

## Модельное изучение влияния многосуставных мышц на частотные характеристики тела человека

*В. П. Трегубов, Н. К. Егорова*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Трегубов В. П., Егорова Н. К.* Модельное изучение влияния многосуставных мышц на частотные характеристики тела человека // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 150–164. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.207>

Проведен анализ работ, посвященных экспериментальным исследованиям частотных характеристик тела сидящего человека, подверженного вибрации, и построению его механических моделей. Отмечается, что в большинстве случаев измерения вибрации производятся на сиденье и голове человека, что позволяет построить передаточную функцию от сиденья к голове. Но предполагаемая внутренняя структура механической модели человека остается не подтвержденной. В этих условиях была подчеркнута необходимость проведения измерений вибрации на всех моделируемых частях тела человека. Кроме того, с анатомической точки зрения, основной вклад в механические свойства тела сидящего человека вносят многосуставные мышцы позвоночника. Однако данное важное обстоятельство до настоящего времени не учитывалось. В связи с этим была поставлена задача исследования влияния многосуставных мышц на частотные свойства тела сидящего человека. Был построен ряд механических моделей, в которых многосуставные мышцы моделировались многозвенными вязкоупругими соединениями. Так, на простейшей модели с двумя степенями свободы было показано, как наложение двухзвенных соединений в дополнение к однозвенным приводит к появлению антирезонансной частоты на верхней массе, что невозможно при их отсутствии. Предлагается механическая модель с произвольным числом степеней свободы с многозвенными соединениями, для которой получены формулы передаточной функции и амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) для верхней массы. Кроме того, рассматривается механическая модель с произвольным набором многозвенных соединений. В качестве примера приводятся результаты численного расчета АЧХ для механической модели с восемью степенями свободы при наличии и отсутствии многозвенных соединений.

*Ключевые слова:* механическая модель, тело человека, вибрация, передаточная функция, входной механический импеданс, амплитудно-частотная характеристика, многосуставные мышцы.

**Введение.** Механические модели тела человека разрабатываются на основе экспериментальных исследований частотных характеристик тела человека. Измерения, как правило, производятся на сиденье и голове сидящего человека. Их результаты можно рассматривать как входной и выходной сигналы «черного ящика» (рис. 1).

По ним можно построить входной механический импеданс (ВМИ) [2], амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) [3] или кажущуюся массу как функцию частоты [4]. При этом была установлена схожесть полученных характеристик с характеристиками механических систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных между собой последовательно пружинами и демпферами, что послужило основанием для со-

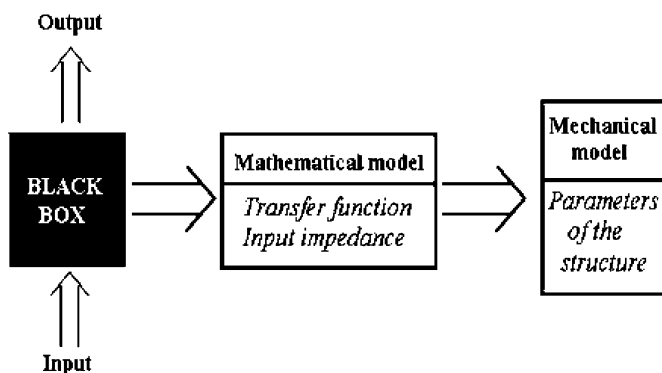


Рис. 1. Последовательность решения задачи моделирования тела человека, подверженного вибрации [1]

здания механических моделей с сосредоточенными параметрами цепной структуры. В частности, следует отметить механические модели тела человека для трех сидячих поз, разработанные в Институте машиноведения АН СССР [5] (рис. 2).

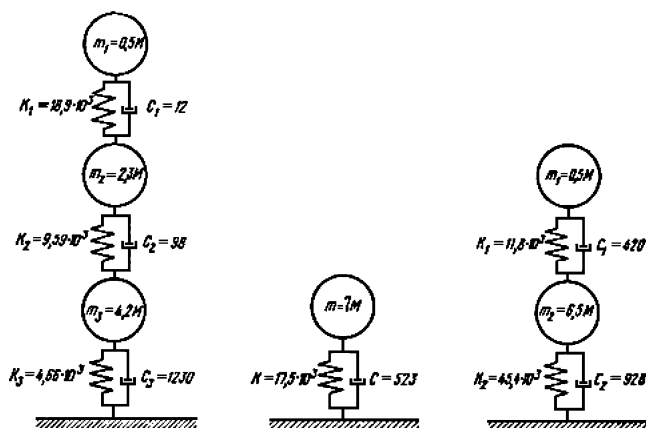


Рис. 2. Механические модели цепной структуры тела сидящего человека, подверженного вибрации [5]

Построение таких моделей основывается на предположении о внутренней структуре черного ящика, которая не может быть определена единственным образом. Это достаточно наглядно продемонстрировано на моделях, представленных в [6–10] (см., например, рис. 3 и 4). В данных моделях абсолютно твердые тела с массами  $m_1, \dots, m_4$  никак не связаны с частями тела человека. По существу это не модели человека, а модели АЧХ, для которой построена механическая модель. Модель должна содержать моделируемые части тела человека, для каждой из которых экспериментально получены передаточные функции (ПФ). Для однозначного определения параметров модели понадобятся и средние значения масс моделируемых частей тела человека [11].

