

Санкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики —
процессов управления



**ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
И УСТОЙЧИВОСТЬ**

ТРУДЫ XLIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ

Санкт-Петербург
1–4 апреля 2013 года



ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Санкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики –
процессов управления



***ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
И УСТОЙЧИВОСТЬ***

ТРУДЫ XLIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ

Санкт-Петербург
1 – 4 апреля 2013 года



ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2013

УДК 517.51:517.9:519.71

ББК 22.1

П84

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. П. Колтак* (С.-Петербург. гос. ун-т),
д-р физ.-мат. наук, проф. *В. В. Мазалов* (Ин-т прикладных
математических исследований Карельского научного центра
РАН)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
факультета прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета*

Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й междуна-
П84 родной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред.
Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. – СПб.: Издат. Дом С.-Петерб.
гос. ун-та, 2013. – 702 с.
ISBN 978-5-288-05435-8

В сборник включены работы студентов, аспирантов и сотрудников факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ и других высших учебных заведений, в том числе зарубежных, по математической теории процессов управления, математическим методам в механике и физике, математическому моделированию в медико-биологических системах, информационным и компьютерным технологиям, теории управления социально-экономическими системами.

Все работы докладывались на ежегодной 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (1 – 4 апреля 2013 года).

Сборник предназначен для студентов старших курсов физико-математических факультетов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.1

*Работа выполнена при финансовой поддержке
Санкт-Петербургского государственного университета, грант № 9.44.733.2013.*

© Авторы сборника, 2013

© Факультет ПМ – ПУ

С.-Петербургского государ-
ственного университета, 2013

ISBN 978-5-288-05435-8

Содержание

1. Математическая теория процессов управления	9
<i>Вознюк А. Э.</i> Метод изоляции двумя шарами	9
<i>Волкова А. С.</i> Обобщенные решения краевой задачи для уравнения параболического типа на произвольном графе	14
<i>Гнилицкая Ю. А.</i> Построение граничного управления колебаниями системы струн в классе обобщенных решений	20
<i>Колпакова Е. А.</i> Разделение двух множеств двумя гиперплоскостями	26
<i>Лебедев Д. М.</i> Оптимизационная задача проектирования точки на квадрату	32
<i>Меденников И. П.</i> Метод функционалов Ляпунова-Красовского для дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием	37
<i>Молчанова И. Ю., Попова М. А.</i> Алгоритм построения двойственного конуса в трехмерном пространстве	43
<i>Нгуен Д. Х.</i> Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных разностных систем	48
<i>Пономарев А. А.</i> Построение субоптимальных управлений в регуляторе «предиктор-корректор» (МРС)	53
<i>Сумачева В. А.</i> Системы нейтрального типа: H_2 норма передаточной матрицы	59
<i>Удот М. В.</i> О точке Лемуана-Гребе	65
<i>Утешев Н. А.</i> Аппроксимация точечно-множественных отображений алгебраическими полиномами	71
<i>Фальков Е. А.</i> Об одном методе решения задачи управления по части переменных с ограничением на неконтролируемые переменные	76
<i>Фоминых А. В.</i> Метод наискорейшего спуска в одной негладкой задаче оптимизации	82
<i>Чернуцану Е. К.</i> Численные эксперименты по строгой h -отделимости	88
<i>Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш.</i> Методы нахождения наименьшего расстояния между эллипсоидами	94
<i>Шуляк А. С.</i> Задача чебышевской аппроксимации при наличии ограничений	100
2. Математические методы в механике и физике	105
<i>Абдулина К. А., Старков В. Н.</i> Исследование системы «деревья-насекомые» с помощью модели Лесли	105
<i>Абдулина К. А., Старков В. Н.</i> Качественное исследование динамики двухвозрастной лесной системы	109
<i>Алферов Г. В., Малафеев О. А., Мальцева А. С.</i> Процесс поиска и захвата объекта	113
<i>Алферов Г. В., Старева И. А., Шарлай А. С.</i> Лингвистическая геометрия в задачах робототехники и мехатроники	119
<i>Алцыбеев В. В.</i> Моделирование линейного ускорителя электронов с би-периодической ускоряющей структурой	125
<i>Алцыбеев В. В., Овсянников Д. А.</i> Об оптимизации структуры с фокусировкой ускоряющим полем	130

<i>Андреева Т. А.</i> Анализ гибридных потенциалов метода функционала электронной плотности	135
<i>Андреевский Д. С., Никифоров К. А.</i> Алгоритмы эмиссии макрочастиц в методе частица-в-ячейке	142
<i>Башканкова Е. А., Греков М. А.</i> Метод возмущений в задаче об упругой плоскости с эллиптическим отверстием	148
<i>Бедрина М. Е., Трофимов В. В.</i> Моделирование голографических изображений в Gaussian	154
<i>Вакаева А. Б., Греков М. А.</i> Метод возмущений в задаче о криволинейном отверстии в упругой плоскости	159
<i>Викулина Ю. И.</i> Влияние формы поверхности на напряженное состояние тела нанометрового размера	165
<i>Воскобойникова Е. В., Кривовичев Г. В.</i> Двухстадийная разностная схема для системы кинетических уравнений с дискретными скоростями	171
<i>Гаёва Е. С., Кривовичев Г. В.</i> Применение модифицированных разностных схем типа Лакса в методе решеточных уравнений Больцмана	177
<i>Головкина А. Г.</i> К вопросу усиления мощности подкритического реактора	182
<i>Громов А. О.</i> Проекция плотности для моделей звездных систем с обобщенно-изотермическим потенциалом	187
<i>Доманская Т. О., Мальков В. М.</i> Задача Мичела для полулинейного материала	193
<i>Елаев Е. В.</i> Расчет допусков в ускоряющих и фокусирующих структурах	198
<i>Ермолин В. С., Митюшин Ф. М.</i> Расчет временных зон радиовидимости района	204
<i>Ефимова П. А.</i> Об особенностях управления космическими роботами-манипуляторами	211
<i>Зартдинов А. Н., Никифоров К. А.</i> Усиление электрического поля на наноструктурной эмиссионной поверхности	215
<i>Зверков В. Н.</i> Моделирование турбулентных течений со свободной поверхностью вблизи корпуса судна	220
<i>Климаков А. А.</i> Моделирование электронной пушки с системой фокусирующих линз с учетом распределения пространственного заряда при различных конфигурациях фокусирующей системы	225
<i>Куруч О. С., Виноградова Е. М.</i> Моделирование полевой эмиссионной системы	230
<i>Леонтьев В. А.</i> Дифракция морских волн неподвижным доком, расположенным перед наклонным дном	236
<i>Листрукова А. В.</i> Математическое моделирование электронно-оптической системы	241
<i>Маллякин Г. П., Шмиров А. С.</i> Ударное воздействие на сближающийся с Землей объект в околоземном пространстве	245
<i>Маринаки М.</i> Об итерационном решении задачи обтекания бесконечного ряда цилиндров	250
<i>Матросов А. В., Ширунов Г. Н.</i> Замкнутая форма операторов метода начальных функций для пространственной задачи теории упругости	256
<i>Михеев С. А., Кривовичев Г. В.</i> Трехслойная конечно-разностная схема для решения системы кинетических уравнений Больцмана с дискретными скоростями	262

<i>Морозов П. Д.</i> Об одном гладком локальном сплайне.....	268
<i>Никифоров К. А., Сайфуллин М. Ф.</i> Разработка плоско-сферического диода с автоэмиссионным матричным катодом.....	274
<i>Перегудин С. И., Холодова С. Е.</i> Редукция в задачах динамики вращающегося слоя электропроводной несжимаемой жидкости с учетом эффектов диффузии магнитного поля.....	279
<i>Седова О. С.</i> О моделировании радиационного воздействия, обусловленного выбросами радиоактивных веществ в атмосферу.....	285
<i>Семлякина Е. В.</i> Оптимизация параметров упруго-механической системы.....	291
<i>Смирнов М. Н., Смирнова М. А.</i> Реализация программного комплекса для динамического управления нелинейным объектом.....	297
<i>Телевный Д. С.</i> Моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера.....	301
<i>Трофимов В. В.</i> Эффективные полевые катоды.....	307
3. Математические модели медико-биологических систем.....	313
<i>Бабин А. В., Котина Е. Д.</i> Математическая обработка данных радионуклидных исследований томоэнцефалографии сердца.....	313
<i>Барабанова С. А.</i> О проблеме оценивания параметров двучленных сумм.....	319
<i>Буре А. В.</i> Сравнительный анализ эффективности объектов на основе статистической информации.....	325
<i>Гордеев Д. Ф.</i> Метод расчета дозного распределения в тканезквивалентной среде.....	329
<i>Козлов К. А.</i> Моделирование матрицы коллиматорной размытости в ОФЭКТ.....	335
<i>Кузнецов С. Р.</i> Математическая модель активации, пролиферации и дифференцировки Т- и В-лимфоцитов при их взаимодействии в лимфоузле с описанием переключения синтеза изоформ иммуноглобулинов IgM и IgG.....	339
<i>Манушкина Т. В.</i> Статистический анализ базы данных по инфаркту миокарда методом таблиц сопряженности.....	345
<i>Носов С. А.</i> Об устойчивости решений разностных систем в критических случаях.....	350
<i>Олемской И. В., Фирюлина О. С.</i> Решение задачи о поиске максимальной общей подструктуры в молекулярных графах.....	355
<i>Рубша А. И.</i> Анализ выживаемости по медицинской базе данных больных раком предстательной железы.....	361
<i>Сударев О. И.</i> Моделирование процесса сбора данных для ПЭТ с использованием методов Монте-Карло.....	367
<i>Умаров Д. М.</i> Фильтрация пуассоновского шума методом минимизации полной вариации.....	373
<i>Хамматова Г. М.</i> Метод главных компонент в задаче классификации районов Ленинградской области по показателям смертности.....	376
<i>Широколов А. Ю.</i> Программные модули коррекции движения при радионуклидных исследованиях.....	380

4. Информационные и компьютерные технологии.....385

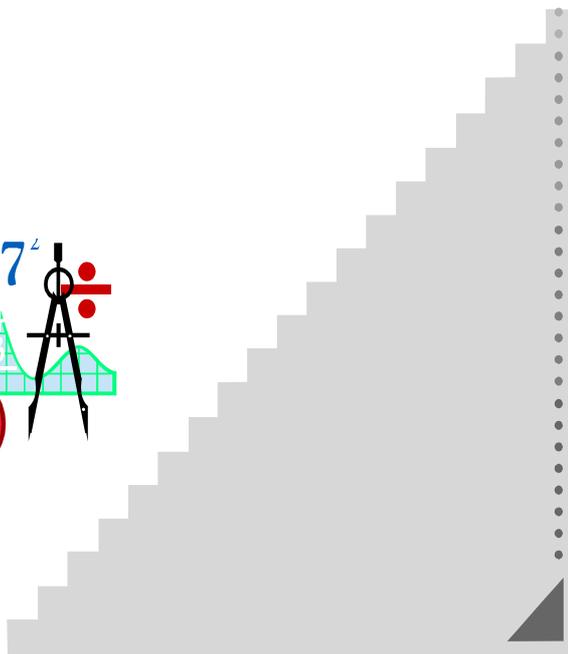
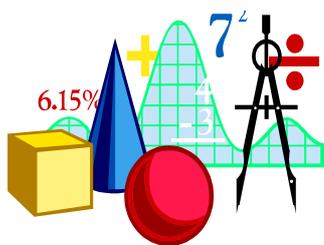
<i>Арикайнен А. И., Забровский А. Л.</i> Оценка качества мультимедийных потоков, передаваемых в реальном режиме времени	385
<i>Артёмов А. Г.</i> Распознавание и отслеживание заданных объектов в задаче видео-наблюдения	389
<i>Арцыбашева Л. Н., Иванова О. А.</i> Подход к решению проблемы извлечения данных из пространственно-временных баз данных	395
<i>Балабанов М. Ю., Якушкин О. О.</i> Коммуникации в одной неоднородной распределенной гетерогенной системе	399
<i>Блеканов И. С., Максимов А. Ю.</i> Вебометрические исследования сегмента университетского Веба с помощью поискового робота	403
<i>Борисов Е. А.</i> Кластерный анализ обеспеченности жилой зоны Петродворцового района г. Санкт-Петербурга сетью объектов розничной торговли	408
<i>Бусько И. В., Дегтярев А. Б.</i> Идентификация параметров волнения в бортовой интеллектуальной системе. Линейный случай	413
<i>Ганкевич И. Г.</i> Эффективность МПС архитектуры в задаче решения стохастических дифференциальных уравнений	420
<i>Гришкин В. М., Якушкин О. О.</i> Разработка брокерной системы передачи сообщений на С#	424
<i>Ишжулов И. Г., Шлыков В. А.</i> Использование виртуализации и облачной инфраструктуры при разработке комплексного имитационного стенда ..	427
<i>Князькин Я. В.</i> Компьютерное моделирование процесса поворота морского судна по курсу с оптимизацией по быстродействию	432
<i>Макаров А. А., Шабунин А. Н.</i> Особенности проектирования электронных услуг для органов государственной власти	438
<i>Маров А. В.</i> Исправление ошибок в системах хранения данных	444
<i>Мезенцева П. В.</i> Задача популяции онтологии предметной области с использованием искусственных нейронных сетей	451
<i>Петрова В. А., Семенова А. Г.</i> Проект базы данных о вычислительной технике подразделения	457
<i>Приставка Г. С.</i> Погрешность построения интерполяционного полинома методом наименьших квадратов	462
<i>Ружников В. О.</i> Исследование эффективности COSY Infinity на параллельных системах с общей памятью	468
<i>Рябуша В. А.</i> Клеточный автомат, моделирующий движение пучка заряженных частиц	473
<i>Севостьянов Р. А., Нефедов Д. Э.</i> Система удаленного управления мобильным роботом	479
<i>Северюков С. Ю., Соловьев П. А.</i> Возможность построения обобщенного алгоритма оценки криптографической стойкости симметричных блочных шифров к атакам на основе методов дифференциального криптоанализа ..	485
<i>Сердюк Ю. А.</i> Выделение ключевых слов для различных интернет-сообществ в Twitter	491
<i>Шакбасаров Р. Н.</i> Идентификация объектов в видеопотоке на основе анализа цвета	497
<i>Шарлай А. С.</i> Об определении встроенных формул в изображениях печатного текста	502
<i>Ялов А. Л.</i> Распознавание движения со стационарной и поворотной камер видеонаблюдения	508

<i>Baravy I. I.</i> Wavelets in Digital Audio Processing: Beethoven's Sonatas Clustering.....	513
<i>Makino Y., Klyuev V.</i> Web security learning technique for novices.....	517
<i>Tikhomirov V. A.</i> Optimization of sending WRITE SAME commands through HP Smart Array 642.....	522
<i>Togashi N., Klyuev V.</i> Comparison of Go and Java features.....	528
<i>Waga K., Mariescu-Istodor R., Tabarcea A., Makeev I. V., Lepikhin T. A., Fränti P.</i> Modeling user profile by analyzing user activity in location-based system.....	533
<i>Wu Z., Heikkinen V., Hauta-Kasari M., Parkkinen J.</i> Detection of intracutaneous allergic skin elements based on near-infrared spectral skin images ...	539
5. Управление социально-экономическими системами	545
<i>Аверьянова К. В.</i> Размещение распределительного центра для интернет-магазина.....	545
<i>Андерсен А. А., Чистяков С. В.</i> Генератор оптимальных налоговых шкал.....	551
<i>Басков О. В.</i> Свойства острых нечётких конечнопорождённых двойственных конусов.....	557
<i>Болотина О. В.</i> Минимизация риска на основе теории нечеткой логики в рамках одной задачи.....	560
<i>Григорьева К. В., Шайкина П. Г.</i> Коалиционная модель принятия решений с одной многокритериальной бескоалиционной игрой.....	564
<i>Жабченко А. А.</i> Географически взвешенная регрессия и ее применение....	570
<i>Жигачёва А. Л., Смирнов Н. В.</i> Обоснование непрерывности модифицированной модели эндогенного роста Лукаса.....	576
<i>Захаров А. О.</i> Учет информации об отношении предпочтения в одной экономической задаче.....	582
<i>Ипатов Д. А.</i> Расчет страховых тарифов в условиях случайной ставки наращенного.....	588
<i>Климук Д. О.</i> Теоретико-игровая модель кооперации банков в задаче экономии издержек.....	593
<i>Крутов Д. А.</i> О динамике капитала банка с эндогенным спросом на продукты.....	599
<i>Ледовская В. А.</i> Анализ некогерентных мер риска.....	605
<i>Ледовская В. А., Колбин В. В.</i> Когерентные меры риска.....	611
<i>Михель Н. В., Смирнов Н. В.</i> Анализ математической модели кредитного механизма, используемого фирмой для развития нового производства.....	617
<i>Мишенина В. В.</i> Модификация обобщенной модели экономического роста с учетом накопления человеческого капитала.....	620
<i>Орлова А. С.</i> Многокритериальная оптимизация в модели информационного управления.....	625
<i>Петрашко А. В.</i> Теоретико-игровое моделирование ретрансляции данных в беспроводных сетях.....	631
<i>Петросян О. Л., Буре В. М.</i> Метод множественной регрессии в задаче с неполными данными.....	637
<i>Платонова В. А., Губар Е. А.</i> Задача размещения новых филиалов банка в банковской сети.....	644

<i>Романова О. Ю.</i> Эндогенно управляемая экономико-климатическая модель	649
<i>Рылов А. М.</i> Численное решение задачи о построении шкалы маргинальных ставок подоходного налога	654
<i>Свиркина Н. М.</i> Применение Каппы Козна и взвешенной Каппы к анализу информации об учебном процессе	660
<i>Смирнова Е. В.</i> Устойчивая кооперация в одной линейно-квадратичной дифференциальной игре	666
<i>Чугунов Е. С.</i> Нелинейная динамическая задача о распределении сотрудников по проектам	672
<i>Шиманская Г. С.</i> Возможности технической реализации учебного процесса с помощью средств дистанционного обучения	678
<i>Яковлева Д. В. Губар Е. А.</i> Прогнозирование спроса для расчета оптимальной загрузки денежными средствами сети банкоматов	683
Contents	689
Именной указатель	696



*1. Математическая
теория процессов
управления*



Вознюк А. Э.

Санкт-Петербургский государственный университет

Метод изоляции двумя шарами¹

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

1. Постановка задачи. Даны два множества в n -мерном евклидовом пространстве

$$A = \{a_i \in \mathbb{R}^n \mid i \in I = \overline{1, N_1}\},$$

$$B = \{b_j \in \mathbb{R}^n \mid j \in J = \overline{1, N_2}\}.$$

Нужно изолировать элементы одного множества от элементов другого с минимальной ошибкой с помощью двух шаров так, чтобы как можно больше элементов множества A входило во внутренность шаров и как можно больше элементов множества B было вне шаров.

Задача сводится к оптимальному выбору центров $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и $x_2 \in \mathbb{R}^n$ шаров и их радиусов $r_1 \in \mathbb{R}$ и $r_2 \in \mathbb{R}$:

$$S_1 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x_1\| \leq r_1\},$$

$$S_2 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x_2\| \leq r_2\}.$$

Такие задачи возникают в математической диагностике, в теории идентификации и распознавания образов.

2. Построение критериального функционала. Для оптимизации изоляции необходимо выбрать критерий для наилучшего разделения.

Положим $z = (x_1, x_2, r_1, r_2)$, $z \in \mathbb{R}^{2n+2}$. Построим функции

$$h_1(y, z) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} (\|y - x_1\|^2 - r_1^2) \right\},$$

$$h_2(y, z) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} (\|y - x_2\|^2 - r_2^2) \right\},$$

$$h(y, z) = \min \{h_1, h_2\},$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

$$h_3(y, z) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} (r_1^2 - \|y - x_1\|^2), \frac{1}{2} (r_2^2 - \|y - x_2\|^2) \right\}.$$

Функция $h_1 = 0$, если точка y лежит внутри шара S_1 и $h_1 > 0$, если точка лежит вне S_1 . В этом случае значение $h_1(y, z)$ равно разности квадрата расстояния точки y до центра шара S_1 и квадрата радиуса этого шара.

Функция $h_2 = 0$, если точка y лежит внутри шара S_2 и $h_2 > 0$, если точка лежит вне S_2 . В этом случае значение $h_2(y, z)$ равно разности квадрата расстояния точки y до центра шара S_2 и квадрата радиуса этого шара.

Функция $h = 0$, если точка y лежит внутри одного из шаров и $h > 0$, если точка лежит вне обоих шаров. В этом случае значение $h(y, z)$ равно разности квадрата расстояния точки y до центра ближайшего шара и квадрата радиуса этого шара.

Функция $h_3 = 0$, если точка y лежит вне обоих шаров и $h_3(y, z) > 0$, если точка находится внутри шара. В этом случае значение $h_3(y, z)$ равно разности квадрата расстояния точки y до центра шара, в котором она находится, и квадрата радиуса этого шара (если точка y находится в обоих шарах, то выбирается максимальное значение).

Выберем правило идентификации. Пусть $c \in A \cup B$. Если $h(c, z) = 0$, то $c \in A$, если $h(c, z) > 0$, то $c \in B$.

Построим критериальный функционал

$$F(z) = \sum_{i \in I} h(a_i, z) + \sum_{j \in J} h_3(b_j, z).$$

Значение функционала F равно сумме описанных выше разностей для неверно определенных точек.

3. Минимизация критериального функционала. Для оптимальной изоляции множеств A и B нужно построить S_1 и S_2 , так, чтобы x_1, x_2, r_1, r_2 доставляли $F(z)$ минимальное значение. Функционал $F(z)$ является квазидифференцируемой функцией.

Рассмотрим случай, когда все a_i и b_j не лежат на границах шаров, в обоих шарах одновременно и на множестве

$$\|y - x_1\|^2 - r_1^2 = \|y - x_2\|^2 - r_2^2.$$

Это гиперплоскость

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 2(y, x_1 - x_2) = \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 + r_1^2 - r_2^2\},$$

перпендикулярная отрезку, соединяющему центры шаров S_1 и S_2 (отрезок x_1x_2). Она пересекает этот отрезок в середине отрезка, концами которого являются пересечения отрезка x_1x_2 с границами шаров. Гиперплоскость L делит пространство R^n на полупространства Q_1 и Q_2 . $S_1 \subset Q_1, S_2 \subset Q_2$.

Пусть $\varphi_j = h_3(b_j)$, тогда

- если $r_1^2 < \|b_j - x_1\|^2$ и $r_2^2 < \|b_j - x_2\|^2$, то

$$\underline{\partial}\varphi_j = 0_{2n+2},$$

- если $r_1^2 > \|b_j - x_1\|^2$ и $r_2^2 < \|b_j - x_2\|^2$, то

$$\underline{\partial}\varphi_j = \{(-x_1 + b_j, 0_n, r_1, 0)^T\},$$

- если $r_1^2 > \|b_j - x_1\|^2$ и $r_2^2 > \|b_j - x_2\|^2$, то

$$\underline{\partial}\varphi_j = \{(0_n, -x_2 + b_j, 0, r_2)^T\}.$$

Пусть

$$\varphi = \sum_{j \in J} \varphi_j,$$

тогда субдифференциал имеет вид

$$\underline{\partial}\varphi = \sum_{j \in J} \underline{\partial}\varphi_j = \left\{ \left(\sum_{j \in J_1} (b_j - x_1), \sum_{j \in J_2} (b_j - x_2), N_1 r_1, N_2 r_2 \right)^T \right\},$$

где J_1 и J_2 — множество индексов j таких, что b_j входит соответственно в шары S_1 и S_2 ; N_1 и N_2 — мощности множеств J_1 и J_2 .

Супердифференциал $\bar{\partial}\varphi = 0_{2n+2}$.

Пусть $\psi_i = h(a_i)$, тогда

- если $r_1^2 > \|a_i - x_1\|^2$ или $r_2^2 > \|a_i - x_2\|^2$, то

$$\underline{\partial}\psi_i = 0_{2n+2},$$

- если $r_1^2 < \|a_i - x_1\|^2$, $r_2^2 < \|a_i - x_2\|^2$
и $\|a_i - x_1\|^2 - r_1^2 < \|a_i - x_2\|^2 - r_2^2$, то

$$\underline{\partial}\psi_i = \{(x_1 - a_i, 0_n, -r_1, 0)^T\},$$

- если $r_1^2 < \|a_i - x_1\|^2$, $r_2^2 < \|a_i - x_2\|^2$
и $\|a_i - x_1\|^2 - r_1^2 > \|a_i - x_2\|^2 - r_2^2$, то

$$\underline{\partial}\psi_i = \{(0_n, -x_2 + b_j, 0, r_2)^T\}.$$

Пусть

$$\psi = \sum_{i \in I} \psi_i,$$

тогда субдифференциал имеет вид

$$\underline{\partial}\psi = \sum_{i \in I} \underline{\partial}\psi_i = \left\{ \left(\sum_{i \in I_1} (x_1 - a_i), \sum_{i \in I_2} (x_2 - a_i), -M_1 r_1, -M_2 r_2 \right)^T \right\},$$

где I_1 — множество индексов i таких, что

$$\|a_i - x_1\|^2 - r_1^2 < \|a_i - x_2\|^2 - r_2^2,$$

I_2 — множество индексов i , таких, что

$$\|a_i - x_1\|^2 - r_1^2 > \|a_i - x_2\|^2 - r_2^2,$$

M_1 и M_2 — мощности множеств I_1 и I_2 .

Супердифференциал $\bar{\partial}\psi = 0_{2n+2}$. В итоге

$$\underline{\partial}F = \underline{\partial}\psi + \underline{\partial}\varphi,$$

$$\underline{\partial}F = \left\{ \left(\sum_{i \in I_1} (x_1 - a_i) - \sum_{j \in J_1} (x_1 - b_j), \sum_{i \in I_2} (x_2 - a_i) - \sum_{j \in J_2} (x_2 - b_j), \right. \right. \\ \left. \left. N_1 r_1 - M_1 r_1, N_2 r_2 - M_2 r_2 \right)^T \right\},$$

$$\bar{\partial}F = 0_{2n+2}.$$

Необходимое условие минимума[1]

$$-\bar{\partial}F \subset \underline{\partial}F.$$

В нашем случае, для того, чтобы функционал F принимал минимальное значение, необходимо выполнение следующих равенств

$$\sum_{i \in I_1} (x_1 - a_i) = \sum_{j \in J_1} (x_1 - b_j), \quad \sum_{i \in I_2} (x_2 - a_i) = \sum_{j \in J_2} (x_2 - b_j),$$

$$N_1 r_1 = M_1 r_1, \quad N_2 r_2 = M_2 r_2.$$

Раскрывая суммы в первых двух равенствах и переписывая третье и четвертое равенства в виде $N_1 = M_1, N_2 = M_2$, получаем

$$\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{j \in J_1} b_j, \quad \sum_{i \in I_2} a_i = \sum_{j \in J_2} b_j$$

или

$$\frac{1}{M_1} \sum_{i \in I_1} a_i = \frac{1}{N_1} \sum_{j \in J_1} b_j, \quad \frac{1}{M_2} \sum_{i \in I_2} a_i = \frac{1}{N_2} \sum_{j \in J_2} b_j.$$

4. Заключение. В данной работе получен критерий минимума функционала F (критерий оптимальной изоляции двумя шарами). Центр масс неверно определенных точек множества A , расположенных в полупространстве Q_1 , совпадает с центром масс неверно определенных точек множества B , лежащих внутри S_1 , а центр масс неверно определенных точек множества A , расположенных в полупространстве Q_2 , совпадает с центром масс неверно определенных точек множества B , лежащих внутри S_2 .

Литература

1. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Нелинтеренцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 376 с.

Волкова А. С.

Воронежский государственный университет

Обобщенные решения краевой задачи для уравнения параболического типа на произвольном графе

Рекомендовано к публикации профессором Провоторовым В. В.

В [1, 2] рассмотрены краевые задачи для эллиптического уравнения на графе и представлены условия единственности и существования решения этих задач. Ниже рассматриваются вопросы однозначной разрешимости краевых задач для параболического уравнения на графе. Полученные результаты используются при решении задач граничного управления в классе обобщенных решений.

1. Основные понятия и обозначения. Рассмотрим связный компактный граф-дерево Γ с корнем ξ_0 , множеством узлов $V = \{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ и множеством ребер $\mathfrak{R} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$; длина каждого ребра равна единице. Здесь и ниже будем придерживаться обозначений, принятых в монографии [3]. Узел называется граничным, если он принадлежит только одному ребру (граничное ребро), все остальные узлы и ребра — внутренние; множество граничных узлов обозначим через $\partial\Gamma$, $J(\Gamma)$ — множество внутренних узлов: $V = \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$. Обозначим через Γ_0 объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$), $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$ и $\Gamma_{\{t_0\}} = \Gamma_0 \times \{t_0\}$ — сечение области Γ_T плоскостью $t = t_0$, $t_0 \in (0, T)$.

Естественным образом вводится частичная упорядоченность на Γ : для двух точек a_1 и a_2 определено отношение $a_1 \leq a_2$, если a_1 лежит на единственном пути, соединяющем корень ξ_0 с a_2 . Обозначим через $[\omega, \varpi] = \{z \in \Gamma : \omega \leq z \leq \varpi\}$ и если $[\omega, \varpi]$ — ребро γ , то ω — начальная точка γ , ϖ — конечная точка γ . Объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, обозначим через $\bar{\Gamma}_0$: $\bar{\Gamma}_0 = \Gamma \setminus V$; под $\bar{\Gamma}_0$ понимается несвязное объединение всех ребер — замкнутых отрезков. Для каждого внутреннего узла ξ обозначим через $R(\xi)$ множество ребер, выходящих из ξ . Для любого узла $\xi \in V$ длина пути, соединяющего корень ξ_0 с ξ является целым неотрицательным числом, обозначим его через $|\gamma|$ и назовем порядком узла ξ . Пусть $V^{(\nu)} = \{\xi \in V : |\xi| = \nu\}$ — множество узлов порядка ν .

