. 42–56. (In Russian)

20. Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N. Normal'nye formy matrits v zadachakh dekompozitsii i upravleniya mnogomernykh sistem [Normal matrix forms to decomposition and control problems for manydimensional systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 417–430. (In Russian)

21. Hooton E., Balanov Z., Krawcewicz W., Rachinskii D. Noninvasive stabilization of periodic orbits in O_4-symmetrically coupled systems near a Hopf bifurcation point. *Intern. Journal Bifurcation and Chaos*, 2017, vol. 27, no. 6, pp. 1750087-1–18.

22. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence. *Intern. Journal Robust Nonlinear Control*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 204–211.

23. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence. *Electron. Journal Differential Equations*, 2017, no. 140, pp. 1–10.

24. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity. *J. Dyn. Control Syst.*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 825–837.

25. Evstaf'eva V. V. Periodicheskie resheniya sistemy differentsial'nykh uravnenij s gisterezisnoj nelinejnost'yu pri nalichii nulevogo sobstvennogo chisla [Periodic solutions of a system of differential equations with hysteresis nonlinearity in the presence of eigenvalue zero]. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal* [*Ukrainian Math. Journal*], 2018, vol. 70, no. 8, pp. 1085–1096. (In Russian)

26. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay. *Intern. Journal Control*, 2020, vol. 93, no. 4, pp. 763–770.

27. Rozikov U. A. *An introduction to mathematical billiards.* Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2019, 224 p.

Received: February 17, 2020.
Accepted: May 28, 2020.

Authors' information:

Alexander M. Kamachkin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.kamachkin@spbu.ru

Dmitriy K. Potapov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; d.potapov@spbu.ru

Victoria V. Yevstafyeva — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; v.evstafieva@spbu.ru