Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет

Кафедра Исследования Операций

Дубровская Анна Викторовна

# Жадные алгоритмы составления многопроцессорных расписаний

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., доцент Григорьева Н. С.

Рецензент:
профессор Романовский И. В.

Санкт-Петербург
2016

# Оглавление

# 1. Введение

Задачи упорядочения носят самый общий характер. Они возникают повсюду, где существует возможность выбора той или иной очередности работ: при распределении работ на производстве, составлении расписания приземления самолетов, обслуживании клиентов в банках, формировании очередности выполнения программ вычислительным центром и организации отдыха в праздничные дни. Наша цель - изучить то общее, что характеризует такие задачи независимо от их конкретного содержания.[4]

Иногда упорядочение осуществляется случайно, более часто работы выполняются в том порядке, в котором они возникают. Мы не задумываемся о результативности дисциплины "первый пришел- первый обслужен", поскольку она отвечает присущему нам чувству естественного порядка. Однако такая дисциплина, может быть, и приемлема при покупке билетов в театральных кассах, но совсем не обязательна для выполнения работ на предприятии.[4]

В приложениях основная трудность упорядочения заключается в том, что возникающие задачи не могут быть расчленены на самостоятельные, не связанные друг с другом части. Более того, они, как правило, увязаны с рядом других проблем, требующих одновременного решения[4]

# 2. Обзор

В трех статьях, упоминаемых ниже, будет описываться следующая проблема $P$: пусть даны $m$ идентичных процессоров, т.е. имеющих скорости $f[L] = 1$, $L = 1, \ldots, m$, и множество $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$ заданий, для каждого из которых дана длина(время выполнения) $c[i]$ и крайний срок $d_i > 0$. Предполагается, что все $d[i], c[i]$ целые. Отношения предшествования читаются с помощью орграфа без циклов $G$ с $n$ дугами, по одной на каждое задание из $T$. Граф порождает отноение $\prec$ на $T$, определяемое так: $T_i \prec T_j$ тогда и только тогда, когда $G$ содержит направленный путь из вершины для $T_i$ в вершину для $T_j$. В этом случае будем говорить, что $T_i$ предшествует $T_j$, то есть $T_j$ не может начать выполнение до завершения $T_i$

Пусть даны $m, T, \prec$, тогда допустимым расписанием $T$ называется отображение $\sigma$ из $T$ в неотрицательные вещественные числа, такое что

$a)|\{T_i \in T : t - 1 \leq \sigma(T_i) < t\}| \leq m \, \forall t \geq 0$; и

$b)\sigma(T_i) + 1 \leq \sigma(T_j)$ при $T_i \prec T_j$

Функция $\sigma$ назначает время начало выполнения каждому заданию $T_i$, которое будем выполняться в $[\sigma(T_i), \sigma(T_i)+c[i]]$. Первое условие означает, что не более $m$ заданий могут выполняться одновременно, таким образом будет возможно назначить каждое задание на свой процессор. Второе условие означает, что выполняются отношения предшествования

Заметим, что крайние сроки $d_i$ не укладываются в наше определение допустимого расписания. Функция максимального запаздывания допустимого расписания $\sigma$ определяется следующим образом

$$L_{max}(\sigma) = max\{\sigma(T_i) + 1 - d_i : T_i \in T\}$$

Если $L_{max}(\sigma) \leq 0$, будем говорить, что $\sigma$ *удовлетворяет всем крайним срокам*, и $L_{max}(\sigma)$ отражает запаздывания. Если $L_{max}(\sigma) > 0$, то хотя бы одно задание запаздывающее, и $L_{max}(\sigma)$ равно максимальному из запаздываний. Для допустимого расписания будет выполнено $L_{max} \leq 0$

Один процессор может исполнять лишь один сегмент в каждый мо-

мент времени и каждый сегмент может исполняться не более, чем на одном процессоре. Вытеснения любого выполняемого сегмента запрещены.

## 2.1. M.Y.Kovalyov, Jia Xu

Равномерное планирование с ограничениями на времена освобождения, крайние сроки, отношения предшествования и исключения
Бинарное отношение *исключения* определено на множестве задач $T(P)$, так что для любой пары $i, j \in T(P)$ $i$ исключает $j$, если $i$ и $j$ не могут выплняться одновременно даже на различных процессорах. Каждая задача $i \in S(P)$ имеет время $r[i]$, в которое оно может начать выполнение.

Задача состоит в том, чтобы найти допустимое расписание, то есть такое, что для него выполнены все вышеприведенные требования, и каждый сегмент заканчивает свое выполнение до своего крайнего срока, или доказать, что его не существует.

Приложения задачи лежат в планировании до запуска распределения работ в мультипроцессорных системах с жестким временем. Практические примеры включают работу с данными в подводных лодках, расписания доставки авиационного вооружения, контроль движения транспорта, выпуска продукции, робототезнику, управление работой АЭС, и т.д.

Метод ветвей и границ для решения вышеназванной проблемы для случая идентичных процессоров был представлен в статье Xu J., "Multiprocessor scheduling of processes with release times, deadlines, precedence, and exclusion relations", IEEE Transaxtions on Sowtware Engineering, vol 19, Feb 1993.

Алгоритм, представленный в статье $Xu$ использует технику метода ветвей и границ. Он имеет дерево поиска, в котором для корневой вершины стратегия, выбираюшая в первую очередь наименьший крайний срок, используется для вычисления действующего начального расписания, которое удовлетворяет условиями на времена освобождения и всем

отношениям предшествования и исключения.

Для каждой дуги дерева поиска, найден самый поздний сегмент $l$, для которого $L_l = L_{max}$ в допустимом начальном решении, подсчитанный для каждой дуги. Определены множества сегментов $Z[l]$ и "используемых временных периодов" $UTP[l]$. Соответствующие определения приведены в вышеназванной статье $Xu$.

Утверждается, что если действующее начальное решение не осуществимо, то осуществимое расписание может быть найдено только если возможно перераспределение некоторого сегмента $i \in Z[l]$ так, что некоторый отрезок используемого временного периода $UTP[l]$ занят $i$. Также если $UTP[l] = \emptyset$, то не существует осуществимого решения для задачи, соответствующей данной дуге.

На основе этих утверждений, если $UTP[l] \neq \emptyset$, то предствалены "расширенные множества" $G_1[l]$ и $G_2[l]$, где $G_1[l], G_2[l] \subseteq \{(i,j)|i,j \in Z[l]\}$, и создаются вершины потомков $|G_1[l]| + |G_2[l]|$. Для каждой вершины-потомка, соответствующей паре сегментов $(i,j) \in G_1[l]$, назначается новое отношение - $j$ предшествует $i$. Для каждой вершины-потомка $(i,j) \in G_2[l]$, назначается отношение $j$ перед $i$. Это отношение определяется так: если $j$ перед $i$, то $i$ не может начать выплнение до того, как начинает выолнение $j$

Цель введения таких отношений для всех $i,j \in G_2[l]$ состоит в покрытии всех возможных способов нахождения осуществимых расписаний. Множество $G_1[l]$ и соответствующие отношения предшествования используются для ускорения процесса нахождения осуществимого расписания

Допустимое начальное решение пересчитывается для каждой верины-потомка с использованием новых отношений "перед" и "предшествует", и процесс ветвления продолжается до тех пор, пока не построено осуществимое расписание, или ни одна вершина не может быть разветвлена. В последнем случае не существует осуществимого решения для исходной задачи с идентичными процессорами

Представлены три примера, показывающие, что даже если допустимое начальное решение не осуществимо и $UTP[i] = \emptyset$, осуществимое

расписание существует. В примерах показано, что используемые временные периоды и множество $UTP[l]$ не могут быть использованы для определения множества $G_2[l]$

Авторы обнажудили в статье $Xu$ ошибку в определении подходящего сегмента. Условие $iv)$ в этом определении должно быть прочитано как

$$iv) \neg\exists i : i\, EXCLUDES\, j \wedge s[i] \leq t \wedge \neg(e[i]) \leq t$$

Здесь $s[i]$ - начало выполнения сегмента $i$

Если $s[i] < t$ используется в определении, то отношение исключения может не выполняться в допустимом начальном решении, полученном с помощью алгоритма, что влечет к неприемлемому решению исходной задачи. Алгоритм $Xu$ может быть исправлен удалением требования $UTP[l] \neq \emptyset$ из определения $G_2[l]$

### 2.1.1. Ветвление

Для функции назначения $\alpha : S(P) \rightarrow \{0, 1, \ldots, M\}$, если $\alpha(i) = L, L \in \{1, \ldots, M\}$, то сегмент $i$ должне быть назначен на процессор $L$. Если $\alpha(i) = 0$, то $i$ может быть назначен на любой процессор.