Занумеруем узлы графа Γ следующим образом: $\partial\Gamma = \{\xi_0, \dots, \xi_p\}$, $\xi_{p+1} \in V^{(1)}$, а $\xi_j, j > p + 1$, занумерованы в порядке возрастания $|\xi_j|$, $J(\Gamma) = \{\xi_{p+1}, \dots, \xi_m\}$. Аналогично занумерованы ребра: $\gamma_k, k = \overline{1, p+1}$ — граничные ребра ($\gamma_{p+1} = [\xi_0, \xi_{p+1}]$), $\gamma_k = [\xi_{k_j}, \xi_k], k = \overline{p+2, m}, k_j < k$ — внутренние ребра. Каждое ребро $\gamma \in \mathfrak{R}$ параметризуется отрезком $[0, 1]$. Ориентацию на ребрах удобно выбрать следующим образом: если $\gamma = [\omega, \varpi]$, то узлу ω соответствует число 1, узлу ϖ — число 0.

Пусть Γ — произвольный связный компактный граф, содержащий циклы. В каждом цикле фиксируется ребро и ему принадлежащий узел. Формальное разъединение графа по таким узлам, оставляющее граф связным, превращает его в «дерево». Ориентация и параметризация, а также нумерация узлов и ребер полученного графа приведены выше. Внутренний узел произвольного графа может иметь более одного входящего в него ребра в отличие от внутреннего узла графа-дерева, имеющего только одно входящее в него ребро. Аналогично обозначению множества $R(\xi)$ ребер, выходящих из внутреннего узла ξ , через $r(\xi)$ обозначим множество ребер, входящих в узел ξ .

Сужение функции $f(x)$ ($f(x, t)$) на ребро γ_k будем обозначать через $f(x)_{\gamma_k}$ ($f(x, t)_{\gamma_k}$). Интеграл от функции $f(x)$ ($f(x, t)$) по области Γ (Γ_T) понимается как

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(x)_{\gamma_k} dx,$$

$$\int_{\Gamma_T} f(x, t) dx dt = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k \times (0, T)} f(x, t)_{\gamma_k} dx dt.$$

Через $L_2(\Gamma)$ обозначим пространство функций, интегрируемых с квадратом на Γ . Пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную k -го порядка ($k = 1, 2$) обозначим через $W_2^k(\Gamma)$. Для цилиндра Γ_T аналогично вводятся пространства $L_2(\Gamma_T)$ и $W_2^1(\Gamma_T)$.

Через $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ обозначим пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка по x , которые принадлежат $L_2(\Gamma_T)$. Норма $\|\cdot\|_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)}$ в $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ определяется

скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} \equiv \int_{\Gamma_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt.$$

Через $W_2^1(\Gamma_T)$ обозначим пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка по x и по t , которые принадлежат $L_2(\Gamma_T)$. Норма $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma_T)}$ в $W_2^1(\Gamma_T)$ определяется скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^1(\Gamma_T)} \equiv \int_{\Gamma_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt.$$

Через $V_2(\Gamma_T)$ обозначим пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму вида

$$\|u\|_{V_2(\Gamma_T)} \equiv \text{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Gamma_T)}. \quad (1)$$

Пространство $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ состоит из всех элементов $u \in V_2(\Gamma_T)$, сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$, т.е. таких, что $\|u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ равномерно на $(0, T)$.

Введем необходимые подпространства пространств $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, $W_2^1(\Gamma_T)$ и $V_2(\Gamma_T)$.

Обозначим через $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$ множество элементов пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех сечениях $\Gamma_{\{t_0\}}$ как функции класса $L_2(\Gamma)$ и непрерывны по $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\Gamma)$, а также выполняются следующие соотношения [4]

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1, t)_{\gamma_j}}{\partial x} + A_\xi u(0, t)_{\gamma_j} = \\ & = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0, t)_{\gamma_j}}{\partial x} + B_\xi u(0, t)_{\gamma_j}, \quad \xi \in J(\Gamma), \quad t \in (0, T) \end{aligned} \quad (2)$$

где $a(x)$ — некоторая измеримая и ограниченная на Γ функция, A_ξ и B_ξ — фиксированные для каждого узла $\xi \in J(\Gamma)$ неотрицательные постоянные.

Через $\Omega_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ обозначим множество функций из $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma_T$. Пусть $W_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $W_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ — замыкания $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $\Omega_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ по норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, соответственно.

Обозначим через $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ множество элементов пространства $W_2^1(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех $\Gamma_{\{t_0\}}$, как функции класса $L_2(\Gamma)$, и непрерывны по $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\Gamma)$, а также выполняются соотношения (2); $\tilde{\Omega}_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ — множество функций из $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma_T$; $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, V)$ — множество элементов пространства $W_2^1(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех $\Gamma_{\{t_0\}}$, как функции класса $L_2(\Gamma)$, и непрерывны по $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\Gamma)$, а также выполняются соотношения (2). Пространства $W_2^1(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $W_{2,0}^1(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $W_2^1(\Gamma_T, V)$ — замыкания $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $\tilde{\Omega}_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, V)$ по норме $W_2^1(\Gamma_T)$, соответственно.

Через $V_2(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($V_2(\Gamma_T, V)$) обозначим пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($W_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$), имеющих конечную норму (1); пространство $V_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($V_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$) состоит из всех элементов $u \in V_2(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($u \in V_2(\Gamma_T, V)$), сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$, а $V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ — пересечение $V_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $W_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$.

2. Обобщенные решения из класса $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Для уравнения

$$(\mathbb{L}u)(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t) \quad (3)$$

рассмотрим задачу нахождения решения $u(x, t)$ в области $\overline{\Gamma_T}$, удовлетворяющего начальному

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (4)$$

и краевому условию

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

а также общую краевую задачу, в которой краевое условие имеет вид

$$\begin{aligned} \left(a(0) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + h_j u(0, t) \right)_{\gamma_j} &= 0, \quad j = \overline{1, p}, \\ \left(a(1) \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} - H u(1, t) \right)_{\gamma_{p+1}} &= 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $h_j, j = \overline{1, p}$, H — фиксированные положительные постоянные. Пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$ состоит из всех элементов $L_1(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} f^2(x, t) dx \right) dt.$$

Коэффициенты $a(x), b(x)$ — измеримые ограниченные функции на Γ , а именно:

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \tilde{b}, \quad x \in \Gamma. \quad (7)$$

Определение 1. класса $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ краевой задачи (3)–(5) называется функция $u(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u(x, t) \eta(x, t) dx + \int_{\Gamma_T} \left(-u \frac{\partial \eta}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x) u(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt = \\ = \int_{\Gamma} \varphi \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_T} f \eta dx dt \end{aligned}$$

при любой $\eta(x, t) \in W_{2,0}^1(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $t \in [0, T]$.

Определение 2. *Обобщенным решением* класса $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ краевой задачи (3), (4), (6) называется функция $u(x, t) \in V_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u(x, t) \eta(x, t) dx + \int_{\Gamma_t} \left(-u \frac{\partial \eta}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x) u(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt + \\ + \sum_{j=1}^p \int_0^t h_j (u(0, t) \eta(0, t))_{\gamma_j} dt + \int_0^t H (u(1, t) \eta(1, t))_{\gamma_{p+1}} dt = \\ = \int_{\Gamma} \varphi \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_t} f \eta dx dt \end{aligned}$$

при $\eta(x, t) \in W_2^1(\Gamma_T, V)$ и $t \in [0, T]$.

Для краевой задачи (3)–(5) ((3), (4), (6)) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Краевая задача (3)–(5) ((3), (4), (6)) имеет обобщенное решение из $V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($V_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$), если выполнены предположения (7).

Теорема 2. Краевая задача (3)–(5) ((3), (4), (6)) однозначно разрешима в пространстве $V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($V_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$) при любых $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ и $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, если выполнены предположения (7).

Доказательства теорем опираются на аналогичные утверждения, представленные в [5, гл. 3, §3]. Получены оценки решения класса $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ через нормы функций $f(x, t)$ и $\varphi(x)$, при этом используются предположения (7).

Литература

1. Волкова А. С. Обобщенные решения для эллиптического уравнения в задачах граничного управления на геометрическом графе // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 14–20.
2. Волкова А. С. Обобщенное решение краевой задачи для эллиптического уравнения на графе // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета, 2012. № 1. С. 28–29.
3. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
4. Провоторов В. В., Махинова О. А. Краевые задачи для уравнений с распределенными параметрами на графах. Воронеж: Научная книга, 2013. 133 с.
5. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Физматлит, 1973. 408 с.

Гнилицкая Ю. А.

Воронежский государственный университет

Построение граничного управления колебаниями системы струн в классе обобщенных решений

Рекомендовано к публикации профессором Провоторовым В. В.

В настоящей работе обосновывается существование граничных управляющих воздействий и представлен метод их нахождения в модельной задаче управления колебаниями упругой системы из m струн, закрепленных по типу графа-звезды (ниже Γ). Задача состоит в переводе дифференциальной системы из заданного начального состояния в заданное финальное состояние. Задача управления рассматривается в классе $W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma_T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$. Здесь $W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma_T)$ — пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка также из $L_2(\Gamma_T)$. Для упрощения полученных формул длины ребер графа кратны π , волновое уравнение используется в простейшей форме: $u_{tt} = u_{xx}$. Главный результат исследования представлен в виде формул, определяющих искомые граничные управления как функции времени.

1. Общие понятия и предложения. Пусть Γ — граф-звезда, состоящий из m одинаковых ребер γ_k и одного внутреннего узла ξ ; $\partial\Gamma_T$ — множество граничных узлов графа Γ . При этом ребра γ_k , $k = \overline{1, m-1}$, параметризованы отрезком $[0, \pi/2]$ (ориентация на ребрах к узлу « ξ »), ребро γ_m — отрезком $[\pi/2, \pi]$ (ориентация на ребре — «от узла ξ »).

Пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка, обозначим через $W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma)$, норма $\|\cdot\|_{W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma)}$ определяется скалярным произведением

$$(u, v)_{W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \left(uv + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \right) dx,$$

а норма $\|\cdot\|_{W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma_T)}$ — скалярным произведением

$$(u, v)_{W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma_T)} = \int_{\Gamma_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt.$$

Все дальнейшие рассмотрения будут происходить в множестве функций, равных нулю на $\partial\Gamma_T$, которое является подпространством

$W_2^1(\Gamma_T)$. Для таких функций удобно ввести скалярное произведение

$$[u, v]_{W_2^1(\Gamma_T)} = \int_{\Gamma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt,$$

порождающее норму, эквивалентную введенной выше норме.

2. Обобщенные решения. Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на Γ функций, $C[\Gamma]$ — множество кусочно-непрерывных функций (непрерывность на каждом ребре, в узле ξ непрерывность не обязательна), $C^2[\Gamma]$ — множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$.

Колебания $U(x, t)$ системы m струн на каждом из ребер графа Γ при произвольном значении времени $t \in (0, T)$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t)_{\gamma_k} \quad (1)$$

внутри каждого ребра γ_k , $k = \overline{1, m-1}$, и соотношениями в узле ξ (условия непрерывности и гладкости)

$$\begin{aligned} U\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= U\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} U\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \frac{\partial}{\partial x} U\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2)$$

К ним добавляются начальные условия при $x \in \Gamma$, $t = 0$:

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

и финальные условия при $x \in \Gamma$, $t = T$:

$$U(x, T) = \tilde{\varphi}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, T) = \tilde{\psi}(x), \quad (4)$$

а также граничные условия в узлах множества $\partial\Gamma$:

$$U(0, t)_{\gamma_k} = \mu_k(t), \quad k = \overline{1, m-1}, \quad U(\pi, t)_{\gamma_m} = \nu(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ — заданные функции, $\mu_k(t)$, $\nu(t)$ — управляющие функции.

Задачи (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5) подробно рассмотрены в [1, 2]. Для задач (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5) введем понятие обобщенного (слабого) решения класса $W_2^1(\Gamma_T)$.

Обозначим через $\Omega(\xi, \Gamma)$ множество непрерывных в узле ξ функций $u(x)$ класса $W_2^1(\Gamma)$, для которых сужение $\frac{\partial u(x)_{\gamma_k}}{\partial x}$ непрерывно во

всех концевых точках ребер γ_k , $k = \overline{1, m}$, принадлежащих узлу ξ , и имеет место соотношение $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d}{dx} u(\frac{\pi}{2})_{\gamma_k} = \frac{d}{dx} u(\frac{\pi}{2})_{\gamma_m}$; $\Omega_0(\xi, \Gamma_T)$ — множество функций $u(x, t) \in \Omega(\xi, \Gamma)$ для фиксированного $t \in (0, T)$ и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$. Пусть $\Omega_0(\xi, \Gamma)$, $\Omega_0(\xi, \Gamma_T)$ — множества функций из $\Omega(\xi, \Gamma)$, $\Omega(\xi, \Gamma_T)$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma$, соответственно. Замыкания множеств $\Omega_0(\xi, \Gamma)$, $\Omega_0(\xi, \Gamma_T)$ по нормам пространств $W_{2,0}^1(\Gamma)$ и $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ обозначим через $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma)$ и $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$: $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma) \subset W_{2,0}^1(\Gamma)$, $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T) \subset W_{2,0}^1(\Gamma_T)$.

Определение 1. Обобщенным решением (слабым решением) класса $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ краевой задачи (1)–(3), (5) называется функция $u(x, t) \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равная $\varphi(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma_T} (-u_t \eta_t + u_x \eta_x) dx dt - \int_{\Gamma} \psi(x) \eta(x, 0) dx = 0 \quad (6)$$

при любых $\eta \in \widehat{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, где $\widehat{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$ — множество элементов $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равных нулю при $t = T$.

Определение 2. Обобщенным решением (слабым решением) класса $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ краевой задачи (1), (2), (4), (5) называется функция $u(x, t) \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равная $\tilde{\varphi}(x)$ при $t = T$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma_T} (-u_t \eta_t + u_x \eta_x) dx dt + \int_{\Gamma} \tilde{\psi}(x) \eta(x, T) dx = 0 \quad (7)$$

при любых $\eta \in \widetilde{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, где $\widetilde{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$ — множество элементов $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равных нулю при $t = 0$.

3. Однозначная разрешимость краевых задач. Обратимся к вопросу слабой разрешимости краевых задач (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5) в пространстве $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$. Для удобства дальнейшего изложения сведем известной заменой граничные условия обеих задач к нулю и представим задачи (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5) в следующем виде ($U(x, t)$ заменена на $u(x, t)$):

$$\mathbb{L}u = f, \quad u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), u|_{\partial\Gamma_T} = 0, \quad (8)$$

$$\mathbb{L}u = \tilde{f}, \quad u(x, T) = \tilde{\varphi}(x), u_t(x, T) = \tilde{\psi}(x), u|_{\partial\Gamma_T} = 0, \quad (9)$$

где $\mathbb{L}u = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$.

Пусть $\varphi, \tilde{\varphi} \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma)$, $\psi, \tilde{\psi} \in L_2(\Gamma)$ и $f, \tilde{f} \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$ состоит из всех элементов $L_1(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} f^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt.$$

Теорема 1. Краевая задача (8) однозначно разрешима в пространстве $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$.

Вначале показывается, что краевая задача (8) имеет не более одного обобщенного решения из $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, т. е. показывается, что разность двух обобщенных решений задачи (8) $u = u_1 - u_2$ равна нулю. Рассмотрим функцию $\eta(x, t) \in \widehat{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равную $\int_{\tau}^t u(x, \tau) d\tau$ при $0 \leq t \leq \tau$ и нулю при $\tau \leq t \leq T$, где τ — какое-либо из $[0, T]$. После подстановки $\eta(x, t)$ в (6) и последующего интегрирования получаем $u(x, t) = 0$ на $[0, T]$. Существование решения краевой задачи (8) показывается методом Галеркина. Рассматривается приближенное решение $u^N(x, t)$ задачи (8) в виде $u^N(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n^N(t) u_n(x)$, где $\{u_n(x)\}$ — полная система функций в $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, для которой верна оценка $\|u^N\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_T)} \leq c$. Далее показывается, что из ограниченной в $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ последовательности $\{u^N\}_{n \geq 1}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ и равномерно сходящуюся по $t \subseteq [0, T]$ в норме $L_2(\Gamma_T)$ к некоторому элементу $u^* \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$. Функция $u^*(x, t)$ является обобщенным решением задачи (8).

Аналогично показывается однозначная разрешимость задачи (9).

4. Задача управления в классе $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$. Предлагается процедура решения задачи управления в классе гладких функций. Переход к пределу в норме пространства $W_{2,0}^1(0, \pi)$ дает решение задачи управления в классе обобщенных решений.

4.1. Постановка задачи управления. Пусть $\varphi(x), \tilde{\varphi}(x) \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma)$, $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \in L_2(\Gamma)$.

Задача 1 управления колебаниями волновой системой (1), (2) состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu(t) \in W_{2,0}^1(0, T)$ из граничных условий (5) таких, чтобы в момент времени $t = 0$ выполнялись начальные условия (3), а в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (4).

Поставленная задача состоит из двух вспомогательных задач:

1) задачи перевода системы (1), (2) за время T из начального состояния (3) в состояние динамического покоя

$$U(x, T) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, T) = 0$$

(задача гашения колебаний системы), второе равенство имеет место почти всюду на Γ ; 2) задачи перевода системы (1), (2) за время T из состояния динамического покоя в финальное состояние (4).

4.2. Решение задачи управления. Определим задачу управления колебаниями дифференциальной системы (1), (2) в классе гладких функций. Пусть $\varphi(x), \tilde{\varphi}(x) \in C^2[\Gamma]$, $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \in C^1[\Gamma]$.

Задача 2 управления колебаниями дифференциальной системы (1), (2) состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu(t) \in C^2[0, T]$ из граничных условий (5) таких, чтобы в момент времени $t = 0$ выполнялись начальные условия (3), а в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (4).

Задача 2 представляется суммой решений вспомогательных задач: задачи гашения колебаний системы [1] и задачи перевода системы из состояния динамического покоя в заданное состояние [2]. В основе решения лежит спектральный подход и анализ задачи Штурма — Лиувилля на графе Γ , представление решения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \frac{1}{2} (\varphi_{\gamma_1 \gamma_m}(t) + \tilde{\varphi}_{\gamma_1 \gamma_m}(\pi - t)) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_0^t \psi_{\gamma_1 \gamma_m}(\tau) d\tau - \int_0^{\pi-t} \tilde{\psi}_{\gamma_1 \gamma_m}(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{2} (\varphi(0)_{\gamma_1} + \tilde{\varphi}(0)_{\gamma_1}), \\ \nu(t) &= \frac{1}{2} (\varphi_{\gamma_1 \gamma_m}(\pi - t) + \tilde{\varphi}_{\gamma_1 \gamma_m}(t)) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi-t} \psi_{\gamma_1 \gamma_m}(\tau) d\tau - \int_0^{\pi-t} \tilde{\psi}_{\gamma_1 \gamma_m}(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2} (\varphi(0)_{\gamma_1} + \tilde{\varphi}(0)_{\gamma_1}), \\ t &\in [0, \pi]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mu_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\varphi_{\gamma_k}(\pi - t) + \tilde{\varphi}_{\gamma_k}(\pi - t) - \int_{\pi/2}^{\pi-t} (\psi_{\gamma_k}(\tau) + \tilde{\psi}_{\gamma_k}(\tau)) d\tau \right), & t \in [0, \pi/2], \\ \frac{1}{2} \left(\varphi_{\gamma_k}(t) + \tilde{\varphi}_{\gamma_k}(t) + \int_{\pi/2}^t (\psi_{\gamma_k}(\tau) + \tilde{\psi}_{\gamma_k}(\tau)) d\tau \right), & t \in [\pi/2, \pi]. \end{cases} \quad (11)$$

при условии $\mu_1(t) - 2\mu_i(t) + \nu(t) \equiv 0$, $t \in [0, \pi]$, $i = \overline{2, m-1}$.

Рассмотрим последовательности начальных условий $\{\varphi_n(x)\}_{n \geq 1}$, $\{\psi_n(x)\}_{n \geq 1}$ и финальных условий $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}_{n \geq 1}$, $\{\tilde{\psi}_n(x)\}_{n \geq 1}$: $\varphi_n(x)$, $\tilde{\varphi}_n(x) \in C^1[\Gamma]$, $\psi_n(x)$, $\tilde{\psi}_n(x) \in C(\Gamma)$. Пусть $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $\tilde{\varphi}_n \rightarrow \tilde{\varphi}$ в норме пространства $W_{2,0}^1(\Gamma)$: $\varphi, \tilde{\varphi} \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma)$; $\psi_n \rightarrow \psi$, $\tilde{\psi}_n \rightarrow \tilde{\psi}$ в норме пространства $L_2(\Gamma)$: $\psi, \tilde{\psi} \in L_2(\Gamma)$.

Пусть для каждого фиксированного n решена задача 2. Обозначим ее решение через $\mu_{n,k}^*(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu_n^*(t)$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в норме пространства $W_{2,0}^1(0, \pi)$, получаем, что последовательности решений сходятся к функциям $\mu_k^*(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu^*(t)$, являющимися элементами пространства $W_{2,0}^1(0, \pi)$ и имеющими вид (10), (11). При этом почти всюду на $(0, \pi)$ выполнены условия

$$\mu_1^*(t) - 2\mu_i^*(t) + \nu^*(t) = 0, \quad i = \overline{2, m-1}. \quad (12)$$

Таким образом, функции $\mu_k^*(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu^*(t)$ являются решением задачи 2.

5. Заключение. Ассоциированная с графом-звездой Γ динамическая система (1)–(5) является управляемой для времени $T = \pi$ при условиях (12) на управляющие воздействия.

Литература

1. Провоторов В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2012. Вып. 1. С. 62–71.
2. Гнилицкая Ю. А. Граничное управление колебаниями системы струн // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербурб. гос. ун-та, 2012. С. 21–25.

Колпакова Е. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Разделение двух множеств двумя гиперплоскостями¹

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается частный случай задачи идентификации — задача разделения двух множеств двумя гиперплоскостями. Заданы два множества

$$A = \{a_i \in \mathbb{R}^n | i \in I = \overline{1, n_1}\}, \quad B = \{b_j \in \mathbb{R}^n | j \in J = \overline{1, n_2}\}.$$

Предполагается, что $A \cap B = \emptyset$. Требуется найти правило идентификации этих множеств. Такое правило строится на основе минимизации некоторого суррогатного функционала.

2. Решение задачи. Имеем две гиперплоскости

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | h_1(x, l_1, d_1) = (x, l_1) + d_1 = 0\},$$

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | h_2(x, l_2, d_2) = (x, l_2) + d_2 = 0\},$$

где $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^n, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \|l_1\| = \|l_2\| = 1$. Если $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$, то h_1 и h_2 — расстояния от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до соответствующих гиперплоскостей. Гиперплоскости пересекаются и делят каждое множество A и B на две части. Положим $z = (l_1, l_2, d_1, d_2) \in \mathbb{R}^{2n+2}$. Обозначим $C = A \cup B$. Идентификацию точки $c \in C$ будем проводить по следующему правилу:

- если $\{h(c, z) = h_1 \times h_2 > 0\}$, то считаем, что $c \in A$,
- если $\{h(c, z) = h_1 \times h_2 \leq 0\}$, то считаем, что $c \in B$.

Требуется найти такое правило идентификации (идентификатор — это две гиперплоскости), чтобы оно «разделяло» множества A и B наилучшим образом. Для выбора оптимальных гиперплоскостей вводятся натуральные функционалы (например, количество неверно идентифицированных точек). Так как такие функционалы разрывны, необходимо ввести суррогатный функционал и минимизировать его. Введем суррогатный функционал следующим образом:

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

1) он должен быть неотрицателен и обращаться в ноль, когда все точки идентифицированы правильно; 2) он должен быть непрерывен и обладать достаточно хорошими (с точки зрения поиска минимума) аналитическими свойствами. Возьмем суррогатный функционал, который равен сумме произведений расстояний неверно определенных точек до соответствующих гиперплоскостей:

$$F(z) = \sum_{i \in I} \max\{0, -h(a_i, z)\} + \sum_{j \in J} \max\{0, h(b_j, z)\},$$

где $z = (l_1, l_2, d_1, d_2)$, $z \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $h(x, l_1, l_2, d_1, d_2) = h(x, z)$.

Необходимо найти $\min_{z \in Z} F(z)$, где $Z = \{z = (l_1, l_2, d_1, d_2), \|l_1\| = \|l_2\| = 1, l_1, l_2 \in R^n; d_1, d_2 \in R\} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$.

Функция $h(a_i, z) = h_1(a_i, z) \times h_2(a_i, z) = ((a_i, l_1) + d_1) \times ((a_i, l_2) + d_2)$ — гладкая. Найдем квазидифференциал этой функции [1]:
 $\underline{\partial}h(a_i) = \{h'_z(a_i) = h_1 \times h'_2 + h_2 \times h'_1\} = \{h_1(a_i) \times (0_n, a_i, 0, 1) + h_2(a_i) \times (a_i, 0_n, 1, 0)\} = \{(h_2(a_i)a_i, h_1(a_i)a_i, h_2(a_i), h_1(a_i))\}$, $\bar{\partial}h(a_i) = \{0_{2n+2}\}$.
 Положим $\varphi_i(z) = \max\{0, -h(a_i, z)\}$, $\psi_j(z) = \max\{0, h(b_j, z)\}$,

$$\varphi(z) = \sum_{i \in I} \max\{0, -h(a_i, z)\}, \quad \psi(z) = \sum_{j \in J} \max\{0, h(b_j, z)\}.$$

Найдем субдифференциал и супердифференциал функции φ_i [1]. Считаем, что на гиперплоскостях нет точек A и B , т. е. $h(a_i, z) \neq 0$.
 $\underline{\partial}\varphi_i = \begin{cases} \{0_{2n+2}\}, & \text{если } h(a_i, z) > 0, \\ \{(-h_2(a_i)a_i, -h_1(a_i)a_i, -h_2(a_i), -h_1(a_i))\}, & \text{если } h(a_i, z) < 0. \end{cases}$
 $\bar{\partial}\varphi_i = \{0_{2n+2}\}$. Тогда

$$\underline{\partial}\varphi = \left\{ \left(- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i)a_i, - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i)a_i, - \sum_{i \in I_1} h_2(a_i), - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) \right) \right\},$$

где $I_1 = \{i \in I | h(a_i, z) < 0\}$; $\bar{\partial}\varphi = \{0_{2n+2}\}$.

Функция $h(b_j, z) = h_1(b_j, z) \times h_2(b_j, z) = ((b_j, l_1) + d_1) \times ((b_j, l_2) + d_2)$ — гладкая. Найдем квазидифференциал этой функции [1]:
 $\underline{\partial}h(b_j) = \{h'_z(b_j)\} = \{h_1 \times h'_2 + h_2 \times h'_1\} = \{h_1(b_j) \times (0_n, b_j, 0, 1) + h_2(b_j) \times (b_j, 0_n, 1, 0)\} = \{(h_2(b_j)b_j, h_1(b_j)b_j, h_2(b_j), h_1(b_j))\}$, $\bar{\partial}h(b_j) = \{0_{2n+2}\}$.
 Найдем субдифференциал и супердифференциал функции ψ_i [1]. Считаем, что на гиперплоскостях нет точек A и B , т. е. $h(b_j, z) \neq 0$.

$$\underline{\partial}\psi_j = \begin{cases} \{0_{2n+2}\}, & \text{если } h(b_j, z) < 0, \\ \{(h_2(b_j)b_j, h_1(b_j)b_j, h_2(b_j), h_1(b_j))\}, & \text{если } h(b_j, z) > 0. \end{cases}$$

$\bar{\partial}\psi_j = \{0_{2n+2}\}$. Тогда

$$\underline{\partial}\psi = \left\{ \left(\sum_{j \in J_1} h_2(b_j)b_j, \sum_{j \in J_1} h_1(b_j)b_j, \sum_{j \in J_1} h_2(b_j), \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) \right) \right\},$$

где $J_1 = \{j \in J | h(b_j, z) > 0\}$, $\bar{\partial}\psi = \{0_{2n+2}\}$.

Так как $F(z)$ субдифференцируемая функция, то её субдифференциал [1] имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{\partial}F(z) &= \{F'(z)\} = \underline{\partial}\varphi + \underline{\partial}\psi = \\ &= \left\{ \left(- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i)a_i, - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i)a_i, - \sum_{i \in I_1} h_2(a_i), - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) \right) \right\} + \\ &\quad + \left\{ \left(\sum_{j \in J_1} h_2(b_j)b_j, \sum_{j \in J_1} h_1(b_j)b_j, \sum_{j \in J_1} h_2(b_j), \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left(- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i)a_i + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j)b_j, - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i)a_i + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j)b_j, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i \in I_1} h_2(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j), - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) \right) \right\}, \\ \bar{\partial}F(z) &= \{0_{2n+2}\}. \end{aligned}$$

Имеем ограничения $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$. Снимем их с помощью штрафной функции. Тогда перейдем от задачи условной минимизации функции F на множестве Z к задаче безусловной минимизации функции $\Phi_\lambda(z) = F(z) + \lambda\varphi_0(z)$. Функция Φ_λ называется штрафной функцией, где $\lambda > 0$, функция φ_0 удовлетворяет условию $\varphi_0(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in Z, \\ > 0, & \text{если } z \notin Z. \end{cases}$ В качестве φ_0 возьмем функцию

$$\varphi_0(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \text{ где } \varphi_1(z) = |||l_1|| - 1|, \varphi_2(z) = |||l_2|| - 1|.$$

Можно показать, что функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет теореме о существовании точной штрафной функции [2]. Тогда при достаточно больших $\lambda > 0$ задача минимизации функции F на множестве Z эквивалентна задаче минимизации функции Φ_λ на \mathbb{R}^n .

Необходимое условие минимума функции Φ_λ имеет вид

$$0_{2n+2} \in \underline{\partial}\Phi_\lambda. \quad (1)$$

Найдем субдифференциал функции $\varphi_0(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$. Для этого сначала найдем субдифференциалы функций φ_1 и φ_2 .

