

## Математическое моделирование двумерной периодической системы полевых эмиттеров

*Е. М. Виноградова, Г. Г. Доронин*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Виноградова Е. М., Доронин Г. Г. Математическое моделирование двумерной периодической системы полевых эмиттеров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 121–128. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.204>

Работа посвящена математическому моделированию двумерной периодической системы полевых эмиттеров. Электронно-вакуумные приборы на основе полевой эмиссии активно используются во многих областях науки и техники. В данной статье исследуется полевой катод, представляющий собой периодическую систему эмиттеров бесконечной длины и одинаковой формы, расположенных на плоской подложке на одном и том же расстоянии друг от друга. Анод — плоскость, параллельная подложке. Для вычисления распределения электростатического потенциала влияние каждого эмиттера заменяется влиянием заряженной нити. При решении граничной задачи для уравнения Пуассона используется метод разделения переменных в декартовых координатах. Распределение потенциала найдено в аналитическом виде во всей области системы. В соответствии с полученными формулами проведены численные расчеты и показано влияние плотности упаковки эмиттеров на распределения электростатического потенциала.

*Ключевые слова:* полевой катод, массив полевых эмиттеров, граничная задача, электростатический потенциал, уравнение Пуассона, математическое моделирование.

**Введение.** В последние десятилетия активно разрабатываются электронно-вакуумные приборы с низкоэнергетическими пучками на основе полевой эмиссии [1–4]. Полевые катоды используются в электронных микроскопах, системах диагностики поверхности методами неразрушающего контроля, индикаторах, плоских дисплеях и т. д. [5–9].

В данной работе моделируется двумерная периодическая система полевых эмиттеров. Эмиттеры бесконечной длины и одинаковой формы расположены на плоской подложке. Анодом является плоскость, параллельная плоскости подложки. Для вычисления распределения электростатического потенциала во всей области системы используется метод разделения переменных в декартовых координатах  $(x, y)$ . Схематическое изображение исследуемой системы эмиттеров приведено на рис. 1.

В силу периодичности исследуемой системы можно выделить ячейку, содержащую один эмиттер. Не нарушая общность задачи, потенциал эмиттера считаем равным нулю. Для расчета распределения поля в ячейке заменим влияние эмиттера на поле влиянием заряженной нити с линейной плотностью заряда  $\tau(y)$ , так что нулевая эквипотенциаль совпадает с поверхностью эмиттера [10–12].

Параметры задачи:  $L$  — высота полевого эмиттера;  $x_1$  — период системы по переменной  $x$ ;  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq x_1$  — плоскость подложки;  $y = y_1$ ,  $0 \leq x \leq x_1$  — плоскость анода;  $x_0 = x_1/2$ ,  $0 \leq y \leq y_0$  — координаты заряженной нити;  $U(x, 0) = 0$  — потенциал подложки;  $U(x, y_1) = U_0$  — потенциал анода.

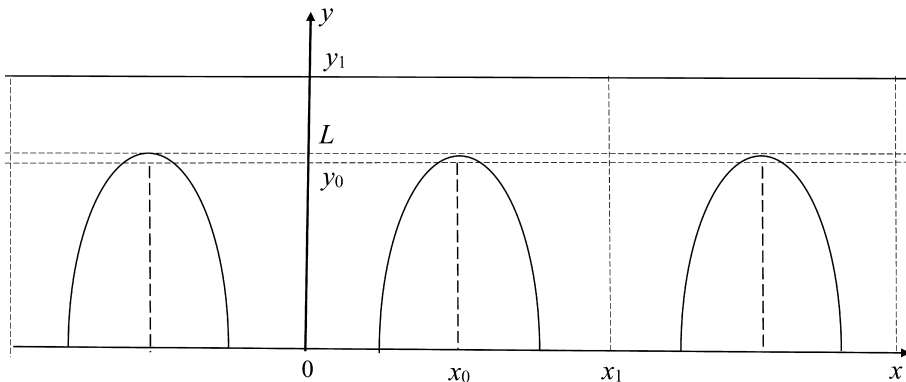


Рис. 1. Схематическое изображение периодической системы полевых эмиттеров

**Математическая модель.** Для определения распределения электростатического потенциала  $U(x, y)$  во всей области элементарной ячейки ( $0 \leq x \leq x_1$ ,  $0 \leq y \leq y_1$ ) требуется решить граничную задачу для уравнения Пуассона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y), \\ U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U(x, y_1) = U_0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ \left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1, \\ \left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1. \end{array} \right. \quad (1)$$