В начале работы алгоритма $\alpha(i) = 0$ для всех $i \in S(P)$

Назначаются времена высвобождения и крайние сроки соответственно с отношениями предшествования и исключения и значения функции назначения $\alpha(i)$ следующим образом:

Отрегулированное время высвобождения $r'[i, L]$ сегмента $i$ на процессоре $L$ опрделеяется как

$$r'[i, L] = max\{r[i], A, B, C\}$$

,где $A = min\{r'[j, Q] + c[j]/f[Q] | Q = 1, \ldots, M\}$, еслм $\exists j : j$ предшествует $i$, и $A = 0$, иначе

$$B = r'[j, L] + c[j]$$

, если $\exists j : j$ предшествует $i \wedge a(j) = a(i) = L \neq 0$, и $B = 0$, иначе
$C = \infty$, если $a(i) = Q, Q \neq L \wedge Q \neq 0$, и $C = 0$, иначе

Отрегулированный крайний срок $d''[i]$ сегмента $i$ определяется как

$$d''[i] = min\{d[i], D, E\}$$

, где $D = d''[j] - c[j]min\{1|L = 1, \ldots, M\}$, если $\exists j : i$ предшествует $j$, и $D = \infty$, иначе,
$E = d''[j] - c[j]$, если $\exists j : i$ предшествует $j \wedge a(i) = a(j) = L \neq 0$, и $E = \infty$, иначе

В любой момент времени $t, t \in [0, \infty)$, будем говорить, что сегмент $j$ может быть избран в $t$ на $L$ титтк:
$i) \neg\exists i, i \neq j : i$ выполняется в момент $t$ на $L$
$ii) t \geq r'[j, L] \wedge \neg\exists L', t' : j$ выполняется в $t'$ на $L'$
$iii) \neg\exists i : i$ предшествует $j \wedge \neg(e[i] \leq t)$
$iv) \neg\exists i : i$ исключает $j \wedge (s[i] < t \wedge e[i] > t) \vee s[i] \geq t \wedge t + c[j]/f[L] > s[i])$ выполняется на
$v) \neg\exists Q, Q \in \{1, \ldots, M\}, Q \neq L : \alpha(j) = Q$

Это определение гарантирует, что в любой момент $t$, если сегмент $j$ может быть избран в $t$ на $L$, то $j$ может быть поставлен на исполнение в $t$ на процессор $L$, и он будет удовлетворять всем временам высвобождения, отношениям и ограничениям по функции $\alpha(j)$

В эвристическом алгоритме, подсчитывающем допустимое начальное решение, задачи назначаются в конец текущей последовательности. На каждой итерации пределяется множество доступных задач. Из этого множества выбирается задача стратегией $ST \in \{ST1, ST2, ST3\}$.$ST1$ выбирает в первую очередь задачи с наименьшим крайним сроком. Стратегия $ST2$ выбирает задачу с наименьшим значением $d'[j] - c[j]$. Согласно $ST3$, выбирается задача с наименьшим $d'[j] - min\{r'[j, L] + c[j]/f[L]|L = 1, \ldots, M\}$. Далее выбранная задача назначается на процессор, на котором она может быть исполнена как можно раньше. Расписание сроится для каждой стратегии $ST$. Расписание с наименьшим запаздыванием $L_{max}$ назначается как допустимое начальное решение

На каждой итерации подсчитываются значения $T_1, \ldots, T_M$, где $T_L$ - наименьшее значение $t$, при котором хотя бы одно задание может быть избран в $t$ на $L$. Таким образом множество $A_L$ заданий, допу-

стимых к избранию в $T_L$ на процессор $K$ определено. Среди множеств $A_L, L = 1, \ldots, M$, задание $j$ выбирается согласно стратегии $ST = ST1$. В случае связей, задание $j$ такое что $\exists k : j$ предшествует $k$ выбирается в первую очередь. В случае дальнейших связей, выбирается задание с наименьшим временем выполнения. Определено множество $B_j$ процессоров $L$, где $j$ может быть избрано в $T_L$ на $L$. Выбирается тот процессор $L \in B_j$, где $j$ может быть выполнено раньше. Задание $j$ назначается на время с $s[j] = T_L$ до $e[j] = s[j] + c[j]$ на процессоре $L$ . Значения $T_1, \ldots, T_M$ исправляются, и указанные выше вычисления повторяются, пока не распределены все задания. Та же процедура используется для $ST = ST2$ и $ST = ST3$

Заметим, что для построения начального решения может быть использована любая другая разумная стратегия

Предположим, что допустимое начальное решение не осуществимо. Пусть $l$ - задание с максимальным запаздыванием из этого расписания. (Если существует более одного задания с максимальным запаздыванием, возьмем в качестве $l$ выполняющийся позднее)

Определим множество заданий $Z[l]$ рекурсивно по следующим правилам:

$$l \in Z[l];$$

$$\forall i,\ if\ \exists j, L,\ j \in Z[l], L \in \{1, \ldots, M\} :$$

$$max\{s[i], r'[j, L]\} + c[j] \leq d'[j] \wedge r'[j, L] < e[i], then\ i \in Z[l]$$

**Теорема 1** Предположим, что существует неосуществимое допустимое начальное решение. Если осуществимое расписание существует, то оно имеет одно из следующих свойств:
$i$) некоторое задание $i \in Z[l]$, назначенное на процессор $L$ в допустимом начальном решении, в осуществимом расписании выполняется на процессоре $Q \neq L$
$ii$) задания $i, j \in Z[l]$, назначенные на один процессор в данном порядке в начальном решении, в осуществимом расписании выполяются на том же процессоре в обратном порядке $j, i$

*iii*) некоторое задание $i \in Z[l]$ в осуществимом расписании выполняется позже, чем в начальном решении

Заметим, что требование того, чтобы $i$ выполнялось позже $t$ равносильно $M$ условиям: $r'[i, L] = t - c[i] + 1, L = 1, \ldots, M$

Предположим, что допустимое начальное решение не осуществимо. Множество $r^{old}[i, Q] = r'[i, Q], i \in S(P), Q = 1, \ldots, M$. Для каждого $i \in Z[L]$, назначенного на процессор $L$, мы установим следующие новые требования:
*a*)$\alpha(i) = Q, Q \in \{1, \ldots, M\}, Q \neq L, i$, если $\alpha(i) = 0$,
*b*)$i$ предшествует $j$, если $j$ непосредственно предшествует $i$ на $L$ и $\neg$($j$ предшествует $i$),
*c*)$r'[i, Q] = max\{r^{old}[i, Q], e[i] - c[i] + 1\}, Q = 1, \ldots, M$

Для любого $i \in Z[l]$ и любого назначения $a), b), c)$, создается соответсвующая вершина-потомок в дереве поиска, пересчитывается значение $d'[i]$ и $r'[i, L]$ для $i \in S(P), L = 1, \ldots, M$ и продолжается процесс ветвления. Теорема 1 показывает, что этот процесс приводит нахождению осуществимого решения.

### 2.1.2. Нижняя граница

Описана процедура подсчета нижнией границы запаздывания любого допустимого начального решения, подсчитанного в любой вершине дерева поиска

Сначала рассматривается ослабленная задача. Множество заданий для постановки в расписание $X \subseteq S(P)$, отношения не заданы и $\alpha(i) = 0 \forall i \in X$

В ослабленной задаче, времена освобождения и крайние сроки сегментов из $X$ переустанавливаются по правилам:

$$r[v_1] = min\{r^{old}[i] | i \in X\},$$

$$r[v_2] = min\{r^{old}[i] | i \in X - \{v_1\}\},$$

$$\ldots$$

$$r[v_K] = min\{r^{old}[i] | i \in X - \{v_1, \ldots, v_{K-1}\}\},$$

$$r[i] = r[v_k], i \in X - \{v_1, \ldots, v_k\},$$

$$d[u_1] = max\{d^{old}[i] | i \in X\},$$

$$d[u_2] = max\{d^{old}[i] | i \in X - \{u_1\}\},$$

$$\ldots$$

$$d[u_k] = max\{d^{old}[i] | i \in X - \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}\},$$

$$d[u_i] = max\{d[u_k] | i \in X - \{u_1, \ldots, u_k\}\}$$

Так как ослабленная задача содержит меньше ограничений, нижняя граница $LB(X)$ для ослабленной границы является также нижней границей и для ослабленной задачи

Поиск расписания с минимальным запаздыванием для ослабленной проблемы может быть ограничен расписаниями, в которых задания $v_L$ и $u_L$ распределены на процессор $L$ в данном порядке, $L = 1, \ldots, K$. Для такого расписания, пусть $C_L$ - общее время подсчета заданий на процессоре $L, i.e. C_L = \sum_{i \in N_L} c[i]$, где $N_L$ - множество заданий процессора $L, L = 1, \ldots, k$. Тогда максимальное запаздывание заданий из $N_L$ хотя бы $r[v_L] + C_L - d[u_L]$, и запаздывание расписания может быть оценено

$$L_{max} \geq \max_{1 \leq L \leq K} \{r[v_l] + C_L - d[u_L]\} = \max_{1 \leq L \leq K} \{C_L - (d[u_L] - r[v_L]\} \geq$$

$$\geq \max_{1 \leq L \leq K} \{C_L - (d[u_L] - r[v_L]) f[L]\} \geq$$

$$[\sum_{L=1}^{K}](C_L - (d[u_L] - r[v_L])) = \sum_{i \in X} c[i] - \sum_{L=1}^{K} (d[u_L] - r[v_L]) = const$$

$$\frac{\sum\limits_{i \in X} c[i] - \sum\limits_{L=1}^{K} (d[u_L] - r[v_L])}{K} = LB(X)$$

Следующая процедура может быть использована для подсчета нижней границы для исходной задачи

Шаг 1. Присвоим $X = Y = Z[l]$, вычислим $LB(X)$. Установим $LB_1 LB_2 = LB(X)$. Если $|X| < M$, то перейдем к шагу 2. Если $|X| > M$, перейдем к шагу 3

Шаг 2. Вычислим $LB(X_i)$ для $X_i = X \cup \{i\}, i \in S(P) - X$. Найдем

$LB(X_i) = max\{LB(X_i)|i \in S(P) - X\}$. Если $LB(X_j) > LB_1$, то множество $LB_1 = LB(X_j)$, и $X = X_j$. Если $|X| = |S(P)|$, перейдем к шагу 4. Иначе, повторяем шаг 2. Если $LB(X_j) \leq LB$, перейдем к шагу 4

Шаг 3. Подсчитаем $LB(Y_i)$ для $Y_i = Y - \{i\}, i \in Y$. Найдем $LB(Y_i) = max\{LB(Y_i)|i \in Y\}$. Если $LB(Y_j) > LB_2$, то множество $LB_2 = LB(Y_j)$ и $Y = Y_j$. Если $|Y| = 1$, переходим к шагу 4. Иначе, повторяем шаг 3. Если $LB(Y_j) \leq LB_2$, переходим к шагу 4

Шаг 4. Подсчитаем $LB_3 = max\{min\{r'[i, L]+c[i]/f[L]|L = 1, \ldots, M\}-d'[i]|i \in S(P)\}$. Присвоим $LB = max\{LB_1, LB_2, LB_3\}$