Имеем $\underline{\partial}\varphi_1 = \{(co\{\frac{l_1}{\|l_1\|}, \frac{-l_1}{\|l_1\|}\}, 0_n, 0, 0)\} = \{(co\{l_1, -l_1\}, 0_n, 0, 0)\}$, так как $\underline{\partial}\varphi_1$ вычисляем в точке, где $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$; $\bar{\partial}\varphi_1 = \{0_{2n+2}\}$; $\underline{\partial}\varphi_2 = \{(0_n, co\{\frac{l_2}{\|l_2\|}, \frac{-l_2}{\|l_2\|}\}, 0, 0)\} = \{(0_n, co\{l_2, -l_2\}, 0, 0)\}$, так как $\underline{\partial}\varphi_2$ вычисляем в точке, где $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$; $\bar{\partial}\varphi_2 = \{0_{2n+2}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{\partial}\varphi_0 &= \underline{\partial}\varphi_1 + \underline{\partial}\varphi_2 = \{(co\{l_1, -l_1\}, co\{l_2, -l_2\}, 0, 0)\}, \\ \bar{\partial}\varphi_0 &= \{0_{2n+2}\}. \end{aligned}$$

Найдем субдифференциал

$$\begin{aligned} \underline{\partial}\Phi_\lambda &= \underline{\partial}F(z) + \lambda\underline{\partial}\varphi_0 = \\ &= \left\{ \left(-\sum_{i \in I_1} h_2(a_i)a_i + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j)b_j + \lambda co\{l_1, -l_1\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -\sum_{i \in I_1} h_1(a_i)a_i + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j)b_j + \lambda co\{l_2, -l_2\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -\sum_{i \in I_1} h_2(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j), -\sum_{i \in I_1} h_1(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) \right) \right\}, \quad \bar{\partial}\Phi_\lambda = \{0_{2n+2}\}. \end{aligned}$$

3. Геометрическая интерпретация необходимого условия минимума. Условие (1) является необходимым условием. Имеем

$$-\sum_{i \in I_1} h_2(a_i) a_i + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j) b_j = \mu_1 l_1, \quad \mu_1 \in [-\lambda, \lambda] \quad (2)$$

$$-\sum_{i \in I_1} h_1(a_i) a_i + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) b_j = \mu_2 l_2, \quad \mu_2 \in [-\lambda, \lambda] \quad (3)$$

$$-\sum_{i \in I_1} h_2(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j) = 0, \quad (4)$$

$$-\sum_{i \in I_1} h_1(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) = 0. \quad (5)$$

Так как $h(a_i, z) < 0$, возможны следующие варианты:

$$1) \{h_1(a_i) < 0, h_2(a_i) > 0\}, \quad 2) \{h_1(a_i) > 0, h_2(a_i) < 0\}.$$

Так как $h(b_j, z) > 0$, возможны следующие варианты:

$$1) \{h_1(b_j) > 0, h_2(b_j) > 0\}, \quad 2) \{h_1(b_j) < 0, h_2(b_j) < 0\}.$$

Из (4) следует

$$- \sum_{h_1(a_i) < 0} h_2(a_i) - \sum_{h_1(a_i) > 0} h_2(a_i) + \sum_{h_1(b_j) > 0} h_2(b_j) + \sum_{h_1(b_j) < 0} h_2(b_j) = 0.$$

Сгруппируем первое с четвертым слагаемые и второе с третьим.

$$\sum_{h_1(a_i) < 0} h_2(a_i) - \sum_{h_1(b_j) < 0} h_2(b_j) = - \sum_{h_1(a_i) > 0} h_2(a_i) + \sum_{h_1(b_j) > 0} h_2(b_j).$$

Получаем, что сумма расстояний неверно определенных точек из A и из B до гиперплоскости $h_2 = 0$, оказавшихся в полупространстве $h_1 > 0$, равна сумме расстояний неверно определенных точек из A и из B до гиперплоскости $h_2 = 0$, оказавшихся в полупространстве $h_1 < 0$. Из (5) следует

$$- \sum_{h_2(a_i) < 0} h_1(a_i) - \sum_{h_2(a_i) > 0} h_1(a_i) + \sum_{h_2(b_j) > 0} h_1(b_j) + \sum_{h_2(b_j) < 0} h_1(b_j) = 0.$$

Сгруппируем первое с четвертым слагаемые и второе с третьим.

$$\sum_{h_2(a_i) < 0} h_1(a_i) - \sum_{h_2(b_j) < 0} h_1(b_j) = - \sum_{h_2(a_i) > 0} h_1(a_i) + \sum_{h_2(b_j) > 0} h_1(b_j).$$

Получаем, что сумма расстояний неверно определенных точек из A и из B до гиперплоскости $h_1 = 0$, оказавшихся в полупространстве $h_2 > 0$, равна сумме расстояний неверно определенных точек из A и из B до гиперплоскости $h_1 = 0$, оказавшихся в полупространстве $h_2 < 0$. Из (2) следует

$$\begin{aligned} - \sum_{h_1(a_i) < 0} h_2(a_i)a_i - \sum_{h_1(a_i) > 0} h_2(a_i)a_i + \sum_{h_1(b_j) > 0} h_2(b_j)b_j + \\ + \sum_{h_1(b_j) < 0} h_2(b_j)b_j = \mu_1 l_1. \end{aligned}$$

Сгруппируем первое с четвертым слагаемые и второе с третьим.

$$- \sum_{h_1(a_i) > 0} h_2(a_i)a_i + \sum_{h_1(b_j) > 0} h_2(b_j)b_j -$$

$$-\left(\sum_{h_1(a_i)<0} h_2(a_i)a_i - \sum_{h_1(b_j)<0} h_2(b_j)b_j\right) = \mu_1 l_1.$$

Получаем, что разность суммы неверно определенных точек из A и B , оказавшихся в полупространстве $h_1 > 0$, с весами, равными расстоянию до плоскости $h_2 = 0$, и суммы неверно определенных точек из A и B , оказавшихся в полупространстве $h_1 < 0$, с весами, равными расстоянию до плоскости $h_2 = 0$, параллельна нормали l_1 плоскости $h_1 = 0$. Из (3) следует

$$\begin{aligned} & - \sum_{h_2(a_i)<0} h_1(a_i)a_i - \sum_{h_2(a_i)>0} h_1(a_i)a_i + \sum_{h_2(b_j)>0} h_1(b_j)b_j + \\ & + \sum_{h_2(b_j)<0} h_1(b_j)b_j = \mu_2 l_2. \end{aligned}$$

Сгруппируем первое с четвертым слагаемые и второе с третьим.

$$\begin{aligned} & - \sum_{h_2(a_i)>0} h_1(a_i)a_i + \sum_{h_2(b_j)>0} h_1(b_j)b_j - \\ & - \left(\sum_{h_2(a_i)<0} h_1(a_i)a_i - \sum_{h_2(b_j)<0} h_1(b_j)b_j\right) = \mu_2 l_2. \end{aligned}$$

Получаем, что разность суммы неверно определенных точек из A и B , оказавшихся в полупространстве $h_2 > 0$, с весами, равными расстоянию до плоскости $h_1 = 0$, и суммы неверно определенных точек из A и B , оказавшихся в полупространстве $h_2 < 0$, с весами, равными расстоянию до плоскости $h_1 = 0$, параллельна нормали l_2 плоскости $h_2 = 0$.

Таким образом, в данной статье была рассмотрена задача разделения двух множеств двумя гиперплоскостями и приведена геометрическая интерпретация решения поставленной задачи.

Литература

1. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 376 с.
2. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

Лебедев Д. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Оптимизационная задача проектирования точки на квадрату¹

Рекомендовано к публикации профессором Поляковой Л. Н.

Рассмотрим оптимизационную задачу. Требуется найти

$$\inf_{x \in X} \|x\|, \quad (1)$$

где

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x) = 0\},$$

$$\varphi_1(x) = \langle Ax, x \rangle + 2\langle b_1, x \rangle + c, \quad x, b_1 \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R},$$

A — $(n \times n)$ -матрица и $\|*\|$ — евклидова норма. Нетрудно видеть, что оптимальное значение в (1) может быть получено из решения следующей задачи:

$$\min_{x \in X} \langle x, x \rangle. \quad (2)$$

Как известно [1], задача (2) является классической задачей оптимизации. Так как матрица A симметричная, то все ее собственные числа λ_i , $i = 1, \dots, n$, вещественные. Поэтому существует такая ортогональная матрица Q [2], что линейное преобразование $y = Q^T x$ приводит функцию $\varphi_1(x)$, определяющую множество X , к виду

$$\varphi(y) = \langle \Lambda y, y \rangle + 2\langle Q^T b_1, y \rangle + c.$$

где $\Lambda = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — диагональная $(n \times n)$ -матрица. Обозначим,

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(y) = 0\},$$

$$\varphi(y) = \langle \Lambda y, y \rangle + 2\langle b, y \rangle + c = 0, \quad y, b \in \mathbb{R}^n, \quad b = Q^T b_1, \quad c \in \mathbb{R},$$

Наряду с (2) рассмотрим задачу

$$\min_{y \in Y} \langle y, y \rangle. \quad (3)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

Если решение y^* задачи (3) найдено, то точка $x^* = Qy^*$ будет решением задачи (2).

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $c = 0$. Тогда $x^* = 0_n$ является решением (1).

2. Пусть $c > 0$. Тогда для нахождения точки минимума (3) решим следующую оптимизационную задачу: найти

$$\min_{y \in Y_1} \langle y, y \rangle, \quad (4)$$

где

$$Y_1 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \Lambda y, y \rangle + 2\langle b, y \rangle + c \leq 0 \right\}, \quad y, b \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Если точка $y^* \in Y_1$ — решение задачи (4), то необходимо существование такого числа $\mu^* > 0$, для которого выполняется равенство

$$\Lambda y^* + \mu^* y^* = -b. \quad (5)$$

3. Пусть $c < 0$. Тогда для нахождения точки минимума (3) решим следующую оптимизационную задачу: найти

$$\min_{y \in Y_2} \langle y, y \rangle, \quad (6)$$

где

$$Y_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid -\langle \Lambda y, y \rangle - 2\langle b, y \rangle - c \leq 0 \right\}, \quad y, b \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

В этом случае, если точка $y^* \in Y_2$ — решение задачи (6), то необходимо существование такого числа $\mu^* > 0$, для которого выполняется равенство

$$\Lambda y^* - \mu^* y^* = -b.$$

В обоих случаях число μ^* является множителем Лагранжа для задач (4) и (6). Кроме того, в точке минимума $y^* \in Y_i$, $i = 1, 2$, должно выполняться равенство

$$\langle \Lambda y^*, y^* \rangle + 2\langle b, y^* \rangle + c = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим случай, когда $b \neq 0_n$, $c > 0$. Преобразуем условие (5). Имеем

$$(\Lambda + \mu^* E)y^* = -\frac{b}{2},$$

где E — единичная матрица. Определим

$$y = -\frac{1}{2}(\Lambda + \mu E)^{-1}b = \left(-\frac{b_1}{2(\lambda_1 + \mu)}, \dots, -\frac{b_n}{2(\lambda_n + \mu)} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Подставляя y в (7), имеем

$$0 = \langle \Lambda y, y \rangle + \langle b, y \rangle + c = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i b_i^2}{4(\lambda_i + \mu)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{2(\lambda_i + \mu)} + c.$$

Для того чтобы решить это уравнение, необходимо найти корни многочлена $P(\mu)$ степени $2n$

$$P(\mu) = \sum_{i=1}^n \left[(2\mu + \lambda_i) b_i^2 \prod_{k=1, k \neq i}^n (\lambda_k + \mu)^2 \right] - 4c \prod_{k=1}^n (\lambda_k + \mu)^2. \quad (8)$$

Таким образом, задача нахождения точки, ближайшей к множеству Y_1 , свелась к задаче определения положительных корней многочлена вида (8) степени $2n$. Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен степени $2n$ имеет ровно $2n$ корней.

Замечание. Аналогичный подход используется в статье [3] для решения минимаксной задачи определенного вида.

Пример. Перейдем к рассмотрению задачи (2) при $c < 0$. Пусть задано множество (см. рис. 1)

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x) = 0\}, \quad \psi(x) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 1.$$

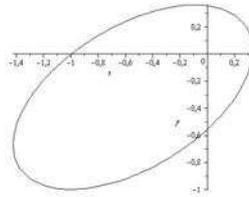


Рис. 1. Множество X

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица A положительно определена, $\lambda_1 = 1,764$, $\lambda_2 = 6,236$ — ее собственные числа. Найдем жорданову форму матрицы A . Имеем

$$A = Q\Lambda Q^T, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1,764 & 0 \\ 0 & 6,236 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0,851 & -0,525 \\ 0,525 & 0,851 \end{pmatrix}.$$

Матрица Q ортогональна. Введем переменную $y = Q^T x$. Рассмотрим функцию

$$\psi_1(y) = \langle \Lambda y, y \rangle + \langle Q^T b, y \rangle - 1, \quad b = (2, 1) \in \mathbb{R}^2, \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

и множество

$$Y_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\psi_1(y) \leq 0\}.$$

Множество Y_2 находится вне эллипсоида на рис. 2. Очевидно, что оно неограничено.

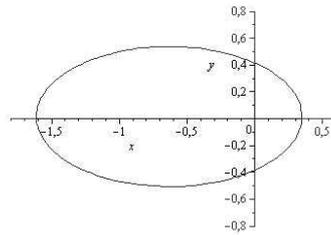


Рис. 2. Множество Y_1

Так как в этом примере $c = -1$, то вычислим многочлен $Q(\mu)$. Имеем

$$Q(\mu) = \mu^4 - 18,5\mu^3 + 119,25\mu^2 - 300,5\mu + 206,25.$$

Многочлен $Q(\mu)$ имеет четыре вещественных положительных корня

$$\mu_1 = 1,074, \quad \mu_2 = 5, \quad \mu_3 = 5,768, \quad \mu_4 = 6,657.$$

Найдем соответствующие этим корням стационарные точки y_1^*, \dots, y_4^* , принадлежащие множеству Y_2 :

$$y_1^* = (-1, 614; 0, 019), \quad y_2^* = (0, 344; 0, 081),$$

$$y_3^* = (0, 278; 0, 214), \quad y_4^* = (0, 227; -0, 238),$$

$$\|y_1\| = 1, 614, \quad \|y_2\| = 0, 353, \quad \|y_3\| = 0, 351, \quad \|y_4\| = 0, 329.$$

Все указанные точки являются точками локальных минимумов функции $\langle y, y \rangle$ на множестве Y_2 . Очевидно, что точка y_4^* является точкой минимума, y_1^* — точкой максимума задачи (6) (см. рис. 2). Найдем точки $x_1^*, \dots, x_4^* \in X$:

$$x_1^* = (-1, 383; -0, 832), \quad x_2^* = (0, 25; 0, 25),$$

$$x_3^* = (0, 123; 0, 328), \quad x_4^* = (0, 318; -0, 083).$$

Точка x_4^* является точкой минимума, точка x_1^* — точка максимума задачи (1) (см. рис. 1).

Если рассматриваемое множество является эллипсоидом, определенным с помощью квадратичной функции с отрицательным свободным членом, то метод позволяет определить не только точки ближайшие к нулю, но и точки максимально удаленные от начала координат.

Литература

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
2. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.
3. Полякова Л. Н. Некоторые методы минимизации максимума квадратичных функций // Владикавказский математический журнал, 2006. Том 8. Вып 4. С. 47–57.

Меденников И. П.

Санкт-Петербургский государственный университет

**Метод функционалов Ляпунова — Красовского
для дифференциально-разностных систем с
линейно возрастающим запаздыванием**

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\alpha t). \quad (1)$$

Здесь $0 < t_0 \leq t$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A и B — постоянные $(n \times n)$ -матрицы, $0 < \alpha < 1$. Пример такого уравнения встречается в теории радиоактивного распада и приведен в книге [1]

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda u(t) + \lambda b u(bt).$$

Каждое решение системы (1) определяется начальными условиями: начальным моментом времени $t_0 > 0$ и начальной вектор-функцией $\varphi(\theta)$, $\theta \in [\alpha t_0, t_0]$, $x(\theta) = \varphi(\theta)$. Будем полагать в дальнейшем, что начальные функции являются кусочно-непрерывными на промежутке $[\alpha t_0, t_0]$. Решение системы (1) с начальными данными t_0 , φ будем обозначать через $x(t, t_0, \varphi)$, а сегмент траектории $x(s, t_0, \varphi)$ на промежутке $s \in [\alpha t, t]$ при $t \geq t_0$ — через $x_t(t_0, \varphi)$, или просто x_t , если начальный момент времени и начальная функция очевидны из контекста. Функцию, тождественно равную на промежутке $s \in [\alpha t, t]$ нулевому вектору, будем обозначать через 0_t .

В качестве векторной нормы будем использовать евклидову норму, а для векторных функций — равномерную норму

$$\|\varphi(\cdot)\| = \sup_{\theta \in [\alpha t_0, t_0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Введём обозначения

$$\bar{\lambda} = \max\{Re\lambda : \det(\lambda E - A) = 0\},$$

$$\bar{\mu} = \max\{-\infty, \operatorname{Re} \mu: \det(A + \alpha^\mu B) = 0\}.$$

Как показано в работах [2, 3], если $\bar{\lambda} < 0$ и $\bar{\mu} < 0$, то система (1) асимптотически устойчива, и для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка на решение

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq D(\varepsilon) \|\varphi(\cdot)\| \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\bar{\mu} + \varepsilon}, \quad t \geq t_0. \quad (2)$$

Если же $\bar{\lambda} > 0$ или $\bar{\mu} > 0$, то система (1) имеет неограниченное решение, а потому неустойчива.

Но вышеизложенный метод не позволяет проводить анализ устойчивости по отношению к зависящим от времени возмущениям в коэффициентах и в запаздывании. Для решения этой задачи может быть применен метод функционалов Ляпунова — Красовского. Целью наших исследований является получение необходимого и достаточного условий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) в рамках метода функционалов.

2. Вспомогательные утверждения. Легко показать, что если матрица A невырожденная, то $\alpha^{-\bar{\mu}}$ есть максимальное по модулю собственное число матрицы $-A^{-1}B$. В этом случае условие $\bar{\mu} < 0$ равносильно тому, что все собственные числа матрицы $A^{-1}B$ лежат внутри единичного круга.

Лемма 1. Для $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq \|\varphi(\cdot)\| e^{(\|A\| + \|B\|)(t - t_0)}. \quad (3)$$

3. Метод функционалов. Пусть $\bar{\lambda} < 0$ и $\bar{\mu} < 0$. Выберем величину $\gamma > 0$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\bar{\mu} \gamma < -1$. Это условие равносильно тому, что $\alpha^{-\bar{\mu}} < \alpha^{1/\gamma}$, т. е. собственные числа матрицы $A^{-1}B$ лежат внутри круга радиуса $\alpha^{1/\gamma}$.

Рассмотрим функционал

$$v_0(t_0, \varphi) = \int_{t_0}^{+\infty} \|x(s, t_0, \varphi)\|^\gamma ds, \quad (4)$$

который удовлетворяет условию

$$\frac{dv_0(t, x_t)}{dt} = -\|x(t, t_0, \varphi)\|^\gamma.$$

Интеграл в правой части (4) сходится благодаря оценке (2).

Введем в рассмотрение множества

$$S_M = \{\varphi \in \mathbb{PC}([\alpha t_0, t_0], \mathbb{R}^n) : \|\varphi(\cdot)\| \leq (1 + M)\|\varphi(t_0)\|\}, \quad M \geq 0.$$

Теорема 1. Для функционала (4) на множествах S_M справедлива оценка

$$v_0(t_0, \varphi) \geq \frac{\zeta}{2^\gamma(1 + M)} \|\varphi(t_0)\|^\gamma,$$

где постоянная ζ определяется из условия

$$\frac{1}{2\zeta} = (\|A\| + \|B\|) e^{(\|A\| + \|B\|)\zeta}.$$

Доказательство. Как известно,

$$x(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t (Ax(s) + Bx(\alpha s)) ds, \quad t \geq t_0.$$

Используя неравенство (3) из леммы 1, получим при $t \in [t_0, t_0 + \zeta]$

$$\begin{aligned} \|x(t) - \varphi(t_0)\| &\leq \\ &\leq (t - t_0) \|\varphi(\cdot)\| (\|A\| + \|B\|) e^{(\|A\| + \|B\|)(t - t_0)} \leq (t - t_0) \|\varphi(\cdot)\| \frac{1}{2\zeta}. \end{aligned}$$

Тогда при $t \in [t_0, t_0 + \zeta \frac{\|\varphi(t_0)\|}{\|\varphi(\cdot)\|}]$ будем иметь

$$\|x(t) - \varphi(t_0)\| \leq \frac{1}{2} \|\varphi(t_0)\|.$$

Далее, при $t \in [t_0, t_0 + \zeta \frac{\|\varphi(t_0)\|}{\|\varphi(\cdot)\|}]$ справедливо

$$\|\varphi(t_0)\| \leq \|x(t) - \varphi(t_0)\| + \|x(t)\| \leq \frac{1}{2} \|\varphi(t_0)\| + \|x(t)\|,$$

т. е.

$$\|x(t)\| \geq \frac{1}{2} \|\varphi(t_0)\|.$$

Получим теперь требуемую оценку на функционал (4)

$$\begin{aligned} v_0(t_0, \varphi) &= \int_{t_0}^{+\infty} \|x(s, t_0, \varphi)\|^\gamma ds \geq \\ &\geq \int_{t_0}^{t_0 + \zeta \frac{\|\varphi(t_0)\|}{\|\varphi(\cdot)\|}} \|x(s, t_0, \varphi)\|^\gamma ds \geq \zeta \frac{\|\varphi(t_0)\|}{\|\varphi(\cdot)\|} \frac{1}{2^\gamma} \|\varphi(t_0)\|^\gamma, \end{aligned}$$

и при $\varphi \in S_M$

$$v_0(t_0, \varphi) \geq \frac{\zeta}{2^\gamma(1+M)} \|\varphi(t_0)\|^\gamma.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть задан неотрицательный и непрерывный в нуле функционал $v(t, \varphi)$ такой, что $v(t, 0_t) = 0$, и выполнены условия

1. $v(t_0, \varphi) \geq c_1 \|\varphi(t_0)\|^\gamma$ при $t_0 > 0$, $\varphi \in S_M$ при некоторых $M \geq 0$, $c_1 > 0$, $\gamma > 0$;
2. $\frac{dv(t, x_t)}{dt} \leq -c_2 \|x(t)\|^\nu$ для некоторых $c_2 > 0$, $\nu > 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво (неравномерно).

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$, $t_0 > 0$. В силу непрерывности в нуле функционала v существует постоянная $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такая, что при $\|\varphi(\cdot)\| < \delta$ будет выполнено $v(t_0, \varphi) < c_1 \varepsilon^\gamma$. Покажем, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ при любых $t \geq t_0$.

Предположим противное. Пусть существует $t_1 > t_0$ такое, что $\|x(t_1, t_0, \varphi)\| = \varepsilon$, и $\|x(\tau, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ при $t_0 \leq \tau < t_1$. Тогда, как нетрудно видеть, $x_{t_1}(t_0, \varphi) \in S_M$. В силу второго условия теоремы

$$c_1 \varepsilon^\gamma \leq v(t_1, x_{t_1}) \leq v(t_0, \varphi) < c_1 \varepsilon^\gamma.$$

Полученное противоречие доказывает устойчивость по Ляпунову нулевого решения.

Выберем $\Delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon, t_0)$ и покажем, что при $\|\varphi(\cdot)\| < \Delta$ будет $\|x(t, t_0, \varphi)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Предположим противное. Пусть существует последовательность $\{t_k\}$, ($k = 1, 2, \dots$) такая, что $t_{k+1} - t_k > 1$

и $\|x(t_k)\| \geq \beta > 0$. Рассмотрим разность

$$x(t) - x(t_k) = \int_{t_k}^t (Ax(s) + Bx(\alpha s)) ds, \quad t \in [t_k, t_k + \tau].$$

Пусть $\tau = \min\{\frac{\beta}{2\varepsilon(\|A\| + \|B\|)}, 1\}$. Оценив эту разность по норме, будем иметь при $t \in [t_k, t_k + \tau]$

$$\|x(t) - x(t_k)\| \leq (\|A\| + \|B\|)\varepsilon\tau \leq \frac{\beta}{2}.$$

Тогда при $t \in [t_k, t_k + \tau]$

$$\beta \leq \|x(t_k)\| \leq \|x(t) - x(t_k)\| + \|x(t)\| \leq \frac{\beta}{2} + \|x(t)\|,$$

т. е.

$$\|x(t)\| \geq \frac{\beta}{2}.$$

Проинтегрировав второе условие теоремы на промежутке $[t_0, t]$, получим

$$v(t, x_t) \leq v(t_0, \varphi) - c_2 \int_{t_0}^t \|x(s)\|^\nu ds \leq v(t_0, \varphi) - \tau c_2 \frac{\beta^\nu}{2^\nu} N(t),$$

где $N(t)$ — число промежутков $[t_k, t_k + \tau]$, попавших в $[t_0, t]$. Очевидно, что $N(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, следовательно выражение справа станет отрицательным, начиная с некоторого t . Это противоречит неотрицательности функционала v . Таким образом, предположение неверно, и нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 также будет верна для возмущенных систем вида

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta_0(t))x(t) + (B + \Delta_1(t))x(\theta(t)),$$

где $\Delta_0(t)$ и $\Delta_1(t)$ — непрерывные и ограниченные при $t \geq t_0 > 0$ функции, а $\theta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $0 < \theta(t) < t$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$, $d\theta(t)/dt > 0$.

4. Пример. Пусть все собственные числа матрицы A отрицательны, а все собственные числа матрицы $A^{-1}B$ лежат внутри круга радиуса $\alpha^{1/2}$. Например, этим условиям удовлетворяет система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) - x_1(t/2) + 2x_2(t/2), \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + x_2(t/2).\end{aligned}$$

Тогда сходимость интеграла (4) имеет место при $\gamma = 2$, и можно построить квадратичный функционал Ляпунова — Красовского аналогично тому, как это сделано в работе [4].

5. Заключение. Доказанные теоремы 1, 2 составляют необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) для всех случаев, за исключением $\{\bar{\lambda} \leq 0, \bar{\mu} = 0\}$ и $\{\bar{\lambda} = 0, \bar{\mu} \leq 0\}$. Построен функционал Ляпунова — Красовского, который может быть применен для анализа устойчивости по отношению к неопределенности в коэффициентах и в запаздывании. Конструктивные методы нахождения этого функционала в общем случае представляют интерес для дальнейшего исследования.

Литература

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения / Пер. с англ. под ред. Л. Э. Эльсгольца. М.: Изд-во МИР, 1967. 548 с.
2. Laktionov A. A., Zhabko A. P. The method of difference transformations for differential systems with linear time-delay // Linear Time Delay Systems (LTDS), Grenoble, France, 1998. P. 201–205.
3. Жабко А. П., Лактионов А. А. Метод разностных преобразований для систем дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием // Вопросы механики и процессов управления. Вып. 19. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. С. 45–54.
4. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov — Krasovskii approach to the robust stability analysis of time delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39. P. 15–20.

Молчанова И. Ю., Попова М. А.
Санкт-Петербургский государственный университет

Алгоритм построения двойственного конуса в трехмерном пространстве

Рекомендовано к публикации профессором Поляковой Л. Н.

1. Постановка задачи. Рассмотрим выпуклый многогранный конус

$$Q = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^n a_i \right\}, \quad a_i \in \mathbb{R}^3, \quad a_i \neq 0.$$

Предположим, что конус Q является телесным (с непустой внутренностью) и острым.

Необходимо построить конус C , двойственный к конусу Q ,

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a_i, x \rangle \leq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}^3, \quad i = \overline{1, n} \}. \quad (1)$$

Множество C также является выпуклым многогранным конусом. Предположим, что конус C является острым. Напомним, что конус называется *острым* [1], если он не содержит прямых. Известно, что выпуклый многогранный конус может быть представлен в виде выпуклой конической оболочки конечного числа крайних векторов. Следовательно, конус C может быть представлен в виде

$$C = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^p b_i \right\}, \quad b_i \in \mathbb{R}^3,$$

где $b_i, i = \overline{1, p}$, — крайние векторы конуса C .

2. Предварительные построения. Так как конус Q — острый, то повернем его таким образом, чтобы он лежал в верхнем полупространстве. Эту операцию произведем с помощью преобразования Хаусхолдера [2]. Для этого необходимо найти вектор, который будет полностью лежать внутри конуса Q и составлять с каждым вектором a_i острый угол. Его можно найти, если решить определенную задачу квадратичного программирования. Обозначим этот вектор через

v . Поскольку $v \in Q$, то его можно представить в виде выпуклой линейной комбинации векторов

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Найдем коэффициенты λ_i . Рассмотрим матрицу

$$G = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Введем вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ и составим квадратичную функцию

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \langle G\lambda, \lambda \rangle.$$

Решая задачу квадратичного программирования

$$\min_{\sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0} F(\lambda),$$

найдем коэффициенты λ_i и построим вектор v , обладающий нужным свойством.

3. Алгоритм преобразования Хаусхолдера. К вектору v применим преобразование Хаусхолдера таким образом, чтобы после поворота этот вектор совпал с осью Oz , т. е. $v' = (0, 0, z)^T$. Опишем это преобразование.

Дан вектор $v = (x_v, y_v, z_v)^T \in \mathbb{R}^3$, к которому применяем оператор Хаусхолдера. Матрица оператора имеет вид

$$H = E_3 - \frac{2uu^T}{u^T u},$$

где

$$\begin{aligned} u &= v + \sigma \|v\| e_1, \\ \sigma &= \begin{cases} -1, & \text{если } v_1 \geq 0, \\ 1, & \text{если } v_1 < 0, \end{cases} \\ e_1 &= (0, 0, 1)^T. \end{aligned} \tag{2}$$

Введение константы σ позволяет уменьшить влияние ошибок округления.

Применяя оператор H , построенный таким образом, к нашему вектору v , получим

$$v' = Hv.$$

Вектор v' будет лежать на оси Oz и иметь нулевые координаты по осям Oy и Ox . Далее применим полученное преобразование к векторам a_i . Имеем

$$a'_i = Ha_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, конус Q повернулся и все векторы a'_i лежат в верхнем полупространстве. Обозначим его через

$$Q' = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^n a'_i \right\}, \quad a'_i \in \mathbb{R}^3.$$

Разделим все векторы a'_i на их третью координату, чтобы на этом месте получить единицу. Теперь концы всех векторов a'_i лежат в одной плоскости $z = 1$.

4. Построение выпуклой оболочки. Для построения двойственного конуса надо исключить векторы a'_i , которые лежат во внутренности конуса Q' .