Будем считать, что заряженная нить с линейной плотностью заряда  $\tau(y)$  создает пространственное распределение заряда  $\rho(x, y)$  в прямоугольнике малого объема ( $|x - x_0| < \delta$ ,  $0 \leq y \leq y_0$ ) [13, 14]:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho(y), & |x - x_0| < \delta \text{ и } 0 \leq y \leq y_0, \\ 0, & |x - x_0| > \delta \text{ или } y_0 \leq y \leq y_1, \end{cases} \quad (2)$$

так что

$$\tau(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\delta y_0 \rho(y). \quad (3)$$

**Решение граничной задачи.** Представим решение граничной задачи (1)–(3) в виде

$$U(x, y) = U_0 y/y_1 + U_1(x, y). \quad (4)$$

Для определения функции  $U_1(x, y)$  требуется решить уравнение Пуассона с однородными граничными условиями первого рода по переменной  $y$  и однородными граничными условиями второго рода по переменной  $x$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y), \\ U_1(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U_1(x, y_1) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1, \\ \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1. \end{array} \right. \quad (5)$$

Правая часть уравнения Пуассона в (5) определяется по формулам (2), (3). Функцию  $U_1(x, y)$  представим как ряд по собственным функциям по переменной  $x$  с коэффициентами  $v_n(y)$  [15, 16]:

$$U_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(y) \cos \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{x_1}. \quad (6)$$

Тогда, подставляя выражение (6) в уравнение Пуассона (5), и из ортогональности собственных функций получим, что каждая функция  $v_n(y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v_n''(y) - (\alpha_n)^2 v_n(y) = \frac{\gamma_n}{x_1} \phi_n(y), \quad \gamma_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n > 0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\phi_n(y) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{x_1} \rho(x, y) \cos \alpha_n x, \quad (8)$$

а однородность граничных условий для  $U_1(x, y)$  в (5) по переменной  $y$  ведет к однородности граничных условий для функций  $v_n(y)$ :

$$v_n(0) = v_n(y_1) = 0, \quad n \geq 0. \quad (9)$$

Функции  $\phi_n(y)$  уравнения (8) в соответствии с формулами (2), (3) вычисляются в явном виде

$$\phi_n(y) = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon_0} 2\delta\rho(y) \cos \alpha_n x_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0 y_0} \tau(y) \cos \alpha_n x_0, & 0 \leq y \leq y_0, \\ 0, & y_0 < y \leq y_1. \end{cases} \quad (10)$$

Решая дифференциальное уравнение (7) с правой частью (10) и граничными условиями (9), получим

при  $n = 0$

$$v_0(y) = -\frac{y_1 - y}{x_1 y_1} \int_0^y \eta \phi_0(\eta) d\eta + \frac{y}{x_1 y_1} \int_y^{y_0} (\eta - y_1) \phi_0(\eta) d\eta, \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad (11)$$

$$v_0(y) = -\frac{y_1 - y}{x_1 y_1} \int_0^{y_0} \eta \phi_0(\eta) d\eta, \quad y_0 < y \leq y_1,$$

при  $n > 0$

$$v_n(y) = -\frac{2}{\pi n} \frac{1}{\sinh \alpha_n y_1} \left[ \int_0^y \phi_n(\eta) \sinh \alpha_n \eta \sinh \alpha_n (y_1 - y) d\eta - \int_y^{y_0} \phi_n(\eta) \sinh \alpha_n (\eta - y_1) \sinh \alpha_n y d\eta \right], \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad (12)$$

$$v_n(y) = -\frac{2}{\pi n} \frac{1}{\sinh \alpha_n y_1} \left[ \int_0^{y_0} \phi_n(\eta) \sinh \alpha_n \eta \sinh \alpha_n (y_1 - y) d\eta \right], \quad y_0 < y \leq y_1.$$

Итак, решение исходной граничной задачи (1)–(3), согласно формулам (4), (6), (10)–(12), получено в аналитическом виде во всей области исследуемой диодной системы.

