ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.929
MSC 34K60

Условия перманентности моделей динамики популяций с переключениями и запаздыванием*

А. Ю. Александров

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Александров А. Ю.* Условия перманентности моделей динамики популяций с переключениями и запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 88–99. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.201

Исследуются некоторые классы дискретных и непрерывных обобщенных вольтерровских моделей динамики популяций с переключениями параметров и постоянным запаздыванием. Предполагается, что между любыми двумя видами в биологическом сообществе установлены отношения типа «симбиоз», «компенсализм» или «нейтрализм». Цель работы — получить достаточные условия перманентности таких моделей. Предлагаются оригинальные конструкции общих функционалов Ляпунова—Красовского для семейств подсистем, соответствующих рассматриваемым системам с переключениями. С использованием построенных функционалов выводятся условия, гарантирующие перманентность при любых допустимых законах переключения и любом постоянном неотрицательном запаздывании. Эти условия имеют конструктивный характер и формулируются в терминах существования положительного решения вспомогательной системы линейных алгебраических неравенств. Следует отметить, что в доказываемых теоремах персистентность систем обеспечивается благодаря положительности коэффициентов естественного прироста и благотворного влияния популяций друг на друга, а предельная ограниченность численностей — за счет внутривидовой конкуренции. Приводится пример, демонстрирующий эффективность разработанных подходов.

Ключевые слова: динамика популяций, перманентность, предельная ограниченность, переключения, запаздывание, функционал Ляпунова—Красовского.

В широком классе случаев для моделирования процессов, протекающих в биологических сообществах, применяются системы дифференциальных и разностных уравнений (непрерывные и дискретные модели) [1–4]. Важной задачей, возникающей при

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00146-а).

анализе динамики таких систем, является нахождение условий устойчивого сосуществования видов. Устойчивая экологическая система должна обладать свойствами персистентности и предельной ограниченности численностей популяций [1, 3].

Свойство персистентности означает, что в процессе эволюции виды не вымирают, и, более того, какой бы малой ни была их первоначальная численность, начиная с определенного момента времени, численности видов будут превосходить некоторые фиксированные положительные значения [3].

Под предельной ограниченностью понимается такое поведение движений динамической системы, при котором в фазовом пространстве существует компактная область, такая, что каждое движение попадает в нее за конечное время и остается в ней при дальнейшем возрастании времени [2, 3, 5–8].

Системы, обладающие обоими указанными свойствами, называются *перманентными* [3].

Условия перманентности хорошо изучены для обобщенных вольтерровских моделей, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями с постоянными параметрами (см., например, [1, 3, 4, 9–11] и цитируемую там литературу). Однако для более адекватного моделирования многих биологических процессов требуется учитывать такие явления как резкие изменения параметров изучаемых систем и запаздывающее действие факторов регуляции численностей видов.

Наличие запаздывания может быть обусловлено временем развития видов, зависимостью коэффициентов прироста одних видов от предыстории других, различной скоростью процессов размножения и гибели для разных возрастных групп и рядом других причин [2, 4, 11–14]. Кроме того, воздействие многих естественных и искусственных факторов, таких как пожары, засухи, дождливые сезоны, вырубка лесов, радиация и т. д., может вызывать резкие изменения внутренних связей в биологическом сообществе и характеристик среды обитания популяций, что приводит к переключениям режимов функционирования [15, 16].

Таким образом, требуется исследование динамики биологических моделей, описываемых системами дифференциальных или разностных уравнений с запаздыванием и переключениями. Для этих моделей проблема анализа перманентности существенно усложняется.

Некоторые условия перманентности дискретных и непрерывных моделей с переключениями, но при отсутствии запаздывания, были получены в [15–19]. В работах [20–25] исследовалось влияние запаздывания на перманентность вольтерровских моделей с фиксированными параметрами.

Цель настоящей статьи — установить условия перманентности для некоторых классов дискретных и непрерывных моделей типа Лотки—Вольтерра в случае, когда в системах одновременно присутствуют и переключения, и запаздывания. Требуемые условия должны гарантировать, что рассматриваемые системы будут перманентны при любых допустимых законах переключения и любом постоянном неотрицательном запаздывании. Известно [26, 27], что основной подход к решению такой задачи состоит в нахождении общей функции Ляпунова или функционала Ляпунова—Красовского для семейства подсистем, соответствующего изучаемой системе с переключениями. В работе предлагаются оригинальные конструкции общих функционалов, с помощью которых выводятся конструктивно проверяемые условия перманентности.

Следует отметить, что большая часть известных результатов об условиях перманентности получена для биологических сообществ, в которых взаимодействие видов имеет тип «конкуренция» или «хищник—жертва» (см. [21]). В данной статье рассматривается случай, когда между любыми двумя видами в сообществе установлены отношения типа «симбиоз», «компенсализм» или «нейтрализм». В доказываемых теоремах персистентность систем обеспечивается благодаря положительности коэффициентов естественного прироста и благотворного влияния популяций друг на друга, а предельная ограниченность численностей — за счет внутривидовой конкуренции.