Алгоритм был использован для решения нескольких тестовых задач с двумя единообразными процессорами с числом сегментов до 10. Во всех случаях, алгоритм не делал разветвлеие более чем дважды для нахождения осуществимого расписания или определения того, что оно не существует. Для каждого из четырех примеров, представленных $Xu$, только для получения осуществимого расписания необходимо одно ветвление

По сравнению с алгоритмом $Xu$, алгоритм, представленный в этой статье, имеет следующие преимущества:

- могут использоваться различные стратегии нахождения допустимого начального решения. Таким образом увеличивается вероятность начального решения быть осуществимым

- процесс ветвления включает модификации для ограничений по времени и упорядочивания. Ситуации, в которых изменение только ограничений на упорядочивание не приводит к улучшению структуры допустимого начального решения, могут быть опущены, и будут использованы только временные ограничения

- процедура подсчета нижней границы является более общей и сильной. Она включает формулы, введенные $Xu$, как частный случай

Поэтому можно предполагать, что алгоритм более эффективен в случае идентичных и и единообразных процессоров

## 2.2. F.Yalaoui, C.Chu

Расписания на параллельных машинах для минимизации общего запаздывания

### 2.2.1. Теоретическая основа

Заметим, что расписание соответствует перестановке множества $\{1, 2, \ldots, N$
На самом деле для каждой перестановки соответствующее расписание может быть построено постановкой каждой следующей нераспределенной работы в списке на машину, освобождающуюся раньше других. Обратно, для любого полуактивного расписания, перестановка может быть получена упорядочением работ в порядке неубывания времен начала исполнения. В результате, частичное расписание является перестановкой подмножества из $\{1, 2, \ldots, N\}$. Далее понятие расписание может быть истолковано как частичное или полное расписание, если не указано дополнительных предположений. Будут использованы следующие понятия:

$\cdot J(K)$ : множество работ, распределенных в расписании $K$;

$\cdot J_m(K)$ : множество работ, распределенных на процессор $m$ в расписании $K$;

$\cdot \Delta_i(K)$ : время окончания выполнения работы, непосредственно предшествующей $i$ в расписании $K$. Если работа $i$ первая в $K$, $\Delta_i(K)$ считаем равным нулю без потери общности;

$\cdot T_m(K)$ : общее время запаздывания работ, распределенных на машину $m$ в расписании $K$;

$\cdot \phi_m(K)$ : время выполнения распределенной последней работы на машине $m$ в расписании $K$;

$\cdot \mu(K)$ : машина, освобождающаяся раньше других в расписании $K$;

$\cdot K \circ i$ : новое расписание, полученное добавлением работы $i$ перед $K$(т.е. добавлением работы $i$ на $\mu(K)$);

$\cdot \Sigma(K, i)$ : расписание, полученное добавлением к $K \circ i$ частично оптимального расписания оставшихся работ

При отстутствии неопределенности

$$J(K), J_m(K), \Delta_i(K), C_i(K), T_m(K), \phi_m(K)$$

, и $\mu(K)$ можно упростить до $J, J_m, \Delta_i, C_i, T_m, \phi_m$ и $\mu$, соответственно

Пусть $\mu'(K)$ - машина, свободная сразу после машины $\mu(K)$ и перед всеми остальными машинами системы

Тогда имеет место утверждение

**Теорема 1:** Существует оптимальное расписание, такое что число работ, распределенных на любую из машин $m$ не превосходит $N-M+1$

**Следствие** Любое частичное расписание $K$, такое что число работ, распределенных на любую из машин $m$ не превосходит $N - M + 1$, может быть отброшено. В оптимальном расписании, полученном из $K$, число дополнительных работ на машине $m$ не превосходит $U_m(K) = min[N - M + 1 - |J_m(K)|, N - |J(K)|]$.

В добавок, обозначим через $U^*$ максимум по всем $U_m(K)'; i.e. U^* = \max 1 \leq m \leq M U_m(K)$, и также $U = U_\mu(K) = min[N-M+1-|J_\mu(K)|, N-|J(k)|]$

**2.2.1.1 Отношения доминирования**

Для задачи минимального суммарного запаздывания на идентичных параллельных машинах получены следующие результаты

**Теорема 2:** Для любого частичного расписания $K$ и любой работы $i$, нераспределенной в $K$, если существует другая нераспределенная работа $j : c_j \leq c_i, d_j \leq \phi_\mu + c_j$ и $(c_i - c_j)U^* \leq min\{\phi_{\mu'} - \phi_\mu, d_i - (\phi_\mu + p_i)\}$, то $\Delta(K, i)$ доминируется

**Теорема 3:** Для любого частичного расписания $K$ и любой работы $i$, нераспределенной в $K$, если существует другая нераспределенная работа $j : c_j \leq c_i, \phi_\mu + c_j \leq d_j$ и $(c_i - c_j)U^* \leq min\{(d_i - d_j) - (c_i - c_j), (\phi_{\mu'} + c_j) - d_j\}$, то $\Delta(K, i)$ доминируется

**Теорема 4:** Для любого частичного расписания $K$ и любой работы $i$, нераспределенной в $K$, если другая нераспределенная работа $j : 0 \leq c_j - c_i \leq \underline{c}, d_j \leq \phi_\mu + c_j \leq d_i$ и $(c_j - c_i)(U-1) \leq min\{\phi_{\mu'} - \phi_\mu, d_i - (\phi_\mu + c_i)\}$, то $\Delta(K, i)$ доминируется. Здесь $\underline{c}$ - наименьшее время выполнения из всех нераспределенных работ

Эти три свойства могут быть доказаны по одной схеме. Изучаются два случая: в первом работы $i, j$ распределяются на один процессор, а во втором на разные. Для обоих случаев, нужно проверить, существует ли другое расписание $S$ не хуже $\Sigma(K, i)$. Такое расписание может быть получено перестановкой позиций работ $i$ и $j$

**Теорема 5:** Для любого частичного расписания $K$ и любой работы $i$, нераспределенной в $K$, если другое частчное расписание $K'$ такое что $J(K') = J(K) \cup \{i\}, T(K') \leq T(K \circ i)$ и $[N - |J(K)| - 1]\Delta \leq T(K \circ i) - T(K')$, то $\Delta(K, i)$ доминируется. Здесь $\Delta = \max_{l=1}^{M}(\phi'_k - \phi_k)$, где $\phi_k, \phi'_k$ - наименьшие времена выполнения в частичных распианиях $K \circ i, K'$, соответственно

#### 2.2.1.2 Нижние границы

Разработана схема ограничений снизу для данной задачи. Используя стандартную схему ослабления, трудно найти хорошие нижние границы. Обычно нижняя граница бывает получена ослаблением отношений предшествоания. Это связано с фактом того, что соответствующая задача на одной машине является $NP$-трудной. Была получена нижняя граница с использованием нового метода MSPTL (Multiple Shortest Processing Time Lists). Без потери общности, предположим, что работы пронумерованы в порядке неубывания времен исполнения $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_N$. Строится $M$ однопроцессорных расписаний: для $k$-го расписания, работы от $k$ до $N$ распределяются в порядке возрастания индексов. Пусть $C_{k,j}$ – $j$-е наименьшее время исполнения в $k$-м однопроцессорном расписании. Пусть $G$ - множество этих времен выполения. Мы отсортируем значения из множества $G$ в порядке возрастания. Пусть $C_{MSPTL[j]}$ – $j$-й элемент отсортированного множества. Используя метод $MSPTL$, нижняя граница получается присвоением $j$-го наименьшего крайнего срока $C_{MSPTL,[j]}$

**Теорема 6:** Пусть $(d_{[1]}, d_{[2]}, \ldots, d_{[N]})$ - ряд, полученный сортировкой $(d_1, d_2, \ldots, d_N)$ в порядке неубывания. Тогда $\sum_{j=1}^{N} max(C_{MSPTL,[j]} - d_{[j]}, 0)$ - нижняя граница

В алгоритме $B\&B$, предложенном $Azizoglu$ и $Kirca$ в статье "Tardiness minimization on parallel machines", Int'l J.of Production Economics, vol.55,

1998, используется нижняя граница, введенная в работе Kondakci, S., Kirca O., Azizoglu M., "An efficient algorithm for single machine tardiness problem", Int'l J.of Production Economics, vol.36, 1994. Авторы предполагают, что работы пронумерованы в порядке $SPT$ и предлагают нижнюю границу равной $\sum_{j=1}^{N} max\{\frac{\sum_{h=1}^{j} c_h}{M} - d_{[j]}, 0\}$. По $Azizoglu$ и $Kirca$, расширяя этот результат на параллельную задачу, предложена следующая нижняя граница для частичного расписания $K$:

$$\sum_{j \notin J(K)} max\{\sum_{j=1}^{N}\{\phi_\mu(K) + \frac{c_h}{M}\} - d_{|j|}, 0\}$$

, где $d_{[j]}$ - наименьший $j$-й крайний срок нераспределенных задач из $K$

#### 2.2.1.3 Верхние границы

Верхние ограничения генерируются эвристически, используя выбор лучшего решения, полученного после разрешения задачи с различными правилами приоритета. Эти правила $SPT, EDD, Minimum\,Slack$. Эта техника является приложением метода, предложенного в статье Dogramaci A., Surkis J., "Evaluation of a heuristic for scheduling independent jobs on parallel identical processors", Management Science, vol.25, 1979

### 2.2.2. Алгоритм метода ветвей и границ

Алгоритм $B\&B$ основывается на предложенных ранее в Yalaoui, Chu, "Parallel Machine Scheduling To Minimize Total Completion Time with Release Dates Constraints", acc.by MCPL'2000 conf, Grenoble, France, 07/2000; "Parallel Machine Scheduling To Minimize Total Completion Time with Release Dates Constraints: An exact Method, Submit for publication to Discrete Appl-d Math.J-l" для решения задачи составления расписания на параллельных процессорах с целью минимизации общего времени работы. Каждая вершина представляет собой частичное решение. Сначала нужно вычислить начальное решение, отражающее первую верхнюю оценку. Получено первое решение, как сказано выше, выбором наилучшего решения в результате применения эвристических алгоритмов, основанных на правилах SPT(Shortest Processing Times),