**Результаты численных расчетов.** Для проведения вычислений примем, что функция, задающая плотность заряда  $\tau(y)$ , является линейной [15, 16]:

$$\tau(y) = \tau y / y_0,$$

где  $\tau = \text{const}$ .

Распределение электростатического потенциала  $U(x, y)$  (см. формулы (4), (6), (10)–(12)) можно представить в явном виде:

при  $0 \leq y \leq y_0$

$$U(x, y) = U_0 \frac{y}{y_1} + \frac{\tau}{\varepsilon_0 y_0^2} \left[ \frac{1}{6x_1 y_1} (3y y_0^2 y_1 - 2y y_0^3 - y^3 y_1) + \frac{2}{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\alpha_{2n}^2 \sinh \alpha_{2n} y_1} \left( y \sinh \alpha_{2n} y_1 - y_0 \sinh \alpha_{2n} y \cosh \alpha_{2n} (y_1 - y_0) - \alpha_{2n}^{-1} \sinh \alpha_{2n} y \sinh \alpha_{2n} (y_1 - y_0) \right) \right] \cos \alpha_{2n} x, \quad (13)$$

при  $y_0 < y \leq y_1$

$$U(x, y) = U_0 \frac{y}{y_1} + \frac{\tau}{\varepsilon_0 y_0^2} \left[ \frac{1}{3x_1 y_1} (y_1 - y) y_0^3 + \frac{2}{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sinh \alpha_{2n} (y_1 - y)}{\alpha_{2n}^2 \sinh \alpha_{2n} y_1} \left( y_1 \cosh \alpha_{2n} y_0 - \alpha_{2n}^{-1} \sinh \alpha_{2n} y_0 \right) \right] \cos \alpha_{2n} x. \quad (14)$$

В соответствии с полученным аналитическим решением граничной задачи (1)–(3) были произведены численные расчеты. Для вычисления потенциала  $U(x, y)$  требуется найти величину  $\tau$ , входящую в формулы (13), (14). Для этого решается уравнение

$$U(x_0, L) = 0,$$

где  $L = y_0 + \varepsilon$ .

Все значения параметров, как геометрических, так и потенциалов, берутся в безразмерных величинах.