В работе используются следующие обозначения:

• $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора;

• $\mathbb{R}^n_+$ — неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n_+ = \left\{(x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0,\ \ i = 1, \ldots, n\right\},$$

а $\operatorname{int} R^n_+$ — множество его внутренних точек;

• матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ называется метцлеровой, если $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, матрица $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — неотрицательной, если $b_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, n$;

• для вектора $c \in \mathbb{R}^n$ неравенство $c > 0$ ($c < 0$) означает, что все его компоненты положительны (отрицательны);

• для заданного числа $\tau > 0$ через $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n_+)$ обозначим пространство непрерывных векторных функций $\varphi(\theta) : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n_+$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|$.

Анализ перманентности обобщенных вольтерровских моделей. Рассмотрим дифференциально-разностную систему с переключениями

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) \left(c_i^{(\sigma)} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n q_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(t-\tau)) \right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

моделирующую взаимодействие видов в биологическом сообществе. Здесь $x_i(t) \in \mathbb{R}$, функции $f_i(x_i)$ определены при $x_i \geqslant 0$, τ — постоянное неотрицательное запаздывание, $\sigma = \sigma(t)$ — кусочно-постоянная функция, задающая закон переключения, $\sigma(t) : [0, +\infty) \to \{1, \ldots, N\}$, $c_i^{(s)}$, $p_{ij}^{(s)}$, $q_{ij}^{(s)}$ — постоянные коэффициенты, $i, j = 1, \ldots, n$, а $s = 1, \ldots, N$.

Система (1) представляет собой обобщение классической модели межвидового взаимодействия Лотки—Вольтерра (см. [1, 3]). В изучаемых уравнениях $x_i(t)$ — численность i-й популяции, $c_i^{(s)}$ — коэффициенты естественного прироста i-й популяции (удельная рождаемость минус удельная смертность), слагаемые $p_{ii}^{(s)} x_i(t) f_i(x_i(t))$ и $q_{ii}^{(s)} x_i(t) f_i(x_i(t-\tau))$ определяют процессы самолимитирования популяций по численности, члены $p_{ij}^{(s)} x_i(t) f_j(x_j(t))$ и $q_{ij}^{(s)} x_i(t) f_j(x_j(t-\tau))$ при $i \neq j$ характеризуют влияние одних популяций на другие.

В качестве допустимых законов переключения будем рассматривать функции $\sigma(t)$, которые на любом ограниченном промежутке могут иметь только конечное число точек разрыва.

В каждый момент времени динамика системы (1) задается одной из подсистем семейства

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n q_{ij}^{(s)} f_j(x_j(t-\tau)) \right), \quad i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

В силу биологического смысла, будем рассматривать систему (1) только в положительном ортанте $\operatorname{int} R^n_+$. Каждое решение $x(t, t_0, \varphi)$ этой системы при $t \geqslant t_0$ определяется начальным моментом времени t_0 и начальной функцией $\varphi(\theta)$, где

$$t_0 \geqslant 0, \quad \varphi(\theta) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n_+), \quad \varphi(0) > 0. \tag{3}$$

Через $x_t(t_0, \varphi)$ обозначим отрезок решения: $x_t(t_0, \varphi) : \theta \to x(t + \theta, t_0, \varphi)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Предположение 1. Функции $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$ обладают следующими свойствами:

1) $f_i(x_i)$ непрерывны и локально липшицевы при $x_i \geqslant 0$;

2) $f_i(x_i)$ неотрицательны при $x_i \geqslant 0$, причем $f_i(0) = 0$;

3) $f_i(x_i) \to +\infty$ при $x_i \to +\infty$.

З а м е ч а н и е 1. При выполнении предположения 1 $\operatorname{int} R^n_+$ представляет собой инвариантное множество для (1).

Определение 1 [3]. *Система* (1) *называется перманентной, если существуют такие числа* γ_1 *и* γ_2, $0 < \gamma_1 < \gamma_2$, *что для любого решения* $x(t, t_0, \varphi) = (x_1(t, t_0, \varphi), \ldots, x_n(t, t_0, \varphi))^\top$ *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* (3), *можно выбрать* $T \geqslant t_0$ *так, чтобы при всех* $t \geqslant T$ *имели место оценки* $\gamma_1 \leqslant x_i(t, t_0, \varphi) \leqslant \gamma_2$, $i = 1, \ldots, n$.

Предположение 2. Справедливы неравенства $c_i^{(s)} > 0$, $p_{ij}^{(s)} \geqslant 0$ при $i \neq j$, $q_{ij}^{(s)} \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, N$.