Механические модели человека, в которых авторы старались приблизить их структуру к структуре тела человека, как правило, состояли из абсолютно твердых

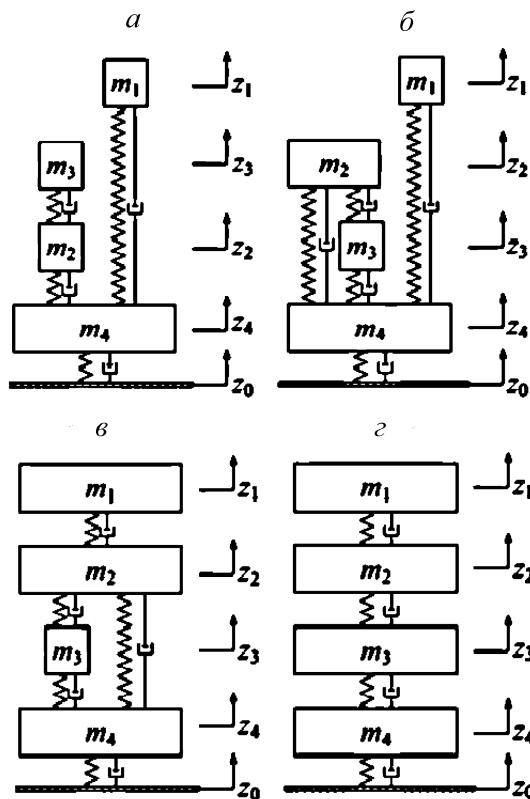


Рис. 3. Механические модели с четырьмя степенями свободы, описанные в работах [6] (а, б), [7, 8] (в), [9, 10] (г)

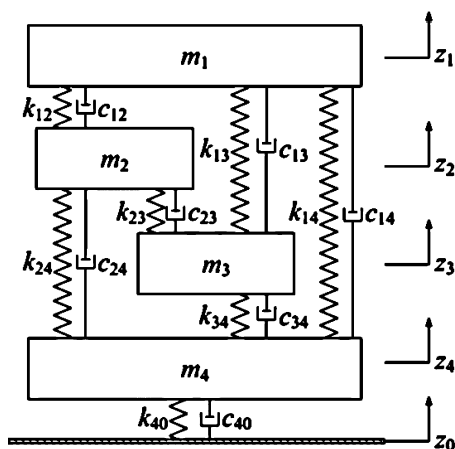


Рис. 4. Механическая модель, представленная в [6]

тел, соединенных шарнирами, которые снабжены спиральными пружинами и демпферами. Вместе с тем такие модели помогали понять, как вращения частей тела человека формируют вертикальные перемещения головы относительно сиденья. В рабо-

те [12] это было продемонстрировано на моделях с пятью степенями свободы. Однако параметры данных моделей (коэффициенты упругости и демпфирования) определялись так же, как и в моделях в [6–10], по единственной ПФ от сиденья к голове.

В работе [13] голова, верхняя часть туловища и крестец моделируются абсолютно твердыми телами, соединенными шарнирно. Кроме того, поясничный отдел позвоночника представлен пятью абсолютно твердыми телами, также соединенными плоскими шарнирами (рис. 5).

В целом механическая модель обладает восемью вращательными степенями свободы, а также двумя степенями свободы прямолинейного перемещения основания модели по горизонтали и вертикали. Все шарнирные соединения снабжены спиральными пружинами и демпферами, а крестец соединен с сиденьем вертикальной и горизонтальной продольной пружинами. Для определения параметров модели были экспериментально найдены ПФ для вертикальной вибрации от сиденья ко всем моделируемым частям тела сидящего человека. С этой точки зрения, были удовлетворены все требования к моделям тела человека, сформулированные выше. В то же время в этой модели, так же как и во всех вышеприведенных, не моделируются многосуставные мышцы позвоночника, которые в значительной степени обуславливают механические свойства позвоночника. Кроме того, датчики крепились на коже, а не к остистым отросткам позвонков, как сделано в работе [14], а размеры, массы и моменты инерции взяты из [15].

В частности, хорошо известно, что в отсутствие мышц позвоночный столб не в состоянии сохранять свою конфигурацию. Однако влияние многосуставных мышц на механические характеристики тела человека в условиях вибрации не изучалось, хотя в случае ударных воздействий такие попытки предпринимались [16].

**Математическое моделирование работы скелетных мышц.** Математическое моделирование работы скелетных мышц было основано на механической модели мышцы Хилла, состоящей из сократительной компоненты и двух упругих компонент: параллельной и последовательной по отношению к сократительной [17]. Им же было получено уравнение, связывающее силу и скорость изотонического сокращения мышцы. Экспериментальные исследования микроструктуры мышцы позволили Хаксли сформулировать теорию сокращения мышц на микроскопическом уровне с использованием теории скользящих нитей [18]. На ее основе и гипотезе о свободном, тянущем и тормозящем состояниях актин-миозиновых мостиков Дещеревским были выведены уравнения, описывающие укорочение сократительной компоненты скелетной мышцы [19]. Они послужили основой для развития кинетической теории мышечного сокращения [20], включая переходные режимы сокращения [21] и циклические движения мышцами-антагонистами [22].

Специфика работы скелетных мышц в условиях вибрации заключается в следующем. Во-первых, при воздействии с частотой до 1 Гц нервная система реагирует на каждое колебание, но при более высоких частотах напряжение мышц становится

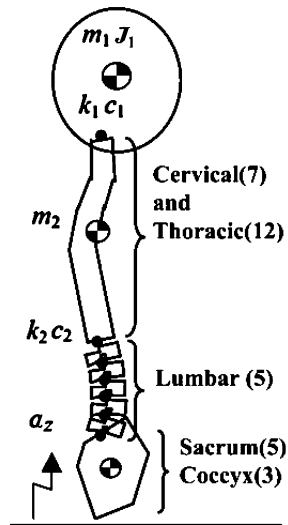


Рис. 5. Модель сидящего человека [13]

практически постоянным. Было установлено, что при длительном действии вибраций на тело сидящего человека ускорения на голове уменьшаются, в то время как смещения увеличиваются [23]. Во-вторых, поскольку уровень воздействия вибрации на организм человека определяется ускорением [24], то допустимые значения амплитуды колебаний при экспериментальных исследованиях на испытуемых составляют в области первого резонансного пика (от 4 до 6 Гц) несколько миллиметров с последующим снижением в каждой октавной полосе частот. С кинетической точки зрения столь малые амплитуды вибрации не приводят к разрыву актин-миозиновых мостиков. В связи с этим силу, развиваемую мышцей, можно считать пассивной и вязкоупругой, а многосуставную мышцу моделировать многосвязным вязкоупругим соединением.