EDD(Earliest Due Date)Minimum Slack. Различные стадии работы алгоритма являются фазами распределения работ на машине, освобождающейся раньше других в данном частичном расписании. С этой целью, множество неисследованных вершин упорядочивается в порядке возрастания нижних границ. Для каждой вершины, машины упорядочиваются в порядке неубывания времен освобождения. Перед созданием новой вершины, проверяются ряды отношений доминирования. Для каждой вершины дерева поиска, которая не может быть исключена отношениями доминирования, подсчитывается нижняя граница. Если значение полученной нижней границы не меньше значения текущего решения или значения верхней границы, вершина исключается

### 2.2.3. Вычислительные результаты

Метод $B\&B$ был запрограммирован и протестирован на рабочей станции $HP$ на языке $C$. Для генерации задач использовались алгоритмы, предложенные в вышеназванной статье Azizoglu, Kirca и Koulamas, C, "The total tardiness problem: review and extensions", Op.Res-ch, vol.42, 1994 для той же задачи. Заметим, что схема генерации является производной от предложенной Potts,C.N., Van Wassenove L.N. "Single machine tardiness sequencing heuristic", IIE Trans-s, vol 23, 1991 для однопроцессорной задачи. Протестированы задачи с $M = 2, 3, 4$ процессорами и $N = 15, 20, 30$ работами. Были предложены 2 алгоритма:

$BabYC1$ : принимаются в расчет отношения доминирования, схемы ограничений

$BabAK$ : Алгоритм $Azizoglu, Kirca$

Алгортимом $B\&B$ для всех случаев получено решение для двух комбинаций $(N = 15, M = 2); (N = 15, M = 3)$, в то время как алгоритм $Azizoglu, Kirca$ не привел к решению в 20% задач $(N = 15, M = 2)$, и чуть менее 50% задач $(N = 15, M = 3)$

Также получены решения 97% задач для $(N = 15, M = 4)$ и около 50% задач $(N = 20, M = 2)$

Предложенным методом можно решать задачи $(N = 30, M = 2)$, но только для группы $TF = 1, RDD = 0.2$ все случаи разрешимы. Заме-

тим, что $B\&B$-метод $Azizoglu, Kirca$ не находит решения в отведенное время для задач $(N = 15, M = 4), (N = 20, M = 2), (N = 30, M = 2)$. Также экспериментально показано, что эффективность свойств из теоремы 5 и, кроме небольшого числа случаев, они помогают исключить много бесперспективных ответвлений. Также можно отметить влияние параметров $TF$ и $RDD$ на результативность методов

### 2.2.4. Выводы

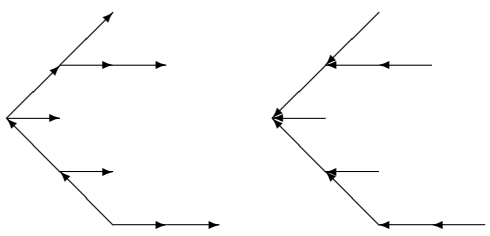
Были развиты отношения доминирования, схемы ограничений для алгоритма $B\&B$. Вычислительные эксперименты показали, что оптимальные решения могут быть получены в некоторых случаях с 30 работами на 2 машинах в разумное время. Предложенный алгоритм более эффективен, чем предложенные в литературе[1]

## 2.3. Peter Brucker, M.R.Garey, D.S.Johnson

Scheduling equal-length tasks under tree-like precedence constrints to minimize maximum lateness

$(P|prec = tree, p_i = 1|max\, lateness \to min)$

Будут рассматриваться отношения, полученые из графов, являющихся направленными деревьями. Рассмотрим два частных случая. Первое - входящие древья, в кооторых каждая дуга лежит на пути, направленном к корню. В выходящий деревьях любая вершина лежит на пути, исходящем из корня. Заметим, что граф одного типа может быть сведен к графу другого перенаправлением дуг. На рисунке приведены примеры обоих типов. Для обоих случаев будем писать $T_i \to T_j$ для обозначения факта наличия в графе дуги из $T_i$ в $T_j$, т.е. того, что $T_i$ непосредственно предшествует $T_j$



Целевая функция равна $max\{\sigma(T_i) + 1 : T_i \in T\}$. Это просто время окончания выполнения последнего по времени задания из $\sigma$. Будем считать, что $\sigma$ действует в натуральные числа. При описанной модели и целевой функции, нетрудно увидеть, что не происходит потери общности(тем не менее, крайние сроки $d_i$ не обязательно будут целыми)

*II* **Алгоритмы для выходящих деревьев** Для простоты сначала представлен алгоритм для более простой задачи: даны $m, T, \prec, \{d_i\}$, необходимо найти допустимое расписание, удовлетворяющее крайним срокам, если такое существует. Факт того, что расписание, полученное этим алгоритмом, также минимизирует максимальное запаздывание, будет доказан после того, как будет показано соответствие его упрощенной задаче

Алгоритм состоит из двух основных частей. В первой строится специальное упорядочение заданий из $T$. Во второй оно используется как приоритетные список для известной процедуры планирования списка. Для каждого целого $t \geq 0$ выбираем задания, предшественники которых уже закончили выполнение. Выбираем как можно больше выполненных заданий в порядке их расположения в приоритетном списке. Формально, полученное допустимое расписание $\sigma$ имеет $\sigma(T_i)$ распределенным к времени $t$, к которому должно начать выполнение $T_i$

Конкретный приоритетный список $L$ будет иметь следующее свойство: все предшественники задания оказываются перед ним в $L$. Когда это верно, для входящих деревьев существует эффективный метод (линейный от числа заданий) построения того же расписания, что может быть получено планированием списка. Предположим, что $T$ было перенумеровано так, что $L =< T_1, T_2, \ldots, T_n >$. Этот метод будет назначать начальные времена заданиям в порядке их появления в $L$ и будет использовать вспомогательные переменные. Для каждого $i, 1 \leq i \leq n$, переменная $R(i)$ превосходит наибольшее время начала уже назначенных заданий из непосредственных предшественников $T_i$. Для любого целого момента времени $t, 0 \leq t \leq n-1$, переменная $N(t)$ - число заданий, назначенных так, что они начинают выполнение в этот момент. Пере-

менная $FIRST$ дает наименьшее значение $t$, для которого $N(t) < m$. В начале всем дополнительным переменным присваивается ноль. Затем для каждого $i$ от 1 до $n$, определяется $\sigma(T_i)$ и значения этих переменных обновляются по правилам:

(1) установим $t \leftarrow max\{R(i), FIRST\}$

(2) установим $\sigma(T_i) \leftarrow t$

(3) установим $N(t) \leftarrow N(t) + 1$ if $N(t) \geq m, FIRST \leftarrow t + 1$

(4) Для непосредственно следующего $T_j$ за $T_i$, установим $R(j) \leftarrow max\{R(j), t+1\}$

Проверка того, что этот метод строит необходимое расписание за время $\underline{O}(n)$, оставлена в качестве упражнения читателю. Важно заметить, что так как каждое задание распределяется так, чтобы начать выполнение как можно раньше, и ни одно задание не имеет более одного непосредственно следующего за ним, всегда будет выполнено

$$\{t : N(t) = m\} = \{0, 1, \ldots, FIRST - 1\}$$

Теперь покажем, как сторится список $L$. Основная идея состоит в том, что относительная срочность задания зависит как от его крайнего срока, так и от крайних сроков следующих за ним. Будем устанавливать измененные сроки, отражающие эти факты. Список $L$ будет построен в соответствии с неубыванием измененных крайних сроков

Наша начальная цель состояла в построении расписания, удовлетворяющего всем крайним срокам, если оно существует. Очевидно, если $T_i \prec T_j$, любое допустимое расписание $\sigma$, удовлетворяющего всем крайним срокам, должно удовлетворять неравенству

$$\sigma(T_i) + 1 \leq \sigma(T_j) \leq d(j) - 1$$

То есть, $T_i$ должно быть выполнено не только к $d_i$, но и к $d_j - 1$. Так как выполнение $T_i$ должно удовлетворять обоим ограничениям, мы можем заменить крайний срок $T_i$ на $min\{d_i, d_j - 1\}$ без изменения сути задачи. Множество допустимых расписаний остается прежним и расписание удовлетворяет всем крайним срокам в новой задаче титтк

оно удовлетворяло им в исходной. Действительно, мы можем повторять процесс модификации сроков, пока не получим равносильную задачу со сроками $\{d_i'\}$, для которых $d_i^{'} \leq d_j^{'} - 1$ при $T_i \prec T_j$. Следующий алгоритм строит множество модифицированных сроков и выполняется за время $\underline{O}(n)$

(1) Для корня $T_i$ входящего дерева, присвоим $d_i^{'} \leftarrow d_i$

(2) Выберем задание $T_i$ которому не назначен модифицированный срок $d_i^{'}$ и за которым непосредственно следует $T_j$, которому он назначен. Если такого $T_i$ нет, конец

(3) Присвоим $d_i^{'} \leftarrow min\{d_i, d_j^{'} - 1\}$ и перейдем к шагу 2

Теорема 1. *Пусть* $L =< T_1, T_2, \ldots, T_n >$ *приоритетный список, такой что модифицированные крайние сроки* $d_i^{'} \leq d_{i+1}^{'}$ *для* $1 \leq i \leq n-1$. *Тогда допустимое решение, полученное планированием списка* $L$ *удовлетворяет исходным срокам титтк существует допустимое расписание, удовлетворящее им*

Таким образом, построен алгоритм построения расписания, удовлетворяющего крайним срокам, если оно существует, состоящего из подсчета модифицированных сроков, составления списка приоритетов, сортировки заданий согласно модифицированным сроками применения процедуры планирования списка к $L$, он имеет сложность $O(n\,log\,n)$

Для исходной задачи минимизации наибольшего запаздывания по теореме алгоритм строит допустимое расписание $\sigma$ с $ML(\sigma) \leq 0$, если оно существует. Он также может быть использован для построения расписания $\sigma : ML(\sigma) \leq l$, если такое существует, применением его к измененной задаче с условиями $m, T, \prec, (d_i + l)$, где $l$ добавляется к каждому крайнему сроку. Если существует допустимое расписание $\sigma$ для $m, T, \prec, \{d_i\}$ с $ML(\sigma) \leq l$, то это же расписание будет решением новой задачи. Обратно, любое допустимое расписание $\sigma$, удовлетворяющеее всем крайним срокам в новой задаче будет иметь $ML(\sigma) \leq l$ в исходной.