З а м е ч а н и е 2. Предположение 2 означает, что для каждого вида удельная рождаемость больше удельной смертности, и все популяции благотворно влияют друг на друга (между любыми двумя видами в сообществе имеют место отношения типа «симбиоз», «компенсализм» или «нейтрализм» [3, 4]).

Пусть $P^{(s)} = \{p_{ij}^{(s)}\}_{i,j=1}^n$, $Q^{(s)} = \{q_{ij}^{(s)}\}_{i,j=1}^n$, $s = 1, \ldots, N$.

З а м е ч а н и е 3. Из предположения 2 следует, что матрицы $P^{(s)}$ являются метцлеровыми, а матрицы $Q^{(s)}$ — неотрицательными, $s = 1, \ldots, N$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Если существует вектор* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top > 0$ *такой, что*

$$\left(P^{(s)} + Q^{(r)}\right)^\top \xi < 0, \quad s, r = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

то система (1) *перманентна при любом допустимом законе переключения и любом неотрицательном запаздывании.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Строим для семейства подсистем (2) общий функционал Ляпунова—Красовского в виде

$$V(x_t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln x_i(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i \int\limits_{t-\tau}^t f_i(x_i(\theta)) d\theta + \omega \sum_{i=1}^n \int\limits_{t-\tau}^t (\theta - t + \tau) f_i(x_i(\theta)) d\theta, \tag{5}$$

где λ_i, μ_i, ω — положительные коэффициенты.

Выберем номер $s \in \{1, \ldots, N\}$ и продифференцируем функционал (5) в силу s-й подсистемы. Получим

$$\dot{V}\big|_{(s)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n q_{ij}^{(s)} f_j(x_j(t - \tau)) \right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(f_i(x_i(t))-f_i(x_i(t-\tau))\right)-\omega\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t-\tau}^{t} f_i(x_i(\theta))d\theta+\omega\tau\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i(t))=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}f_j(x_j(t))\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_{ij}^{(s)}+\mu_j\right)+\sum_{j=1}^{n}f_j(x_j(t-\tau))\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_{ij}^{(s)}-\mu_j\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i^{(s)}-\omega\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t-\tau}^{t} f_i(x_i(\theta))d\theta+\omega\tau\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i(t)).$$

В работе [28] доказано, что из существования вектора $\xi > 0$, удовлетворяющего условию (4), следует, что положительные коэффициенты λ_i и μ_i можно выбрать так, чтобы имели место неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_{ij}^{(s)}+\mu_j<0,\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_{ij}^{(s)}-\mu_j<0,\quad j=1,\ldots,n,\ \ s=1,\ldots,N. \tag{6}$$

Тогда при достаточно малом значении ω будут справедливы оценки

$$\dot V\big|_{(s)}\leqslant-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x_i(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t} f_i(x_i(\theta))d\theta\right)+\beta_2,\quad s=1,\ldots,N.$$

Здесь β_1,β_2 — положительные постоянные. Таким образом, $\dot V\big|_{(s)}<0$, $s=1,\ldots,N$, при $x_t\in G$, где

$$G=\left\{x_t\in C([-\tau,0],\mathbb{R}_+^n)\ :\ \sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x_i(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t} f_i(x_i(\theta))d\theta\right)>\frac{\beta_2}{\beta_1}\right\}.$$

В силу предположения 2 выполняется неравенство

$$\dot x_i(t)\geqslant x_i(t)\left(c_i^{(\sigma)}+p_{ii}^{(\sigma)}f_i(x_i(t))\right),\quad i=1,\ldots,n.$$

Значит, найдется число $\gamma_1>0$ такое, что $\dot x_i(t)>0$ при $0<x_i(t)\leqslant\gamma_1$, $i=1,\ldots,n$.

Пусть

$$\widetilde G=\left\{x_t\in C([-\tau,0],\mathbb{R}_+^n)\ :\ \sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x_i(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t} f_i(x_i(\theta))d\theta\right)\leqslant\frac{2\beta_2}{\beta_1},\right.$$

$$\left.x_i(t)\geqslant\gamma_1,\ i=1,\ldots,n\right\},$$

$$A=\sup_{x_t\in\widetilde G}V(x_t),\quad \Omega=\left\{x_t\in C([-\tau,0],\mathbb{R}_+^n)\ :\ V(x_t)\leqslant A,\ x_i(t)\geqslant\gamma_1,\ i=1,\ldots,n\right\}.$$

Заметим, что $0<A<+\infty$, $\widetilde G\subset\Omega$, и существует $\gamma_2>0$ такое, что если $x_t\in\Omega$, то $x_i(t)\leqslant\gamma_2$, $i=1,\ldots,n$.