**Система с двумя степенями свободы и двухзвенными соединениями.**

Для начала ограничимся рассмотрением простой двухмассовой модели, снабженной двухзвенными соединениями (рис. 6). Уравнения движения механической системы,

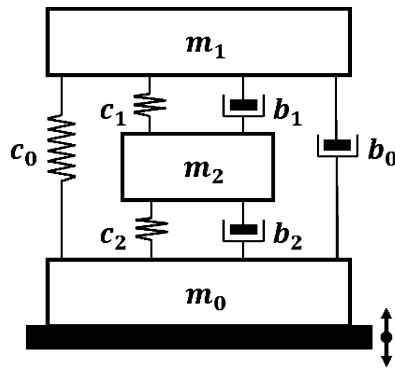


Рис. 6. Механическая система цепной структуры с двумя степенями свободы с двухзвенными соединениями

представленной на рис. 6, имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) + b_0(\dot{x}_1 - \dot{y}) + c_0(x_1 - y) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_1(x_1 - x_2) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{y}) + c_2(x_2 - y) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_i$  — перемещение тела массы  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ) относительно неподвижного основания, отсчитываемое от положения его статического равновесия;  $y$  — перемещение массы  $m_0$  относительно неподвижного основания;  $c_j$  и  $b_j$  ( $j = \overline{0, 2}$ ) — жесткости пружин и коэффициенты вязкого трения демпферов соответственно.

Для построения ПФ рассматриваемой механической системы применим к системе уравнений (1) преобразование Лапласа (с нулевыми начальными данными)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

здесь  $p$  — комплексная переменная.

Заменяя функции  $x_i(t)$  и  $y(t)$  по правилу преобразования Лапласа их изображениями  $X_i(p)$  и  $Y(p)$ , получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно  $X_i(p)$  и  $Y(p)$

$$\begin{aligned} (m_1 p^2 + (b_1 + b_0)p + (c_1 + c_0))X_1 - (b_1 p + c_1)X_2 &= (b_0 p + c_0)Y, \\ - (b_1 p + c_1)X_1 + (m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + (c_1 + c_2))X_2 &= (b_2 p + c_2)Y. \end{aligned} \quad (2)$$

Как известно, ПФ, обозначаемая через  $H_i(p)$  и представляющая собой отношение изображений входной и выходной координат объекта, вычисляется по формуле

$$H_i(p) = \frac{X_i(p)}{Y(p)}, \quad i = 1, 2.$$

Поделим каждое из уравнений системы (2) на  $Y(p)$ :

$$\begin{aligned} (m_1 p^2 + (b_1 + b_0)p + (c_1 + c_0))H_1 - (b_1 p + c_1)H_2 &= (b_0 p + c_0), \\ - (b_1 p + c_1)H_1 + (m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + (c_1 + c_2))H_2 &= (b_2 p + c_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Разрешая систему (3) относительно  $H_i(p)$ , получим равенства

$$H_1(p) = \frac{\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (4)$$

$$H_2(p) = \frac{\beta_3 p^3 + \beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{\delta_4 p^4 + \delta_3 p^3 + \delta_2 p^2 + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (5)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_0 &= \alpha_0 = \beta_0 = c_1 c_2 + c_0(c_1 + c_2), \\ \delta_1 &= \alpha_1 = \beta_1 = c_1 b_2 + c_2 b_1 + b_0(c_1 + c_2) + c_0(b_1 + b_2), \\ \delta_2 &= (m_1 + m_2)c_1 + c_2 m_1 + b_1 b_2 + c_0 m_2 + b_0(b_1 + b_2), \\ \delta_3 &= b_1(m_1 + m_2) + b_2 m_1 + b_0 m_2, \\ \delta_4 &= m_1 m_2, \\ \alpha_2 &= b_1 b_2 + b_0(b_1 + b_2) + c_0 m_2, \\ \alpha_3 &= b_0 m_2, \\ \beta_2 &= b_1 b_2 + c_2 m_1 + b_0(b_1 + b_2), \\ \beta_3 &= b_2 m_1. \end{aligned} \right.$$

АЧХ, соответствующая ПФ  $H_1(p)$  (см. (4)), как известно, получается в результате подстановки в нее вместо комплексной переменной  $p$  мнимой переменной  $i\omega$ :

$$H_1(i\omega) = \frac{(\alpha_0 - \alpha_2 \omega^2) + i(\alpha_1 \omega - \alpha_3 \omega^3)}{(\delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4) + i(\delta_1 \omega - \delta_3 \omega^3)}$$

с последующим определением ее модуля, который равен

$$|H_1(\omega)| = \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2 \omega^2)^2 + (\alpha_1 \omega - \alpha_3 \omega^3)^2}{(\delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4)^2 + (\delta_1 \omega - \delta_3 \omega^3)^2}}. \quad (6)$$

Аналогично рассчитывается АЧХ, соответствующая ПФ  $H_2(p)$  (см. (5)):

$$|H_2(\omega)| = \sqrt{\frac{(\beta_0 - \beta_2 \omega^2)^2 + (\beta_1 \omega - \beta_3 \omega^3)^2}{(\delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4)^2 + (\delta_1 \omega - \delta_3 \omega^3)^2}}.$$

Значения коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\delta_i$  в (6) определяются таким образом, чтобы максимально приблизить теоретическую АЧХ к экспериментальной. Наличие этих коэффициентов всегда позволяет построить и ПФ в изображениях.