На рис. 2, А-В представлено распределение электростатического потенциала

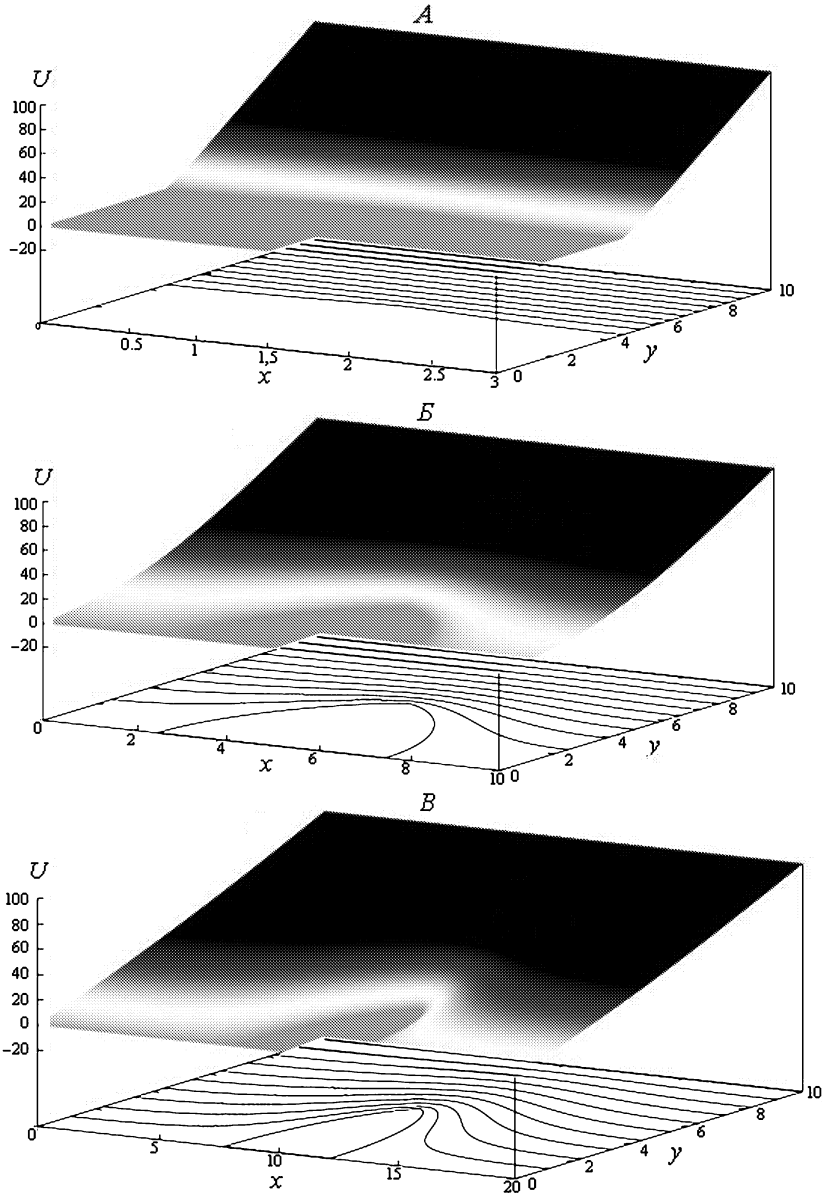


Рис. 2. Распределение электростатического потенциала при  $x_1 = 3$ ,  $\tau = -6.65$  (А),  $x_1 = 10$ ,  $\tau = -13.67$  (Б) и  $x_1 = 20$ ,  $\tau = -14.91$  (Б)

и эквипотенциальных линий во всей области выделенной ячейки периодической системы полевых эмиттеров для следующих значений параметров:  $\varepsilon = 0.00005$ ,  $x_0 = 5$ ,  $y_0 = 5$ ,  $y_1 = 10$ ,  $U_0 = 100$ . Этот рисунок демонстрирует эффект экранировки поля при уменьшении расстояния между отдельными эмиттерами.

**Заключение.** В данной статье моделируется двумерная эмиссионная диодная система, в которой полевым катодом является периодическая система эмиттеров одинаковой формы, расположенных на плоской подложке, и с плоским анодом, параллельным подложке. При вычислении электростатического распределения потенциала влияние эмиттеров на поле заменяется влиянием системы заряженных нитей. Для решения поставленной граничной задачи (1)–(3) применяется метод разделения переменных в декартовых координатах. Распределение потенциала с учетом периодичности исследуемой системы найдено в виде рядов с известными коэффициентами — формулы (4), (6), (10)–(12). Для численных расчетов электростатического потенциала по формулам (13), (14) была использована линейная функция, задающая плотность заряда нити. Представленные графики показывают зависимость распределения потенциала от расстояния между соседними эмиттерами, что согласуется с известными экспериментальными фактами.