Рассмотрим решение $\tilde{x}(t) = x(t, t_0, \varphi)$, для начальных данных которого выполнены условия (3). Предположим, что оно определено на промежутке $[t_0 - \tau, t^*)$, $t_0 < t^* \leqslant +\infty$. Имеем $\tilde{x}_i(t) \geqslant \min\{\tilde{x}_i(t_0); \gamma_1\}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\dot{V}(\tilde{x}_t) \leqslant -\beta_1 \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(\tilde{x}_i(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} f_i(\tilde{x}_i(\theta)) d\theta \right) + \beta_2$$

при $t \in [t_0, t^*)$. С использованием этих оценок нетрудно показать, что решение $\tilde{x}(t)$ продолжимо на весь промежуток $[t_0 - \tau, +\infty)$.

Кроме того, можно указать числа T_1 и T_2 такие, что $t_0 \leqslant T_1 \leqslant T_2$, $\tilde{x}_i(t) \geqslant \gamma_1$, $i = 1, \ldots, n$, при $t \geqslant T_1$, $\tilde{x}_{T_2} \in \widetilde{G}$. Значит, $\tilde{x}_t \in \Omega$ при $t \geqslant T_2$.

Таким образом, получаем, что $\gamma_1 \leqslant \tilde{x}_i(t) \leqslant \gamma_2$, $i = 1, \ldots, n$, при $t \geqslant T_2$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 4. В теореме 1 персистентность системы (1) (невымирание видов) обеспечивается благодаря положительности коэффициентов естественного прироста и благотворного влияния популяций друг на друга, а предельная ограниченность численностей — за счет внутривидовой конкуренции.

Условия перманентности дискретных моделей. Рассмотрим теперь систему разностных уравнений с переключениями

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp\left(h \left(c_i^{(\sigma)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(k)) + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(k-l)) \right) \right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Здесь $x_i(k)$ — плотность i-й популяции при k-й итерации, $k = 0, 1, \ldots$, функции $f_i(x_i)$ определены при $x_i \in [0, +\infty)$, $\sigma = \sigma(k)$ — функция, задающая закон переключения параметров системы, $\sigma(k) \in \{1, \ldots, N\}$, l — целое неотрицательное запаздывание, h — положительное число (шаг дискретизации), $c_i^{(s)}$, $p_{ij}^{(s)}$, $q_{ij}^{(s)}$ — постоянные коэффициенты, $s = 1, \ldots, N$, $i, j = 1, \ldots, n$.

При каждом значении k динамика системы (7) описывается одной из подсистем семейства

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp\left(h \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(k)) + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(k-l)) \right) \right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$
$$s = 1, \ldots, N.$$

Система (7) представляет собой дискретный аналог непрерывной обобщенной вольтерровской модели (1). Известно (см. [2–4]), что в широком классе случаев дискретные модели более адекватно описывают процессы, протекающие в биологических сообществах, чем непрерывные.

Введем расширенный вектор состояния системы: $x^{(k)} = \left(x^\top(k), x^\top(k-1), \ldots, x^\top(k-l)\right)^\top$. Через $x(k, k_0, x^{(k_0)})$ обозначим решение с начальными данными

$$k_0 \geqslant 0, \quad x^{(k_0)} \in \mathbb{R}_+^{n(l+1)}, \quad x(k_0) > 0. \tag{9}$$

Определение 2 [3, 4]. *Система* (7) *называется перманентной, если существуют такие числа* γ_1 *и* γ_2, $0 < \gamma_1 < \gamma_2$, *что для любого решения*

$$x(k, k_0, x^{(k_0)}) = \left(x_1(k, k_0, x^{(k_0)}), \ldots, x_n(k, k_0, x^{(k_0)}) \right)^\top$$

с начальными данными, удовлетворяющими условиям (9), *можно выбрать* $K \geqslant k_0$ *так, чтобы при всех* $k \geqslant K$ *имели место оценки* $\gamma_1 \leqslant x_i(k, k_0, x^{(k_0)}) \leqslant \gamma_2$, $i = 1, \dots, n$.

Предположение 3. Для функций $\tilde{f}_i(y_i) = f_i(\exp(y_i))$ при всех $y_i \in (-\infty, +\infty)$ выполнено условие Липшица с константой L, $i = 1, \dots, n$.

Предположение 4. Справедливы соотношения $1 + hLp_{ii}^{(s)} \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, N$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1–4. Если существует вектор* $\xi > 0$, *для которого имеют место неравенства* (4), *то система* (7) *перманентна при любом законе переключения и любом целом неотрицательном запаздывании.*

Доказательство. Строим для семейства (8) общий функционал Ляпунова—Красовского в виде

$$V(x^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i(k) + h \sum_{m=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x_i(k-m)) + h \sum_{m=1}^{l} \nu_m g(x(k-m)), \qquad (10)$$

где λ_i, μ_i, ν_m — положительные коэффициенты; $g(x(k)) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i(k))$.