Для этого необходимо найти вершины выпуклой оболочки векторов a'_i . Рассмотрим алгоритм построения выпуклой оболочки в пространстве \mathbb{R}^2 , поскольку концы векторов a'_i лежат в плоскости $z = 1$.

Существует несколько алгоритмов для построения выпуклой оболочки в \mathbb{R}^2 . Рассмотрим, например, алгоритм обхода Грехема [3, 4].

Пусть задано множество точек на плоскости. Просмотр начинаем с точки, помеченной как «начало», в качестве которой берем самую правую с наименьшей ординатой точку из данного множества. Эта точка заведомо является вершиной выпуклой оболочки. Дальше тройки последовательных точек многократно проверяются в порядке обхода против часовой стрелки с целью определить, образуют они или нет они угол, больший или равный π .

Если внутренний угол $a_1 a_2 a_3 \geq \pi$, то говорят, что $a_1 a_2 a_3$ образуют «правый поворот», иначе они образуют «левый поворот». Из

выпуклости многоугольника следует, что при его обходе будут делаться только левые повороты. Если $a_1a_2a_3$ образует «правый поворот», то точка a_2 не может быть крайней точкой, так как она является внутренней. В зависимости от результата проверки угла, образуемого текущей тройкой точек, возможны два варианта:

1. Внутренний угол $a_1a_2a_3$ образует «правый поворот». Удалить вершину a_2 и проверить тройку $a_0a_1a_3$.
2. Внутренний угол $a_1a_2a_3$ образует «левый поворот». Продолжить, перейдя к проверке $a_2a_3a_4$.

Просмотр завершается, когда обойдя все вершины придем в точку «начало». Результатом будет список вершин выпуклой оболочки, расположенных в нужном порядке.

5. Построение двойственного конуса. Спроектируем точку $t = (0, 0, 1)^T$ на грани конуса Q' . Векторы a'_i отсортированы так, что внутренних граней не будет, так как все лучи, натянутые на векторы a'_i будут крайними для конуса Q' и расположены в нужном порядке. Рассмотрим грань, образованную парой векторов

$$\begin{cases} a'_1 = (x_1, y_1, z_1), \\ a'_2 = (x_2, y_2, z_2). \end{cases} \quad (3)$$

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора проектирования на эту грань имеет вид

$$P_{a_1, a_2} = A^T(AA^T)^{-1}A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как проектируем точку $t = (0, 0, 1)^T$, то ее проекция на грань, образованную векторами a'_1 и a'_2 , будет находиться по формуле:

$$t_{a_1, a_2} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$p_{13} = \frac{x_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_2 - \beta) + \frac{x_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_1 - \beta),$$

$$p_{23} = \frac{y_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_2 - \beta) + \frac{y_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_1 - \beta),$$

$$p_{33} = \frac{\alpha_1 - 2\beta + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2},$$

$$\alpha_1 = x_1^2 + y_1^2 + 1, \quad \alpha_2 = x_2^2 + y_2^2 + 1, \quad \beta = x_1x_2 + y_1y_2 + 1.$$

Аналогично рассматриваем попарно все векторы a'_i , $i = \overline{1, n}$, и проектируем точку $t = (0, 0, 1)^T$ на каждую грань.

6. Заключение. Отрезок, соединяющий точку $t = (0, 0, 1)^T$ и ее проекцию, лежит на луче, который является крайним лучом двойственного к Q' конуса Q'^* (знак «'» означает, что конус был повернут преобразованием Хаусхолдера). Следовательно, когда найдем все образующие $(a'_i)^*$, $i = \overline{1, n}$, то построим двойственный конус

$$Q'^* = \text{cone со } \left\{ \bigcup_{i=1}^n (a'_i)^* \right\}.$$

К построенному конусу Q'^* снова применим преобразование Хаусхолдера, чтобы развернуть его на место. Для матрицы обратного преобразования Хаусхолдера справедливо

$$H^{-1} = H^T = H$$

в силу симметричности и ортогональности матрицы H . Таким образом, построенный конус является двойственным конусом Q^* для конуса Q .

Литература

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
2. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука: Физматлит, 1986. 232 с.
3. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение / Пер с англ. М.: Мир, 1989. 478 с.
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ, 3-е издание / Пер с англ. М.: Издат. дом «Вильямс», 2012. 1296 с.

Нгуен Динь Хуен
Санкт-Петербургский государственный университет

Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных разностных систем

Рекомендовано к публикации профессором Александровым А. Ю.

1. Введение. Одной из важных проблем, возникающих при изучении нелинейных систем, является проблема абсолютной устойчивости [1, 2]. Эта проблема имеет как теоретическую, так и прикладную значимость [3, 4]. Основным подходом для нахождения условий абсолютной устойчивости является прямой метод Ляпунова. С помощью этого подхода получены критерии абсолютной устойчивости для многих типов систем. Однако следует отметить, что до сих пор не существует общих методов построения функций Ляпунова для нелинейных систем.

В настоящей работе исследуется некоторый класс разностных систем. С использованием предложенного в [5] способа построения функций Ляпунова устанавливаются достаточные условия абсолютной устойчивости рассматриваемых систем.

2. Постановка задачи. Пусть задана система

$$y_i(k+1) = y_i(k) + hc_i f_i(y_i(k)) + h \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)). \quad (1)$$

Здесь c_i, a_{ij} — постоянные коэффициенты; $k = 0, 1, \dots$; h — шаг дискретизации, $h > 0$; $\alpha_{is}^{(j)}$ — неотрицательные рациональные числа с нечетными знаменателями; функции $f_i(z_i)$ определены, непрерывны при $|z_i| < H$, $0 < H \leq +\infty$, и удовлетворяют условию $z_i f_i(z_i) > 0$ при $z_i \neq 0$ и условию Липшица, т. е. можно указать положительную постоянную L такую, что

$$\left| f_i(\tilde{z}_i) - f_i(\tilde{\tilde{z}}_i) \right| \leq L \left| \tilde{z}_i - \tilde{\tilde{z}}_i \right|, \quad i = 1, \dots, n,$$

при всех $|\tilde{z}_i| < H, |\tilde{\tilde{z}}_i| < H$.

Основная цель настоящей работы — с помощью предложенного в [5] способа построения функций Ляпунова получить достаточные условия абсолютной устойчивости данной системы.

3. Условия абсолютной устойчивости. Пусть справедливы неравенства $\sum_{s=1}^n \alpha_{is}^{(j)} > 0$, $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, n$. Выполнение этого предложения гарантирует существование нулевого решения системы (1). Кроме того, будем считать, что коэффициенты $c_i < 0$.

Будем называть систему (1) абсолютно устойчивой, если нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях $f_1(z_1), \dots, f_n(z_n)$.

Теорема 1. *Если существуют положительные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\sum_{s=1}^n \frac{\alpha_{is}^{(j)}}{\gamma_s + 1} > \frac{1}{\gamma_i + 1}, \quad j = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

то можно указать число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0)$ нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — положительное решение системы (2). Не умаляя общности, можно считать, что γ_i — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, причем $\gamma_i > 1$, $i = 1, \dots, n$. Функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V(z) = \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i} f_i^{\gamma_i}(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Из условий, которым удовлетворяют функции $f_i(z_i)$ и числа γ_i , следует, что функция (3) положительно определена. Вычислим ее приращение на решениях системы (1). Имеем

$$\begin{aligned} \Delta V &= \sum_{i=1}^n \int_{y_i(k)}^{y_i(k+1)} f_i^{\gamma_i}(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i(k+1) - y_i(k)) f_i^{\gamma_i}(y_i(k) + \theta_{ik} \Delta y_i(k)), \end{aligned}$$

где $\theta_{ik} \in (0, 1)$, $\Delta y_i(k) = y_i(k+1) - y_i(k)$.

При всех $k = 0, 1, \dots$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\Delta V \leq & \sum_{i=1}^n h c_i f_i^{\gamma_i+1}(y_i(k)) + \\
& + \sum_{i=1}^n h f_i^{\gamma_i}(y_i(k)) \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) + \\
& + \sum_{i=1}^n h^{\gamma_i+1} \gamma_i L^{\gamma_i} \theta_{ik} \bar{\theta}_{ik}^{\gamma_i-1} c_i^2 \beta |f_i(y_i(k))|^2 \times \\
& \times \left| c_i f_i(y_i(k)) + \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) \right|^{\gamma_i-1} + \\
& + \sum_{i=1}^n h^2 \gamma_i L \theta_{ik} c_i^2 \beta |f_i(y_i(k))|^{\gamma_i+1} + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} h^{\gamma_i+1} \gamma_i L^{\gamma_i} \theta_{ik} \bar{\theta}_{ik}^{\gamma_i-1} c_i^2 \beta \left| f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) \right|^2 \times \\
& \times \left| c_i f_i(y_i(k)) + \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) \right|^{\gamma_i-1} + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} h^2 \gamma_i L \theta_{ik} a_{ij}^2 \beta \left| f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) \right|^2 |f_i(y_i(k))|^{\gamma_i-1},
\end{aligned}$$

где $\bar{\theta}_{ik} \in (0, 1)$.

Используя свойства функций $f_i(y_i)$, $i = 1, \dots, n$, получаем, что если справедливы неравенства (2), то существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $h \in (0, h_0)$, $\|y(k)\| < \delta$ имеем

$$\Delta V \leq -h\tilde{c} \sum_{i=1}^n |f_i(y_i(k))|^{\gamma_i+1},$$

где $\tilde{c} > 0$. Значит $V(z)$ удовлетворяет требованиям дискретного аналога теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [6]. Следовательно, система (1) абсолютно устойчива.

Теорема доказана.

Пример. Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= y_1(k) + hc_1 f_1(y_1(k)) + ha_{23} f_2^{\alpha_2}(y_2(k)) f_3^{\frac{1}{3}}(y_2(k)), \\ y_2(k+1) &= y_2(k) + hc_2 f_2(y_2(k)) + ha_{31} f_3^{\frac{1}{3}}(y_2(k)) f_1^{\frac{1}{5}}(y_1(k)), \\ y_3(k+1) &= y_3(k) + hc_3 f_3(y_1(k)) + ha_{21} f_2^{\alpha_2}(y_2(k)) f_1^{\frac{1}{7}}(y_1(k)). \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенства (2), соответствующие этой системе. Получаем

$$\alpha_2 \varphi_2 + \frac{1}{3} > \varphi_1, \quad \frac{1}{3} \varphi_3 + \frac{1}{5} \varphi_1 > \varphi_2, \quad \alpha_2 \varphi_2 + \frac{1}{7} > \varphi_3,$$

где $\varphi_1 = 1/(\gamma_1 + 1)$, $\varphi_2 = 1/(\gamma_2 + 1)$, $\varphi_3 = 1/(\gamma_3 + 1)$.

Тогда можно указать число $h_0 > 0$ такое, что при $h \in (0, h_0)$ для абсолютной устойчивости данной системы достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_2 > 25/17$.

4. Оценки решений. Предложенный в [5] способ построения функций Ляпунова позволяет оценить скорость стремления к началу координат решений системы (1). Рассмотрим случай, когда функции $f_i(z_i)$ определяются по формулам $f_i(z_i) = z_i^{\delta_i}$, $\delta_i > 1$, где δ_i — рациональные числа с нечетными знаменателями. Тогда функция Ляпунова (3) принимает вид

$$V(z) = \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i} \tau^{\gamma_i \delta_i} d\tau = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i \delta_i + 1} z_i^{\gamma_i \delta_i + 1}(k).$$

Не умаляя общности, будем предполагать, что $\delta_1 \leq \dots \leq \delta_n$. Из доказательства теоремы 1 следует существование числа ε , $0 < \varepsilon < 1$, такого, что если $k_0 \geq 0$, $\|y_0\| < \varepsilon$, то при всех $k \geq k_0$ имеем

$$\begin{aligned} V(y(k+1)) &\leq V(y(k)) - \tilde{c} \sum_{i=1}^n f_i^{\gamma_i + 1}(y(k)) = \\ &= V(y(k)) - \tilde{c} \sum_{i=1}^n y^{\gamma_i \delta_i + \delta_i}(k) = V(y(k)) - \tilde{c} \sum_{i=1}^n y^{(\gamma_i \delta_i + 1) \frac{\gamma_i \delta_i + \delta_i}{\gamma_i \delta_i + 1}}(k), \end{aligned}$$

где $y(k)$ — решение, проходящее при $k = k_0$ через точку y_0 ; \tilde{c} — положительная постоянная.

Значит для $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ выполняется соотношение

$$V(y(k+1)) \leq V(y(k)) - \tilde{a} V^{\frac{\gamma_{\max} \delta_n + \delta_n}{\gamma_{\min} \delta_1 + 1}}(y(k)).$$

Здесь $\gamma_{max} = \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $\gamma_{min} = \min\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, \tilde{a} — положительная постоянная, не зависящая от начальных данных рассматриваемого решения.

Применяя лемму, доказанную в работе [7], получаем следующую

Теорема 2. *Существуют положительные числа ε , d_{1i} , d_{2i} , $i = 1, \dots, n$, такие, что для любого решения $y(k) = (y_1(k), \dots, y_n(k))^*$ системы (1) с начальными данными $y(k_0) = y_0$, удовлетворяющими условиям $k_0 \geq 0$, $\|y_0\| < \varepsilon$, при всех $k \geq k_0$ справедливы оценки*

$$|y_i(k)| \leq d_{1i} (1 + d_{2i}(k - k_0))^{-\frac{1}{(\frac{\gamma_{max} \delta_n + \delta_n}{\gamma_{min} \delta_1 + 1} - 1)}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Замечание. В теореме 2 значения постоянных ε , d_{1i} , d_{2i} , $i = 1, \dots, n$, вообще говоря, зависят от выбранного шага дискретизации h .

Литература

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336 с.
3. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Гостехиздат, 1955. 312 с.
4. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. 216 с.
5. Александров А. Ю., Жабко А. П. О сохранении устойчивости при дискретизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал, 2010. Т. 51, № 3. С. 481—497.
6. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость разностных систем. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2003. 112 с.
7. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сибирский математический журнал, 2003. Т. 44, № 6. С. 1217—1225.

Пономарев А. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Построение субоптимальных управлений в регуляторе «предиктор-корректор» (МРС)

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

Введение. Рассмотрим скалярную управляемую систему дискретного времени

$$x(k+1) = f(x(k)) + u(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $x, u \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$. Множество $\mathcal{X} = \{x : |x| \leq H_x\}$, где $H_x > 0$, назовём множеством *допустимых состояний* системы. Будем считать функцию $f(x)$ аналитичной на множестве \mathcal{X} и удовлетворяющей условию Липшица

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L(f)|x_1 - x_2| \quad \text{при всех } x_1, x_2 \in \mathcal{X},$$

где $L(f)$ — неотрицательная постоянная.

Предположим, что любому управлению $u(\cdot)$ отвечает решение задачи Коши для уравнения (1) с условием $x(k_0) = x_0$, определённое при $k \geq k_0$. Обозначим его $X(\cdot, x_0, k_0, u(\cdot))$. Для характеристики управления $u(\cdot)$ при $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$ введём *функционал качества*

$$\mathcal{J}(x_0, u(\cdot)) = \sum_{k=0}^{T-1} \left(X^2(k+1, x_0, 0, u(\cdot)) + \lambda u^2(k) \right), \quad (2)$$

где $T \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$. Множеством *допустимых управлений* при $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$ назовём множество $\mathcal{U}(x_0)$ таких управлений $u(\cdot)$, что

$$|u(k)| \leq H_u, \quad X(k+1, x_0, 0, u(\cdot)) \in \mathcal{X} \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, T-1,$$

где $H_u > 0$. Условимся, что при любом начальном состоянии $x_0 \in \mathcal{X}$ множество $\mathcal{U}(x_0)$ не пусто и существует *оптимальное управление*

$$u^\circ(\cdot, x_0) = \arg \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(x_0)} \mathcal{J}(x_0, u(\cdot)), \quad (3)$$

на котором функционал (2) принимает значение $\mathcal{J}^\circ(x_0)$.

В данной работе изучается метод «предиктор-корректор» или MPC (Model Predictive Control) [1]. Он состоит в том, что в систему подаётся управление в виде обратной связи $u = u^\circ(0, x)$. Таким образом, замкнутая система имеет вид

$$x(k+1) = f(x(k)) + u^\circ(0, x(k)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Постановка задачи. Применение MPC к нелинейной системе требует решения нелинейной оптимизационной задачи (3) при постоянно обновляющихся начальных условиях. Поэтому для использования MPC в реальном времени имеет смысл упростить этот алгоритм за счёт поиска не оптимального, но так называемого *субоптимального* управления [2], близкого к оптимальному в смысле близости значения функционала (2) к минимуму. Цель дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы исследовать возможность построения субоптимального управления, в заданной степени близкого к оптимальному и относительно просто вычисляемого.

Оценка качества субоптимального управления. Пусть известно оптимальное управление $u^\circ(\cdot, \xi)$ для некоторого $\xi \in \mathcal{X}$. Если в задаче (3) $x_0 \in U_r(\xi) = \{x : |x - \xi| \leq r\} \subset \mathcal{X}$, то построим каким-либо образом вместо оптимального управления $u^\circ(\cdot, x_0)$ управление $u^*(\cdot, x_0) \in \mathcal{U}(x_0)$ и оценим разность

$$\mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(x_0) \leq \mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(\xi) + |\mathcal{J}^\circ(\xi) - \mathcal{J}^\circ(x_0)|, \quad (4)$$

где $\mathcal{J}^*(x_0) = \mathcal{J}(x_0, u^*(\cdot, x_0))$. Малость этой разности характеризует качественную близость построенного управления к оптимальному. Для дальнейших оценок потребуется следующая

Лемма 1. *Функция $\mathcal{J}^\circ(x)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\mathcal{J}^\circ(x_1) - \mathcal{J}^\circ(x_2)| \leq L(\mathcal{J}^\circ)|x_1 - x_2| \quad \text{при всех } x_1, x_2 \in \mathcal{X},$$

где $L(\mathcal{J}^\circ)$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Введём семейство функционалов

$$\mathcal{J}_k(x, u(\cdot)) = \sum_{\varkappa=k}^{T-1} \left(X^2(\varkappa+1, x, k, u(\cdot)) + \lambda u^2(\varkappa) \right),$$

заданных при $0 \leq k \leq T-1$, $x \in \mathcal{X}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}_k(x) = \{u(\cdot) : |u(\varkappa)| \leq H_u, X(\varkappa+1, x, k, u(\cdot)) \in \mathcal{X} \text{ при } \varkappa \in [k, T-1]\}$. Минимальные

значения этих функционалов обозначим $\mathcal{J}_k^\circ(x)$ и докажем липшицевость всех функций $\mathcal{J}_k^\circ(x)$, начиная с $k = T - 1$ и до $k = 0$. Функция

$$\mathcal{J}_{T-1}^\circ(x) = \min_{\substack{|u| \leq H_u \\ (f(x) + u) \in \mathcal{X}}} \left((f(x) + u)^2 + \lambda u^2 \right)$$

удовлетворяет условию Липшица, поскольку такому условию на множестве $x \in \mathcal{X}$ удовлетворяют минимизируемая функция и границы множества допустимых значений u . По той же причине, если липшицева функция $\mathcal{J}_{k+1}^\circ(x)$, то липшицева и

$$\mathcal{J}_k^\circ(x) = \min_{\substack{|u| \leq H_u \\ (f(x) + u) \in \mathcal{X}}} \left((f(x) + u)^2 + \lambda u^2 + \mathcal{J}_{k+1}^\circ(f(x) + u) \right).$$

Следовательно, по индукции свойство липшицевости распространяется на функцию $\mathcal{J}_0^\circ(x) = \mathcal{J}^\circ(x)$.

Лемма 1 доказана.

Используя лемму 1, из неравенства (4) получим

$$\mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(x_0) \leq \mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(\xi) + L(\mathcal{J}^\circ)|x_0 - \xi|,$$

поэтому справедлива следующая

Теорема. *Если управление $u^*(\cdot, x_0)$ выбрано так, что*

$$\mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(\xi) \leq K|x_0 - \xi|$$

при всех $x_0 \in U_r(\xi)$, то при $x_0 \in U_r(\xi)$ оно доставляет функционалу $\mathcal{J}(x_0, u(\cdot))$ значение, которое не более чем на $r(L(\mathcal{J}^\circ) + K)$ превышает минимум, равный $\mathcal{J}^\circ(x_0)$.

Чем меньше K , тем ближе значение $\mathcal{J}^*(x_0)$ к оптимальному. Выбор субоптимального управления, при котором константа K минимальна, зависит от особенностей конкретной задачи. Покажем сейчас, что существует субоптимальное управление хотя бы с некоторым значением K .

Построение субоптимального управления. Можно предложить по крайней мере два способа построения управления $u^*(\cdot, x_0)$, удовлетворяющего условию теоремы. Первый способ — выбрать значение $u^*(0, x_0)$, исходя из ограничений

$$|u^*(0, x_0)| \leq H_u, \quad |x^*(1)| \leq H_x,$$

где $x^*(1) = f(x_0) + u^*(0, x_0)$, и дополнить его управлением, оптимальным для функционала $\mathcal{J}_1(x^*(1), u(\cdot))$, введённого при доказательстве леммы 1. То, что это управление неизвестно, не является препятствием, поскольку в алгоритме МРС используется только $u^*(0, x_0)$. Соответствующее значение функционала можно представить в виде

$$\mathcal{J}^*(x_0) = (x^*(1))^2 + \lambda(u^*(0, x_0))^2 + \mathcal{J}_1^\circ(x^*(1))$$

и, благодаря липшицевости функции $\mathcal{J}_1^\circ(x)$ с некоторой константой Липшица $L(\mathcal{J}_1^\circ)$, установленной в ходе доказательства леммы 1, оценить левую часть неравенства из условия теоремы как

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(\xi) &\leq (2H_x L(f) + L(\mathcal{F}_1^\circ))|x_0 - \xi| + \\ &+ (2H_x + 2\lambda H_u + L(\mathcal{F}_1^\circ))|u^*(0, x_0) - u^\circ(0, \xi)|. \end{aligned}$$

Если на управление $u^*(0, x_0)$ наложить требование

$$|u^*(0, x_0) - u^\circ(0, \xi)| \leq L(u^*)|x_0 - \xi|,$$

где $L(u^*)$ — некоторая постоянная, то этого достаточно для выполнения условия теоремы 1.

Другой способ, который, возможно, даёт лучшее значение константы K , состоит в линейризации системы (1) в окрестности оптимальной траектории с начальным условием $x(0) = \xi$, однако он применим, только если ограничения на управление и состояние системы не активны вдоль указанной траектории. Введём переменные $y(\cdot) = x(\cdot) - X(\cdot, \xi, 0, u^\circ(\cdot, \xi))$ и $v(\cdot) = u(\cdot) - u^\circ(\cdot, \xi)$, которые удовлетворяют уравнению

$$y(k+1) = a(k)y(k) + v(k) + g(k, y(k)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где $|g(k, y)| \leq My^2$ при всех допустимых y . Функционал $\mathcal{J}(x_0, u(\cdot))$ в новых переменных принимает вид

$$\mathcal{F}(y_0, v(\cdot)) = \mathcal{J}^\circ(\xi) + \sum_{k=0}^{T-1} \ell(k, Y(k+1, y_0, 0, v(\cdot)), v(k)),$$

где $\ell(k, y, v) = \alpha(k+1)y + \beta(k)v + y^2 + \lambda v^2$, $\alpha(k) = 2X(k, \xi, 0, u^\circ(\cdot, \xi))$, $\beta(k) = 2\lambda u^\circ(k, \xi)$, а $Y(\cdot, y_0, 0, v(\cdot))$ — общее решение уравнения (5).

Рассмотрим также линейризованную систему

$$\bar{y}(k+1) = a(k)\bar{y}(k) + v(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

с общим решением $\bar{Y}(\cdot, \bar{y}_0, k_0, v(\cdot))$. Значение функционала \mathcal{F} на траектории системы (6) обозначим $\bar{\mathcal{F}}(y_0, v(\cdot))$ и построим управление $\bar{v}^\circ(\cdot, y_0)$, минимизирующее это значение, не учитывая ограничений на \bar{y} и v , которые, естественно, вытекают из определения допустимых множеств \mathcal{X} и \mathcal{U} . Оно обладает следующим свойством.

Лемма 2. *Для любого начального условия y_0 существует единственное оптимальное управление $\bar{v}^\circ(\cdot, y_0)$, и его связь с соответствующим движением — линейная однородная:*

$$\bar{v}^\circ(k, y_0) = s(k)\bar{Y}(k, y_0, 0, \bar{v}^\circ(\cdot, y_0)),$$

где $s(\cdot)$ — некоторые коэффициенты, не зависящие от y_0 .

Доказательство. Существование, единственность и линейность оптимального управления имеют место по аналогии с известными результатами для систем непрерывного времени [3]. Докажем однородность: $\bar{v}^\circ(k, 0) \equiv 0$. Пусть это не так, т. е. существует ненулевое управление $\tilde{v}(\cdot)$, при котором $\bar{\mathcal{F}}(0, \tilde{v}(\cdot)) < \bar{\mathcal{F}}(0, 0) = \mathcal{J}^\circ(\xi_i)$. Подставим управление $v(\cdot) = \varepsilon\tilde{v}(\cdot)$ в уравнение (5) при нулевом начальном условии. Здесь ε — произвольное число, достаточно малое, чтобы управление $\varepsilon\tilde{v}(\cdot)$ было допустимым; такие ε существуют, поскольку мы считаем ограничения не активными на траектории $v(\cdot) \equiv 0$, $y(\cdot) \equiv 0$. Соответствующее значение функционала $\mathcal{F}(0, \varepsilon\tilde{v}(\cdot))$ — аналитическая функция ε , причём

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}(0, \varepsilon\tilde{v}(\cdot))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}(0, \varepsilon\tilde{v}(\cdot))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

но $\bar{\mathcal{F}}(0, \varepsilon\tilde{v}(\cdot))$ — квадратичная функция относительно ε , и, не достигая по предположению минимума при $\varepsilon = 0$, она имеет при $\varepsilon = 0$ отличную от нуля производную по ε , что, в силу последнего равенства, противоречит оптимальности тождественно нулевого управления для системы (5) с нулевыми начальными условиями и, следовательно, оптимальности управления $u^\circ(\cdot, \xi)$ для системы (1) с начальным условием ξ . Получили противоречие.

Лемма 2 доказана.

Если управление $\bar{v}^\circ(\cdot, y_0)$ построено, то в качестве субоптимального решения задачи (3) выберем управление

$$u^*(\cdot, x_0) = u^\circ(\cdot, \xi) + \bar{v}^\circ(\cdot, x_0 - \xi).$$

Если ограничения не активны вдоль оптимальной траектории, исходящей из точки ξ , то это управление будет допустимым при всех

$x_0 \in U_r(\xi)$ при достаточно малом r . Кроме того, в данном случае также применима доказанная теорема.

Оценка области устойчивости. Пусть $V(x)$ — положительно-определённая функция, \bar{V} — положительное число, и множество, определяемое неравенствами

$$V(x) < \bar{V}, \quad |x| < H_x, \quad (7)$$

покрыто конечным набором окрестностей $\{U_{r_i}(\xi_i)\}_{i=1}^N$, в каждой из которых при допустимых x определено субоптимальное управление $u^*(\cdot, x)$, удовлетворяющее в желаемой степени критерию малости функционала качества. Тогда если

$$V(f(x) + u^*(0, x)) - V(x) < -x^2$$

при всех x из множества (7), то множество (7) является оценкой снизу области устойчивости системы (1) при управлении с помощью МРС, основанного на субоптимальном решении задачи (3).

Выводы. Представляется теоретически возможным, разбив фазовое пространство системы на малые области, построить в каждой из них семейство субоптимальных управлений, которые вычисляются достаточно просто для реализации в реальном времени. Кроме того, благодаря аналитическому выражению субоптимальных управлений можно рассчитывать на получение оценок области устойчивости субоптимального МРС.

Литература

1. Maciejowski J. M. Predictive control with constraints. London: Prentice Hall, 2001. 331 p.
2. Sokaert P. O. M., Mayne D. Q., Rawlings J. B. Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability) // IEEE Transactions on Automatic Control, 1999. Vol. 44, No. 3. P. 648–654.
3. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Сумачева В. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Системы нейтрального типа: \mathcal{H}_2 норма передаточной матрицы

Рекомендовано к публикации профессором Харитоновым В. Л.

1. Введение. Норма передаточной матрицы играет важную роль в исследовании динамических систем. С ее помощью производится оценка влияния внешних воздействий на выходной сигнал системы. В качестве внешнего входного сигнала часто рассматриваются возмущающие воздействия и помехи, которые присутствуют, например, в виде порывов ветра или волн в задачах стабилизации движения летательных аппаратов или морских объектов. Уровень их подавления оценивается с помощью \mathcal{H}_2 нормы передаточной матрицы, которая в задаче выступает в качестве критерия оптимальности.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что для вычисления \mathcal{H}_2 нормы достаточно найти решение классического матричного уравнения Ляпунова со специально выбранной правой частью [3].

В статье [2] этот метод был распространен на случай систем с запаздываниями: \mathcal{H}_2 норма может быть вычислена с помощью матриц, являющихся аналогом матриц Ляпунова для систем с запаздываниями. Авторами рассмотрена система, входной и выходной сигналы которой не имеют запаздываний. В данной работе рассматриваются экспоненциально устойчивые линейные динамические системы, содержащие запаздывания во входном и выходном сигналах.

2. Постановка задачи и основные определения. Рассмотрим экспоненциально устойчивую линейную стационарную систему уравнений с запаздываниями нейтрального типа

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^m D_j x(t - jh) \right) = \sum_{j=0}^m A_j x(t - jh) + \sum_{j=0}^m B_j v(t - jh), \quad (1)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^m C_j x(t - jh), \quad (2)$$

где $D_0 = E; D_1, \dots, D_m; A_0, \dots, A_m; B_0, \dots, B_m; C_0, \dots, C_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — вещественные матрицы, $h > 0$ — положительное запаздывание. Будем полагать, что $\sum_{j=0}^m D_j x(t-jh)$ непрерывна по $t > 0$, функция $v(t)$ ограничена.

Для того, чтобы определить решение системы (1), необходимо задать начальную функцию $\varphi \in \mathcal{C}^1$ такую, что

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-mh, 0].$$

Соответствующее решение начальной задачи будем обозначать $x(t, \varphi)$.