## Литература

1. *Dall'Agnol F. F., De Assis T. A., Forbes R. G.* Physics-based derivation of a formula for the mutual depolarization of two post-like field emitters // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2018. Vol. 30. Iss. 37. N 375703 (5 p).
2. *Liang Y.* Ge-doped ZnO nanowire arrays as cold field emitters with excellent performance // *Nanotechnology*. 2019. Vol. 30. Iss. 37. N 375603 (8 p).
3. *Davidovich M. V., Yafarov R. K.* Pulsed and static field emission VAC of carbon nanocluster structures: experiment and its interpretation // *Tech. Phys.* 2019. Vol. 64. Iss. 8. P. 1210–1220.
4. *Popov E. O., Kolosko A. G., Filippov S. V.* A test for the applicability of the field emission law to studying multitip field emitters by analysis of the power index of the preexponential voltage factor // *Tech. Phys. Lett.* 2019. Vol. 45. Iss. 9. P. 916–919.
5. *Kaur G., Saini K., Tripathi A. K., Jain V., Deva D., Lahiri I.* Room temperature growth and field emission characteristics of CuO nanostructures // *Vacuum*. 2017. Vol. 139. P. 136–142.
6. *Lee S. W., Kang J. S., Lee H. R., Park S. Y., Jang J., Par K. C.* Enhanced and stable electron emission of carbon nanotube emitters with graphitization // *Vacuum*. 2015. Vol. 121. P. 212–216.
7. *Riyajuddin S., Kumar S., Soni K., Gaur S. P., Badhwar D., Ghosh K.* Study of field emission properties of pure graphene-CNT heterostructures connected via seamless interface // *Nanotechnology*. 2019. Vol. 30. Iss. 38. N 385702 (10 p).
8. *Tripathi P., Gupta B. K., Bankar P. K., More M. A., Late D. J., Srivastava O. N.* Graphene nanosheets assisted carbon hollow cylinder for high performance field emission applications // *Materials Research Express*. 2019. Vol. 6. Iss. 9. N 095066 (10 p).
9. *De Assis T. A., Dall'Agnol F. F.* Mechanically stable nanostructures with desirable characteristic field enhancement factors: a response from scale invariance in electrostatics // *Nanotechnology*. 2016. Vol. 27. Iss. 44. N 44LT01 (6 p).
10. *Мирослобов Н. Н.* Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 209 с.
11. *Доронин Г. Г., Виноградова Е. М.* Моделирование диодной полевой эмиссионной системы с диэлектрической прослойкой // *Процессы управления и устойчивость*. 2019. Т. 6. № 1. С. 73–77.
12. *Vinogradova E. M., Egorov N. V., Doronin G. G.* The sharp-edged field cathode mathematical modeling // 14th International Baltic Conference on Atomic Layer Deposition, BALD 2016. Proceedings. 2016. P. 68–70.
13. *Бузаев А. С., Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Шешин Е. П.* Автоэлектронные катоды и пушки. Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2017. 288 с.
14. *Vinogradova E. M., Egorov N. V., Televnyi D. S.* Calculation of a triode field-emission system with a modulator // *Tech. Phys.* 2014. Vol. 59. Iss. 2. P. 291–296.
15. *Vinogradova E. M., Egorov E. N., Televnyi D. S.* Mathematical modeling of field emitter array // *Vacuum*. 2016. Vol. 127. P. 45–50.

16. Vinogradova E. M., Egorov N. V., Doronin G. G. Mathematical simulation of a 2D diode system with a blade-shaped field emitter // *Tech. Phys.* 2020. Vol. 65. Iss. 4. P. 514–518.

Статья поступила в редакцию 3 марта 2020 г.

Статья принята к печати 28 мая 2020 г.

Контактная информация:

Виноградова Екатерина Михайловна — д-р физ.-мат. наук, проф.; e.m.vinogradova@spbu.ru

Доронин Григорий Геннадьевич — аспирант; fluctum@gmail.com

## Mathematical modeling of two-dimensional periodic system of field emitters

E. M. Vinogradova, G. G. Doronin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Vinogradova E. M., Doronin G. G. Mathematical modeling of two-dimensional periodic system of field emitters. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 121–128.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.204> (In Russian)

The work is devoted to a two-dimensional periodic system of field emitters mathematical modeling. Field-emission electron-vacuum devices are actively used in many fields of science and technology. In this article the field cathode as a periodic system of emitters of infinite length and the same shape, located on a flat substrate and at the same distance from each other, is investigated. Anode is a plane parallel to the substrate. To calculate the electrostatic potential distribution the influence of each emitter is replaced by the influence of a charged filament. To solve the boundary value problem for the Poisson equation the variables separation method in Cartesian coordinates is used. The potential distribution was found in an analytical form in the entire area of the system. In accordance with the formulas obtained, numerical calculations were carried out and the effect of emitter packing density on the electrostatic potential distribution is shown.

*Keywords:* field emitter array, field cathode, boundary-value problem, electrostatic potential, Poisson equation, mathematical modeling.