Процедура планирования списка никак не связана с крайними сроками, поэтому в точности то же расписание строится алгоритмом для измененных задач. В частности, когда $l$ - наименьшее возможное мак-

симальное запаздывание, расписание, построенное алгоритмом будет минимизировать нужное значение запаздывания:

Теорема 2. *Пусть* $T =< T_1, T_2, \ldots, T_n >$ *приоритетные список, упорядоченный так что модифицированные сроки удовлетворяют* $d_i^{'} < d_{i+1}^{'}$ *для* $1 \leq i \leq n-1$. *Тогда допустимое расписание, полученное планированием списка* $L$ *уминимизирует наибольшее запаздывание*

Заметим, что если все исходные крайние сроки одинаковы, алгоритм построит приоритетный список, в котором задания упорядочены по уровню, в соответствии с определением Hu T.C., "Parallel sequencing and Assembly Line Problems", Op.Res., 9, 1961, и поэтому полученное расписание будет минимизировать время обработки. В общем, тем не менее, алгоритм не строит расписание с наименьшим возможным временем обработки среди всех допустимых расписаний, минимизирующий общее запаздывание. Такое расписание может быть найдено повторяющимся применением нашего алгоритма. Пусть $l_0$ - минимально возможное максимальное запаздывание, определенное при простом применении алгоритма. Для любого целокго $k$, рассмотрим частную задачу, в котрой крайний срок каждого задания $T_i$ равен меньшему из значений $h$ и $d_i + l_0$. Допустимое расписание для этой задачи имеет максимальное запаздывание ноль титтк его максимальное запаздывание $= l_0$ и время обработки $k$ или меньше для исходной задачи. Можно применить исходный алгоритм несколько раз, в режиме бинарного поиска, для нахождения наименьшего $k$, для которого полученная задача имеет допустимое расписание с максимальным запаздыванием 0. Расписание, полученное для этого $k$ будет расписанием для исходном задачи, и оно будет иметь наименьше возможное время обработки среди всех расписаний с максимальным запаздыванием $l_0$. Так как это наименьшее $k$ должно быть целым от $n/m$ до $n$, требуется хотя бы $O(log\, n)$ применений алгоритма, и общая сложность $O(n\, log^2\, n)$

### *III NP*-полнота для выходящих деревьев

Задача, решенная в предыдущем разделе для входящего дерева, является более сложной для выходящего. Покажем, что проблема определения существования допустимого расписания, удовлетворяющего всем

крайним срокам, в случае выходящего дерева, принадлежит классу $NP$-полных.

**Теорема 3** *Следующая задача составления расписания $NP$-полна: дано $m$ процессоров, $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$ заданий единичной длины, крайний срок $d_i$ для каждого задания, и частичный порядок, заданный выходящим деревом, существует ли допустимое расписание, удовлетворяющее всем крайним срокам?*

$NP$-полнота для входящих деревьев непосредственно следует из этой теоремы. Как следствие этих результатов, при наличии крайних ранних и поздних сроков, вопрос существования допустимых расписаний, удовлетворяющих крайним срокам, $NP$-полон, независимо от вида дерева. Таким образом маловероятно обобщение алгоритма из 2 раздела на случай 2 процессоров[2]

# 3. Постановка задачи

Пусть $N = 1 : n$ требований обслуживается $M$ параллельными идентичными процессорами. *Машиной* будем называть устройство, способное выполнять все, что связано с некоторой задачей; *системой обслуживания* - множество всех машин, используемых для выполнения некоторого множества задач.

Заданы $t_i$ - время выполнения работы и $D_i$ - директивный срок(время, к которому задание должно быть завершено). $d_i$ - ранний срок начала выполнения работы. $d_i \geq 0; t_i, D_i > 0, i = 1, \ldots, n$, $r_i$ - минимально возможное время начало $i$-й операции.

На $N$ задано отношение строгого порядка $\rightarrow$, определяющее возможную последовательность выполнения требований. Граф редукции этого отношения $G = (N, U)$ является входящим деревом. Если $i$ и $j$ - две работы, и $i$ должна быть осуществлена раньше, чем $j$, будем говорить, что $i$ *предшествует* $j : i \prec j$. Будем говорить, что $i$ непосредственно предшествует $j$, если $\begin{cases} i < j \\ \rceil \exists z \;\; i < z < j \end{cases}$

Составление расписания означает задание сопоставления

$$\forall i \in N \;\; (\tau_i, num_i)$$

времен начала исполнения и номеров процессоров, выполняющих данную задачу(для случая с запрещением прерываний).

Считаем, что машина не может выходить из строя, и, следовательно, быть недоступной из-за неисправности или ремонта. Каждая машина может выполнять лишь одну работа в любой момент времени.[4, 7]

Расписание *допустимо относительно* $\rightarrow$, если $\forall i, j \in N$, т.ч. $i \rightarrow j \;\; [S_H(t') = 1, 1 \leq H \leq M] => [S_L(t) \neq j, L = 1, \ldots, m] \forall t \leq t'$. *Оптимальным* будем называть расписание, допустимое относительно $\rightarrow$, $s*$, соответствующее минимуму функционала(оптимальному значение максимального временного смещения) $L* = L_{max}(s) = \max\limits_{i \in N} L_i(s). L_i(s) = \overline{t}_i(s) - D_i = \tau_i + t_i - D_i$ - временное смещение для $i$й работы, где $\overline{t}_i(s)$ -

момент завершения обслуживания.

Для любого допустимого относительно $\rightarrow$ расписания $s$

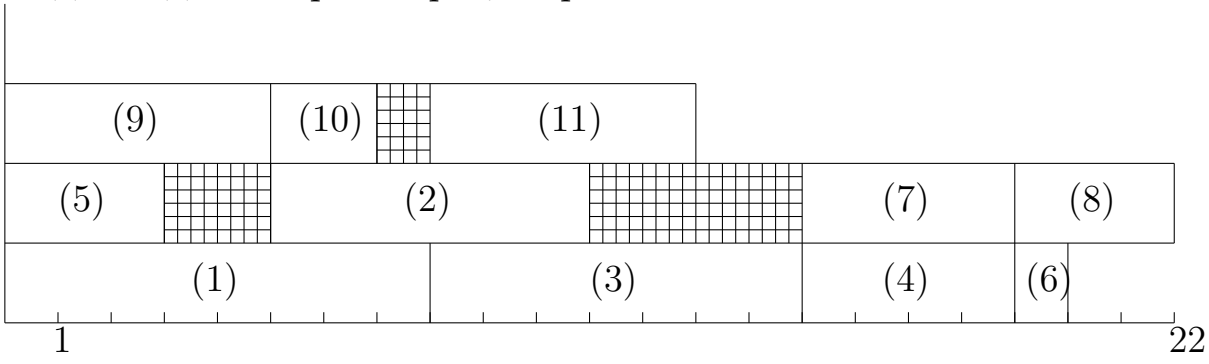
$\begin{cases} \bar{t}_i(s) \leq D_i + L_{max}(s) \\ L^* \leq L_{max}(s) \end{cases} => \exists$ допустимого относительно $\rightarrow$ расписания $s : \bar{t}_i(s) \leq D_i + \tau$ при $\tau < L^*,\ i = 1, \ldots, n$.

Задача построения оптимального расписания сводится к минимизации $\tau : \exists$ допустимое относительно $\rightarrow$ и модифицированных директивных сроков $D_i^{'} = D_i + \tau$ расписание. Оно является оптимальным.

Отношение частичного порядка может быть задано в виде ациклического графа $G =< V, E >$, где V - множество вершин, а каждое отношение предшествования $v_i \rightarrow v_j$ задается дугой $u \in E$ с началом $v_i$ и концом $v_j$[5]

Построение оптимального по быстродействию расписания $\forall d_i$ сводится к построению расписания с минимальным значением максимального временного смещения при $d_i = 0$. Расписанию, которому соответствует минимальное значение $L_{max}(s)$, соответствует и минимальное максимальное запаздывание.

Используются различные способы представления расписаний. наиболее наглядны из них графические представления - графики Ганта, ленточные графики и т.д. На рисунке представлен пример графика Ганта для задачи с тремя процессорами



# 4. Алгоритмы

Жадными(градиентными) называют алгоритмы, действующие по принципу "максимальный выигрыш на каждом шаге". Такая стратегия не всегда ведет к конечному успеху - иногда выгоднее сделать не наиулчший, казалось бы, выбор на очередном шаге с тем, чтобы в итоге получить оптимальное решение.[3]

Будем рассматривать алгоритмы, различающиеся предупорядовачением для выбора к выполнению работ. Будут представлены 4 варианта:
· задания выполняются в порядке неубывания $d$
· задания выполняются в порядке неубывания $d + D$
· задания выполняются в порядке неубывания $D$
· задания выполняются в порядке неубывания $D - t$
[5]

Рассмотрим приближенный алгоритм $ELS/IIT$. Этот алгоритм можно отнести к классу жадных алгоримов. На каждом шаге алгоритма одно из заданий будет окончательно устанавливаться на прцоессор

Для каждого задания нам известно раннее начало задания $r_i$ и самое позднее время начала выполнения задания $v_{max[i]} = D_i - t_i$, при котором задание будет закончено до наступления директивного срока. Сначала для постановки в расписание будем выбирать задание с минимальным поздним началом, при этом самые критические задания будут назначаться в первую очередь. Такой подход может приводить к появлению простоев процессоров. Для того, чтобы исключить нерациональное использование времени процессора, будем на время простоя подбирать другое задание, которое можно выполнять в это время, но не увеличивая время начала критического задания. Таким образом выбор задания будет выполняться в два этапа. Пусть $k$ заданий уже поставлено в расписание и частичное расписание $S_k$ построено.