Определение 1 [1]. Система (1) называется экспоненциально устойчивой, если при $v(t) \equiv 0$ существуют $\gamma \geq 1$ и $\alpha > 0$ такие, что все решения системы удовлетворяет оценке

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\alpha t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0.$$

Определение 2 [1]. Фундаментальной матрицей системы (1) называется матричная функция $K(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^m K(t-jh) D_j \right) = \sum_{j=0}^m K(t-jh) A_j$$

с начальными условиями

$$K(0) = E, \quad K(\theta) = \mathbb{O}_{n \times n}, \quad \theta < 0.$$

3. Матрицы Ляпунова. Теория матриц Ляпунова имеет множество областей применения помимо классического исследования устойчивости системы. Одной из них является нахождение нормы передаточной матрицы.

Определение 3. Матрицей Ляпунова $U(\tau, W)$, ассоциированной с произвольной матрицей W , будем называть

$$U(\tau, W) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t + \tau) dt. \quad (3)$$

Вычисление матриц Ляпунова по формуле (3) затруднено из-за несобственного интеграла. Однако, их можно определить по-другому.

Определение 4. Будем называть матрицей Ляпунова $U(\tau, W)$, ассоциированной с произвольной квадратной матрицей W , матричную функцию, удовлетворяющую следующим свойствам:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=0}^m U(\tau - kh, W) D_k \right) = \sum_{k=0}^m U(\tau - kh, W) A_k, \quad \tau \geq 0, \quad (4)$$

$$U(-\tau, W) = U^T(\tau, W^T), \quad \tau \geq 0, \quad (5)$$

$$\sum_{j,k=0}^m [A_j^T U((j-k)h, W) D_k + D_j^T U((j-k)h, W) A_k] = -W. \quad (6)$$

Можно показать, что для экспоненциально устойчивых системы эти определения равносильны.

Лемма 1. Матрица Ляпунова (3) является единственным решением системы (4), удовлетворяющим (5) и (6).

4. Норма передаточной матрицы. Пусть функции $\hat{X}(s)$, $\hat{K}(s)$, $\hat{V}(s)$, $\hat{Y}(s)$ являются образами Лапласа состояния, фундаментальной матрицы, входного и выходного сигналов системы соответственно.

Определение 5 [3]. Передаточной матрицей системы (1), (2) называется матричная функция комплексной переменной $G(s)$, удовлетворяющая соотношению

$$\hat{Y}(s) = G(s) \hat{V}(s).$$

Лемма 2. Передаточная матрица системы (1), (2) имеет вид

$$G(s) = \left(\sum_{j=0}^m B_j e^{-jhs} \right) \hat{K}(s) \left(\sum_{j=0}^m C_j e^{-jhs} \right).$$

Определение 6 [3]. Прообраз Лапласа передаточной матрицы системы (1), (2) называется импульсной характеристикой $g(t)$.

Лемма 3. Импульсная характеристика системы (1), (2) имеет вид

$$g(t) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m C_j K(t - (j+k)h) B_k.$$

Определение 7 [3]. \mathcal{H}_2 нормой передаточной матрицы экспоненциально устойчивой системы (1), (2) называется

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(G^*(i\omega)G(i\omega)) d\omega.$$

Теорема 1. \mathcal{H}_2 норма передаточной матрицы экспоненциально устойчивой системы (1), (2) может быть вычислена по формуле

$$\|G\|_2^2 = \text{Tr} \left(\sum_{j,r=0}^m B_j^T U((j-r)h, W_0) B_r \right) + 2\text{Tr} \left(\sum_{j,r=0}^m B_j^T \sum_{p=1}^m U((j-r+p)h, W_p) B_r \right), \quad (7)$$

$$W_0 = \sum_{k=0}^m C_k^T C_k, \quad W_p = \sum_{\substack{k=0, \dots, m-p \\ l=k+p, \dots, m \\ l-k=p}} C_k^T C_l, \quad p = 1, \dots, m.$$

В формулу (7) входят только матричные коэффициенты исходной системы (1), (2) и значения матриц Ляпунова в точках $-mh, \dots, 2mh$. Таким образом, вычисление нормы передаточной матрицы сводится к нахождению матриц Ляпунова.

5. Вычисление матриц Ляпунова. Используем определение 4 для вычисления матриц Ляпунова, необходимых для формулы (7). Введем на промежутке $\tau \in [0, h]$ вспомогательные матрицы

$$Z_j(\tau) = U(\tau + jh, W), \quad j = -m, \dots, m-1,$$

и матрицу размерности $(n \times 2mn)$

$$Z(\tau) = (Z_{m-1}(\tau), \dots, Z_0(\tau), Z_{-1}(\tau), \dots, Z_{-m}(\tau)).$$

Пусть $z(\tau)$ — вектор длины $2mn^2$, являющийся векторизацией матрицы $Z(\tau)$

$$z(\tau) = \text{vec}(Z(\tau)).$$

Теорема 2. Вектор $z(\tau)$ на промежутке $[0, h]$ может быть найден с помощью формулы

$$z(\tau) = e^{R_0^{-1} R_1 \tau} \left(M + N e^{R_0^{-1} R_1 h} \right)^{-1} (-w, 0, \dots, 0)^T, \quad (8)$$

где матрицы имеют вид

$$R_0 = \begin{pmatrix} E \times E & \cdots & E \times D_{m-1} & E \times D_m & \cdots & \mathbb{O} \times \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} \times \mathbb{O} & \cdots & E \times E & E \times D_1 & \cdots & E \times D_m \\ D_m^T \times E & \cdots & D_1^T \times E & E \times E & \cdots & \mathbb{O} \times \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} \times \mathbb{O} & \cdots & D_m^T \times E & D_{m-1}^T \times E & \cdots & E \times E \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} E \times A_0 & \cdots & E \times A_{m-1} & E \times A_m & \cdots & \mathbb{O} \times \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} \times \mathbb{O} & \cdots & E \times A_0 & E \times A_1 & \cdots & E \times A_m \\ -A_m^T \times E & \cdots & -A_1^T \times E & -A_0^T \times E & \cdots & \mathbb{O} \times \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} \times \mathbb{O} & \cdots & -A_m^T \times E & -A_{m-1}^T \times E & \cdots & -A_0^T \times E \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & P_0 & \cdots & P_{m-1} & P_m \\ E \times E & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & E \times E & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & E \times E & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & E \times E & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} Q_m & Q_{m-1} & \cdots & Q_0 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -E \times E & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & -E \times E & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & -E \times E & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & -E \times E \end{pmatrix},$$

где $w = \text{vec}(W)$,

$$P_0 = \sum_{j=0}^m (D_j^T \times A_j), \quad P_j = \sum_{\substack{k,l=0 \\ l-k=j}}^m (A_k^T \times D_l + D_k^T \times A_l), \quad j = 1, \dots, m,$$

$$Q_0 = \sum_{j=0}^m (A_j^T \times D_j), \quad Q_j = \sum_{\substack{k,l=0 \\ k-l=j}}^m (A_k^T \times D_l + D_k^T \times A_l), \quad j = 1, \dots, m.$$

Операция « \times » обозначает прямое произведение $A \times B = (B^T \otimes A)$.

Выражение (8) позволяет найти значения функции Ляпунова $U(\tau, W)$ на промежутке $[-mh, mh]$. Чтобы продолжить решение на весь требуемый отрезок $[-mh, 2mh]$, можно воспользоваться системой (4) и методом интегрирования по шагам.

6. Заключение. В данной работе рассмотрен вопрос нахождения явной формулы для вычисления \mathcal{H}_2 нормы передаточной матрицы линейной стационарной системы дифференциальных уравнений с запаздываниями нейтрального типа.

Результат аналогичен ранее полученным как для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для систем с запаздываниями. Выражение для нормы включает в себя только коэффициенты исходной системы и значения матриц Ляпунова в нескольких точках.

Также в работе представлен способ вычисления матриц Ляпунова, заключающийся в решении систем уравнений, что полностью определяет выражение для нормы.

Литература

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. Jarlebring E., Vanbierviet J., Michiels W. Explicit expression for the \mathcal{H}_2 norm of time-delay system based on the delay Lyapunov equation // Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta. USA, 2010. P. 164–169.
3. Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and optimal control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996. 586 p.

Удот М. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

О точке Лемуана — Гребе¹

Рекомендовано к публикации доцентом Тамасяном Г. Ш.

1. Постановка задачи. Пусть задан треугольник. Требуется найти такую точку на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до сторон треугольника минимальна (задача Хоссарда [1]). Такая точка является одной из замечательных точек треугольника и называется точкой Лемуана — Гребе.

2. Историческая справка. Впервые точку Лемуана обнаружил (1809) швейцарский геометр и тополог Симон Антуан Жан Люилье. Этой точке было посвящено исследование (1847) Эрнста Вильгельма Гребе, в честь которого в Германии она называлась точкой Гребе, но более распространенное название она получила в честь французского геометра Эмиля Лемуана, опубликовавшего доказательство существования этой точки (1873) [2–4].

3. Геометрическое решение. Приведем несколько определений и фактов, известных из геометрии [3, 5].

Определение. Симедианы треугольника — это прямые, симметричные его медианам относительно соответствующих биссектрис (точнее, отрезки этих прямых).

Определение. Чевиана — отрезок (или продолжение отрезка), соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной ей стороне или на её продолжении.

Определение. Симедиана — чевиана треугольника, луч которой симметричен лучу медианы относительно биссектрисы угла, проведенной из той же вершины.

Определение. Симедианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется точкой Лемуана — Гребе.

Определение. Центроид треугольника — это точка пересечения его медиан.

Определение. Проекция некоторой точки, лежащей в плоскости треугольника, на стороны треугольника (или их продолжения),

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

вообще говоря, образуют треугольник. Он называется педальным треугольником этой точки.

Утверждение 1. Сумма квадратов расстояний от точки плоскости до сторон треугольника минимальна, когда эта точка является точкой Лемуана — Гребе.

Утверждение 2. Расстояния от точки Лемуана — Гребе до сторон треугольника пропорциональны длинам сторон.

Утверждение 3. Точка Лемуана — Гребе является центроидом своего педального треугольника, и других точек с этим свойством не существует.

В следующих пунктах будут доказаны первые два утверждения.

4. Доказательство утверждения 1. Заметим, что декартову прямоугольную систему координат можно задать так, чтобы одна из вершин треугольника располагалась в начале координат и сторона с наибольшей длиной лежала на оси абсцисс, причём вся фигура находится в первом октанте. Тогда вершины треугольника будут иметь координаты $(0, 0)$, (x_2, y_2) , $(x_3, 0)$ и удовлетворять следующим неравенствам

$$y_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad x_2 < x_3. \quad (1)$$

Найдём уравнения прямых, проходящих через стороны треугольника, а также выражения для расстояний от произвольной точки на плоскости до соответствующей прямой.

1. Уравнение первой прямой: $y_2x - x_2y = 0$. Расстояние от точки с координатами (x, y) до этой прямой задаётся выражением

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{y_2^2 + x_2^2}} |y_2x - x_2y|. \quad (2)$$

2. Уравнение второй прямой: $-y_2x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2 = 0$. Расстояние d_2 до этой прямой находим по формуле

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_3)^2}} | -y_2x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2 |. \quad (3)$$

3. Уравнение третьей прямой: $y = 0$. Расстояние до этой прямой находим по формуле

$$d_3 = |y|. \quad (4)$$

Обозначим через D_1, D_2, D_3 — длины сторон треугольника, тогда

$$D_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \quad D_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_2^2}, \quad D_3 = x_3. \quad (5)$$

Исследуем функцию $f(x, y)$ на экстремум, где

$$\begin{aligned} f(x, y) &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \\ &= \frac{1}{y_2^2 + x_2^2} (y_2 x - x_2 y)^2 + \frac{1}{y_2^2 + (x_3 - x_2)^2} (y_2 x + (x_3 - x_2)y - x_3 y_2)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Выпишем необходимые условия экстремума гладкой функции $f(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y_2}{D_1^2} (y_2 x - x_2 y) + \frac{2y_2}{D_2^2} (y_2 x + (x_3 - x_2)y - x_3 y_2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x_2}{D_1^2} (y_2 x - x_2 y) + \\ \quad + \frac{2(x_3 - x_2)}{D_2^2} (y_2 x + (x_3 - x_2)y - x_3 y_2) + 2y = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим через $K_1 = \frac{1}{D_1^2}$, $K_2 = \frac{1}{D_2^2}$. С учетом неравенств (1) и введенных обозначений приведем систему (6) к виду системы линейных алгебраических уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (K_1 + K_2) y_2 x + (K_2(x_3 - x_2) - K_1 x_2) y = K_2 x_3 y_2, \\ (-x_2 y_2 K_1 + (x_3 - x_2) K_2 y_2) x + \\ \quad + (x_2^2 K_1 + (x_3 - x_2)^2 K_2 + 1) y = K_2 x_3 y_2 (x_3 - x_2). \end{cases} \quad (7)$$

Запишем эту систему в матричном виде $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (K_1 + K_2) y_2, & a_{12} &= K_2(x_3 - x_2) - K_1 x_2, \\ a_{21} &= -x_2 y_2 K_1 + (x_3 - x_2) K_2 y_2, \\ a_{22} &= x_2^2 K_1 + (x_3 - x_2)^2 K_2 + 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Из этих равенств видно, что $a_{21} = y_2 a_{12}$. С учетом (8) найдём

$$\begin{aligned} \det A &= a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = x_2^2 y_2 K_1 (K_1 + K_2) + \\ &+ (x_3 - x_2)^2 y_2 K_2 (K_1 + K_2) + y_2 (K_1 + K_2) - \\ &- y_2 (x_3 - x_2)^2 K_2^2 + 2x_2 y_2 K_1 K_2 (x_3 - x_2) - y_2 x_2^2 K_1^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Несложно показать, что $\det A > 0$. Поэтому система (7) имеет единственное решение (подозрительную точку на экстремум)

$$\begin{cases} x = \frac{x_3 x_2^2 + x_3 y_2^2 + x_2 x_3^2}{2(y_2^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3 x_2)}, \\ y = \frac{x_3^2 y_2}{2(y_2^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3 x_2)}. \end{cases} \quad (10)$$

С учетом (5) перепишем эти соотношения в эквивалентном виде

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} D_3 \frac{3D_1^2 + D_3^2 - D_2^2}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}, \\ y = \frac{1}{2} D_3 \frac{S}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}, \end{cases} \quad (11)$$

здесь $S = \frac{1}{2} y_2 x_3 = \sqrt{p(p - D_1)(p - D_2)(p - D_3)}$ — площадь рассматриваемого треугольника, p — полупериметр.

Для окончательного решения задачи необходимо проверить выполнение достаточного условия минимума для функции $f(x, y)$. Для этого запишем матрицу Гессе H , используя обозначения (8):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В данном случае достаточное условие минимума имеет вид

$$\begin{cases} a_{11} > 0, \\ a_{11} a_{22} > 0. \end{cases}$$

Оба этих условия очевидно выполняются, поэтому точка с координатами (10) (или (11)) является решением поставленной задачи.

Утверждение 1 доказано.

5. Доказательство утверждения 2. Заметим, что при задании прямых вектор нормали выбирался таким образом, чтобы он был направлен внутрь треугольника. Подставив точку (10) (или (11)) в уравнение каждой прямой, получим положительное число, следовательно, эта точка внутренняя.

Воспользовавшись данным свойством точки (10) (или (11)) рассмотрим следующие соотношения (см. (2)–(4)):

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{D_1} &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} |y_2x - x_2y|, \\ \frac{d_2}{D_2} &= \frac{1}{y_2^2 + (x_2 - x_3)^2} |-y_2x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2|, \\ \frac{d_3}{D_3} &= \frac{|y|}{x_3}. \end{aligned}$$

Для всех внутренних точек треугольника модули раскрываются с положительным знаком, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{D_1} &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (y_2x - x_2y), \\ \frac{d_2}{D_2} &= \frac{1}{y_2^2 + (x_2 - x_3)^2} (-y_2x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2), \\ \frac{d_3}{D_3} &= \frac{y}{x_3}. \end{aligned}$$

Тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2y_2 \frac{d_1}{D_1} - 2y_2 \frac{d_2}{D_2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2x_2 \frac{d_1}{D_1} + 2(x_2 - x_3) \frac{d_2}{D_2} + 2x_3 \frac{d_3}{D_3} = 0. \end{cases}$$

После преобразований получим

$$\begin{cases} y_2 \left(\frac{d_1}{D_1} - \frac{d_2}{D_2} \right) = 0, \\ x_2 \left(\frac{d_2}{D_2} - \frac{d_1}{D_1} \right) + x_3 \left(\frac{d_3}{D_3} - \frac{d_2}{D_2} \right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу (1) имеем [1, 3, 6]

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2} = \frac{d_3}{D_3}.$$

Утверждение 2 доказано.

Замечание. Во всех рассмотренных нами источниках нигде не найдено аналитического представления (10) (или (11)) точки Лемуана — Гребе.

6. Заключение. В данной работе рассмотрена задача о поиске такой точки на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до сторон заданного треугольника минимальна. Представлен аналитический способ нахождения точки Лемуана — Гребе из решения экстремальной задачи.

Литература

1. Ефремов Д. Д. Новая геометрия треугольника. Одесса: Типография бланкоиздательства Шпенцера М., 1902. 351 с.
2. Mackay J. S. Early History of the Symmedian Point // Proc. Edinburgh Math. Soc., 1892–1893. No 11. P. 92–103.
3. Вычисление расстояний между геометрическими объектами. <http://mpu.ru/vf4/algebra2/optimiz/distance>
4. Точка Лемуана. http://ru.wikipedia.org/wiki/Точка_Лемуана
5. Зетель С. И. Задачи на максимум и минимум. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 224 с.
6. D’Ocagne M. Sur un élément du triangle rectiligne // Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, 1883. No 3, 2. P. 450–464.

Утешев Н. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Аппроксимация точечно-множественных отображений алгебраическими полиномами¹

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

В настоящей работе рассматривается задача чебышевской аппроксимации точечно-множественного отображения полиномами. Классическое условие существования чебышевского альтернанса, описывающее приближение функции полиномами, обобщается на случай точечно-множественного отображения. Показано, что при этом чередуются не только знаки отклонений полинома наилучшего приближения от точечно-множественного отображения, но и границы отображения (верхняя или нижняя), от которых эти отклонения вычисляются.

Пусть на замкнутом ограниченном множестве $G \subset \mathbb{R}$ задано точечно-множественное отображение (далее ТМО) $M: M(t) \subset \mathbb{R}$, где множества $M(t)$ ограничены в совокупности на G . Рассмотрим задачу аппроксимации этого отображения полиномом $P(A, t)$ степени n : $P(A, t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j = (A, B(t))$. Здесь $A = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $B(t) = (1, t, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Положим

$$\rho(A, t) = \sup_{x \in M(t)} |x - P(A, t)|.$$

Требуется найти

$$\inf_{A \in \mathbb{R}^n} \sup_{t \in G} \rho(A, t).$$

Построим функции $\varphi_1(t) = \inf_{x \in M(t)} x$, $\varphi_2(t) = \sup_{x \in M(t)} x$. Предположим, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – непрерывные на G функции. Введем обозначения

$$\eta_i(A, t) = \frac{1}{2}(P(A, t) - \varphi_i(t))^2, \quad i = 1, 2,$$

$$F_i(A) = \max_{t \in G} \eta_i(A, t), \quad i = 1, 2; \quad F(A) = \max\{F_1(A), F_2(A)\}.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

Тогда поставленная выше задача эквивалентна задаче минимизации на \mathbb{R}^{n+1} функционала $F(A)$. Задача аппроксимации ТМО с помощью полинома впервые была рассмотрена Е. Я. Ремезом [1].

Функции $\eta_i(t)$ выпуклы по A при любом t . Поэтому функции $F_1(A)$, $F_2(A)$ и $F(A)$ также будут выпуклыми как функции максимума выпуклых функций. Необходимое условие минимума функционала $F(A)$ в этом случае выглядит так: $\mathbb{O}_{n+1} \in \partial F(A)$, где $\partial F(A)$ — субдифференциал выпуклой функции F в точке A .

Используя правила субдифференциального исчисления (см. [2]), найдем субдифференциал функционала $F(A)$:

$$\begin{aligned} \partial \eta_i(t) &= \{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t)\}, \\ \partial F_i(A) &= \text{co}\{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t) | \eta_i(t) = F_i\}, \\ \partial F(A) &= \begin{cases} \text{co}\{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t) | \eta_i(t) = F_i\}, \\ \text{если } F_i(A) > F_{3-i}(A), \\ \text{co}\{\text{co}\{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t) | \eta_i(t) = F_i\} | i = 1, 2\}, \\ \text{если } F_1(A) = F_2(A). \end{cases} \end{aligned}$$

Упрощая полученное выражение, получаем

$$\partial F(A) = \text{co}\{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t) | \eta_i(t) = F(A), i = 1, 2\}. \quad (1)$$

Размерность векторов $B(t)$ равна $n + 1$. Если в точке A выполнено необходимое условие минимума, то согласно теореме Каратеодори \mathbb{O}_{n+1} будет выпуклой комбинацией r векторов вида

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_{n+1} &= \sum_{k=1}^r \alpha_k (P(A, t_k) - \varphi_i(t_k))B(t_k), \\ \alpha_k &\in [0, 1], \quad \eta_i(t_k) = F(A), \quad r \leq n + 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \forall t \in G$ и значения этих функций совпадают со значениями некоторого полинома порядка не выше n , то $F(A) = 0$. В противном случае можно поделить это выражение на $\sqrt{2F(A)}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_{n+1} &= \sum_{k=1}^r \alpha_k \text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_i(t_k))B(t_k), \\ \alpha_k &\in [0, 1], \quad \sum_{k=1}^r \alpha_k = 1, \quad \eta_i(t_k) = F(A), \quad r \leq n + 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда все t_k попарно различны. Если $r < n+2$, то $B(t_k)$ будут линейно независимы и необходимое условие минимума не может быть выполнено. Поэтому $r = n + 2$ и все $\alpha_k > 0$. Не умаляя общности, считаем все t_k упорядоченными по возрастанию, а через $i(t_k)$ обозначим соответствующие им при вычислении функции $\text{sign}(\cdot)$ номера i . Для вычисления величин α_k представим условие минимума в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+2}} \text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_{i(t_k)})B(t_k) &= \\ &= -\text{sign}(P(A, t_{n+2}) - \varphi_{i(t_{n+2})})B(t_{n+2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Если необходимое условие минимума выполняется, то найдутся t_k , при которых данное уравнение будет иметь положительное решение, и обратно: если у этого уравнения найдется положительное решение, то необходимое условие минимума будет выполняться. Последнее следует из того, что коэффициенты α_k могут быть получены из положительного решения уравнения $\{\gamma_k | k = \overline{1, n+1}\}$ по формулам

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{\sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j + 1}, \quad \alpha_{n+2} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j + 1}.$$

Вычислим решение уравнения (4) по формуле Крамера. Имеем

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+2}} = \frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_k &= \det([\text{cat}_{j=1}^{k-1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})B(t_j), \\ &\quad - \text{sign}(P(A, t_{n+2}) - \varphi_{i(t_{n+2})})B(t_{n+2}), \\ &\quad \text{cat}_{j=k+1}^{n+1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})B(t_j)]) = \\ &= (-1)^{n-k} \prod_{j=1, j \neq k}^{n+2} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)}) \det(\text{cat}_{j=1, j \neq k}^{n+2} B(t_j)), \quad (5) \\ \Delta &= \det(\text{cat}_{j=1}^{n+1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})B(t_j)). \end{aligned}$$

Под $\text{cat}_{l \in L} A_l$ здесь понимается горизонтальную конкатенацию ряда матриц A_l . Введём обозначение

$$\Delta_k = \det(\text{cat}_{j=1, j \neq k}^{n+1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})B(t_j)), \quad k \in \overline{1, n+2}.$$

Все Δ_k положительны как определители Вандермонда. Так как дробь α_k/α_{n+2} тоже должна быть положительна, произведение

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-k} \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^{n+2} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})}{\prod_{j=1, j \neq k}^{n+1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})} = \\ & = (-1)^{n-k} \frac{\text{sign}(P(A, t_{n+2}) - \varphi_{i(t_{n+2})})}{\text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_{i(t_k)})} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом получаем необходимое условие минимума:

$$\text{sign}(P(A, t_{k+1}) - \varphi_{i(t_{k+1})}) = -\text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_{i(t_k)}), \quad k \in \overline{1, n+1}.$$

Это условие будет и достаточным условием минимума, так как \mathbb{O}_{n+1} будет лежать внутри выпуклой оболочки точек из (1) в силу положительности всех коэффициентов α_k . (Это полностью аналогично условию чебышевского альтернанса из [3]). Найдём теперь условия для $i(t_k)$. Допустим $i(t_k) = 1$. Если $P(A, t_k) < \varphi_1(t_k)$, то

$$\eta_2(t) = \frac{1}{2}(P(A, t) - \varphi_2(t))^2 > \frac{1}{2}(P(A, t) - \varphi_1(t))^2 = \eta_1(t) = F(A).$$

Это противоречит определению $F(A)$. Поэтому $P(A, t_k) > \varphi_1(t_k)$. Аналогичным образом доказываем, что при $i(t_k) = 2$ будет $P(A, t_k) < \varphi_2(t_k)$. А поскольку $\text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_{i(t_k)})$ чередуются, то такое же чередование будет иметь место и для индексов:

$$\forall k \in \overline{1, n+1}, \quad i(t_k) = 3 - i(t_{k+1}).$$

Так же будет обстоять дело и в случае, когда среди точек t_k есть совпадающие, но в них выполняется соотношение $(P(A, t_k) - \varphi_1(t_k))(P(A, t_k) - \varphi_2(t_k)) > 0$. Такая ситуация возможна только в том случае, если в этой точке $\varphi_1(t_k) = \varphi_2(t_k)$.

Рассмотрим теперь случай, когда некая точка t_k повторяется дважды, но $(P(A, t_k) - \varphi_1(t_k))(P(A, t_k) - \varphi_2(t_k)) < 0$. Учитывая,

что $\eta_1(t_k) = \eta_2(t_k)$, путём несложных преобразований получаем $P(A, t_k) = \frac{\varphi_1(t_k) + \varphi_2(t_k)}{2}$. Необходимое условие минимума здесь выполняется, и A действительно является точкой минимума:

$$\begin{aligned} F(A) = \eta_1(t_k) &= \frac{1}{2} \frac{(\varphi_2(t_k) - \varphi_1(t_k))^2}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\varphi_2(t_k) - P(A^*, t_k) + P(A^*, t_k) - \varphi_1(t_k))^2}{4} \leq \\ &\leq \frac{(\varphi_2(t_k) - P(A^*, t_k))^2 + (P(A^*, t_k) - \varphi_1(t_k))^2}{4} \leq F(A^*). \quad (6) \end{aligned}$$

В этом случае $\{t_k\} = \operatorname{argmax}(\varphi_2 - \varphi_1)$, а весь полином лежит в полосе $[\varphi_2(t) - h, \varphi_1(t) + h]$, где $h = \max_{t \in G} \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{2}$. Эта полоса имеет переменную ширину, равную нулю в точках $\{t_k\}$. Возможность построения такого полинома требует дополнительного исследования.

Литература

1. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев.: Наукова думка, 1969. 624 с.
2. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
3. Демьянов В. Ф., Малозёмов Л. В. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

Фальков Е. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

**Об одном методе решения задачи управления
по части переменных с ограничением на
неконтролируемые переменные**

Рекомендовано к публикации профессором Квитко А. Н.

1. Введение. Предлагается алгоритм построения синтезирующего управления, гарантирующего перевод нелинейных стационарных систем из начала координат в его окрестность по отношению к части переменных с учетом ограничения на неконтролируемые переменные. Приводится конструктивный критерий, гарантирующий реализацию полученного алгоритма.

2. Постановка задачи. Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

где $x = (y, z)$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $z \in R^p$, $m > 0$, $p \geq 0$, $m + p = n$, $u \in R^r$, $r \leq n$, $t \in [0, 1]$.

Предполагаем выполнение следующих условий

$$f \in C^2(D \times R^r, R^n), \quad f = (f_1, \dots, f_n), \quad (2)$$

$$D = \{(y, z) \in R^n : \|y\| \leq H, \|z\| < \infty\},$$

$$f(0, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\|y\| < C_1, \quad \|z\| < C_1, \quad \|u\| < C_2, \quad (4)$$

Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \quad y(1) = y_1, \quad y_1 = (y_1^1, \dots, y_1^m), \quad \|y_1\| \leq C_1. \quad (5)$$

Задача. Найти функции $x(t) \in C^1[0, 1]$, $u(t) \in C^1[0, 1]$, удовлетворяющие системе (1) и условию (4) так, чтобы были выполнены соотношения

$$x(0) = 0, \quad y(t) \rightarrow y_1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 1. \quad (6)$$

Указанную пару будем называть программным движением.

3. Решение задачи. Выберем некоторые векторы $u_1 \in R^r$, $\|u_1\| < C_2$, и $z_1 \in R^p$, $\|z_1\| < C_1$. Используя (2), систему (1) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{y} = P_1(y - y_1) + P_2(z - z_1) + Q_1(u - u_1) + R_{1y} + R_{2y}, \\ \dot{z} = P_3(y - y_1) + P_4(z - z_1) + Q_2(u - u_1) + R_{1z} + R_{2z}, \end{cases}$$

где матрицы системы имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial y^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}, & P_2 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial z^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,p}}}, \\ P_3 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial y^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{m+1,n} \\ j=\overline{1,m}}}, & P_4 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial z^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{m+1,n} \\ j=\overline{1,p}}}, \\ Q_1 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,r}}}, & Q_2 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{m+1,n} \\ j=\overline{1,r}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1y}^k &= \frac{1}{2}(y - y_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial y^2}(\tilde{x}, \tilde{u})(y - y_1) + \frac{1}{2}(y - y_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial y \partial z}(\tilde{x}, \tilde{u})(z - z_1) + \\ &+ \frac{1}{2}(z - z_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial z^2}(\tilde{x}, \tilde{u})(z - z_1) + \frac{1}{2}(y - y_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial y \partial u}(\tilde{x}, \tilde{u})(u - u_1) + \\ &+ \frac{1}{2}(z - z_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial z \partial u}(\tilde{x}, \tilde{u})(u - u_1) + \frac{1}{2}(u - u_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial u^2}(\tilde{x}, \tilde{u})(u - u_1), \\ R_{2y}^k &= f^k(y_1, z_1, u_1), \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (\tilde{y}, \tilde{z}), \\ \tilde{y} &= y_1 + \theta_k(y - y_1), \quad \tilde{z} = z_1 + \theta_k(z - z_1), \quad \tilde{u} = u_1 + \theta_k(u - u_1), \\ \theta_k &\in (0, 1), \quad \|\tilde{y}\| < C_1, \quad \|\tilde{z}\| < C_1, \quad \|\tilde{u}\| < C_2. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения выписываются для R_{1z}^l , R_{2z}^l , $l = \overline{m+1, n}$.