Следует заметить, что числитель АЧХ  $|H_1(\omega)|$  при  $b_j = 0$  равен

$$\alpha_0 - \alpha_2 \omega^2$$

и обращается в 0 при

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_2}} = \sqrt{\frac{c_1 c_2 + c_0(c_1 + c_2)}{c_0 m_2}}.$$

Это означает, что при наложении двухзвенных соединений на верхней массе появляется антирезонансная частота, что в отсутствие данных соединений невозможно.

**Система с произвольным числом степеней свободы.** Рассмотрим механическую систему аналогичной структуры, имеющую  $n$  степеней свободы (рис. 7).

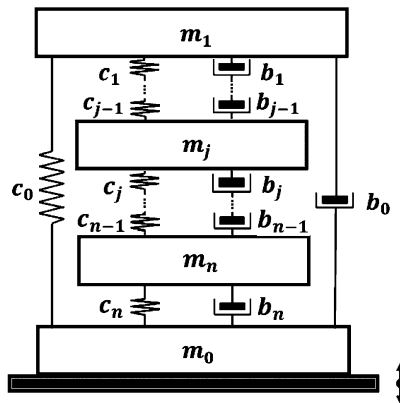


Рис. 7. Многомассовая механическая система с многозвенными соединениями

Уравнения движения такой системы в абсолютной системе координат будут иметь вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) + b_0(\dot{x}_1 - \dot{y}) + c_0(x_1 - y) = 0,$$

...

$$m_i \ddot{x}_i + b_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) + c_i(x_i - x_{i+1}) - b_{i-1}(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) - c_{i-1}(x_{i-1} - x_i) = 0, \quad (7)$$

...

$$m_n \ddot{x}_n + b_n(\dot{x}_n - \dot{y}) + c_n(x_n - y) - b_{n-1}(\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n) - c_{n-1}(x_{n-1} - x_n) = 0.$$

Преобразование по Лапласу  $n$  линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $x_i(t)$  и  $y(t)$  (7) приводит к системе  $n$  линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно изображений  $X_i(p)$  и  $Y(p)$ . Разделив каждое из уравнений полученной системы на  $Y(p)$ , имеем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_1(p) \\ H_2(p) \\ H_3(p) \\ \vdots \\ H_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

или

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{D},$$

где матрица  $\mathbf{A}$  является симметричной матрицей Якоби, в которой элементы, стоящие на главной диагонали, можно записать как

$$a_{ii} = \begin{cases} m_1 p^2 + (b_1 + b_0)p + (c_1 + c_0) & \text{при } i = 1, \\ m_i p^2 + (b_{i-1} + b_i)p + (c_{i-1} + c_i) & \text{при } i = \overline{2, n}, \end{cases}$$

а элементы, стоящие слева и справа от нее, — как

$$a_{ij} = a_{ji} = -(b_i p + c_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = i + 1,$$

столбец  $\mathbf{H}$  представляет собой столбец ПФ, а элементы столбца  $\mathbf{D}$  имеют следующий вид:

$$D_k = \begin{cases} (b_0 p + c_0) & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } i = \overline{2, n-1}, \\ (b_n p + c_n) & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Разрешая систему (8) относительно  $H_i(p)$ , получим уравнения

$$H_i(p) = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

в которых  $\Delta$  — определитель матрицы  $\mathbf{A}$ , а  $\Delta_i$  — определитель, построенный из матрицы  $\mathbf{A}$  заменой  $j$ -го столбца на столбец  $\mathbf{D}$ .

АЧХ, соответствующая ПФ  $H_1(p)$  при  $b_j = 0$  ( $j = \overline{0, n}$ ), будет равна

$$|H_1(\omega)| = \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 - \dots + \alpha_{2n-2} \omega^{2n-2})^2}{(\delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4 - \dots + \delta_{2n} \omega^{2n})^2}}. \quad (9)$$

В соответствии с формулой (9) число антирезонансных частот на верхней массе системы, представленной на рис. 7, равно  $n - 1$ .

Следует отметить, что многозвенные соединения могут связывать различные массы системы в зависимости от того, какие многосуставные мышцы включаются в разрабатываемую модель. Рассмотрим систему, приведенную на рис. 8.

Уравнение движения массы  $m_i$  в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} & \left( m_i \ddot{x}_i + \left( b_{i-1} + b_i + \sum_k b_{ik} \right) \dot{x}_i + \left( c_{i-1} + c_i + \sum_k c_{ik} \right) x_i \right) - \\ & - (b_{i+1} \dot{x}_{i+1} + c_{i+1} x_{i+1}) - (b_{ik} \dot{x}_k + c_{ik} x_{ik}) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10)  $\sum_k$  — суммирование по  $k \in [1 < i - 2] \cup [i + 2, n + 1]$  ( $n + 1 = 0$ ), а  $x_{n+1} = y$ .



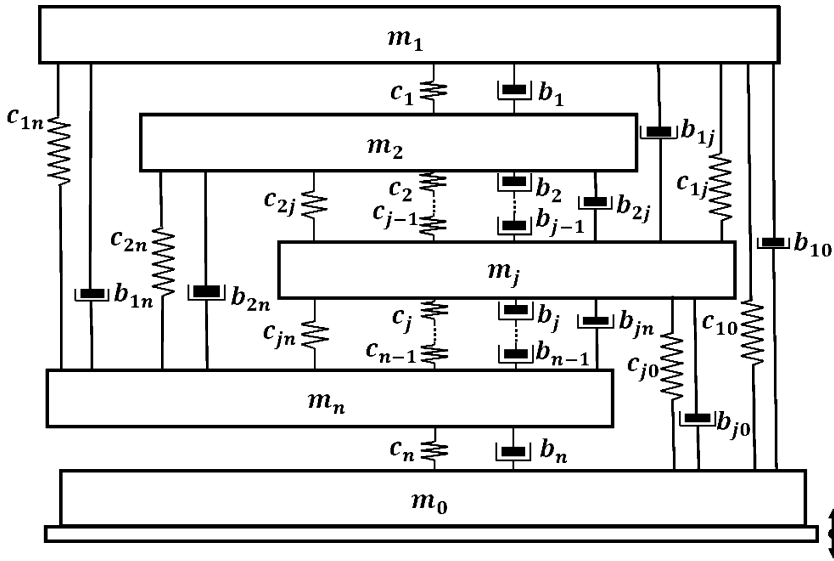


Рис. 8. Различные способы наложения многозвенных соединений на механическую систему с  $n$  степенями свободы