Выберем номер $s \in \{1, \dots, N\}$ и вычислим приращение функционала (10) на решениях s-й подсистемы. Получим

$$\Delta V\big|_{(s)} = h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(k)) + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(k-l)) \right) +$$

$$+ h \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(f_i(x_i(k)) - f_i(x_i(k-l)) \right) +$$

$$+ h\,\nu_1 g(x(k)) + h\,(\nu_2 - \nu_1) g(x(k-1)) + \ldots + h\,(\nu_l - \nu_{l-1}) g(x(k-l+1)) - h\,\nu_l g(x(k-l)) =$$

$$= h \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j(k)) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ij}^{(s)} + \mu_j \right) + h \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j(k-l)) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_{ij}^{(s)} - \mu_j \right) + h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^{(s)} +$$

$$+ h\,\nu_1 g(x(k)) + h\,(\nu_2 - \nu_1) g(x(k-1)) + \ldots + h\,(\nu_l - \nu_{l-1}) g(x(k-l+1)) - h\,\nu_l g(x(k-l)).$$

Как и при доказательстве теоремы 1, коэффициенты λ_i и μ_i выбираем так, чтобы имели место неравенства (6). Кроме того, пусть $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_l$. Тогда при достаточно малом значении ν_1 будут справедливы оценки

$$\Delta V\big|_{(s)} \leqslant -\beta_1 \sum_{m=0}^{l} g(x(k-m)) + \beta_2, \quad s = 1, \dots, N.$$

Здесь β_1, β_2 — положительные постоянные.

Таким образом, если $x^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{n(l+1)}$ и $\sum_{m=0}^{l} g(x(k-m)) > \beta_2/\beta_1$, то $\Delta V\big|_{(s)} < 0$, $s = 1, \dots, N$.

Из предположения 2 следует, что

$$x_i(k+1) \geqslant x_i(k) \exp\left(h \left(c_i^{(\sigma)} + p_{ii}^{(\sigma)} f_i(x_i(k)) \right) \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Значит, найдутся числа $\tilde{\gamma} > 0$ и $\delta > 1$ такие, что $x_i(k+1) \geqslant \delta x_i(k)$ при $0 < x_i(k) \leqslant \tilde{\gamma}$, $i = 1, \dots, n$.

Кроме того, имеем оценку

$$x_i(k+1) \geqslant x_i(k)\exp\left(hc_i^{(\sigma)} + hp_{ii}^{(\sigma)} f_i(1)\right)\exp\left(hp_{ii}^{(\sigma)}(f_i(x_i(k)) - f_i(1)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left(hc_i^{(\sigma)} + hp_{ii}^{(\sigma)} f_i(1)\right)\exp\left(y_i(k) + hLp_{ii}^{(\sigma)}|y_i(k)|\right),$$

где $y_i(k) = \ln x_i(k)$.

Учитывая предположение 4, получаем, что число $\gamma_1 \in (0, \tilde\gamma)$ можно выбрать так, чтобы при $x_i(k) > \tilde\gamma$ выполнялось неравенство $x_i(k+1) \geqslant \gamma_1$.

Найдем число $H > 0$ такое, что если $x^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{n(l+1)}$, $\|x^{(k)}\| \geqslant H$, то

$$\sum_{m=0}^{l} g(x(k-m)) > \frac{2\beta_2}{\beta_1}.$$

Пусть

$$\rho = \max_{s=1,\ldots,N}\ \max_{i=1,\ldots,n}\ \max_{x^{(k)}\in\mathbb{R}_+^{n(l+1)},\,\|x^{(k)}\|\leqslant H} \exp\left(h\left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(k)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(k-l))\right)\right),$$

$$\widetilde G = \left\{x^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{n(l+1)} \,:\, \|x^{(k)}\| \leqslant \rho H,\ x_i(k) \geqslant \gamma_1,\ i = 1,\ldots,n\right\},$$

$$A = \sup_{x^{(k)}\in\widetilde G} V(x^{(k)}), \quad \Omega = \left\{x^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{n(l+1)} \,:\, V(x^{(k)}) \leqslant A,\ x_i(k) \geqslant \gamma_1,\ i = 1,\ldots,n\right\}.$$

Заметим, что $0 < A < +\infty$, $\widetilde G \subset \Omega$, и существует $\gamma_2 > 0$ такое, что если $x^{(k)} \in \Omega$, то $x_i(k) \leqslant \gamma_2$, $i = 1,\ldots,n$.