Приближенное решение конструируется алгоритмом $ELS/IIT/d$ следующим образом:
1. Найдем процессор $l_0$ такой, что $t_{min}(l_0) = min\{time_k[i] | i \in \overline{1:M}\}$

2. Выберем задание $u_0$, такое что

$$v_{max}[0] = min\{v_{max}[i] | i \notin S_k\} \,\&\, d[0] = min\{d[i] | i \notin S_k\}$$

3. Если $idle(0) = r_0 - t_{min}(l_0) > 0$, тогда выберем задание $u^* \notin S_k$, которое может выполняться в период простоя процессора $l_0$ без увеличения времени начала $u_0$, а именно

$$v_{max}(u^*) = min\{v_{max[i]} | r(i) + t(i) \leq r(0),\ i \notin S_k\}$$

4. Если задание $u^*$ найдено, то мы назначаем на процессор $l_0$ задание $u^*$, иначе задание $u_0$

Алгоритм $ELS/IIT/Dd$:

1. Найдем процессор $l_0$ такой, что $t_{min}(l_0) = min\{time_k[i] | i \in \overline{1:M}\}$
2. Выберем задание $u_0$, такое что

$$v_{max[0]} = min\{v_{max[i]} | i \notin S_k\} \,\&\, (d + D)[0] = min\{(d + D)[i] | i \notin S_k\}$$

3. Если $idle(0) = r_0 - t_{min}(l_0) > 0$, тогда выберем задание $u^* \notin S_k$, которое может выполняться в период простоя процессора $l_0$ без увеличения времени начала $u_0$, а именно

$$v_{max}(u^*) = min\{v_{max[i]} | r(i) + t(i) \leq r(0),\ i \notin S_k\}$$

4. Если задание $u^*$ найдено, то мы назначаем на процессор $l_0$ задание $u^*$, иначе задание $u_0$

Алгоритм $ELS/IIT/D$:

1. Найдем процессор $l_0$ такой, что $t_{min}(l_0) = min\{time_k[i] | i \in \overline{1:M}\}$
2. Выберем задание $u_0$, такое что

$$v_{max[0]} = min\{v_{max[i]} | i \notin S_k\} \,\&\, D[0] = min\{D[i] | i \notin S_k\}$$

3. Если $idle(0) = r_0 - t_{min}(l_0) > 0$, тогда выберем задание $u^* \notin S_k$, которое может выполняться в период простоя процессора $l_0$ без увеличения

времени начала $u_0$, а именно

$$v_{max}(u^*) = min\{v_{max[i]} | r(i) + t(i) \leq r(0),\ i \notin S_k\}$$

4. Если задание $u^*$ найдено, то мы назначаем на процессор $l_0$ задание $u^*$, иначе задание $u_0$

Алгоритм $ELS/IIT/dt$:

1. Найдем процессор $l_0$ такой, что $t_{min}(l_0) = min\{time_k[i] | i \in \overline{1:M}\}$
2. Выберем задание $u_0$, такое что

$$v_{max[0]} = min\{v_{max[i]} | i \notin S_k\}\ \&\ (D-t)[0] = min\{(D-t)[i] | i \notin S_k\}$$

3. Если $idle(0) = r_0 - t_{min}(l_0) > 0$, тогда выберем задание $u^* \notin S_k$, которое может выполняться в период простоя процессора $l_0$ без увеличения времени начала $u_0$, а именно

$$v_{max}(u^*) = min\{v_{max[i]} | r(i) + t(i) \leq r(0),\ i \notin S_k\}$$

4. Если задание $u^*$ найдено, то мы назначаем на процессор $l_0$ задание $u^*$, иначе задание $u_0$

В вычислительном эксперименте мы сравним расписания, построенные алгоритмом $ELS/IIT$ с расписаниями, построенными алгоримом без вынужденных простоев $ELS/ND$. Приближенное решение конструируется алгоритмом $ELS/ND$ следующим образом:

1. Найдем процессор $l_0$ такой, что $t_{min}(l_0) = min\{time_k[i] | i \in \overline{1:M}\}$
2. Выберем задание $u_0$, такое что $v_{max[0]} = min\{v_{max[i]} | i \notin S_k\}$
3. Если $idle(0) = r_0 - t_{min}(l_0) > 0$, тогда выберем задание $u^* \notin S_k$, которое может выполняться без простоя процессора $s$

$$\begin{cases} v_{max}(u^*) = min\{v_{max[i]} | r(i) \leq t_{min}(0) \quad i \notin S_k\} \\ d(u) \leq t_{min} \qquad \forall u \end{cases}$$

4. Если задание $u^*$ найдено, то мы назначаем на процессор $l_0$ задание $u^*$, иначе задание 0

Вычислительная сложность алгоритмов $\underline{O}(n^2)$ [6]

Аналогично вводятся алгоритмы с другими упорядочиваниями, с заменой $v_{max}[i]$ на соответственно $d_i, d_i + D_i, D_i$

# 5. Код программы

Программа написана на языке Delphi и представляет себе приложение, получающее на входе файл с входными данными и выдающая текстовых файл результата