Для жесткостей пружин и коэффициентов вязкого трения у соединений соседних масс введено обозначение с одним индексом, а для многозвенных соединений — с двумя. В том случае, когда какие-то массы  $m_i$  и  $m_k$  не связаны многозвенными соединениями, соответствующие коэффициенты  $c_{ik}$  и  $b_{ik}$  будут равны нулю.

Переходя от системы дифференциальных уравнений относительно функций  $x_i(t)$  и  $Y(t)$  в (9) с помощью преобразования Лапласа к системе алгебраических уравнений относительно изображений  $X_i(p)$  и  $Y(p)$  и разрешая полученную систему относительно  $H_i(p)$ , находим ПФ для каждой массы рассматриваемой механической системы. Для верхней массы ПФ будет иметь вид

$$H_1(p) = \frac{\alpha_m p^m + \alpha_{m-1} p^{m-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0}{\delta_{2n} p^{2n} + \delta_{2n-1} p^{2n-1} + \dots + \delta_1 p + \delta_0}, \quad (11)$$

здесь

$$m \leq 2n - 1, \quad \delta_0 = \alpha_0, \quad \delta_1 = \alpha_1,$$

$n$  — число масс изучаемой механической системы.

Подставляя в (11) вместо комплексной переменной  $p$  мнимую переменную  $i\omega$ , получим АЧХ и ее модуль. Значения коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\delta_i$  определяются аналогично системе с двумя степенями свободы, рассмотренной выше.

**Определение числа антирезонансных частот.** Для линейной механической системы цепной структуры без трения в условиях кинематического возбуждения число антирезонансных частот на  $i$ -й массе ( $i = \overline{1, n}$ ) равно числу собственных частот системы той же структуры с  $(i - 1)$  степенями свободы. Данное утверждение представим как формулу

$$S_i = i - 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где  $S_i$  — число антирезонансных частот на  $i$ -й массе.

Исходя из (12), число антирезонансных частот на каждой массе системы цепной структуры зависит от того, какое число масс находится выше нее. Нетрудно заметить, что на верхней массе такой системы антирезонансных частот нет. Введение в систему традиционной структуры многозвенных соединений в виде пружин приводит к появлению на верхней массе антирезонансных частот. Их число  $S_1$  будет принимать значения из интервала  $[1, n - 1]$  в зависимости от того, каким образом наложены эти упругие соединения.

Остановимся на случае, когда на систему цепной структуры наложено одно многозвенное упругое соединение. Рассмотрим следующие возможные варианты введения в систему такого соединения:

- 1) верхняя масса соединена с нижней массой  $m_0$ ;
- 2) верхняя масса соединена с массой  $m_j$  ( $j \geq 3$ );
- 3) масса  $m_j$  ( $j = \overline{2, n}$ ) соединена с массой  $m_0$ ;
- 4) масса  $m_j$  ( $j = \overline{2, n}$ ) соединена с массой  $m_k$  ( $k = \overline{4, n}$ , причем  $k \geq j + 2$ ).

Для вычисления числа антирезонансных частот на верхней массе системы с многозвенным упругим соединением для каждого из перечисленных выше случаев применяем формулы

$$1) S_1 = n - 1; \quad (13)$$

$$2) S_1 = j - 2; \quad (14)$$

$$3) S_1 = n - j; \quad (15)$$

$$4) S_1 = (k - 1) - j. \quad (16)$$

Для примера рассмотрим вопрос наличия антирезонансных частот на верхней массе модели с тремя степенями свободы в зависимости от того, как наложено многозвенное соединение. На рис. 9 представлены возможные варианты.

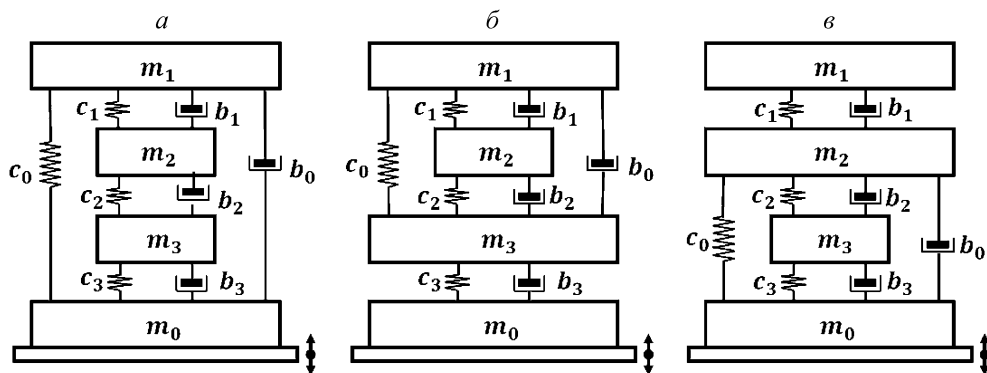


Рис. 9. Механические системы с тремя степенями свободы с многозвенными соединениями (объяснение в тексте)

В первом случае (рис. 9, а) условие определения антирезонансных частот имеет вид

$$c_0((c_1 + c_2) - m_2\omega^2)((c_2 + c_3) - m_3\omega^2) - c_0c_2^2 + c_1c_2c_3 = 0.$$

Решая данное уравнение при

$$(c_0m_2(c_2 + c_3) - m_3(c_1 + c_2))^2 > 4c_0m_2m_3c_2(c_1c_3 - c_0c_2),$$

получаем 2 вещественных корня. Таким образом, число антирезонансных частот на верхней массе  $S_1 = 2$ , что подтверждает справедливость формулы (13).