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$y(t) = a_1(t) + y_1, \quad z(t) = a_2(t) + z_1, \quad u(t) = b(t) + u_1. \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = P_1 a_1 + P_2 a_2 + Q_1 b + R_{1a_1}(a_1, a_2, b) + R_{2y}(y_1, z_1, u_1), \\ \dot{a}_2 = P_3 a_1 + P_4 a_2 + Q_2 b + R_{1a_2}(a_1, a_2, b) + R_{2z}(y_1, z_1, u_1), \end{cases} \quad (8)$$

Условия (4), (6) примут вид

$$\|a_1(t) + y_1\| < C_1, \quad \|a_2(t) + z_1\| < C_1, \quad \|b(t) + u_1\| < C_2, \quad (9)$$

$$t \in [0, 1], \quad a_1(0) = -y_1, \quad a_2(0) = -z_1, \quad b(0) = -u_1. \quad (10)$$

Сделаем преобразование переменной t по формуле

$$1 - t = e^{-\alpha\tau}, \quad \alpha > 0, \quad \tau \in [0, \infty), \quad (11)$$

Тогда систему (8) и условия (9), (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} d + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} R_{1c_1} \\ R_{1c_2} \end{pmatrix} + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} R_{2c_1} \\ R_{2c_2} \end{pmatrix}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$c_1(\tau) = a_1(t(\tau)), \quad c_2(\tau) = a_2(t(\tau)), \quad d(\tau) = b(t(\tau)), \quad \tau \in [0, \infty),$$

$$\|c_1(\tau) + y_1\| < C_1, \quad \|c_2(\tau) + z_1\| < C_1, \quad \|d(\tau) + u_1\| < C_2, \quad (13)$$

$$c_1(0) = -y_1, \quad c_2(0) = -z_1, \quad d(0) = -u_1. \quad (14)$$

Введем новую управляющую функцию, связанную с $d(\tau)$ уравнением

$$\frac{d}{d\tau} d(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau} v(\tau), \quad v = (v^1, \dots, v^r), \quad v \in R. \quad (15)$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d \end{pmatrix} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & Q_1 \\ P_3 & P_4 & Q_2 \\ \mathbf{O}_{m \times r} & \mathbf{O}_{p \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d \end{pmatrix} + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m \times r} \\ \mathbf{O}_{p \times r} \\ E_{r \times r} \end{pmatrix} v + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} R_{1c_1} \\ R_{1c_2} \\ \mathbf{O}_{r \times 1} \end{pmatrix} + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} R_{2c_1} \\ R_{2c_2} \\ \mathbf{O}_{r \times 1} \end{pmatrix}, \quad (16) \end{aligned}$$

которая образована присоединением системы (15) к системе (12).

Линеаризуем систему (16) относительно вектора $c = (c_1, d, c_2)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c_1 \\ d \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & P_2 \\ \mathbf{O}_{m \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{p \times r} \\ P_3 & Q_2 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ d \\ c_2 \end{pmatrix} + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m \times r} \\ E_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{p \times r} \end{pmatrix} v. \quad (17) \end{aligned}$$

Построим управляющую функцию $v(\tau) \in C[0, \infty)$ так, чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость системы (17) относительно групп переменных $(c_1, d) = \bar{c}$, причем необходимо

$$\|\bar{c} + \bar{c}(0)\| < C_3, \quad C_3 = \min(C_1, C_2). \quad (18)$$

Для этого, следуя [2], будем искать стабилизирующее управление в виде

$$v = \mathbf{G}c_2 + v^*, \quad (19)$$

где \mathbf{G} — постоянная матрица. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c_1 \\ d \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha e^{-\alpha\tau} \underbrace{\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & P_2 \\ \mathbf{O}_{m \times r} & \mathbf{O}_{p \times r} & \mathbf{G} \\ P_3 & Q_2 & P_4 \end{pmatrix}}_{A(\mathbf{G})} \begin{pmatrix} c_1 \\ d \\ c_2 \end{pmatrix} + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m \times r} \\ E_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{p \times r} \end{pmatrix}}_{\bar{B}} v^*. \quad (20) \end{aligned}$$

Далее необходимо построить управление v^* , стабилизирующее специально построенную *вспомогательную систему* по всем переменным.

Размерность вспомогательной системы

$$\begin{aligned} m + r + \text{rank} K_p(\mathbf{G}), \\ K_p(\mathbf{G}) = \left\{ \begin{pmatrix} P_2 \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}^T, P_4^T \begin{pmatrix} P_2 \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}^T, \dots, (P_4^T)^{p-1} \begin{pmatrix} P_2 \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}^T \right\}. \end{aligned}$$

Вспомогательная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \xi = \alpha e^{-\alpha\tau} L_3 \bar{A}(\mathbf{G}) L_4 \xi + \alpha e^{-\alpha\tau} L_4 \bar{B} v^*, \quad (21) \\ L_3 = \begin{pmatrix} E & O \\ O & L_1 \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} E & O \\ O & L_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где L_3, L_4 построены на линейно независимых векторах матрицы $K_p(\mathbf{G})$, причем $L_3 L_4 = E_{h \times h}$, $h = \text{rank} K_p(\mathbf{G})$.

Матрица Калмана системы (21) имеет вид

$$\bar{K}(\mathbf{G}) = L_3 \{ \bar{B}, \bar{A}(\mathbf{G}) \bar{B}, \dots, (\bar{A}(\mathbf{G}))^{m+r+h-1} \bar{B} \}.$$

В [2] показано, что характер устойчивости (20) по отношению к (c_1, d) эквивалентен характеру устойчивости (21) по Ляпунову. Введем обозначения

$$\begin{aligned} K_p^o(\mathbf{G}, z_1) &= K_p(\mathbf{G}) \Big|_{\substack{y_1=0 \\ u_1=0}}, \quad \bar{A}^o(\mathbf{G}, z_1) = \bar{A}(\mathbf{G}) \Big|_{\substack{y_1=0 \\ u_1=0}}, \\ \bar{K}^o(\mathbf{G}, z_1) &= \bar{K}(\mathbf{G}) \Big|_{\substack{y_1=0 \\ u_1=0}}. \end{aligned}$$

Потребуем выполнения следующего условия. Пусть существуют матрица \mathbf{G}^o и вектор z_1^o такой, что $\|z_1^o\| < \varepsilon_z^1$, для которых выполняется

$$m + r + \text{rank } K_p^o(\mathbf{G}^o, z_1^o) = \text{rank } \bar{K}^o(\mathbf{G}^o, z_1^o). \quad (22)$$

Тогда существует $\varepsilon_1 > 0$ такой, что для $\|y_1\| < \varepsilon_1$, $\|u_1\| < \varepsilon_1$ верно

$$m + r + \text{rank } K_p(\mathbf{G}^o, z_1^o) = \text{rank } \bar{K}(\mathbf{G}^o, z_1^o).$$

Далее, согласно [1], для определенных \mathbf{G}^o, z_1^o и некоторых заданных y_1, u_1 , таких что $\|y_1\| < \varepsilon_1$, $\|u_1\| < \varepsilon_1$, можно построить управление v^* , стабилизирующее (20) по всем переменным

$$v^* = \tilde{S}(\tau)\xi.$$

Таким образом система (20), замкнутая управлением

$$v = \mathbf{G}c_2 + S(\tau) \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $S(\tau) = \tilde{S}(\tau)L_3$, экспоненциально устойчива относительно \bar{c} и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\bar{c}(\tau)\| &\leq M_o \|c_o\| e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 1, \\ c_o = c(0) &= (-y_1, -u_1, -z_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (16), замкнутую управлением (23). Эту систему можно записать в виде

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_2 \end{pmatrix} = A(\tau) \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_2 \end{pmatrix} + \alpha e^{-\alpha\tau} R_1(\bar{c}, c_2) + \alpha e^{-\alpha\tau} R_2(\bar{c}_0), \quad (24)$$

где $\|R_1(\bar{c}, c_2)\| \leq L(\|\bar{c}\|^2 + \|c_2\|^2)$, в области $\|c + c(0)\| < C_3$,

$$\|R_2(c_o)\| \leq T_o(c_o), \quad T_o(c_o) \rightarrow 0, \quad \|c_o\| \rightarrow 0.$$

Лемма. Существует такие $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и $0 < \varepsilon_z^2 < \varepsilon_z^1$, что компоненты \bar{c} решения системы (31) с вектором начальных данных $c_0 = L(-y_1, -u_1, -z_1^o)^T$, $\|y_1\| < \varepsilon_2$, $\|u_1\| < \varepsilon_2$, $\|z_1^o\| < \varepsilon_z^2$, удовлетворяют соотношениям

$$\|\bar{c}\| \leq M\|\bar{c}(\tau_1)\|e^{-\nu(\tau-\tau_1)} + M_1e^{-\alpha\tau}T_3(c_0), \quad (25)$$

$$\tau \in [\tau_1, +\infty],$$

$$\|\bar{c}\| \leq M_2\|\bar{c}(0)\| + M_3T_3(c_0), \quad (26)$$

$$\tau \in [0, \tau_1],$$

где $M > 0$, $M_1 = M_1(\tau_1) > 0$, $M_2 = M_2(\tau_1) > 0$, $\nu > 0$, $\tau_1 > 0$ есть постоянные величины.

Из оценок (25), (26) заключаем, что компоненты \bar{c} решения системы (16) с начальными данными $c_0 = L(-y_1, -u_1, -z_1^o)^T$, $\|y_1\| < \varepsilon_2$, $\|u_1\| < \varepsilon_2$, $\|z_1^o\| < \varepsilon_z^2$, начиная с некоторого момента времени $\tau_1 \geq 0$, экспоненциально стремится к нулю.

На основании изложенного приходим к выводу о том, что нами был рассмотрен алгоритм решения поставленной задачи, который можно резюмировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (3), (5), (22). Тогда существует решение задачи (1), (7), которое можно найти после решения задачи стабилизации вспомогательной линейной нестационарной системы (17) по всем переменным, решения задачи Коши для системы (24) с вектором начальных данных $c_0 = L(-y_1, -u_1, -z_1^o)^T$, удовлетворяющим условию $\|y_1\| < \varepsilon_2$, $\|u_1\| < \varepsilon_2$, $\|z_1^o\| < \varepsilon_z^2$, и последующего перехода к исходным переменным по формулам (11), (7).

Литература

1. Квитко А. Н. Об одном методе решения граничной задачи управления для нелинейной управляемой системы // Журнал ВММФ, 2006. Т. 46, № 7. С. 1241–1250.
2. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

Фоминых А. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Метод наискорейшего спуска в одной негладкой задаче оптимизации¹

Рекомендовано к публикации доцентом Карелиным В. В.

1. Введение. Одной из основных задач теории управления динамическими системами является проблема определения множеств возможных фазовых состояний системы в различные моменты времени. Эти множества, называемые множества достижимости, играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования. В данной статье рассматривается задача наблюдаемости начального состояния динамической системы в следующей постановке: задано множество начальных состояний X_0 этой системы и желаемое конечное состояние $x(T)$, необходимо найти такое начальное состояние $x_0 \in X_0$, чтобы траектория системы, начинающаяся в точке x_0 , проходила как можно ближе от точки x_k .

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x + g(t) \quad (1)$$

и включение

$$x_0 \in X_0, \quad (2)$$

где x — n -мерный вектор искомых функций, $P(t)$ — $(n \times n)$ -матрица, $g(t)$ — n -мерная вектор-функция, x_0 — начальное положение, X_0 — заданное множество, которое будем считать замкнутым.

В работе [1] приближённое решение задачи Коши с линейной стационарной неоднородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с неопределённым начальным условием ищется в виде полиномов наперёд заданной степени. В данной статье используется приближённое решение, полученное уже для линейных нестационарных систем n -го порядка. Это решение представляет собой полиномы наперёд заданной степени, в которых известны все коэффициенты при степенях t , кроме свободных членов полиномов,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

которые являются начальным условием. Итак, пусть приближённое решение (1), (2) имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = a_0^0 t^0 + a_1^0 t^1 + \dots + a_m^0 t^m, \\ \dots \\ x^n = a_0^n t^0 + a_1^n t^1 + \dots + a_m^n t^m. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь определены все коэффициенты полиномов в правой части, кроме начального условия $x_0 = a_0$, известно лишь, что оно удовлетворяет включению (2). Задача состоит в нахождении наименьшей окрестности $S(x_k, \varepsilon)$ заданной точки x_k , в которую в конечный момент времени T может попасть решение $x(x_0, t_0, t)$ системы (1) из заданной начальной области (2). Для этого рассмотрим функцию

$$\varepsilon = f(a_0) = \|x(T) - x_k\|^2. \quad (4)$$

Пусть множество

$$X_0 = [a_0 \in R^n \mid \phi_i(a_0) \leq d_i], \quad (5)$$

где $d_i \in R$ — заданные числа, $i = \overline{1, n}$. Считаем, что функции $\phi_i(a_0)$ линейны относительно a_0 , а именно, $\phi_i = \sum_{j=1}^n k_i^j a_0^j$. Можно ввести следующую штрафную функцию

$$\phi(a_0) = \max(0, \phi_1(a_0) - d_1) + \dots + \max(0, \phi_n(a_0) - d_n). \quad (6)$$

Пусть $\Omega = [a_0 \in R^n \mid \phi(a_0) \leq d]$. Очевидно, $\phi(a_0) = 0$, если $a_0 \in \Omega$ и $\phi(a_0) > 0$, если $a_0 \notin \Omega$. Тогда можно сформулировать задачу минимизации функции $f(a_0)$ на множестве Ω .

3. Сведение к задаче безусловной минимизации. Покажем, что поставленная задача минимизации при наличии ограничений эквивалентна задаче безусловной минимизации функционала

$$\Phi = f(a_0) + \lambda \phi(a_0), \quad (7)$$

где $\lambda > \lambda^* > 0$ — константа точного штрафа. Точка $\overline{a_0}$, доставляющая минимум функционалу (7), и будет оптимальным начальным условием в смысле этого функционала Φ .

Рассмотрим множество $\Omega_\delta = [a_0 \in R^n \mid \phi(a_0) < \delta]$. Тогда $\Omega_\delta / \Omega = [a_0 \in R^n \mid 0 < \phi(a_0) < \delta]$. Найдём

$$\phi^\dagger(a_0) = \lim_{a_0 \rightarrow a_0'} \frac{\sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n k_i^j a_0^j - d_i| - \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n k_i^j (a_0^j)' - d_i|}{\rho(a_0, a_0')} =$$

$$= \lim_{a_0 \rightarrow a'_0} \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n k_i^j (a_0^j - (a_0^j)')}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (a_0^j - (a_0^j)')^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^n k^j t_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n t_i^2}} = -|k^{j_0}| < 0,$$

где $k^{j_0} = \max_j [k^j]$. Итак, нашлось такое число $\alpha = |k^{j_0}| > 0$, что $\phi^1(a_0) = -\alpha < 0 \quad \forall a_0 \in R^n$ и, в частности, $\forall a_0 \in \Omega_\delta/\Omega$.

Обратимся к функции (4). Заметим, что точка минимума $f(a_0)$ совпадает с точкой минимума функции

$$\bar{f}(a_0) = |f_1(a_0) - x_k^1| + \dots + |f_n(a_0) - x_k^n|, \quad (8)$$

которую будем рассматривать в дальнейшем, сохранив прежнее обозначение: $f(a_0) \Rightarrow \bar{f}(a_0)$. Здесь $f_i(a_0) = x^i(T)$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $f_i(a_0) > x_k^i \quad \forall i = \overline{1, n}$. Тогда $\text{grad}(f(a_0)) = (1, \dots, 1)$ — n -мерный вектор, состоящий из единиц, $\|\text{grad}(f(a_0))\| = \sqrt{n}$. Аналогично при $f_i(a_0) < x_k^i \quad \forall i = \overline{1, n}$ $\|\text{grad}(f(a_0))\| = \sqrt{n}$. Тогда можно взять $L = \max_{a_0} [\text{grad}(f(a_0))] = \sqrt{n}$, где L — константа Липшица, т. е. функция (8) липшицева $\forall a_0 \in R^n$ и, в частности, $\forall a_0 \in \Omega_\delta/\Omega$.

Таким образом, выполнены достаточные условия существования константы точного штрафа $\lambda^* > 0$ [2], поэтому $\forall \lambda > \lambda^* > 0$ задача минимизации функции $f(a_0)$ на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функционала (7) на всём пространстве, и можно взять $\lambda^* = L/(2\alpha) = \sqrt{n}/(2|k^{j_0}|)$.

4. Метод наискорейшего спуска (МНС). Здесь описаны шаги, которые нужно совершить для первой итерации МНС, в результате которой по начальной точке a_{01} будет получена точка a_{02} . Пусть уже построена точка a_{0i} , $i = 1, 2, \dots$. Построим $(i+1)$ -ую точку по формуле $a_{0i+1} = a_{0i} + \alpha_i g_i$, где $\alpha_i \in R$, $g_i \in R^n$ — величины, подлежащие определению. В силу выполнения условий теоремы о существовании константы λ^* точного штрафа МНС сходится $\forall \lambda > \lambda^*$ к точке \bar{a}_0 минимума функционала (7) из любой начальной точки a_{01} .

4.1. Вычисления субдифференциала функционала Ф. Используем метод наискорейшего спуска для нахождения точки минимума функционала (7) [4]. Зафиксируем начальную точку a_{01} и вычислим субдифференциал функции (7). Субдифференцируемость следует из возможности представления (7) в виде суммы максимумов дифференцируемых функций и того, что максимум дифференцируемых функций и сумма субдифференцируемых функций есть субдифференцируемые функции. Итак, найдём $\partial\Phi(a_{01}) = \partial f(a_{01}) +$

$+\lambda\partial\phi(a_{01}) = \sum_{i=1}^n \partial|f_i(a_{01}) - x_k^i| + \lambda \sum_{j=1}^p \partial \max(0, \phi_i(a_{01}) - d_i)$. Отметим, что

$$\begin{cases} \partial|f_i(a_{01}) - x_k^i| = \text{grad}(f_i(a_{01})), & f_i(a_{01}) - x_k^i > 0; \\ \partial|f_i(a_{01}) - x_k^i| = -\text{grad}(f_i(a_{01})) = 0, & f_i(a_{01}) - x_k^i < 0; \\ \partial|f_i(a_{01}) - x_k^i| = \text{co}[\text{grad}(f_i(a_{01})), -\text{grad}(f_i(a_{01}))], & f_i(a_{01}) - x_k^i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial \max(0, \phi_j(a_{01}) - d_j) = \text{grad}(\phi_j(a_{01})), & \phi_j(a_{01}) - d_j > 0; \\ \partial \max(0, \phi_j(a_{01}) - d_j) = 0, & \phi_j(a_{01}) - d_j < 0; \\ \partial \max(0, \phi_j(a_{01}) - d_j) = \text{co}[\text{grad}(\phi_j(a_{01})), 0], & \phi_j(a_{01}) - d_j = 0. \end{cases}$$

Здесь $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$. Тогда $\partial\Phi(a_{01})$ будет представлять из себя выпуклую оболочку k векторов $h_q \in R^n$, $q = \overline{1, k}$, где k может принимать значения от 1 до $2^n + 2^p$. Рассмотрим матрицу A , столбцами которой выступают эти векторы h_q .

4.2. Проверка условия минимума функционала Φ . Известно [3], что если $\overline{a_0}$ — точка минимума (7), то

$$0_n \in \partial\Phi(\overline{a_0}). \quad (9)$$

Однако ввиду выпуклости функционала Φ необходимое условие (9) будет и достаточным. Как известно [5], для выполнения условия (9) необходимо, чтобы столбцы матрицы A были линейно зависимы.

В случае невыполнения достаточно просто проверяемого условия линейной зависимости столбцов матрицы A можно пропустить процедуру проверки условия (9) с помощью симплекс-метода, описанную ниже, и сразу перейти к поиску направления наискорейшего спуска, описанного в п. 4.3.

Проверим теперь необходимое и достаточное условие минимума (7) в точке a_{01} , используя представление нуля в виде выпуклой комбинации векторов h_i , $i = \overline{1, k}$. Нам нужно решить систему линейных уравнений

$$[A \ (1, \dots, 1)]\alpha = [0, 1], \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (10)$$

Используем симплекс-метод [4]. При этом можно рассматривать произвольную целевую функцию, так как нас интересует не значение какой-либо целевой функции на решениях α_i , $i = \overline{1, k}$, а существование этих решений. Итак, если симплекс-метод в задаче (10) сойдется к некоторому значению α_i , $i = \overline{1, k}$ (т. е. система (10) имеет

решение), то необходимое и достаточное условие минимума (9) выполнено, и точка a_{01} является искомой, т. е. оптимальное начальное условие найдено, и система (3) определена уже полностью. В противном случае, переходим к поиску направления наискорейшего спуска.

4.3. Нахождение направления наискорейшего спуска.

Найдём ближайшую к началу координат точку субдифференциала $\partial\Phi(a_0)$ — выпуклого многогранника, натянутого на столбцы матрицы A . Эта задача эквивалентна условной минимизации нормы

$$\|g\|, \quad g \in \partial\Phi(a_0). \quad (11)$$

В силу выпуклости и замкнутости субдифференциала $\partial\Phi(a_0)$ эта задача имеет единственное решение [3], которое обозначим g_1 . Направлением наискорейшего спуска будет величина $-g_1/\|g_1\|$. Для решения задачи (11) использован метод Малозёмова — Демьянова — Митчелла (МДМ-метод) (а именно, первый метод последовательных приближений) [3]. Заметим, что это итеративный метод, который плохо сходится, когда ноль принадлежит многограннику, именно поэтому в рассматриваемом методе наискорейшего спуска отдельно проводится проверка последнего условия, а МДМ-метод применяется лишь в случае, когда $0_n \notin \partial\Phi(\bar{a}_0)$.

4.4. Нахождение длины шага. Построим точку a_{02} по формуле

$$a_{02} = a_{01} + \alpha_1 g_1. \quad (12)$$

Здесь g_1 уже известно. В качестве длины шага α_1 возьмём решение одномерной задачи минимизации функционала Φ , которую получим при подстановке (12) в (7) (тогда $\Phi = \Phi(\alpha)$). Задача свелась к нахождению минимума функции $\Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^n |\mu_i \alpha - \zeta_i| + \lambda \sum_{j=1}^p \max(0, \nu_j \alpha - \eta_j)$, где $\mu_i, \zeta_i, \nu_j, \eta_j \in R$ — известные числа. $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$. Очевидно, что решение задачи даёт либо одно из чисел $\zeta_i/\mu_i, \nu_j/\eta_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, которых $n + p$ штук, либо решение одного из уравнений $|\mu_i \alpha - \zeta_i| = |\nu_j \alpha - \eta_j|, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, которых np штук. Таким образом, сравнив значения (7) в конечном числе $n + p + 2np$ точек α , которые являются решениями соответствующих уравнений, получим наименьшее значение функционала (7) и длину шага, которую обозначим α_1 .

5. Программная реализация. Описанные шаги пункта 4 реализованы в среде Maple. Отметим, что программа работает не только для линейных функций $f_i, \phi_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, но и когда эти

функции имеют произвольный вид. Однако в общем случае сходимость метода не гарантирована, для каждого вида функций нужно так же, как это сделано в пункте 3, проверять достаточные условия существования константы точного штрафа и сходимости МНС. Пользователь задаёт функции $f_i, \phi_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, и начальную точку a_{01} .

6. Заключение. Построенное приближение (3) может быть полезно, когда получение общего решения системы (1) аналитически затруднено. В задачах управления с неопределённым начальным условием (2) часто возникает необходимость оптимизации по начальным данным согласно какому-то критерию. В данной работе рассмотрена задача приведения траектории в наименьшую окрестность заданной точки x_k с ограничением на начальное положение.

Литература

1. Фоминых А. В. Один способ построения приближённого решения системы дифференциальных уравнений // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 61–66.
2. Demyanov V. F., Giannessi F., Karelin V. V. Optimal control problems via exact penalty functions // J. of Global Optimiz., 1998. Vol. 12, No 3. P. 215–223.
3. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том 1. Изд. 2-е, стереотип. М.: Физматлит, 1962. 464 с.
5. <http://dha.spb.ru/PDF/Alternance.pdf>

Чернэуцану Е. К.

Санкт-Петербургский государственный университет

Численные эксперименты по строгой h -отделимости¹

Рекомендовано к публикации профессором Поляковой Л. Н.

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n заданы два конечных множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad B = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

Задачу строгого отделения выпуклой оболочки множества A от множества B с помощью h гиперплоскостей H_s , определяемых уравнениями

$$\langle w^s, x \rangle = \gamma_s, \quad s \in \overline{1, h},$$

где $w^s \neq \mathbb{0}$ при всех s , можно формализовать так:

$$\begin{aligned} F(G) := & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \max_{s \in \overline{1, h}} [\langle w^s, a_i \rangle - \gamma_s + c]_+ + \\ & + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \min_{s \in \overline{1, h}} [-\langle w^s, b_j \rangle + \gamma_s + c]_+ \rightarrow \min_G, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь G — $(h \times (n + 1))$ -матрица со строками

$$g^s = (w^s, \gamma_s), \quad s \in \overline{1, h};$$

$c > 0$ — параметр. В работах [1, 2] задача (1) исследовалась только при $c = 1$. Матрицу G указанных размеров будем называть *подходящей*, если у неё все w^s отличны от нулевого вектора.

По определению $F(G) \geq 0$ на всех матрицах G . Особенность задачи (1) заключается в том, что может существовать подходящая матрица G_* , которая строго отделяет $co(A)$ от B в смысле определения строгой отделимости [2], но при этом $F(G_*) > 0$.

Как показано в [3], задача (1) сводится к конечному числу задач линейного программирования. Количество таких задач равно k^h .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752-а

Оно может быть достаточно большим. Поэтому представляют интерес приближённые методы и прежде всего градиентный метод, предложенный в [1, 4].

Введём обозначения

$$\begin{aligned}
 f(v, u) &= \langle v, u \rangle + c, \\
 \hat{a}_i &= \begin{pmatrix} a_i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \check{b}_j = \begin{pmatrix} -b_j \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \varphi_i(G) &= \max_{s \in \overline{1, h}} [f(g^s, \hat{a}_i)]_+, \quad \psi_j(G) = \min_{s \in \overline{1, h}} [f(g^s, \check{b}_j)]_+, \\
 \hat{\varphi}_i(G) &= \max_{s \in \overline{1, h}} f(g^s, \hat{a}_i), \quad \check{\psi}_j(G) = \min_{s \in \overline{1, h}} f(g^s, \check{b}_j), \\
 \hat{R}_i(G) &= \{s \in \overline{1, h} \mid f(g^s, \hat{a}_i) = \hat{\varphi}_i(G)\}, \\
 \check{R}_j(G) &= \{s \in \overline{1, h} \mid f(g^s, \check{b}_j) = \check{\psi}_j(G)\}.
 \end{aligned}$$

Тогда задача (1) перепишется в более компактном виде

$$F(G) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \psi_j(G) \rightarrow \min_G.$$

Функции от матриц $\varphi_i(G)$ и $\psi_j(G)$ дифференцируемы по направлениям (в качестве которых выступают также матрицы, см. [1, 4]).

С помощью градиентного метода изучим влияние параметра c на качество строгого h -отделения.

Рассмотрим задачу строгого 3-отделения при разных значениях параметра c . Основное внимание будем уделять организации вычислений.

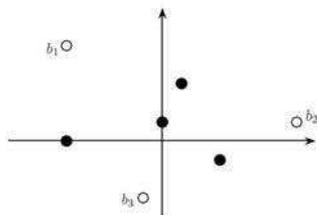


Рис. 1. Множества A и B

Пусть на плоскости заданы множества A и B , состоящие из точек $a_1 = (-3, 0)$, $a_2 = (1, 2)$, $a_3 = (2, -1)$, $a_4 = (0, 1)$; $b_1 = (-3, 3)$, $b_2 = (4, 1)$, $b_3 = (-1, -3)$.

Очевидно, что (см. рис. 1) $\text{conv}(A) \cap B = \emptyset$.

Сначала будем решать задачу строгого 3-отделения при $c = 0$.

Возьмём начальное приближение (см. рис. 2) $G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

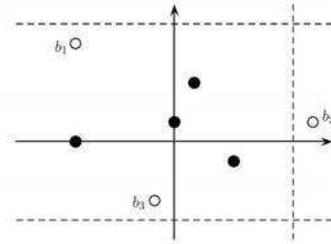


Рис. 2. Начальное приближение G_0 при $c = 0$

Заполним две таблицы.

Таблица 1. Вычисление $\varphi_i(G_0)$

i	1	2	3	4
$f(g_0^1, \hat{a}_i)$	-6	-2	-1	-3
$f(g_0^2, \hat{a}_i)$	-4	-2	-5	-3
$f(g_0^3, \hat{a}_i)$	-4	-6	-3	-5
$\hat{\varphi}_i(G_0)$	-4	-2	-1	-3
$\hat{R}_i(G_0)$	{2, 3}	{1, 2}	{1}	{1, 2}
$\varphi_i(G_0)$	0	0	0	0

Таблица 2. Вычисление $\psi_j(G_0)$

j	1	2	3
$f(g_0^1, \hat{b}_j)$	6	-1	4
$f(g_0^2, \hat{b}_j)$	1	3	7
$f(g_0^3, \hat{b}_j)$	7	5	1
$\hat{\psi}_j(G_0)$	1	-1	1
$\hat{R}_j(G_0)$	{2}	{1}	{3}
$\psi_j(G_0)$	1	0	1

Последние строки этих таблиц позволяют вычислить значение целевой функции $F(G_0) = \frac{2}{3}$.