**Код программы:**

```
unit dbegels;
interface
uses dmydata,dbeglast;

procedure ElsInit;
procedure sortdt;
procedure sortd;
procedure sortdd;
procedure sortds;
implementation
   procedure sortd ;    {сортируем по D}
     var x, y,i,j : integer;
       begin
         for j:=0 to npnt do
          begin   y:=3000;
            for i:=0 to npnt do
             if( pnt[ i]^.tfin + pnt[ i]^.t < y ) and (pnt[i]^.timbeg=-1 ) then
             begin x:=i; y:=pnt[i]^.tfin+pnt[ i]^.t;
              end;

             pedg[j]:=x;  pnt[x]^.timbeg :=-2;
          end;

       end;


   procedure sortdt ; {сортируем по D-t}
     var x, y, i,j : integer;
       begin
         for j:=0 to npnt do
          begin   y:=3000;
            for i:=0 to npnt do
             if( pnt[ i]^.tfin < y ) and (pnt[i]^.timbeg=-1 ) then
             begin x:=i; y:=pnt[i]^.tfin;    end;
```

```
            pedg[j]:=x;  pnt[x]^.timbeg :=-2;
          end;

        end;

    procedure sortdd ;    {сортируем по D+d}
      var x, y,i,j : integer;
        begin
          for j:=0 to npnt do
           begin   y:=3000;
             for i:=0 to npnt do
              if( pnt[ i]^.tfin + pnt[ i]^.t + pnt[ i]^.tor < y ) and
                (pnt[i]^.timbeg=-1 ) then
              begin x:=i; y:=pnt[i]^.tfin+pnt[ i]^.t+pnt[ i]^.tor;
               end;
              pedg[j]:=x;  pnt[x]^.timbeg :=-2;
          end;

        end;

    procedure sortds ;    {сортируем по d}
      var x, y,i,j : integer;
        begin
          for j:=0 to npnt do
           begin   y:=3000;
             for i:=0 to npnt do
              if(  pnt[ i]^.tor < y ) and (pnt[i]^.timbeg=-1 ) then
              begin x:=i; y:=pnt[ i]^.tor;
               end;

              pedg[j]:=x;  pnt[x]^.timbeg :=-2;
          end;

        end;


procedure ElsInit;
var i,j: integer;
begin  min:=10000;
   {считаем поздние начала их надо сохранить и восстанавливать}
```

```
       for i:=1 to s do time[i]:=0;
       for i:=0 to npnt do
       begin
         pnt[i]^.res:=0; pnt[i]^.timbeg:=-1; pnt[i]^.nproc:=0;
         plan[i]:=nil; prost[i]:=0;
         for j:=0 to npnt do
          begin
           g[i]:=0;
          end;
         end;
end;
begin end.

unit  dbeglast;
{процедура нужнадл€ получени€ времен поступлени€ и директивных сроков,
так как исходные данные формируютс€ из   графа}
interface
uses Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs,  dmydata;
procedure vertout(vrt:ppoint);
procedure begtime (var f: text;npnt,nedg:integer;vert:integer);
procedure lasttime(var f: Text;npnt,nedg: integer;vert,tpt:integer);
Implementation

 procedure vertout;
 var vrt1:ppoint; lsp : list; i:Integer;
  begin   with vrt^ do
        {3} begin     lsp:=last; ;
            while (lsp <> nil) do
            begin  i:= lsp^.ipoint;
                   vrt1:=pnt[i];
              with vrt1^ do begin
                   inc:=inc +1;
                   lsp:=lsp^.nextlist;
                end;
            end;
  end; end;

 procedure BegTime;
 var
```

```
  i,j:integer;  vrt:ppoint;  lvrt:list;
  ttec: integer;
 begin
    for i:=vert to npnt do
        with pnt[i]^ do
          begin
            lvrt:=last;
            ttec:=tor+t;
            while (lvrt <> nil) do
            begin
               vrt:=pnt[lvrt^.ipoint];

                with vrt^ do
                 begin
                   if ttec  > tor then   tor:=ttec;

                 end;
              lvrt:=lvrt^.nextlist;
            end;
      end;

         tcp:=pnt[npnt]^.tor+pnt[npnt]^.t;
         writeln(f, '     max dir crok=', tcp);

   end;
 {fанна€ процедура находит поздние окончани€ работ}

procedure LastTime;
var  i,j:integer; vrt:ppoint; ttec: integer;
  lvrt:list;
begin
     for i:=0 to npnt do
     pnt[i]^.tfin:=tpt;
     for i:=npnt downto 0  do
       with pnt[i]^ do begin
           ttec:=tfin;
           lvrt:=first;
           while (lvrt <> nil) do begin
               vrt:=pnt[lvrt^.ipoint];
               with vrt^ do begin
```

```
                    if tfin > ttec -t then
                        tfin:=ttec-t;
                    lvrt:=lvrt^.nextlist;
                end;
            end;
        end;
        for i:=0 to npnt do
            dirsrok[i]:= pnt[i]^.tfin;
end;
begin end.

unit delsmain;
   {основна€ процедура метода ветвей и границ}
interface
uses dmydata,dbeglast,dselect, destimels,dstepfor,dnewrec,
doutrasp,ddelete;

procedure ElsMain(var a,b:integer);

implementation
procedure ElsMain;
var i,tmin,dlina, estmin:integer;
begin
    {в данном варианте ищетс€ точное решение}  tmin:=0;
    setw(pnt[0],1,k,tmin); k:=1;
    while (k>0) and (k<=npnt) do begin
    {2}  min:=10000;
         For i:=1 to s do  begin
           if min > time[i] then begin
             min:=time[i];
             tecpr:=i;
           end;
         end;
         tecproc:=tecpr; {номер текущего процессора}
         tmin:=time[tecpr];
         dlina:=mindlina;
         SelectJob(k,tmin,tecjob);
         setw (tecjob,tecproc,k,tmin);
         inc(k);
     end;
```

```
     newrecord;
end;
begin end.

{процедура оценки решени€, работает на каждой итерации}
unit destimels;

interface
uses  dmydata;
function cross(x1,x2,y1,y2,l1,t1: Integer): Integer;
implementation
function cross;
var lf,rf,lr,lm,j:integer;
begin   cross:=0;
    lf:= x1 -y1;
    rf:= y2 - x2;
    if (lf >0) and (rf>0) then begin
        lr:=min1(lf,rf); lm:=min1(l1,t1);
        cross:= min1(lr,lm);
    end;
end;

begin end.

{процедура оценки решени€, работает один раз}
unit destone;

interface
uses dmydata;
function cross(x1,x2,y1,y2,l1,t1: Integer): Integer;

implementation
function cross;
var lf,rf,lr,lm,j:integer;
begin cross:=0;
    lf:= x1 -y1;
    rf:= y2 - x2;
    if (lf >0) and (rf>0) then begin
        lr:=min1(lf,rf); lm:=min1(l1,t1);
        cross:= min1(lr,lm);
```

```
    end;
end;
begin end.

unit dinittask;
interface
 uses dmydata,dbegels, dbeglast,destone;
procedure initels(var f:text);
{работает один раз дл€ инициализации, нужно вставить правильную нижнюю оценку.}
implementation

 procedure initels;
 var a1,i:integer;
    begin
        BegTime(f,npnt,nedg,0);{дл€ каждой работы считаем ранние окончани€}
        s2:=s1; s1:=s1 div s; if s1*s=s2 then dec(s1);
        tcp:=pnt[npnt]^.tor+pnt[npnt]^.t;
        mindlina:=max(s1+1,tcp); { Ёто максим. дир срок}
        a:=max(0, s1 + 1- tcp);  {нижн€€ оценка длины расписани€}
        a1:=a+1;
        LastTime(f,npnt,nedg,npnt,tcp);
        sortdd;
        b:=s2;
        lbound:=a;
        writeln(f,'нижн€€ оценка целевой функции=' , a);
    end;
begin
end.

unit dmydata;
interface
const
 MaxPnt=102;
 Infty=1E20;
 Maxpr=8;
 gz=10000;
 l1=6;
type
 pedge=^tedge;
 tedge=record    {ребро графа - начало, конец и врем€}
```

```
        beg,en:integer;  {начало и конец ребра}
        tf: integer;{позднее начало работы}
       end;
 list=^tlist;
 tlist=record
        ipoint: integer;
        nextlist: list;
        end;
 ppoint=^tpoin;
 tpoin=record   {вершина графа  задание}
         first: list; {перва€ вершина в списке вход€щих}
         last: list; {перва€  вершина выход€щих}
         inc: integer;    {число вход€щих дуг, число предшественников}
         t: integer; {врем€ выполнени€ задани€}
         ijob: integer; {номер задани€}
         timbeg: integer; {врем€ начала работы в расписании}
         res: integer;{врем€ просто€ процессора перед началом выполнени€}
         nproc: byte; {номер процессора в расписании}
         tor,tfin: integer; {ранние начала и поздние окончани€ задани€}
  end;
 tablestr=record
           name: string;
           lbb: integer; {}
           fl: integer ; {}
           optl: Integer;{}
           rlopt: Real;{}
           rllowb: Real;{}
           end;
ptrrec=^tablestr;
mas=array[1..Maxpr] of integer;
vertmas=array[0..MaxPnt] of ppoint;
masvrt= array[0..MaxPnt] of integer;
reztable=array[0..180] of tablestr;
 {описание типов}

 var   tCount, tSum: TDateTime; {дл€ подсчета времени работы программы}
     nedg,npnt,m,mindlina: integer;
       {количество вершин и ребер,процессоров}
     pnt :vertmas;      {основной массив дл€ хранени€ вершин - работ}
     pedg,dirsrok:masvrt;         {массив отсортированных по позднему
```

```
      началу вершин}
    plan,bestplan: vertmas;  {массив дл€ хранени€ перестановки}
    time:mas; {врем€ освобождени€ процессоров}
    g:masvrt;
    itogtable: reztable;
    tbl:tablestr;
    x,critjob,tecjob: ppoint; {рабоча€ переменна€ --- задание}
    vrt: ppoint;
    a,b,r,           {дл€ винарного поиска}
    s1,s2,min,mintf,{lb,}lm,estotm,tjob,opozd,nodop:integer;
    s,j,tecproc, sum,  iternumber, lbound, tecpr: integer;
    iter,zdel: longint;
    k, k1, tcp, Topt, Optdlina:integer;
    f,f1:text;
    lsp:list;
    prost,bestres:masvrt;
 numrt: array[0..3] of integer;
   {массив дл€ количеств rt =0, <5%, 5%< <10%, >10%, соотв-но}

  function min1(a1,a2:integer):integer;
  function max(a1,a2:integer):integer;

  implementation
   function min1;
   begin If a1 > a2 then min1:=a2 else min1:=a1; end;
  function max;
  begin if a1 > a2 then max:=a1 else max:= a2; end;

 begin end.

 unit dmaintest1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, dmydata,dbeglast,  destimels,dbegels,dreadgr1,dinittask, delsmain,
  doutrasp;

procedure mtest1(var f,f1:text);
```

```
implementation
procedure mtest1;
{анна€ программа реализует точный алгоритм построени€ оптимального расписани€
  дл€ задачи параллельного упор€дочивани€ с директивными сроками и
  временами поступлени€.
  вершины ====    работы и считаем €понские тесты!!!!!!!!!}
var i, a1,tmin,nomertest : integer;
  st:string;
   {начало основной программы}
begin
    readgraph(f);
    initels(f1);
    ElsInit;
    ElsMain(a,b);
end;
 {конец программы}
begin end.

unit doutrasp;
interface
uses dmydata;
procedure outtable(var f:text );
procedure outrez(var f:text;st:string;var tbl:tablestr );
implementation

procedure outrez;{sроцедура вывода результата}
{  var i, v1:integer;    }
begin
    tbl.optl:=Topt;
    tbl.fl:=Topt;
    if Topt > 0 then tbl.rlopt:=tbl.fl/Topt-1 else tbl.rlopt := Topt;
    if lbound > 0 then
        tbl.rllowb:=tbl.fl/lbound-1
          {приближенное решение по отн-ю к ниж границе}
    else   tbl.rllowb := Topt;
    if tbl.rllowb = 0 then
        inc(numrt[0])
    else if tbl.rllowb <= 0.05 then
```

```
            inc(numrt[1])
        else if tbl.rllowb <= 0.1 then
                inc(numrt[2])
            else inc(numrt[3]);
    tbl.lbb:=lbound;
   {        sum:=0;
            for i:=1 to npnt do begin
                sum:=sum + bestplan[i]^.res;
            end;
           writeln(f);
         writeln(f,'-уммарное врем€ простоев процессоров=',sum);}
    writeln(f,' ќптимальное расписание   Lopt=',Topt);
    writeln(f,'длина оптимального расписани€   Topt=',Optdlina);
    writeln(f, tbl.lbb,'    ',tbl.fl,'    ');
    writeln(f);
end;

 procedure outtable;{зроцедура вывода результата}
 var i:integer;
 begin
     writeln(f,'  »тогова€ таблица');
     writeln(f, '-реднее врем€ работы t = ', tSum*24*60*60);
     writeln(f,'    n=',npnt);
     writeln(f,'    m=',s);
     writeln(f, ' ќграничение на число итераций=', iternumber);
     writeln(f, '                                ', 'Имя файла',
       '         ','LB', '    ','Zf');
     for i:=0 to 180 do  begin
         writeln(f, itogtable[i].name,'    ',  itogtable[i].lbb:3,'    ',
           itogtable[i].fl:3);
     end;
     for i := 0 to 3 do
         write(f, numrt[i], '   ' );
     writeln(f)
end;

begin end.

            { процедура новый рекорд дл€ класс. алг.}
unit dnewrec;
```

```
interface
uses dmydata;
procedure newrecord;

implementation
procedure newrecord;
var i,mdlina: Integer; vrt: ppoint;
begin  min:=-1000;  mdlina:=0;
   for i:=1 to npnt do begin
       vrt:=pnt[i];
       with vrt^ do begin
           if timbeg  - dirsrok[i] > min then min:=timbeg  - dirsrok[i];
           if timbeg +t > mdlina then mdlina:=timbeg + t;
       end;
       Topt:= min;
       Optdlina:=mdlina;

   end;
                {сохранєем новый рекорд}
   bestplan:=plan;
   bestres:=prost;
end;
begin end.

unit dreadgr1;
interface
uses dmydata;
procedure readgraph(var f:text);
implementation

procedure readgraph;{инициализациє графа}
var
  i,ik, i1:integer;
  edge:pedge;
  en: integer;
begin
    reset(f);
    read(f,npnt);{считываем количество вершин в графе,
                  количество пръоцессоров присваиваем вручную}
    s:=Maxpr;  npnt:=npnt+1;
```

```
    {цикл по вершинам}  s1:=0;
    for i:=0 to npnt do begin
        new(pnt[i]);
        with pnt[i]^ do begin
            first:=nil;   {перва€ вершина в списке вход€щих}
            last:=nil;   {перва€ из выход€щих}
            tor:=0; tfin:=gz;
            ijob:=i;  res:=0;  pnt[i]^.ijob:=i;  {writeln('i=',' ',pnt[i]^.ijob);
            nproc:=0; timbeg:=-1;
        end;
    end;
    for i:=0 to npnt do begin
       read(f,i1);  read(f,pnt[i]^.t);      s1:=s1+ pnt[i]^.t;
       read(f,j);
        for ik:=1 to j do begin
            read(f,en);  {en предшественник   дл€ i  вершины}
            new(lsp);   lsp^.nextlist:=pnt[i]^.first;   lsp^.ipoint:=en;
                        { определ€ем вход€щий список!!!!!!}
            pnt[i]^.first:=lsp;
            new(lsp);   lsp^.nextlist:= pnt[en]^.last;
            pnt[en]^.last:=lsp;   lsp^.ipoint:=i;
        end;
    end;
    close(f);
end;
begin
end.

unit dselect;
interface
uses dmydata;
procedure selectjob (k,tmin:integer; var tecj: ppoint);

Implementation

procedure selectjob;
var sel: boolean;
  i,j,bet,beta: integer;
begin
    tecj:=nil;  {есть ли допустимые задани€}
```

```
     {повтор€ем цикл, пока не нашли первое подход€щее
     при этом задани€ упор€дочены в массиве pedg по tf}
    for i:=0 to npnt do begin
        vrt:=pnt[pedg[i]];
        with vrt^ do begin
            if( g[ijob]=0) then begin
                bet:=tor; beta:=tor-tmin;
                    tecj:=vrt;
                    if beta > 0 then begin
                        for j:=i+1 to npnt do begin
                            vrt:=pnt[pedg[j]];
              {ищем задание, кот. можно поставить без просто€, критический путь}
                            with vrt^ do
                                if ( g[ijob]=0) and (max(tor, tmin) +t <= bet) the
                                    tecj:=vrt;
                                    exit;
                                end;
                       end;
                    end;
                    exit;
            end;
        end;
    end;
end;
begin end.

unit dstepfor;
interface
uses dmydata,dbeglast;

procedure setw(tjob: ppoint; tpr: integer; var k1, tmin:integer);
  { k уровень перебора, tpr номер процессора}
implementation
  { процедура назначения задания}
procedure setw;
var i, k:Integer;
begin
    k:=k1;
    with tjob^ do begin
        g[ijob]:=k;{назначаем работу}
```

```
      nproc:=tpr;{запоминаем номер процессора}
         if tmin < tor then begin
             res:=tor-tmin;{запоминаем простой}
             timbeg:=tor;{время начала}
         end
         else
             timbeg:=tmin;
              {новое время освобождения процессора}
             time[tpr]:=timbeg+t;
            { plan[k]:=tjob;время окончания работы процессора перед началом k}
         end;
         k1:=k1+1;
end{setw};
begin end.
```