Для случая, показанного на рис. 9, б, условие

$$c_3 c_0 ((c_1 + c_2) - m_2 \omega^2) + c_1 c_2 c_3 = 0$$

определяет одну частоту антирезонанса, что соответствует формуле (14).

В третьем случае (рис. 9, в) условие определения антирезонансных частот имеет вид

$$c_1 c_0 ((c_2 + c_3) - m_3 \omega^2) + c_1 c_2 c_3 = 0$$

и  $S_1 = 1$ , что подтверждает справедливость формулы (15).

Вариант механической системы, подтверждающей формулу (16), здесь не рассматривается.

**Система с восемью степенями свободы.** Для иллюстрации существенного влияния многозвенных соединений на АЧХ механической модели были проведены численные расчеты АЧХ механической системы с восемью степенями свободы. Эта система может служить механической моделью тела сидящего человека, если  $m_1$  — это масса головы,  $m_0$  — масса туловища, а массы  $m_2, \dots, m_8$  — массы семи шейных позвонков вместе с окружающими их мягкими тканями. На рис. 10 проиллюстрировано различие двух АЧХ такой системы при отсутствии и наличии многозвенных соединений, моделирующих многосуставные мышцы. Важно подчеркнуть, что основная цель этого рисунка была в том, чтобы обратить внимание на качественное, а не количественное отличие двух характеристик. В частности, видно, что наличие многозвенных соединений (кривая 2) может привести к появлению частот, при которых АЧХ близка к нулю, что в отсутствие этих соединений принципиально невозможно.

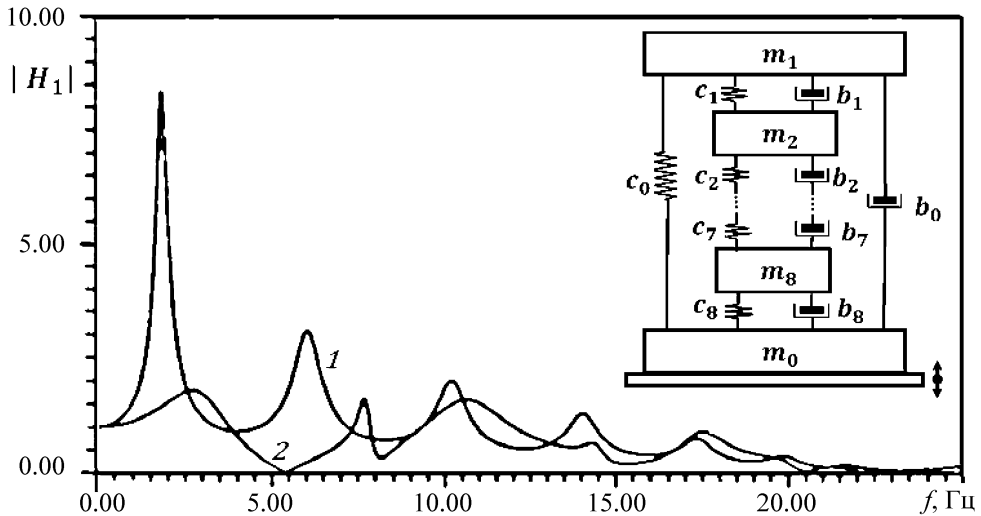


Рис. 10. АЧХ для модели цепной структуры с восемью степенями свободы в отсутствие дополнительных многозвенных соединений (1) и при их наличии (2)

**Заключение.** Модельное изучение влияния многосуставных мышц на частотные характеристики тела человека показало, что введение многозвенных соединений в структуру модели в отсутствие трения приводит к увеличению числа антирезонансных частот на всех массах системы. В частности, антирезонансные частоты

появляются и на верхней массе, что в отсутствии многозвенных соединений невозможно. Их число зависит от того, сколько многозвенных соединений наложено на многомассовую систему и какие именно массы ими соединены. В качестве иллюстрации влияния многосуставных мышц на частотные свойства тела сидящего человека приведены графики АЧХ механических систем с восемью степенями свободы при наличии и отсутствии многозвенных соединений.