Рассмотрим решение $\tilde x(k) = x(k, k_0, x^{(k_0)})$ системы (7), для начальных данных которого выполнены условия (9). Можно указать числа K_1 и K_2 такие, что $k_0 \leqslant K_1 \leqslant K_2$, $\tilde x_i(k) \geqslant \gamma_1$, $i = 1,\ldots,n$, при $k \geqslant K_1$, $\|\tilde x^{(K_2)}\| < H$. Значит, $\tilde x^{(k)} \in \Omega$ при $k \geqslant K_2$.

Таким образом, получаем, что $\gamma_1 \leqslant \tilde x_i(k) \leqslant \gamma_2$, $i = 1,\ldots,n$, при $k \geqslant K_2$. Теорема 2 доказана.

Пример. Пусть система (1) имеет вид

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dot x_1(t) &=& x_1(t)\left(c_1^{(\sigma)} - a_1^{(\sigma)}x_1(t) + d_1^{(\sigma)}x_2(t) + b_4^{(\sigma)}x_4(t-\tau)\right),\\
\dot x_2(t) &=& x_2(t)\left(c_2^{(\sigma)} - a_2^{(\sigma)}x_2(t) + d_2^{(\sigma)}x_3(t) + b_1^{(\sigma)}x_1(t-\tau)\right),\\
\dot x_3(t) &=& x_3(t)\left(c_3^{(\sigma)} - a_3^{(\sigma)}x_3(t) + d_3^{(\sigma)}x_4(t) + b_2^{(\sigma)}x_2(t-\tau)\right),\\
\dot x_4(t) &=& x_4(t)\left(c_4^{(\sigma)} - a_4^{(\sigma)}x_4(t) + b_3^{(\sigma)}x_3(t-\tau)\right),
\end{array}\right. \tag{11}$$

где $c_i^{(s)}, a_i^{(s)}, b_i^{(s)}, d_i^{(s)}$ — положительные коэффициенты, $s = 1,\ldots,N$. Таким образом, рассматривается сообщество, состоящее из четырех видов, которые последовательно связаны друг с другом, причем четвертый вид влияет на первый. Получаем замкнутую петлю обратной связи.

Построим систему неравенств (4), соответствующую уравнениям (11):

$$\begin{cases} -a_1^{(s)}\xi_1 + b_1^{(r)}\xi_2 < 0, \\ -a_2^{(s)}\xi_2 + d_1^{(s)}\xi_1 + b_2^{(r)}\xi_3 < 0, \\ -a_3^{(s)}\xi_3 + d_2^{(s)}\xi_2 + b_3^{(r)}\xi_4 < 0, \\ -a_4^{(s)}\xi_4 + d_3^{(s)}\xi_3 + b_4^{(r)}\xi_1 < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Для существования положительного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^\top$, удовлетворяющего системе (12), необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_2^{(s)} > d_1^{(s)}\omega_1, \quad a_3^{(s)} > d_2^{(s)}\omega_2, \quad a_4^{(s)} > d_3^{(s)}\omega_3 + b_4^{(r)}\omega_1\omega_2\omega_3, \quad s, r = 1, \dots, N. \tag{13}$$

Здесь

$$\omega_1 = \frac{\max\limits_{r=1,\dots,N} b_1^{(r)}}{\min\limits_{s=1,\dots,N} a_1^{(s)}}, \quad \omega_2 = \frac{\max\limits_{r=1,\dots,N} b_2^{(r)}}{\min\limits_{s=1,\dots,N} \left(a_2^{(s)} - \omega_1 d_1^{(s)}\right)}, \quad \omega_3 = \frac{\max\limits_{r=1,\dots,N} b_3^{(r)}}{\min\limits_{s=1,\dots,N} \left(a_3^{(s)} - \omega_2 d_2^{(s)}\right)}.$$

Получаем, что если справедливы неравенства (13), то система (11) перманентна при любом допустимом законе переключения и любом неотрицательном запаздывании.

Литература

1. *Пых Ю. А.* Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983. 182 с.

2. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

3. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 323 p.

4. *Britton N. F.* Essential mathematical biology. London; Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. 335 p.

5. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: The Math. Soc. of Japan, 1966. 223 p.

6. *Подвальный С. Л., Провоторов В. В.* Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 126–142.

7. *Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Gnilitskaya Yu. A.* Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike domain // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 3. С. 264–277.

8. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay // IET Control Theory & Applications. 2018. Vol. 12. N 6. P. 812–818.

9. *Chen F., Wu L., Li Z.* Permanence and global attractivity of the discrete Gilpin—Ayala type population model // Computers and Mathematics with Applications. 2007. Vol. 53. P. 1214–1227.

10. *Lu Z., Wang W.* Permanence and global attractivity for Lotka—Volterra difference systems // J. Math. Biol. 1999. Vol. 39. P. 269–282.

11. *Kaszkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1999. 267 p.

12. *Chen F.* Some new results on the permanence and extinction of nonautonomous Gilpin—Ayala type competition model with delays // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2006. Vol. 7. P. 1205–1222.