# 6. Результаты вычислительных экспериментов

Для тестирования алгоритмов были использованы тесты из Standart Task Graph Set, которые доступны на сайте http://www.kasahara.elec.waseda.ac.jp//schedule. Standart Task Graph Set это наборы случайно сгенерированных тестов для проверки алгоритмов составления многопроцессорных расписаний. Для создания исходных данных были использованы тесты, в которых на множестве заданий были заданы отношения предшествования, а в качестве целевой функции рассматривалась длина расписания. Времена выполнения заданий были заданы. Времена поступления заданий и директивные сроки были получены следующим образом. По графу, задающему отношения частичного порядка для множества заданий $U$, для каждого задания вычислялся самый ранний возможный срок начала задания и брался в качестве времени поступления задания $r$. Также вычислялось наиболее позднее время окончания задания и выбиралось в качестве директивного срока $D$. Каждая серия тестов в этом наборе состоит из 180 примеров. Для каждой серии тестов мы построили оптимальные расписания для 2, 4 и 8 процессоров. Были рассмотрены тесты из Standart Task Graph Set для $n = 100, n = 300$, где $n$ - количество заданий.

Мы ограничили количество итераций для поиска допустимых решений. Еслм допустимое расписание $S$ с заданным максимальным временным смещением $L$ для $m$ процессоров не удалось построить за 5000 итераций, предполагалось, что расписание не существует и значение целевой функции $L$ увеличивалось. Такой подход позволил построить расписания для всех тестовых задач, но оставался открытым вопрос, построено оптимальное решение или нет. Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице. Первая колонка содержит тип алгоритма, вторая - число процессоров

Оптимальные расписания были получены алгоритмом $ELS/ND$ в 19 процентах тестов при $n = 300$ и в 32 процентах тестов при $n = 100$

Колонка $N_{opt}$ показывает количество тестов(в процентах), в которых

были получены оптимальные решения. Следующая колонка показывает число тестов, в которых были получены приблиденные решения с оценкой не более 0.05, но не была доказана оптимальность решений из-за ограничения на число итераций. Но эти решения могут быть и оптимальными. Две следующие колонки показывают число тестов, в которых $RT \in (0.05, 0.1]$ и $RT$ больше чем 0.1

Приближенные решения с относительной погрешностью $RT$ менее чем 5 процентов были получены $ELS/ND$ алгоритмом в 64 процентах случаев. Оптимальные решения были получены в среднем в 25 процентах случаев

Оценка $rllbow = \frac{f_A - LB}{LB}$

$n = 100$

| | m | $N_{opt}$ | $\in (0, 0.05]$ | $\in (0.05, 0.1]$ | $> 0.1$ | t |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D-t | 2 | 0.57 | 0.34 | 0.02 | 0.07 | 0.54 |
| | 4 | 0.42 | 0.34 | 0.04 | 0.2 | .36 |
| | 8 | 0.64 | 0.04 | 0.02 | 0.3 | 1.45 |
| D | 2 | .16 | .72 | .04 | .08 | .56 |
| | 4 | .11 | .32 | .17 | .4 | .55 |
| | 8 | .41 | 0 | .02 | .57 | 1.9 |
| D+d | 2 | .17 | .71 | .04 | .08 | .68 |
| | 4 | .12 | .33 | .15 | .4 | .5 |
| | 8 | .54 | .01 | .02 | .43 | .15 |
| d | 2 | .12 | .71 | .06 | .11 | .74 |
| | 4 | .08 | .3 | .15 | .47 | .62 |
| | 8 | .44 | 0 | .01 | .55 | .26 |

$n = 300$

| | m | $N_{opt}$ | $\in (0, 0.05]$ | $\in (0.05, 0.1]$ | $> 0.1$ | t |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D-t | 2 | .6 | .39 | .01 | 0 | 5.2 |
| | 4 | .28 | .51 | .02 | .19 | 6.45 |
| | 8 | .45 | .21 | .06 | .28 | 3.3 |
| D | 2 | .12 | .87 | .01 | 0 | 6.74 |
| | 4 | .01 | .7 | .06 | .23 | 8.55 |
| | 8 | .15 | .11 | .11 | .63 | 5.1 |
| D+d | 2 | .1 | .89 | .01 | 0 | 7 |
| | 4 | .01 | .71 | .06 | .22 | 8.4 |
| | 8 | .28 | .1 | .11 | .51 | 4.2 |
| d | 2 | .14 | .85 | .01 | 0 | 8.4 |
| | 4 | .01 | .62 | .13 | .24 | 9.6 |
| | 8 | .18 | .06 | .09 | .67 | 6.2 |

# Заключение

В этой работе рассматривалась задача составления расписания $P|r_j|L_{max}$.

Мы провели вычислительные эксперименты для проверки эффективности "жадного" алгоритма. Для оценки качества решения примем среднее отношения значения решения к нижней границе максимального запаздывания . Для демонстрации эффективности мы проверили задачи, сгенерированные случайно, размерностью до 300 заданий. Все они были решены не более чем за 60 секунд. Оптимальные решения были получены в среднем в 25,46 процентах тестов.

Решение, полученное "жадным" методом в среднем отклоняется от оптимального на % с отклонением в %. Были сравнены различные способы исключения недопустимых частичных решений, в результате чего выяснилось, что условия леммы 1 позволяют исключить около 43% недопустимых решений. Оптимальные решения были получены для 63% случаев, полученных "жадным" методом. Среднее процентное отклонение от нижней границы изменя- лось в пределах 0.5 - 6.1%.

Также представлен алгоритм для задачи с допущением простоя. Для систем умеренного размера задача может быть решена за разумное время. Результаты экспериментов показали, что "жадный" метод неизменно помогает найти хорошие решения для произвольных систем заданий . Для "хороших оценок"(меньше 0.05) получим средние частоты $\overline{x}_{D-t} = 0.795, \overline{x}_D = .61, \overline{x}_{D+d} = .665, \overline{x}_d = .575$.Из этих данных можно сделать вывод, что наиболее эффективной для данной задачи показала себя сортировка по $D - t$, за ней следует $D + d$, затем - $D$, и $d$.

# Список литературы

[1] Discrete optimization methods in scheduling and computer-aided design. — Minsk, Belarus, 2000.

[2] Mathematics of Operations Research, Vol.2. — Providence, 1977.

[3] Алексеев В.Е. Таланов В.А. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. — Москва, Интернет-университет информационных технологий, 2006.

[4] Конвей Р.В. Максвелл В.Л. Миллер Л.В. Теория расписаний. — Москва, Наука, 1975.

[5] Н.С. Григорьева. Теория расписаний. — РИО СПбГУ, 1995.

[6] Н.С. Григорьева. Задача составления минимизирующих максимальное временное смещение расписаний для параллельных процессоров. — 2016.

[7] Танаев В.С. Гордон В.С. Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. — М.: Наука, 1984.