## Литература

1. *Tregubov V. P.* Problems of mechanical model identification for human body under vibration // *Mechanism and Machine Theory*. 2000. Vol. 35. P. 491–504.
2. *Coermann R. R.* The mechanical impedance of the human body in sitting and standing position at low frequencies // *Human factors*. 1962. Vol. 4. P. 227–253.
3. *Griffin M. J.* Vertical vibration of seated subjects: effects of posture, vibration level, and frequency // *Aviation Space and Environmental Medicine*. 1975. Vol. 46. P. 269–276.
4. *Fairley T. E., Griffin M. J.* The apparent mass of the seated human body: Vertical vibration // *Journal of Biomechanics*. 1989. Vol. 22. N 2. P. 81–94.
5. *Потёмкин Б. А., Фролов К. В.* Построение динамической модели тела человека-оператора, подверженного действию широкополосных случайных вибраций // *Виброизоляция машин и виброзащита человека-оператора* / отв. ред. К. В. Фролов. М.: Наука, 1973. С. 17–30.
6. *Bai Xian-Xu, Xu Shi-Xu, Cheng Wei, Qian Li-Jun.* On 4-degree-of-freedom biodynamic models of seated occupants: Lumped-parameter modeling // *Journal of Sound and Vibration*. 2017. Vol. 402. N 18. P. 122–141.
7. *Wan Y., Schimmels J. M.* A simple model that captures the essential dynamics of a seated human exposed to whole body vibration // *Advances in Bioengineering*. 1995. Vol. 31. ASME publ.-BED (Bioengineering Division). P. 333–334.
8. *Abbas W., Abovelatta O. B., El-Azab M., Elsaidy M., Megahed A. A.* Optimization of biodynamic seated human models using genetic algorithms // *Engineering*. 2010. Vol. 2. P. 710–719.
9. *Boileau P. E., Rakheja S.* Whole-body vertical biodynamic response characteristics of the seated vehicle driver: measurement and model development // *International Journal of Ind. Ergonomics*. 1998. Vol. 22. P. 449–472.
10. *Zhang E., Xu L. A., Liu Z. H., Li X. L.* Dynamic modeling and vibration characteristics of multi-DOF upper part system of seated human body // *Chine Journal of Engineering Design*. 2008. Vol. 15. P. 244–249.
11. *Трегубов В. П., Егорова Н. К.* О единственности решения задачи определения параметров механических моделей тела человека, подверженного вибрационному воздействию // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 565–577. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.412>
12. *Bae J.-J., Kang N.* Development of a five-degree-of-freedom seated human model and parametric studies for its vibrational characteristics // *Shock and Vibration*. 2018. Article ID 1649180. 15 p. <https://doi.org/10.1155/2018/1649180>
13. *Yoshimura T., Nakai K., Tamaoki G.* Multi-body dynamics modelling of seated human body under exposure to whole-body vibration // *Industrial Health*. 2005. Vol. 43. P. 441–447.
14. *Panjabi M. M., Andersson G. B., Jorneus L., Hult E., Mattsson L.* In vivo measurements of spinal column vibrations // *The Journal of Bone and Joint Surg*. 1986. Vol. 68-A. P. 695–702.
15. *Kitazaki S., Griffin M.* A modal analysis of whole body vertical vibration using a finite element model of the human body // *Journal of Sound Vibration*. 1997. Vol. 200. P. 83–105.
16. *Трегубов В. П., Селезнева Н. А.* Математическое моделирование динамики шейного отдела позвоночника при импульсных воздействиях // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2016. Вып. 1. С. 53–65.
17. *Хилл А. В.* Механика мышечного сокращения. Старые и новые опыты / пер. с англ. Ю. А. Шаронова; под ред. Г. М. Франка. М.: Мир, 1972. 183 с. (*Hill A. V.* First and last experiments in muscle mechanics.)
18. *Huxley A. F.* Muscle structure and theories of contraction // *Progr. Biophys. and Biophys. Chem*. 1957. Vol. 7. P. 255–318.
19. *Дещевский В. И.* Математические модели мышечного сокращения. М.: Наука, 1977. 160 с.
20. *Tregubov V. P.* Development of the muscle kinetic theory and cyclic movements // *Acta of Bioengineering and Biomechanics*. 2003. Vol. 5. Suppl. 1. P. 512–519.
21. *Кликунова К. А., Трегубов В. П.* Математическое моделирование переходных режимов

мышечного сокращения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2008. Вып. 3. С. 56–62.

22. Tregubov V. P., Azanchevsky V. V., Zarin A., Klikunova K. Mechanical models of the intervertebral disk and cervical spine // Lecture Notes of the ICB Seminars. Warsaw, 2007. Vol. 79. P. 41–54.

23. Глухарев К. К., Потёмкин Б. А., Фролов К. В. Особенности биодинамики тела человека при вибрациях // Виброзащита человека-оператора и вопросы моделирования / отв. ред. К. В. Фролов. М.: Наука, 1973. С. 22–28.

24. Санитарные нормы 2.2.4/2.1.8.566-96. М.: Министерство здравоохранения России, 1997. 35 с.

Статья поступила в редакцию 7 марта 2020 г.

Статья принята к печати 28 мая 2020 г.

Контактная информация:

Трегубов Владимир Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.tregubov@spbu.ru

Егорова Надежда Константиновна — аспирант; nadezhda\_ego@mail.ru

## Model study of the influence of multi-joint muscles on the frequency characteristics of the human body

V. P. Tregubov, N. K. Egorova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Tregubov V. P., Egorova N. K. Model study of the influence of multi-joint muscles on the frequency characteristics of the human body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 150–164. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.207> (In Russian)

The analysis of previous works devoted to experimental studies of the frequency characteristics of the body of a sitting human body subjected to vibration and the construction of its mechanical models is conducted. It is noted that in most cases measurements of vibration are made on the seat and the head of the person that allows us to build a transmission function from the seat to the head. In doing so, the supposed internal structure of the human mechanical model remained unconfirmed. Under these conditions, it was emphasized that vibration measurements should be performed on all modeled parts of a human body. In addition, from an anatomical point of view, the main contribution to the mechanical properties of the body of a sitting person is made by the multi-jointed muscles of the spine. However, this important fact has not been taken into account yet. In this regard, the task was set to study the influence of multi-articular muscles on the frequency properties of the body of a sitting person. For this purpose, a number of mechanical models were constructed in which multi-jointed muscles were modeled by multi-link viscoelastic connections. In particular, on the simplest model with two degrees of freedom it was shown how the imposition of two-link connections in addition to a single-link one leads to the appearance of an anti-resonant frequency on the upper mass, that is impossible in their absence. A mechanical model with an arbitrary number of degrees of freedom with multi-link connections is given, for which the formulas of the transfer function and the amplitude-frequency response for the upper mass are obtained. In addition, we consider a mechanical model with an arbitrary set of multi-link connections. As an example, the results of numerical calculation of the frequency response for a mechanical model with eight degrees of freedom in the presence and absence of multi-link connections are given.

*Keywords:* mechanical model, human body, vibration, transfer function, input mechanical impedance, amplitude-frequency response, multi-joint muscles.