13. *Зубов В. И.* Независимость эволюционного развития видов от последействий // Докл. РАН. 1992. Т. 323. № 4. С. 632–635.

14. *Lu G., Lu Zh., Enatsu Y.* Permanence for Lotka—Volterra systems with multiple delays // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2011. Vol. 12. N 5. P. 2552–2560.

15. *Bao J., Mao X., Yin G., Yuan C.* Competitive Lotka—Volterra population dynamics with jumps // Nonlinear Analysis. 2011. Vol. 74. P. 6601–6616.

16. *Zhu C., Yin G.* On hybrid competitive Lotka—Volterra ecosystems // Nonlinear Analysis. 2009. Vol. 71. P. 1370–1379.

17. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V.* Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics // Proc. 21st Mediterranean conference on Control and Automation, June 25–28, 2013. Platanias-Chania, Crite, Greece, 2013. P. 622–627.

18. *Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Platonov A. V.* Permanence and ultimate boundedness for discrete-time switched models of population dynamics // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2014. Vol. 14. N 1. P. 1–10.

19. *Александров А. Ю., Платонов А. В.* О предельной ограниченности и перманентности решений одного класса дискретных моделей динамики популяций с переключениями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 1. С. 5–16.

20. *Nakata Y., Muroya Y.* Permanence for nonautonomous Lotka—Volterra cooperative systems with delays // Nonlinear Analysis. 2010. Vol. 11. P. 528–534.

21. *Lu G., Lu Z., Lian X.* Delay effect on the permanence for Lotka—Volterra cooperative system // Nonlinear Analysis. 2010. Vol. 11. P. 2810–2816.

22. *Xu R., Wang Z.* Periodic solutions of a nonautonomous predator-prey system with stage structure and time delays // J. Comput. Appl. Math. 2006. Vol. 196. P. 70–86.

23. *Jingru Z., Chen L.* Permanence and global stability for a two-species cooperative system with time delays in a two-patch environment // Comput. Math. Appl. 1996. Vol. 32. P. 101–108.

24. *Xu R., Chaplain M. A. J., Davidson F. A.* Permanence and periodicity of a delayed ratio-dependent predator-prey model with stage structure // J. Math. Anal. Appl. 2005. Vol. 303. P. 602–621.

25. *Александров А. Ю., Воробьева А. А., Колпак Е. П.* О диагональной устойчивости некоторых классов сложных систем с запаздыванием // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 72–88.

26. *Liberzon D., Morse A. S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems Magazine. 1999. Vol. 19. N 15. P. 59–70.

27. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.* Stability criteria for switched and hybrid systems // SIAM Rev. 2007. Vol. 49. N 4. P. 545–592.

28. *Aleksandrov A., Mason O.* Absolute stability and Lyapunov—Krasovskii functionals for switched nonlinear systems with time-delay // Journal of the Franklin Institute. 2014. Vol. 351. P. 4381–4394.

Статья поступила в редакцию 1 апреля 2020 г.
Статья принята к печати 28 мая 2020 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Permanence conditions for models of population dynamics with switches and delay *

A. Yu. Aleksandrov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu. Permanence conditions for models of population dynamics with switches and delay. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 88–99.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.201 (In Russian)

Some classes of discrete and continuous generalized Volterra models of population dynamics with parameter switching and constant delay are studied. It is assumed that there are relationships of the type “symbiosis”, “compensationism” or “neutralism” between any two species in a biological community. The goal of the work is to obtain sufficient conditions for

* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant N 19-01-00146-a).

the permanence of such models. Original constructions of common Lyapunov—Krasovsky functionals are proposed for families of subsystems corresponding to the switched systems under consideration. Using the constructed functionals, conditions are derived that guarantee permanence for any admissible switching laws and any constant nonnegative delay. These conditions are constructive and are formulated in terms of the existence of a positive solution for an auxiliary system of linear algebraic inequalities. It should be noted that, in the proved theorems, the persistence of the systems is ensured by the positive coefficients of natural growth and the beneficial effect of populations on each other, whereas the ultimate boundedness of species numbers is provided by the intraspecific competition. An example is presented demonstrating the effectiveness of the developed approaches.

Keywords: population dynamics, permanence, ultimate boundedness, switches, delay, Lyapunov—Krasovskii functional.

References

1. Pykh Yu. A. *Ravnovesie i ustojchivost' v modeljah populjacionnoj dinamiki* [*Equilibrium and stability in models of population dynamics*]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 182 p. (In Russian)

2. Svirezhev Yu. M., Logofet D. O. *Ustojchivost' biologicheskih soobshhestv* [*Stability of biolojical communities*]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p. (In Russian)

3. Hofbauer J., Sigmund K. *Evolutionary games and population dynamics.* Cambridge, Cambridge University Press, 1998, 323 p.