Производная по направлению V функции $F(G)$ при $G = G_0$ принимает вид

$$F'(G_0, V) = v^2(1) - v^2(2) + \frac{1}{3}v^2(3) + \frac{1}{3}v^3(1) + v^3(2) + \frac{1}{3}v^3(3).$$

Решаем задачу линейного программирования

$$F'(G_0, V) \rightarrow \min_{V \in \Omega}, \quad (2)$$

где в качестве Ω возьмём множество (3×3) -матриц V , все элементы которых по модулю не превосходят 10. Очевидно, что решением задачи (2) является матрица

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & -10 \\ -10 & -10 & -10 \end{pmatrix},$$

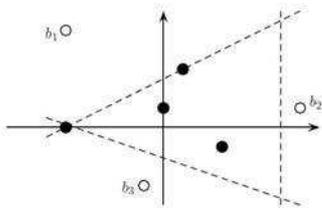


Рис. 3. G_1 — решение задачи при $c = 0$

при этом $F'(G_0, V_0) = -40$. Получили, что V_0 — направление убывания функции $F(G)$ при $G = G_0$. Минимум функции $F(G_0 + tV_0)$ на луче $t > 0$ достигается при $t_0 = 0, 1$, поэтому $G_1 := G_0 + t_0V_0 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $F(G_1) = 0$. Учитывая, что G_1 — подходящая матрица, заключаем, что G_1 — решение рассматриваемой задачи (см. рис. 3).

Изменим в данной задаче значение параметра c . Вместо $c = 0$ положим $c = 1$. В качестве начального приближения возьмём ту же матрицу G_0 . Находим значение целевой функции $F(G_0) = \frac{4}{3}$.

Производная по направлению V функции $F(G)$ при $G = G_0$ принимает вид

$$F'(G_0, V) = \frac{1}{4} [\langle v^1, \hat{a}_3 \rangle]_+ + \frac{1}{3} \{ \langle v^2, \check{b}_1 \rangle + [\langle v^1, \check{b}_2 \rangle]_+ + \langle v^3, \check{b}_3 \rangle \}.$$

Решаем задачу линейного программирования (2)

$$\frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{3} \{ \langle v^2, \check{b}_1 \rangle + t_2 + \langle v^3, \check{b}_3 \rangle \} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} |v^s(\alpha)| &\leq 10, \quad \alpha \in \overline{1, 3}, \quad s \in \overline{1, 3}; \\ t_1 &\geq \langle v^1, \hat{a}_3 \rangle, \quad t_2 \geq \langle v^1, \check{b}_2 \rangle, \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Для решения последней задачи использовалась программа из MATLAB [5]. Получили матрицу $V_0 = \begin{pmatrix} 3,06 & 7,8 & 6,3 \\ -10 & 10 & -10 \\ -10 & -10 & -10 \end{pmatrix}$, при этом $F'(G_0, V_0) = -40$. Минимум функции $F(G_0 + tV_0)$ на луче $t > 0$ достигается при $t_0 = 0,1$, поэтому $G_1 = \begin{pmatrix} 1,3 & 0,8 & 3,6 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (см. рис. 4). Непосредственно проверяется, что $F(G_1) = 0,5$.

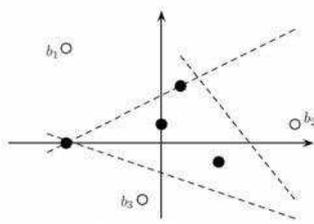


Рис. 4. Подходящая матрица G_1

Повторяем процесс, и на следующем шаге получаем матрицу $G_2 = \begin{pmatrix} 1,3 & 0,8 & 3,6 \\ -0,6 & 1,6 & 3,4 \\ -0,6 & -2 & 3,4 \end{pmatrix}$, при этом $F(G_2) = 0,075$. Проверим для G_2 выполнение строгих неравенств из определения строгой отделимости двух множеств [2]. Они выполняются (см. рис. 5). Значит, подходящая матрица G_2 осуществляет строгое 3-отделение (хотя $F(G_2) > 0$).

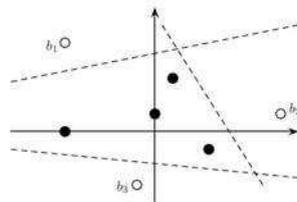


Рис. 5. G_2 — решение задачи при $c = 1$

Литература

1. Astorino A., Gaudioso M. Polyhedral separability throught successive LP // JOTA, 2002. Vol. 112, No 2. P. 265–293.
2. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. Строгая h-отделимость двух множеств // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 декабря 2010 г. <http://dha.spb.ru/PDF/hSeparability.pdf>
3. Чернэуцану Е. К. Строгая h-отделимость и линейное программирование // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 29 января 2011 г. <http://dha.spb.ru/PDF/hSeparabilityLP.pdf>
4. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. Численный метод строгого h-отделения // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 октября 2011 г. <http://dha.spb.ru/PDF/hSepNumerical.pdf>
5. Сергеев А. Н., Соловьёва Н. А., Чернэуцану Е. К. Решение задач линейного программирования в среде MATLAB // Семинар «DHA & CAGD». Программные реализации. 12 февраля 2011 г. <http://dha.spb.ru/PDF/MatLabLP.pdf>

Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш.

Санкт-Петербургский государственный университет

Методы нахождения наименьшего расстояния между эллипсоидами¹

1. Введение. Данная статья продолжает исследования авторов в области вычислительной геометрии. Идейной основой этих исследований являются негладкий анализ и теория точных штрафных функций. В работе рассматривается задача нахождения ближайших точек между двумя эллипсоидами. Представлено несколько известных алгоритмов и предложен новый метод нахождения наименьшего расстояния между эллипсоидами. Приведены несколько примеров, демонстрирующих потенциальные возможности рассматриваемых алгоритмов.

2. Постановка задачи. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Требуется найти ближайшие точки между эллипсоидами Ω_1 и Ω_2 , где

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid h_k(x) = \frac{1}{2}x^T A_k x + x^T B_k + C_k = 0 \right\}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

A_k — постоянные $(n \times n)$ -матрицы, симметричные и положительно определенные, B_k — постоянные $(n \times 1)$ -вектор-столбцы, $C_k \in \mathbb{R}$ — константы.

Обозначим через x_k точку, принадлежащую эллипсоиду Ω_k , т. е. $h_k(x_k) = 0$ при $k = 1, 2$. Поставленную проблему можно решить как задачу условной оптимизации $\|x_1 - x_2\| \rightarrow \min_{\substack{x_1 \in \Omega_1 \\ x_2 \in \Omega_2}}$.

3. Точная штрафная функция. Обозначим через $z = [x_1, x_2]$. Введем функцию $f(z) = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2$ и множество

$$\Omega = \{z = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid h_1(x_1) = 0, h_2(x_2) = 0\}.$$

Множество Ω можно представить в эквивалентном виде

$$\Omega = \{z = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^{2n} \mid \varphi(z) = 0\},$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

где

$$\varphi(z) = |h_1(x_1)| + |h_2(x_2)|.$$

Пусть $\lambda \geq 0$ фиксировано. Введем функцию

$$\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z). \quad (2)$$

Функция $\Phi_\lambda(z)$ называется *штрафной функцией*, а число λ — *штрафным параметром*. В [1] представлен ряд теорем, при выполнении которых $\Phi_\lambda(z)$ является *функцией точного штрафа*.

Таким образом, задача минимизации функции $f(z)$ на множестве Ω сведена к задаче минимизации функции $\Phi_\lambda(z)$ на всем пространстве \mathbb{R}^{2n} при $\lambda > \lambda^*$, где λ^* — константа точного штрафа [1], для которой можно найти оценки.

4. Метод гиподифференциального спуска (МГС). Исследуемая на экстремум функция $\Phi_\lambda(z)$ (2) принадлежит классу гиподифференцируемых функций [1, 2]. Имеем

$$\Phi_\lambda(z + \Delta) = \Phi_\lambda(z) + \max_{[a,v] \in \underline{d}\Phi_\lambda(z)} [a + (v, \Delta)] + o_x(\Delta),$$

где $\frac{o_x(\varepsilon\Delta)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$ для всех $\Delta \in \mathbb{R}^n$. Компактное множество $\underline{d}\Phi_\lambda(z)$ называется гиподифференциалом функции $\Phi_\lambda(z)$ в точке z . Для функции (2) получаем $\underline{d}\Phi_\lambda(z) = \text{co} \{V(\mu_1, \mu_2) \mid |\mu_1| \leq \lambda, |\mu_2| \leq \lambda\}$, где

$$V(\mu_1, \mu_2) = \left[\begin{array}{l} \mu_1 h_1(x_1) + \mu_2 h_2(x_2) - \lambda\varphi(z), \\ \mu_1 h_1'(x_1) + \mu_2 h_2'(x_2) + f'(z) \end{array} \right],$$

$$f'(z) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -(x_1 - x_2) \end{pmatrix}, \quad h_1'(x_1) = \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 \\ \mathbb{O}_n \end{pmatrix},$$

$$h_2'(x_2) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n \\ A_2 x_2 + B_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим также, что отображение $\underline{d}\Phi_\lambda(z)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа.

Теорема [2]. Для того чтобы в точке $z^* \in \mathbb{R}^{2n}$ функция $\Phi_\lambda(z)$ достигала своего наименьшего на \mathbb{R}^{2n} значения, необходимо, чтобы

$$[0, \mathbb{O}_{2n}] \in \underline{d}\Phi_\lambda(z^*). \quad (3)$$

Если точка $z \in \mathbb{R}^{2n}$ не является стационарной, то можно найти направление спуска функции $\Phi_\lambda(z)$ в точке z . Для это требуется решить систему линейных уравнений $D \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \eta$, где

$$D = \begin{pmatrix} h_1^2(x_1) + (h_1'(x_1), h_1'(x_1)) & h_1(x_1)h_2(x_2) \\ h_1(x_1)h_2(x_2) & h_2^2(x_2) + (h_2'(x_2), h_2'(x_2)) \end{pmatrix},$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \lambda\varphi(z)h_1(x_1) - (h_1'(x_1), f'(z)) \\ \lambda\varphi(z)h_2(x_2) - (h_2'(x_2), f'(z)) \end{pmatrix}.$$

Пусть μ_1^*, μ_2^* — решение системы, тогда вектор $g(z) = -\frac{G^*(z)}{\|G^*(z)\|}$ является направлением спуска, здесь $G^*(z) = \mu_1^*h_1'(x_1) + \mu_2^*h_2'(x_2) + f'(z)$.

Опишем метод гиподифференциального спуска для нахождения стационарных точек, т. е. точек, удовлетворяющих условию (3).

Выберем произвольное $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Пусть уже найдено $z_k \in \mathbb{R}^{2n}$. Если $\varphi(z_k) = 0$ и выполнено условие (3), то точка z_k является стационарной, и процесс прекращается. Если же условие (3) не выполнено, то возьмем вектор $G^*(z_k)$ — гипогрadients функции Φ_λ в точке z_k . Теперь найдем

$$\min_{\beta \geq 0} \Phi_\lambda(z_k - \beta G^*(z_k)) = \Phi_\lambda(z_k - \beta_k G^*(z_k)) \quad (4)$$

и положим $z_{k+1} = z_k - \beta_k G^*(z_k)$. Имеем $\Phi_\lambda(z_{k+1}) < \Phi_\lambda(z_k)$. Пользуясь непрерывностью в метрике Хаусдорфа гиподифференциального отображения как функции z , можно доказать, что описанный метод сходится в следующем смысле: $\|G^*(z_k)\| \rightarrow 0$. Заметим, что величина шага спуска β в задаче (4) вычисляется аналитически.

5. «Алгебраические» методы. В работах [3–5] предлагается построение алгебраического уравнения от одной переменной, среди корней которого находится квадрат искомого расстояния. В [3, 4] полином получается в результате применения методов теории исключения переменных [6] и имеет степень не менее $2n(n+1)$.

6. Метод «шаров» [7]. В работах [7, 8] для поиска минимального расстояния ρ между двумя эллипсоидами (Ω_1 и Ω_2) на каждой итерации строятся шары, вписанные в эллипсоиды, касающиеся граничной точки эллипсоида.

Процесс начинается из центров эллипсоидов. На k -ой итерации имеем центры шаров c_1 и c_2 . Находим величины t_1 и t_2 как решения двух квадратных уравнений

$$\begin{aligned} t_1 &= \max\{t \in [0, 1] \mid (1-t)c_1 + tc_2 \in \Omega_1\}, \\ t_2 &= \min\{t \in [0, 1] \mid (1-t)c_1 + tc_2 \in \Omega_2\}. \end{aligned}$$

Если $t_2 \leq t_1$, то расстояние $\rho = 0$. В противном случае находим

$$\begin{aligned} x &= c_1 + t_1(c_2 - c_1), & y &= c_1 + t_2(c_2 - c_1), \\ \theta_1 &= \arccos\left(\frac{(y-x)^T(A_1x+B_1)}{\|y-x\| \cdot \|A_1x+B_1\|}\right), \\ \theta_2 &= \arccos\left(\frac{(x-y)^T(A_2y+B_2)}{\|x-y\| \cdot \|A_2y+B_2\|}\right). \end{aligned}$$

Если $\theta_1 = \theta_2 = 0$, то процесс останавливается. Иначе, считаем новые центры шаров c_1, c_2 по формулам

$$c_1 = x - \frac{1}{\|A_1\|}(A_1x+B_1), \quad c_2 = y - \frac{1}{\|A_2\|}(A_2y+B_2).$$

Здесь $\|A\|$ — евклидова норма матрицы A .

Замечание 1. В случае, если один эллипсоид содержит другой, то метод «шаров» не применим.

Замечание 2. Если один или оба эллипсоида вырождаются в точку, то метод «шаров» не применим (происходит заикливание), в то время, как метод гиподифференциального спуска работает и выдает корректные результаты.

Замечание 3. Если один из эллипсоидов пустой, то метод гиподифференциального спуска «информирует» об этом.

7. Численные примеры. Теперь рассмотрим несколько примеров. Были проведены вычисления для $n = \{2, 3, 4\}$ и при различном расположении эллипсоидов. Все вычисления проводились с точностью 10^{-6} и представлены в таблицах 1–3.

Пример 1. (Эллипсы узкие и расположены далеко друг от друга). Найти минимальное расстояние между эллипсами:

$$\frac{1}{10000}x^2 + y^2 - \frac{101}{5000}x - 2000y + 1000000,02 = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{10000}y^2 - 4x - \frac{101}{5000}y + 4,0201 = 0.$$

Таблица 1. Метод «шаров» и МГС

x_1	(15,2854; 999,4848)
x_2	(2,0001; 200,9999)
ρ	798,5953

Пример 2. [9] (Один эллипс внутри другого). Найти минимальное расстояние между эллипсами

$$10x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 1 \quad \text{и} \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1.$$

Метод «шаров» не применим в данном случае (см. замечание 1).

Таблица 2. МГС

x_1	(0,38383163337729; 0,44186360180114)
x_2	(0,54499741370335; 0,60910968977014)
ρ	0,23226205606823

При использовании метода [3, 4] приходится находить положительные корни у полинома шестой степени.

Пример 3. Найти минимальное расстояние между эллипсоидами (см. (1)) в \mathbb{R}^4 :

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_1 = -1000 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 18 \\ 17 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = 49499999, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix}, \quad C_2 = 132.$$

Таблица 3. Метод «шаров» и МГС

x_1	(999,9636; 1000,8464; 1999,1871; 1999,4339)
x_2	(-3,9637; -3,8465; -0,1870; -1,4339)
ρ	3165,16165

8. Заключение. В работе рассмотрено несколько алгоритмов решения поставленной проблемы. Разработано программное обеспечение в системах MATLAB и Maple, реализующее данные алгоритмы. Из проведенных экспериментов следует, что метод гиподифференциального спуска более универсальный, чем метод «шаров» [7], и менее трудоемкий («эффективнее») нежели методы [3–5].

Литература

1. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. Утешев А. Ю., Яшина М. В. Нахождение расстояния от эллипсоида до плоскости и квадрики в \mathbb{R}^n // Доклады АН, 2008. Т. 419, № 4. С. 471–474.
4. Утешев А. Ю., Яшина М. В. Нахождение расстояния между поверхностями второго порядка в \mathbb{R}^n // Процессы управления и устойчивость: Труды 37-й научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. С. 103–107.
5. Лебедев Д. М., Полякова Л. Н. Задача проектирования нулевой точки на квадрику // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2013. Вып. 1. С. 11–17.
6. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения. Учебное пособие. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. 72 с.
7. Lin A., Han S.-P. On the distance between two ellipsoids // SIAM Journal on Optimization, 2002. Vol. 13. P. 298–308.
8. Косолап А. И. Квадратичные оптимизационные задачи компьютерной геометрии // Искусственный интеллект, 2010. № 1. С. 70–75.
9. Утешев А. Ю. Вычисление расстояний между геометрическими объектами [Электронный ресурс] // Записная книжка профессора Утешева [сайт]. [2007].
<http://pmu.ru/vf4/algebra2/optimiz/distance>

Шуляк А. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Задача чебышевской аппроксимации при наличии ограничений

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

1. Введение. В работе исследуется частный случай задачи чебышевской аппроксимации. Классическая задача чебышевской аппроксимации [1] заключается в нахождении полинома наилучшего приближения. Ниже эта задача рассматривается при наличии ограничений на коэффициенты полинома.

2. Постановка задачи. Пусть задана таблица значений некоторой функции

$$y_k = y(t_k), \quad k \in [0, N],$$

где аргументы (узлы) упорядочены по возрастанию

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N.$$

Задача заключается в том, чтобы найти полином $P_n(A^*, t_k)$, доставляющий минимум функционалу $F(A)$:

$$F(A^*) = \min_{A \in \Omega} F(A),$$

где

$$F(A) = \max_{k \in [0, N]} |f(A, t_k)|,$$

$$f(A, t_k) = y_k - P_n(A, t_k),$$

$$P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n,$$

$$A = (a_0, \dots, a_n) \in R^{n+1},$$

при условии, что на значения A наложены ограничения:

$$\Omega = \left\{ A \in R^{n+1} \left| \|A\|^2 = \sum_{i=0}^n a_i^2 \leq 1 \right. \right\}.$$

Сформулированная задача является классической задачей чебышевской полиномиальной аппроксимации (см. [1]). Отличие состоит в наличии ограничений на коэффициенты полинома.

3. Решение задачи. Из теории точных штрафов известно, что множество Ω можно записать в виде $\Omega = \{A \in R^{n+1} | \varphi(A) = 0\}$, где

$$\varphi(A) \geq 0 \quad \forall A \in R^{n+1}.$$

Если при этом функция φ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то поставленная задача условной минимизации функции F , т. е. минимизации при наличии ограничений при достаточно больших λ эквивалентна задаче безусловной минимизации, т. е. минимизации на всем пространстве функции

$$\Phi_\lambda(A) = F(A) + \lambda\varphi(A). \quad (1)$$

Справедлива следующая

Теорема [2]. Пусть имеет место неравенство

$$\inf_{A \in R^{n+1}} F(A) > -\infty$$

и выполнены следующие условия:

1. Существует $\lambda_0 < \infty$ такое, что для любого $\lambda \geq \lambda_0$ найдется $A_\lambda \in R^{n+1}$, для которого

$$\Phi_\lambda(A_\lambda) = \Phi_\lambda^* = \inf_{A \in R^{n+1}} \Phi_\lambda(A).$$

2. Найдутся $\delta > 0$ и $a > 0$ такие, что

$$\varphi^\downarrow(A) = \liminf_{Y \rightarrow A} \frac{\varphi(Y) - \varphi(A)}{\rho(A, Y)} \leq -a < 0 \quad \forall A \in \Omega_\delta \setminus \Omega, \quad (2)$$

где

$$\Omega_\delta = \left\{ A \in R^{n+1} \mid \varphi(A) < \delta \right\}.$$

3. Функция F липшицева на $\Omega_\delta \setminus \Omega$, т. е. для некоторого $L < \infty$ будет

$$|F(A_1) - F(A_2)| \leq L\rho(A_1, A_2) \quad \forall A_1, A_2 \in \Omega_\delta \setminus \Omega.$$

Тогда существует $\lambda^* \geq \lambda_0$ такое, что при всех $\lambda > \lambda^*$

$$\varphi(A_\lambda) = 0, \quad F(A_\lambda) = \inf_{A \in \Omega} F(A),$$

т. е. точка A_λ является точкой минимума функционала F на множестве Ω .

Проверим условие (2). В нашем случае в качестве функции φ можно взять функцию $\varphi(A) = \max\{f(A), 0\}$, где $f(A) = \|A\|^2 - 1$.

При $A \notin \Omega$ будет $\varphi(A) = f(A)$ и тогда (см. [2])

$$\varphi^\downarrow(A) = -\|f'(A)\| = -2\|A\|.$$

Так как при $A \notin \Omega$ имеем $\|A\| > 1$, то $\varphi^\downarrow(A) < -2$, и условие (2) выполнено. Поэтому из теоремы заключаем, что при достаточно больших $\lambda > 0$ задача минимизации $F(A)$ на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функционала $\Phi_\lambda(A)$ на всем пространстве R^{n+1} . Функционал $\Phi_\lambda(A)$ является выпуклым, так как функции $\varphi(A)$ и $F(A)$ выпуклые. В точке минимума функционала $\Phi_\lambda(A)$ должно выполняться необходимое условие

$$0_{n+1} \in \partial\Phi_\lambda(A^*), \quad (3)$$

где $\partial\Phi_\lambda(A^*)$ — субдифференциал функционала Φ_λ в точке A^* . В силу выпуклости Φ_λ условие (3) является и достаточным.

Построим $\partial\Phi_\lambda(A^*)$. Из (1)

$$\partial\Phi_\lambda(A^*) = \partial F(A^*) + \lambda\partial\varphi(A^*),$$

где $\partial F(A^*)$ и $\partial\varphi(A^*)$ — субдифференциалы, соответственно, функций F и φ в точке A^* . Обе эти функции — функции максимума. Найдем их субдифференциалы (см. [1])

$$\partial\varphi(A^*) = \text{co}\{2A^*, 0_{n+1}\},$$

$$\partial F(A^*) = \text{co}\{T_k \text{ sign} f(A^*, t_k) \mid k \in R(A^*)\},$$

где

$$T_k = P_n^{-1}(A^*, t_k) = (1, t_k, \dots, t_k^n),$$

$$R(A) = \{k \in [0, N] \mid f(A, t_k) = F(A)\}.$$

В итоге

$$\partial\Phi_\lambda(A^*) = \text{co}\{T_k \text{ sign}f(A^*, t_k) \mid k \in R(A)\} + \lambda \text{co}\{2A^*, 0_{n+1}\}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) понятно, что для проверки точки $A_0 \in \Omega$ на минимум функционала $F(A)$ на множестве Ω следует найти

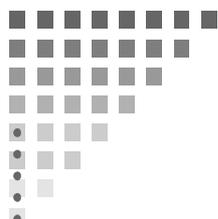
$$\min_{V \in \partial\Phi_\lambda(A_0)} \|V\|^2 = \|V_0\|^2.$$

Если $\|V_0\| = 0$, то необходимое и достаточное условие минимума выполнено. Если же $\|V_0\| > 0$, то направление $g_0 = -\frac{V_0}{\|V_0\|}$ является направлением наискорейшего спуска функционал Φ_λ в точке V_0 , и с его помощью можно «улучшить» точку V_0 .

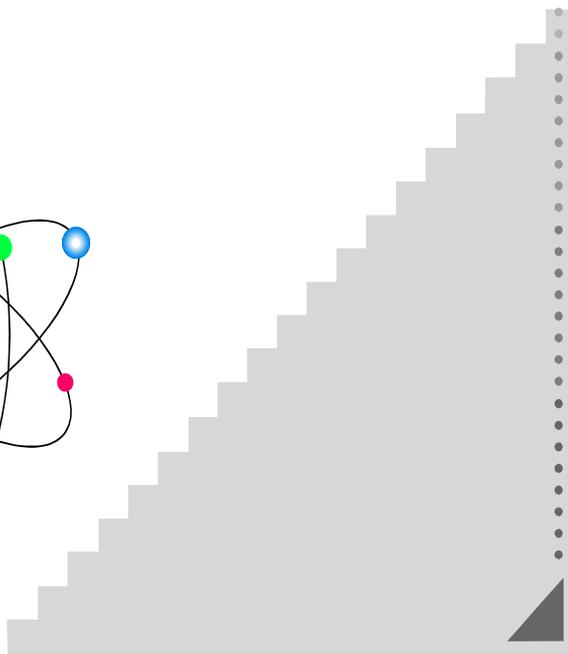
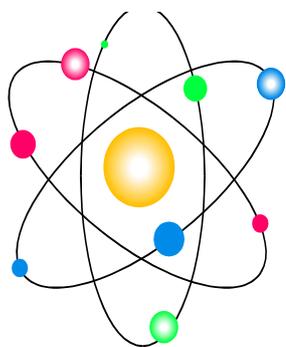
4. Заключение. С помощью квазидифференциального исчисления и метода точных штрафных функций было выведено необходимое и достаточное условие минимума задачи чебышевской аппроксимации при наличии ограничений. С его помощью можно построить метод последовательных приближений.

Литература

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
2. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.



*2. Математические
методы в механике и
физике*



Абдулина К. А., Старков В. Н.
Санкт-Петербургский государственный университет

Исследование системы «деревья – насекомые» с помощью модели Лесли

Будем исследовать эволюцию лесной системы, учитывая взаимодействие деревьев и насекомых (вредителей), с помощью дифференциальных уравнений, моделирующих динамику численности этих популяций. Анализ фазового портрета таких систем дает возможность установить качественные изменения в состоянии лесных систем, выяснить роль регулирующих факторов.

Вредители деревьев, в подавляющем большинстве насекомые, вызывают массовые повреждения деревьев и кустарников. В результате снижается прирост и плодоношение растений, нарушаются возобновление и рост.

В мире вредных насекомых насчитывается более миллиона видов. В лесах нашей страны — около 50 тысяч.

В зависимости от среды обитания и характера наносимых повреждений среди них различают специализированные группы — вредителей листвы и хвои, стволовые вредители, вредителей корней и вредителей плодов и семян.

Как правило, численность вредителей невысока. Однако периодически количество их резко возрастает за счет снижения смертности, реже и в меньшей степени — за счет роста плодовитости, происходят так называемые вспышки массового размножения, которые ведут к заметному, сильному или полному объеданию хвои или листвы. Затем в результате массовой гибели от бактериальных или вирусных заболеваний и паразитов численность этих насекомых резко падает.

Причины вспышек размножения листо- и хвоегрызущих насекомых до сих пор не вполне ясны.

Взаимодействия в системе «деревья – насекомые» будем моделировать с помощью уравнений типа Вольтерра [1], модифицированных П. Лесли [2, 3].

В модели Лесли предполагается, что прирост численности хищников пропорционален численности хищников, приходящихся на одну жертву, z/x .

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta x - \gamma z), \\ \frac{dz}{dt} = z\left(\delta - \tau \frac{z}{x}\right). \end{cases}$$

Здесь $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ — скорости изменения численности жертв и хищников, γ — интенсивность выедания жертвы x хищником z , α — интенсивность естественного прироста популяции жертвы, все параметры положительны.

Заметим, что отказ от принципа парных взаимодействий в модели [1] осуществлен только во втором уравнении для изменения численности хищников. В уравнении динамики численности жертв этот принцип выполняется и снижение численности жертв пропорционально числу встреч жертв и хищников.

Равновесие системы наблюдается в точке

$$x_0 = \frac{\alpha\tau}{\beta\tau + \delta\gamma}, \quad z_0 = \frac{\alpha\delta}{\beta\tau + \delta\gamma}.$$

Решим эту систему с помощью математического пакета Maple [4], взяв модельные значения параметров $\alpha = 20, \beta = 0,5, \gamma = 3, \delta = 9, \tau = 10$ и начальные данные $x(0) = 5, z(0) = 2$ (рис. 1).

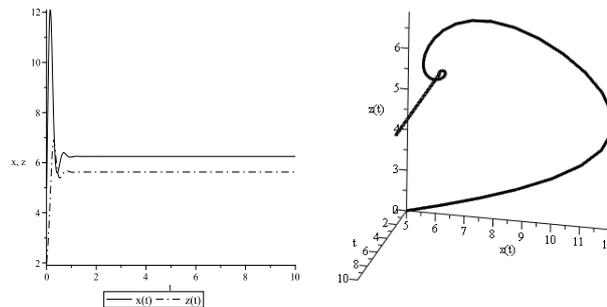


Рис. 1. Графики изменения численности жертвы со временем $x(t)$ и хищника со временем $z(t)$ (слева). Справа приведена фазовая траектория системы

Видим, что система за короткое время приходит в состояние равновесия.

В ряде случаев параметры системы не остаются неизменными, а являются некоторыми заданными (иногда периодическими) функциями времени.

Если нарушить состояние равновесия системы, то возникнут своеобразные колебания. С одной стороны, их нельзя назвать свободными, поскольку система неавтономна и испытывает заданное внешнее воздействие в виде изменения параметра, а с другой стороны, они не являются вынужденными, так как внешнее воздействие не проявляется в виде заданной силы. Эти колебания называются параметрическими и в зависимости от свойств системы и характера изменения ее параметров могут иметь ограниченные или возрастающие во времени размахи (последний случай называют параметрическим резонансом).

Выясним влияние спонтанного изменения различных параметров, моделируемого с помощью функции Хевисайда $\eta(t)$.

Пусть коэффициент выедания γ изменяется ступенчато, т. е. в определенный момент времени возникает вспышка насекомых и через некоторое время исчезает: $\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_1 [\eta(t - t_1) - \eta(t - t_2)]$.

Графики изменения популяций приведены на рис. 2.

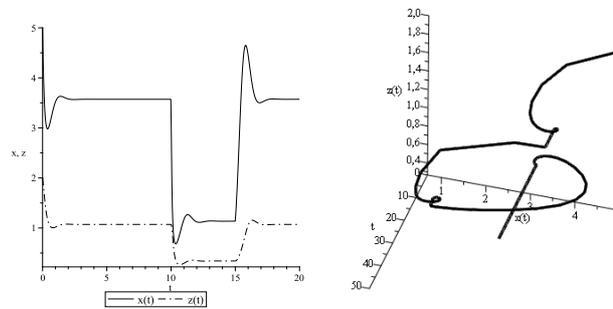


Рис. 2. Графики изменения численности жертвы со временем $x(t)$ и хищника со временем $z(t)$ (слева) при наличии вспышки популяции насекомых. Справа приведена фазовая траектория системы

Видим, что до начала вспышки система стремится к состоянию равновесия и после исчезновения вспышки процесс также стабилизируется.