## References

1. Tregubov V. P. Problems of mechanical model identification for human body under vibration. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, vol. 35, pp. 491–504.
2. Coermann R. R. The mechanical impedance of the human body in sitting and standing position at low frequencies. *Human factors*, 1962, vol. 4, pp. 227–253.
3. Griffin M. J. Vertical vibration of seated subjects: effects of posture, vibration level, and frequency. *Aviation Space and Environmental Medicine*, 1975, vol. 46, pp. 269–276.
4. Fairley T. E., Griffin M. J. The apparent mass of the seated human body: Vertical vibration. *Journal of Biomechanics*, 1989, vol. 22, N 2, pp. 81–94.
5. Potemkin B. A., Frolov K. V. Postroenie dinamicheskoy modeli tela theloveka-operatora, podverzhennogo deistviyu shirokopolosnih sluthainih vibratsiy [Construction of dynamic model of human body for man-operator exposed to broadband random vibrations]. *Vibration-isolation of machine and vibration-protection of man-operator*. By otv. red. K. V. Frolov. Moscow, Nauka Publ., 1973, pp. 17–30. (In Russian)
6. Bai Xian-Xu, Xu Shi-Xu, Cheng Wei, Qian Li-Jun. On 4-degree-of-freedom biodynamic models of seated occupants: Lumped-parameter modeling. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, vol. 402, N 18, pp. 122–141.
7. Wan Y., Schimmels J. M. A simple model that captures the essential dynamics of a seated human exposed to whole body vibration. *Advances in Bioengineering*, 1995, vol. 31, ASME-publ. BED (Bioengineering Division), pp. 333–334.
8. Abbas W., Abouelatta O. B., El-Azab M., Elsaydy M., Megahed A. A. Optimization of biodynamic seated human models using genetic algorithms. *Engineering*, 2010, vol. 2, pp. 710–719.
9. Boileau P. E., Rakheja S. Whole-body vertical biodynamic response characteristics of the seated vehicle driver: measurement and model development. *International Journal of Ind. Ergonomics*, 1998, vol. 22, pp. 449–472.
10. Zhang E., Xu L. A., Liu Z. H., Li X. L. Dynamic modeling and vibration characteristics of multi-DOF upper part system of seated human body. *China Journal of Engineering Design*, 2008, vol. 15, pp. 244–249.
11. Tregubov V. P., Egorova N. K. O edinstvennosti resheniya zadachi opredeleniya parametrov mekhanicheskikh modelej tela cheloveka, podverzhennogo vibracionnomu vozdejstviyu [On the uniqueness of the solution to the problem of determining the parameters of mechanical models of the human body exposed to vibration]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 565–577. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.412> (In Russian)
12. Bae J.-J., Kang N. Development of a five-degree-of-freedom seated human model and parametric studies for its vibrational characteristics. *Shock and Vibration*, 2018, Article ID 1649180, 15 p. <https://doi.org/10.1155/2018/1649180>
13. Yoshimura T., Nakai K., Tamaoki G. Multi-body dynamics modelling of seated human body under exposure to whole-body vibration. *Industrial Health*, 2005, vol. 43, pp. 441–447.
14. Panjabi M. M., Andersson G. B., Jorneus L., Hult E., Mattsson L. In vivo measurements of spinal column vibrations. *The Journal of Bone and Joint Surgery*, 1986, vol. 68-A, pp. 695–702.
15. Kitazaki S., Griffin M. A modal analysis of whole body vertical vibration using a finite element model of the human body. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 200, pp. 83–105.
16. Tregubov V. P., Selezneva N. A. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki shejnogo otdela pozvonochnika pri impul'snyh vozdejstviyah [Mathematical modeling of the dynamics of the cervical spine under impulse effects]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2016, iss. 1, pp. 53–66. (In Russian)
17. Hill A. V. *First and last experiments in muscle mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1970, 180 p. (Russ. ed.: Hill A. V. *Mehanika mishechnogo sokraschenia. Starie i novie opyty*. Moscow, Mir Publ., 1972, 183 p.)
18. Huxley A. F. Muscle structure and theories of contraction. *Progr. Biophys. and Biophys. Chem.*, 1957, vol. 7, pp. 255–318.
19. Descherevsky V. I. *Matematicheskie modeli myshechnogo sokrascheniya [Mathematical models of muscle contraction]*. Moscow, Nauka Publ., 1977, 160 p. (In Russian)
20. Tregubov V. P. Development of the muscle kinetic theory and cyclic movements. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 2003, vol. 5, suppl. 1, pp. 512–519.
21. Klikunova K. A., Tregubov V. P. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki shejnogo otdela pozvonochnika pri impul'snyh vozdejstviyah [Mathematical modeling of transient modes of muscle contraction]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2008, iss. 3, pp. 56–62. (In Russian)

22. Tregubov V. P., Azanchevsky V. V., Zarin A., Klikunova K. Mechanical models of the intervertebral disk and cervical spine. *Lecture Notes of the ICB Seminars*. Warsaw, 2007, vol. 79, pp. 41–54.
23. Glukharev K. K., Potemkin B. A., Frolov K. V. Osobennosti biodinamiki tela cheloveka pri vibraciyah [Features of human body biodynamics under vibrations]. *Vibration-protection of man-operator and the issues of modeling*. By otv. red. K. V. Frolov. Moscow, Nauka Publ., 1973, pp. 22–28. (In Russian)
24. *Sanitarnye normy 2.2.4/2.1.8.566-96* [*Sanitary standards 2.2.4/2.1.8.566-96*]. Moscow, Ministry of Health of Russia, 1997, 35 p. (In Russian)

Received: March 07, 2020.

Accepted: May 28, 2020.

Authors' information:

Vladimir P. Tregubov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; v.tregubov@spbu.ru

Nadezhda K. Egorova — Postgraduate Student; nadezhda\_ego@mail.ru