## References

1. Dall'Agno F. F., De Assis T. A., Forbes R. G. Physics-based derivation of a formula for the mutual depolarization of two post-like field emitters. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2018, vol. 30, iss. 37, N 375703 (5 p).
2. Liang Y. W. Ge-doped ZnO nanowire arrays as cold field emitters with excellent performance. *Nanotechnology*, 2019, vol. 30, iss. 37, N 375603 (8 p).
3. Davidovich M. V., Yafarov R. K. Pulsed and static field emission VAC of carbon nanocluster structures: experiment and its interpretation. *Tech. Phys.*, 2019, vol. 64, iss. 8, pp. 1210–1220.
4. Popov E. O., Kolosko A. G., Filippov S. V. A test for the applicability of the field emission law to studying multitip field emitters by analysis of the power index of the preexponential voltage factor. *Tech. Phys. Lett.*, 2019, vol. 45, iss. 9, pp. 916–919.
5. Kaur G., Saini K., Tripathi A. K., Jain V., Deva D., Lahiri I. Room temperature growth and field emission characteristics of CuO nanostructures. *Vacuum*, 2017, vol. 139, pp. 136–142.
6. Lee S. W., Kang J. S., Lee H. R., Park S. Y., Jang J., Par K. C. Enhanced and stable electron emission of carbon nanotube emitters with graphitization. *Vacuum*, 2015, vol. 121, pp. 212–216.
7. Riyajuddin S., Kumar S., Soni K., Gaur S. P., Badhwar D., Ghosh K. Study of field emission properties of pure graphene-CNT heterostructures connected via seamless interface. *Nanotechnology*, 2019, vol. 30, iss. 38, N 385702 (10 p).
8. Tripathi P., Gupta B. K., Bankar P. K., More M. A., Late D. J., Srivastava O. N. Graphene nanosheets assisted carbon hollow cylinder for high performance field emission applications. *Materials Research Express*, 2019, vol. 6, iss. 9, N 095066 (10 p).

9. De Assis T. A., Dall'Agnol F. F. Mechanically stable nanostructures with desirable characteristic field enhancement factors: a response from scale invariance in electrostatics. *Nanotechnology*, 2016, vol. 27, iss. 44, N 44LT01 (6 p).

10. Mirolyubov N. N. *Metody rascheta elektrostatičeskikh poley* [Methods of calculating electrostatic fields]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1963, 209 p. (In Russian)

11. Doronin G. G., Vinogradova E. M. Modelirovanie diodnoy polevoy emissionnoy sistemy s dielektricheskoy prosloikoy [Diode field emission system with a dielectric layer modeling]. *The L Annual International Conference on Control Processes and Stability (CPS'19)*. Abstracts. Ed. by N. V. Smirnov. St. Petersburg, Publishing House Fedorova G. V., 2019, pp. 73–77. (In Russian)

12. Vinogradova E. M., Egorov N. V., Doronin G. G. The sharp-edged field cathode mathematical modeling. *14th International Baltic Conference on Atomic Layer Deposition, BALD 2016. Proceedings*, 2016, pp. 68–70.

13. Bugaev A. S., Vinogradova E. M., Egorov N. V., Sheshin E. P. *Avtoelektronnyye katody i pushki* [Field-electron cathodes and guns]. Dolgoprudny, ID "Intellect" Publ., 2017, 288 p. (In Russian)

14. Vinogradova E. M., Egorov N. V., Televnyi D. S. Calculation of a triode field-emission system with a modulator. *Tech. Phys.*, 2014, vol. 59, iss. 2, pp. 291–296.

15. Vinogradova E. M., Egorov E. N., Televnyi D. S. Mathematical modeling of field emitter array. *Vacuum*, 2016, vol. 127, pp. 45–50.

16. Vinogradova E. M., Egorov N. V., Doronin G. G. Mathematical simulation of a 2D diode system with a blade-shaped field emitter. *Tech. Phys.*, 2020, vol. 65, iss. 4, pp. 514–518.

Received: March 03, 2020.

Accepted: May 28, 2020.

Authors' information:

*Ekaterina M. Vinogradova* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor;  
e.m.vinogradova@spbu.ru

*Grigoriy G. Doronin* — Postgraduate Student; fluctum@gmail.com