4. Britton N. F. *Essential mathematical biology.* London, Berlin, Heidelberg, Springer Publ., 2003, 335 p.

5. Yoshizawa T. *Stability theory by Liapunov's second method.* Tokyo, The Math. Soc. of Japan Publ., 1966, 223 p.

6. Podval'nyi S. L., Provotorov V. V. Startovoe upravlenie parabolicheskoj sistemoj s raspredelennymi parametrami na grafe [Start control of a parabolic system with distributed parameters on a graph]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2015, iss. 3, pp. 126–142. (In Russian)

7. Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Gnilitskaya Yu. A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 3, pp. 264–277.

8. Aleksandrov A., Mason O. Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay. *IET Control Theory & Applications*, 2018, vol. 12, N 6, pp. 812–818.

9. Chen F., Wu L., Li Z. Permanence and global attractivity of the discrete Gilpin—Ayala type population model. *Computers and Mathematics with Applications*, 2007, vol. 53, pp. 1214–1227.

10. Lu Z., Wang W. Permanence and global attractivity for Lotka—Volterra difference systems. *J. Math. Biol.*, 1999, vol. 39, pp. 269–282.

11. Kaszkurewicz E., Bhaya A. *Matrix diagonal stability in systems and computation.* Boston, Basel, Berlin, Birkhauser Press, 1999, 267 p.

12. Chen F. Some new results on the permanence and extinction of nonautonomous Gilpin—Ayala type competition model with delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2006, vol. 7, pp. 1205–1222.

13. Zubov V. I. Nezavisimost' jevoljucionnogo razvitija vidov ot posledejstvij [Independence of evolutionary development of species from aftereffects]. *Doklady RAN* [Proceedings of Russian Academy of Sciences], 1992, vol. 323, N 4, pp. 632–635. (In Russian)

14. Lu G., Lu Zh., Enatsu Y. Permanence for Lotka—Volterra systems with multiple delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, vol. 12, N 5, pp. 2552–2560.

15. Bao J., Mao X., Yin G., Yuan C. Competitive Lotka—Volterra population dynamics with jumps. *Nonlinear Analysis*, 2011, vol. 74, pp. 6601–6616.

16. Zhu C., Yin G. On hybrid competitive Lotka—Volterra ecosystems. *Nonlinear Analysis*, 2009, vol. 71, pp. 1370–1379.

17. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V. Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics. *Proc. 21st Mediterranean conference on Control and Automation*, June 25–28, 2013. Platanias-Chania, Crite, Greece, 2013, pp. 622–627.

18. Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Platonov A. V. Permanence and ultimate boundedness for discrete-time switched models of population dynamics. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2014, vol. 14, N 1, pp. 1–10.

19. Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V. O predel'noj ogranichennosti i permanentnosti reshenij odnogo klassa diskretnyh modelej dinamiki populjacij s perekljuchenijami [On the ultimate boundedness and permanence of solutions for a class of discree-time switched models of population dynamics]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2014, iss. 1, pp. 5–16. (In Russian)

20. Nakata Y., Muroya Y. Permanence for nonautonomous Lotka—Volterra cooperative systems with delays. *Nonlinear Analysis*, 2010, vol. 11, pp. 528–534.

21. Lu G., Lu Z., Lian X. Delay effect on the permanence for Lotka—Volterra cooperative system. *Nonlinear Analysis*, 2010, vol. 11, pp. 2810–2816.

22. Xu R., Wang Z. Periodic solutions of a nonautonomous predator-prey system with stage structure and time delays. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, vol. 196, pp. 70–86.

23. Jingru Z., Chen L. Permanence and global stability for a two-species cooperative system with time delays in a two-patch environment. *Comput. Math. Appl.*, 1996, vol. 32, pp. 101–108.

24. Xu R., Chaplain M. A. J., Davidson F. A. Permanence and periodicity of a delayed ratio-dependent predator-prey model with stage structure. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, vol. 303, pp. 602–621.

25. Aleksandrov A. Yu., Vorob'eva A. A., Kolpak E. P. O diagonal'noj ustojchivosti nekotoryh klassov slozhnyh sistem s zapazdyvaniem [On the diagonal stability of some classes of complex systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 72–88. (In Russian)

26. Liberzon D., Morse A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, vol. 19, N 15, pp. 59–70.

27. Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev.,* 2007, vol. 49, N 4, pp. 545–592.

28. Aleksandrov A., Mason O. Absolute stability and Lyapunov—Krasovskii functionals for switched nonlinear systems with time-delay. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, vol. 351, pp. 4381–4394.

Received: April 01, 2020.
Accepted: May 28, 2020.

Authors' information:

Alexander Yu. Aleksandrov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor;
a.u.aleksandrov@spbu.ru