Выясним влияние коэффициента роста популяции деревьев, учитывая наличие отрицательных факторов (пожары, вырубки) на рост деревьев: $\alpha(t) = \alpha_0 - \alpha_1 [\eta(t - t_1) - \eta(t - t_2)]$. Тогда графики будут иметь следующий вид (рис. 3).

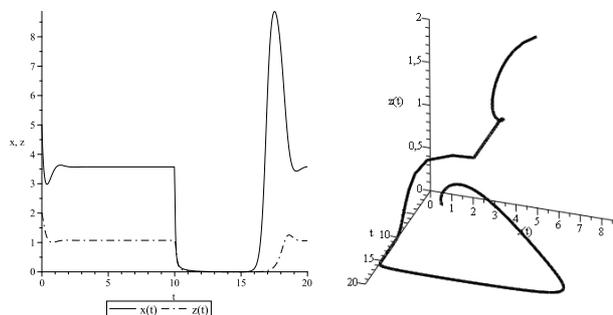


Рис. 3. Графики изменения численности жертвы со временем $x(t)$ и хищника со временем $z(t)$ (слева). Справа приведена фазовая траектория системы

В работе показано, что изменение параметров системы существенно влияет на ее эволюцию.

Литература

1. Вольterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 256 с.
2. Исаев А. С., Хлебopос Р. Г., Недорезов Л. В. Популяционная динамика лесных насекомых. М.: Наука, 2001. 374 с.
3. Уильямсон М. Анализ биологических популяций. М.: Мир, 1975. 271 с.
4. Дьяконов В. П. Maple 7. Учебный курс. СПб.: Питер, 2002. 666 с.

Абдулина К. А., Старков В. Н.
 Санкт-Петербургский государственный университет

Качественное исследование динамики двухвозрастной лесной системы

Моделирование динамики лесных экосистем с учетом возрастной структуры является одной из важнейших задач математической экологии. В работах [1, 2] рассматривались простейшие модели разновозрастного одновидового леса, когда популяции деревьев разбивались на два возрастных класса: древостой $u(t)$ и подрост $v(t)$.

Будем рассматривать изменение во времени численности деревьев по возрастам, добавив естественное влияние насекомых $N(t)$ на биомассу леса. Модель с присутствием насекомых, пожирающих деревья разных возрастов, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \rho v - fu - k_1 u N, \\ \frac{dv}{dt} = fu - hv - k_2 v N, \\ \frac{dN}{dt} = (k_1 u + k_2 v - k_3) N, \end{cases}$$

где $k_1, k_2, k_3, f, h, \rho$ — параметры системы.

Считая $N \neq 0$, найдем стационарные точки из условий

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0, \rho v - fu - k_1 u N = 0, \\ \frac{dv}{dt} = 0, fu - hv - k_2 v N = 0, \\ \frac{dN}{dt} = 0, k_1 u + k_2 v - k_3 = 0. \end{cases}$$

Умножая третье уравнение $k_1 u + k_2 v - k_3 = 0$ на N , имеем $k_1 u N + k_2 v N = k_3 N$.

Используем это выражение при сложении первого и второго уравнений. Получим $(\rho - h)v = k_3 N$ или $v = \frac{k_3 N}{\rho - h}$. Из третьего уравнения выразим $u = \frac{k_3 - k_2 v}{k_1} = \frac{k_3}{k_1} - \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{k_3 N}{\rho - h}$.

Подставляя эти выражения во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно N :

$$k_1 k_2 N^2 + (f k_2 + h k_1) N - f(\rho - h) = 0.$$

Его решение $N = \frac{-(f k_2 + h k_1) \pm \sqrt{(f k_2 + h k_1)^2 + 4 k_1 k_2 f(\rho - h)}}{2 k_1 k_2}$.
 Так как $N > 0$, то выбираем знак «+»

$$N_0 = \frac{-(f k_2 + h k_1) + \sqrt{(f k_2 + h k_1)^2 + 4 k_1 k_2 f(\rho - h)}}{2 k_1 k_2}.$$

Затем вычислим

$$v_0 = \frac{k_3 N_0}{\rho - h}, \quad u_0 = \frac{k_3}{k_1} - \frac{k_2}{k_1} \frac{k_3 N_0}{\rho - h}.$$

Решая уравнения динамики с помощью пакета Maple [3], получим $u(t), v(t), N(t)$. Затем вычислим квадрат расстояния

$$R(t) = (u(t) - u_0)^2 + (v(t) - v_0)^2 + (N(t) - N_0)^2.$$

Если расстояние со временем увеличивается, то точка покоя системы не является устойчивой. Если расстояние убывает, то точка покоя устойчива. Расчеты показывают, что лесная система стремится к точке покоя (u_0, v_0, N_0) (рис. 1).

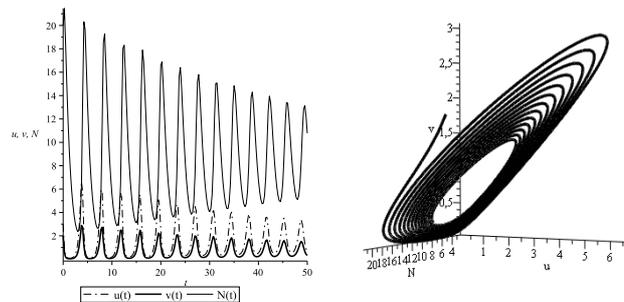


Рис. 1. Динамика популяции деревьев, насекомых (слева). Справа представлена фазовая траектория системы

Увеличение коэффициента выедания дровостоя k_1 в 10 раз дает другую картину (рис. 2).

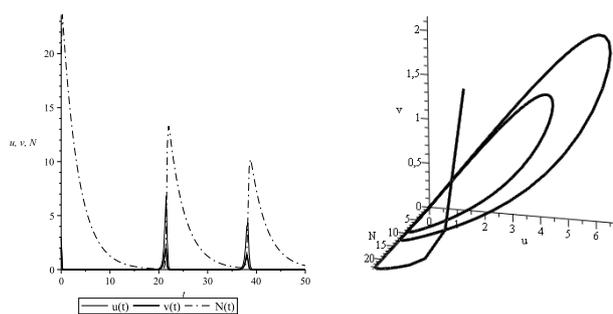


Рис. 2. Динамика популяции деревьев, насекомых (слева). Справа представлена фазовая траектория системы

Изменение динамики системы при уменьшении коэффициента смертности насекомых k_3 в 3 раза приведено на рис. 3.

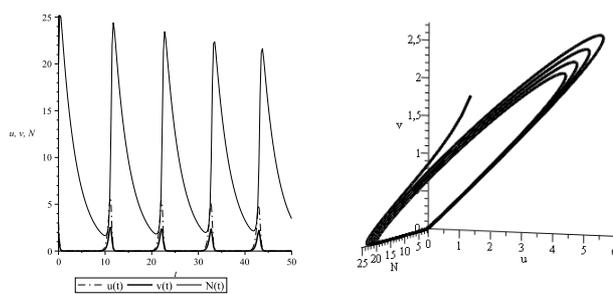


Рис. 3. Динамика популяции деревьев, насекомых (слева). Справа представлена фазовая траектория системы

Уменьшение коэффициента выедания подроста k_2 в 3 раза дает следующую картину процесса (рис. 4).

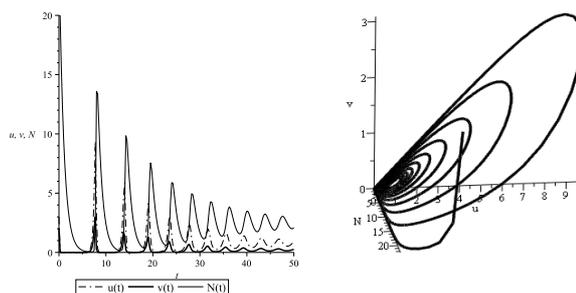


Рис. 4. Динамика популяции деревьев, насекомых (слева). Справа представлена фазовая траектория системы

В данной работе исследованы модели эволюции леса с учетом двух возрастов деревьев и наличия вредителей. Видим, что начальное количество насекомых и другие параметры системы влияют на ее поведение. Однако в любом случае, система стремится к точке покоя (u_0, v_0, N_0) .

Литература

1. Антоновский М. Я., Кларк У., Кузнецов Ю. А. Влияние вредителя на возрастную динамику леса: простейшие математические модели. В кн.: Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Л.: Гидрометеиздат, 1987. Т. 10. С. 284–300.
2. Антоновский М. Я., Кузнецов Ю. А., Флеминг Р. А. Реакция хвойного леса на вторжение вредителя: простейшая динамическая модель. В кн.: Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Л.: Гидрометеиздат, 1988. Т. 11. С. 160–168.
3. Дьяконов В. П. Maple 7. Учебный курс. СПб.: Питер, 2002. 666 с.

Алферов Г. В., Малафеев О. А., Мальцева А. С.
Санкт-Петербургский государственный университет

Процесс поиска и захвата объекта

1. Постановка задачи. В данной работе рассматривается следующая задача. Миноносец обнаружил перископ подводной лодки, которая тут же ушла по неизвестной траектории, имеющей проекцию вектора скорости на некоторую прямую, проходящую через точку засечки, постоянной. Цель миноносца: оказаться над подводной лодкой и выпустить робот, который, взяв схватом предмет с ее поверхности, доставит его на миноносец. Задача разбивается на три составляющих ее подзадачи. В первой задаче (на первом этапе процесса) миноносец осуществляет погоню за подводной лодкой, стремясь оказаться в точности на одной вертикали с ней. Скорость миноносца превышает скорость лодки в k раз. Необходимо определить траекторию, по которой должен двигаться миноносец, чтобы оказаться точно над подводной лодкой, если известно, что она уходит на полной скорости прямым курсом в неизвестном направлении. Как только миноносец оказывается над лодкой, он сбрасывает серию глубоководных бомб. Во время сброса бомб подводная лодка перемещается из данной точки в некоторую другую точку, которая принадлежит кругу радиуса R с центром в точке, где остановился миноносец, и остается неподвижной. Глубина, на которой остановилась подводная лодка, равна d . На втором этапе задачи миноносец отправляет на поиск лодки подводный робот, имеющий на схвате сканирующий прибор, позволяющий обнаруживать предмет внутри круга радиуса не больше r . Этот круг далее будем называть областью обнаружения. Необходимо определить траекторию, двигаясь по которой робот просматривает всю область. На третьем этапе роботу необходимо схватить предмет с поверхности подводной лодки и доставить его на миноносец. Требуется определить время, которое ему понадобится для решения этой задачи.

2. Этап погони. Начинаем исследование с первого этапа — этапа погони. Пусть для простоты известно, что подводная лодка после обнаружения уходит с постоянной скоростью V в неизвестном направлении. Первоначально миноносец находится на расстоянии D_0 от подводной лодки. Введем полярную систему координат ρ и φ так,

чтобы полюс, точка O , находился в точке обнаружения подводной лодки, а полярная ось проходила через точку, в которой находился миноносец. Скорость миноносца в k раз больше скорости лодки. Он должен двигаться так, чтобы быть на таком же расстоянии от полюса, что и лодка. Найдем это расстояние:

$$\frac{y}{V} = \frac{D_0 - y}{kV} \quad \text{или} \quad \frac{y}{V} = \frac{D_0 + y}{kV}.$$

Решая, находим

$$y = \frac{D_0}{k+1} \quad \text{или} \quad y = \frac{D_0}{k-1}.$$

Если подводная лодка движется не вдоль полярной оси r и миноносец не оказался с ней на одной вертикали, то миноносцу следует двигаться вокруг точки O . Найдем траекторию, по которой будет двигаться миноносец. Для начала разложим скорость миноносца на две составляющие: радиальную V_ρ и тангенциальную V_φ . Радиальная составляющая — скорость, с которой миноносец удаляется от полюса, т. е.

$$V_\rho = \frac{d\rho}{dt}.$$

Тангенциальная составляющая — это линейная скорость вращения относительно полюса, т. е.

$$V_\varphi = \rho \frac{d\varphi}{dt}.$$

Для того, чтобы встреча произошла, положим радиальную составляющую скорости миноносца равной скорости подводной лодки, т. е.

$$V_\rho = V.$$

Тогда

$$V_\varphi = \sqrt{(kV)^2 - V^2} = V\sqrt{k^2 - 1}.$$

Теперь можно свести решение задачи к решению системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = V, \\ \rho \frac{d\varphi}{dt} = V\sqrt{k^2 - 1}. \end{cases}$$

Сведем эту систему к одному уравнению

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\varphi}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Решая его, получим

$$\rho = Ce^{\frac{\varphi}{\sqrt{k^2 - 1}}}.$$

Из начальных условий $\rho = \frac{D_0}{k+1}$, $\varphi = 0$ и $\rho = \frac{D_0}{k-1}$, $\varphi = -\pi$ находим константу

$$C = \frac{D_0}{k+1}, \quad C = \frac{D_0}{k-1} e^{\frac{\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}}.$$

Таким образом, получили для миноносца следующую траекторию. Он должен пройти $\frac{D_0}{k+1}$ или $\frac{D_0}{k-1}$ миль прямым курсом по направлению к точке обнаружения лодки, а далее двигаться по спирали [1, 3]:

$$\rho = \frac{D_0}{k+1} e^{\frac{\varphi}{\sqrt{k^2 - 1}}} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{D_0}{k-1} e^{\frac{\varphi + \pi}{\sqrt{k^2 - 1}}}.$$

Предположим, что подводная лодка уходит прямым курсом по прямой b , угол между ней и полярной осью r равен α . Представим алгоритм нахождения приближенного времени погони. Сначала найдем время, которое миноносец будет идти прямым курсом:

$$t_0 = \frac{D_0}{(k+1)kV} \quad \text{или} \quad t_0 = \frac{D_0}{(k-1)kV}.$$

Теперь найдем время, которое миноносец потратит на прохождение по спирали до момента, когда он окажется над подводной лодкой. Движение миноносца по спирали — это равномерное движение вдоль луча с началом в точке O , в то время как сам луч равномерно вращается вокруг точки O . Обозначим этот луч через l . Разобьем временную ось на отрезки $t_0, t_0 + \Delta t, \dots$. За время Δt миноносец продвинется на расстояние $V\Delta t$ вдоль радиуса. За это время прямая l повернет на угол, равный

$$\frac{V_\varphi(t_0)}{\rho_{t_0}} = \dot{\alpha}_1 \Delta t = \Delta \alpha_1.$$

В момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$ радиус будет $\rho_1 = \rho_0 + V\Delta t$, а прямая l повернет на угол

$$\frac{V_\varphi(t_1)}{\rho_{t_1}} = \dot{\alpha}_2 \Delta t = \Delta \alpha_2.$$

И так продолжаем до момента, когда $\sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = \alpha$. Таким образом можно найти число n . Тогда приближенное время будет

$$t_0 + \sum_{i=1}^n i\Delta t = T.$$

3. Этап поиска. Когда миноносец пройдет прямо над подводной лодкой, он останавливается и сбрасывает серию подводных бомб, что заставляет лодку отплыть на некоторое расстояние и остановиться. Переходим ко второй подзадаче — этапу поиска неподвижной лодки [3–5]. Миноносец выпускает подводный робот, который должен найти неподвижную лодку в круге радиуса R с центром в точке, в которой остановился миноносец. У робота на свате имеется сканирующий прибор, позволяющий обнаруживать предмет внутри круга радиуса не больше r . Круг в дальнейшем будем называть информационной областью. Поиск будет считаться завершенным, когда подводная лодка попадет в информационную область [2]. Рассмотрим траекторию движения робота, изображенную на рис. 1.

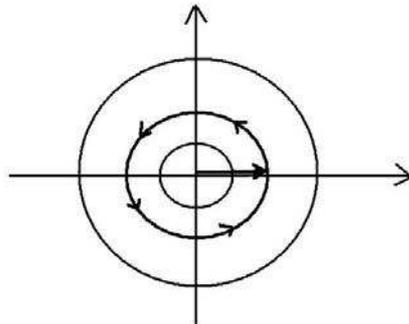


Рис. 1. Траектория движения робота

Сначала просматриваем область радиуса r . Если лодка не обнаружена, то робот сдвигается на расстояние $2r$ и проходит круг радиуса $2r$. Если лодка вновь не обнаружена, то робот снова сдвигается на расстояние $2r$ и проходит круг радиуса $4r$. Продолжаем таким

образом поиск до тех пор, пока лодка не будет найдена. Если при очередном сдвиге робота на расстояние $2r$ информационная область выйдет за пределы круга радиуса R , то уменьшаем эту информационную область до радиуса, равного $\frac{R-r\left[\frac{R}{r}\right]-r}{2}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа. Таким образом, получили кривую, проходя по которой робот полностью осмотрит круг радиуса R и найдет неподвижную подводную лодку. Длина этой траектории

$$\begin{aligned} L &= 2r + 2\pi(2r) + 2r + 2\pi(4r) + \dots + 2r + 2\pi\left(\left[\frac{R}{r}\right]r\right) + \frac{R-r\left[\frac{R}{r}\right]-r}{2} + \\ &\quad + 2\pi\left(\frac{R+r\left[\frac{R}{r}\right]-r}{2}\right) - r = \\ &= 3r\left[\frac{R}{r}\right] + r\left[\frac{R}{r}\right]^2 + \frac{R-r\left[\frac{R}{r}\right]-r}{2} + 2\pi\left(\frac{R+r\left[\frac{R}{r}\right]-r}{2}\right). \end{aligned}$$

Проходя по этой траектории, робот найдет координаты неподвижной лодки. Динамика робота задается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ x_1, u_1 &\in \mathbb{R}^2, \quad |u_1| \leq U_1, \\ x_2, u_2 &\in \mathbb{R}, \quad |u_2| \leq U_2. \end{aligned}$$

Координаты подводной лодки обозначим через $(y_0, 0)$. Необходимо схватить с поверхности подводной лодки нужный предмет, т. е. целью робота является выполнение условия

$$\begin{aligned} x(T) &= x^T, \\ x^T &= (x_1^T, x_2^T) = (y_0, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, робот должен погрузиться на величину d и пройти по дну расстояние, равное радиусу r . Предполагаем, что робот движется с максимальной скоростью. Получаем время приведения робота к подводной лодке

$$T = \frac{d}{U_2} + \frac{r}{U_1}.$$

4. Заключение. В рамках данной статьи рассмотрен процесс поиска и захвата объекта. Найдена траектория движения догоняющего, перемещение по которой гарантирует встречу с убегающим; представлен алгоритм поиска времени погони при условии, что известно направление движения убегающего; указана траектория поиска, движение по которой обеспечивает полный осмотр круговой области; найдено время, которое необходимо для захвата объекта.

Литература

1. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987. 160 с.
2. Аветисян В. В. Оптимальное и субоптимальное управление позиционированием механических систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Ереван, 2003.
3. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. 1006 с.
4. Малафеев О. А. Управляемые конфликтные системы. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 276 с.
5. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. СПб.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.

Алферов Г. В., Старева И. А., Шарлай А. С.
Санкт-Петербургский государственный университет

Лингвистическая геометрия в задачах робототехники и мехатроники

Проблема определений оптимальных траекторий робототехнических систем в среде с движущимися целями представляет большой интерес.

К настоящему времени существуют алгоритмы, реализующие те или иные подходы к ее решению, обладающие свойством глобальной сходимости, однако их программная реализация требует таких вычислительных ресурсов, которые недоступны современным компьютерам. Поиск оптимальных траекторий роботов требует нахождения подходящих ветвей в гигантском поисковом дереве.

Уменьшить размеры поисковых деревьев позволяет подход лингвистической геометрии, разработанной Б. Стилманом, который описал принципы редукции множества вычислений, вовлеченных в динамическое управление состояниями сложной системы переходов [1]. Рассмотрим некоторые особенности этого нового подхода к задачам робототехники.

Формальная теория, так называемая лингвистическая геометрия (ЛГ), включает в себя синтаксические инструменты для представления знаний и принятия решений в иерархических сложных системах. Эта теория формализует эвристический поиск, что позволяет разложить сложную систему на иерархию подсистем и, таким образом, решать трудноразрешимые задачи за счет уменьшения спектра поиска.

Б. Стилман предложил следующее определение сложной системы. Сложная система описывается восемью параметрами

$$\langle X, P, R_p, ON, v, S_i, S_t, TR \rangle,$$

где $X = \{x_i\}$ — конечное число точек, $P = \{p_i\}$ — конечное число элементов, множество P является объединением двух непересекающихся подмножеств P_1 и P_2 , $R_p(x, y)$ — множество бинарных отношений достижимости в X ($x, y \in X, p \in P$), $ON(p) = x$, где ON — парциальная функция размещения P в X , v — функция на множестве P , принимающая положительные целые значения, описываю-

щие значения элементов, величины S_i и S_t — описывают начальное и целевые состояния на языке исчисления предикатов первого порядка, которые соответствуют каждой реализации некоторых правильно построенных формул (ППФ), TR — набор операторов TRANSITION (p, x, y) . Эти операторы описывают переход системы из одного состояния в другое в виде двух списков ППФ (список удаления и список добавления) и ППФ применимости перехода. Здесь список удаления $ON(p) = x$, $ON(q) = y$, список добавлений $ON(p) = y$, список применимости $(ON(p) = x) \wedge R_p(x, y)$, где $p \in P_1$, а $q \in P_2$, или наоборот.

Переходы выполняются поочередно с участием элементов из P_1 и P_2 соответственно. Допускается пропуск хода. Обратим внимание на определение движения вдоль достижимых точек.

Элемент p может переместиться из точки x в точку y , если эта точка является достижимой, т. е. имеет место соотношение $R_p(x, y) = T$. Текущее положение каждого элемента описывается уравнением $ON(p) = x$. Таким образом, описание каждого состояния системы $\{ON(p_i) = x_k\}$ определяет положения элементов системы.

Оператор TRANSITION (p, x, y) описывает изменение состояния системы при перемещении элемента p из точки x в точку y . Элемент q должен быть удален, так как p и q принадлежат различным множествам P_1 и P_2 .

Проблема оптимального функционирования системы рассматривается как поиск оптимальной последовательности переходов из начального состояния S_i к одному из конечных S_t . Конечные состояния описываются с помощью функций состояний

$$m(S) = \sum v(p_i) - \sum v(q_j),$$

где $p_i \in P_1, q_j \in P_2$.

Робототехническая система может быть рассмотрена как сложная система. Первый шаг нового метода состоит в введении иерархической структуры системы. Используя подход ЛГ, новая многоуровневая система заменит первоначальную одноцелевую одноуровневую систему путем введения промежуточных целей и разбиения ее на подсистемы, которые стараются достичь этих целей. Цели поставлены индивидуально, но скоординированы с главной целью. В управлении роботами это означает выбор пары роботов и противоположных сторон: одного как преследователя, другого как убегающего, порождение локальных траекторий для достижения убегающего

и траекторий других роботов, поддерживающих преследователя или убегающего.

Следующим шагом являются внутренние иерархии формальных языков, которые представляют иерархию подсистем. Каждое предложение — группа слов или символов — из языка нижнего уровня соответствует слову в языке высокого уровня. Подсистема нижнего уровня представлена языком траекторий, в котором выражения есть траектории, обозначенные как строки параметрических символов

$$a(x_1)a(x_2)\dots a(x_n),$$

где параметры включают семантику некоторой проблемной области. Строки такого типа представляют траектории системных элементов. Для робототехнической модели x_k являются координатами планируемой траектории робота. Используя сложные системы, можно определить (в общем случае) и изучить формальные грамматики с целью нахождения кратчайших траекторий.

Можно установить следующую аналогию: кратчайшая траектория аналогична прямой линии, соединяющей две точки на плоскости; k — сегментная ломаная линия, соединяющая точки, называется допустимой траекторией степени k , т. е. траектория, состоящая из k кратчайших траекторий. В случае препятствия, элемент должен двигаться вокруг этого препятствия, прослеживая промежуточную точку в стороне и идя к ней и от нее по кратчайшим траекториям. В этом случае элемент должен двигаться по допустимой траектории степени 2.

Языком траекторий $L_t^H(S)$ для сложной системы в положении S называется множество кратчайших и допустимых (степени 2) траекторий с длиной меньшей, чем H . Различные свойства этого языка рассмотрены в работе [1].

Подсистема второго уровня представляется языком траекторных сетей, в котором выражение есть траектории сети, обозначенные как строки, составленные из параметрических символов

$$t(p_1, t_1, \tau_1)t(p_2, t_2, \tau_2)\dots t(p_k, t_k, \tau_k),$$

где p_j — элемент этой системы, t_j — целая траектория, τ_j — параметр специфической области задачи.

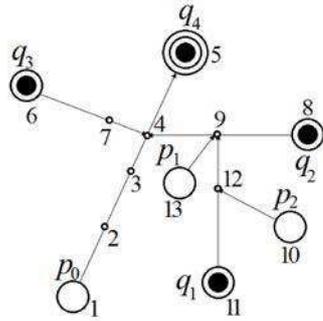


Рис. 1. Схема

Эти сети представляют собой каркас для динамического тактического планирования (см. рис. 1). Элементы системы движутся вдоль сетевых траекторий, пытаясь достичь локальных целей, одновременно продвигаясь к достижению стратегических целей всей системы.

Элемент p_0 перемещается вдоль главной траектории

$$a(1)a(2)a(3)a(4)a(5)$$

до достижения конечной точки 5 и удаления цели q_4 (как противоборствующего элемента).

Конечно, противоборствующие элементы будут пытаться мешать этому движению, контролируя промежуточные точки главной траектории.

Рассмотрим лингвистическую формализацию таких сетей. Язык траектории описывает «одномерные» объекты объединением символов в строку, употребляя отношение достижимости $R_p(x, y)$. Для описания сетей, т. е. «многомерных» объектов, составленных из траекторий, используется понятие соединения траекторий.

Соединение траекторий t_1 и t_2 обозначается $C(t_1, t_2)$. Оно определено, если конечное звено траектории t_1 совпадает с промежуточным узлом траектории t_2 . Более точно: t_1 соединено с t_2 , если среди значений параметров $P(t_2) = \{y, y_1, \dots, y_l\}$ траектории t_2 существуют значения $y_i = x_k$, где $t_1 = a(x_0 a(x_1) \dots a(x_k))$. Если t_1 принадлежит множеству траекторий с общей конечной точкой, тогда говорят, что все множество соединено с траекторией t_2 .

Например, на рис. 1 траектории $a(6)a(7)a(4)$ и $a(8)a(9)a(4)$ соединены с главной траекторией $a(1)a(2)a(3)a(4)a(5)$ в точке 4. Траектории $a(13)a(9)$ и $a(11)a(12)a(9)$ соединены с $a(8)a(9)a(4)$.

Для формализации сетей траекторий определим и будем использовать обычные операторы на множестве траекторий $C_A^k(t_1, t_2)$ — k -ая степень соединения, $C_A^+(t_1, t_2)$ — транзитивное замыкание.

Сеть траекторий относительно траектории t_0 есть конечное множество траекторий t_0, \dots, t_k из языка $L_t^H(S)$, которые обладают следующим свойством: для каждой траектории t_2 из W , $i = 1, \dots, k$,

отношение $C_W^+(t_i, t_0)$ определено, т. е. каждая траектория сети W соединяется с траекторией t_0 через подмножество соединенных между собой траекторий этой сети. Если отношение $C_W^m(t_i, t_0)$ определено, то траектория t_i называется траекторией m -го отрицания.

Очевидно, что траектории формируют сеть траекторий относительно главной траектории $a(1)a(2)a(3)a(4)a(5)$. Перейдем к определению языков сетей.

Семейство языков сетей траекторий $L_c(S)$ в положении S сложной системы есть семейство языков, которые состоят из строк в форме

$$t(t_1, \text{парам})t(t_2, \text{парам}) \dots t(t_m, \text{парам}),$$

где «парам» заменяет другие параметры частного языка. Все символы строки t_1, \dots, t_m соответствуют траекториям, которые формируют сеть траекторий W относительно t_1 .

Различные члены этого семейства соответствуют различным языкам сетей траекторий, которые описывают специфические подсистемы для решения задачи поиска.

Одним из таких языков является язык описания специфических сетей, называемых *зонами*.

Язык зон есть язык сетей траекторий со строками в форме

$$Z = t(p_0, t_0, \tau_0)t(p_1, t_1, \tau_1) \dots t(p_k, t_k, \tau_k),$$

где t_0, \dots, t_k траектории элементов p_0, \dots, p_k соответственно, τ_0, \dots, τ_k — неотрицательные целые числа, которые обозначают время, необходимое для движения вдоль траектории, в соответствии с обоюдными целями этой зоны: удалить целевой элемент для одной стороны и защитить его для противоположной. Траектория $t(p_0, t_0, \tau_0)$ называется *главной траекторией зоны*. Элемент q , находящийся в конечной точке главной траектории, называется целевым. Элементы p_0 и q_0 принадлежат противоположным сторонам.

Содержание зоны, соответствующей сети траекторий противоположных сторон робототехнической системы, представленной на рис. 1, имеет вид

$$Z = t(p_0, a(1)a(2)a(3)a(4)a(5), 4)t(q_3, a(6)a(7)a(4), 3)$$

$$t(q_2, a(8)a(9)a(4), 3)t(p_1, a(13)a(9), 1)$$

$$t(q_1, a(11)a(12)a(9), 2)t(p_2, a(10)a(12), 1).$$

Рассмотрим описание «динамики» системы, т. е. перехода из одного состояния в другое. Переходы описываются изменениями состояний как изменения наборов ППФ. После каждого перехода должна быть сгенерирована новая иерархия языков. Конечно, это неэффективная процедура. Чтобы повысить эффективность процесса поиска, важно описать изменение иерархии языков. Анализ этого изменения должен помочь в изменении иерархии, вместо того, чтобы восстанавливать ее в каждом состоянии. Изменение может быть описано как иерархия отображений — трансляция языков. Каждый язык должен быть преобразован специфическим отображением, называемым трансляцией.

Таким образом, в системной операции поисковый процесс порождает дерево переходов иерархии языков. Язык верхнего уровня является языком переходов. Он содержит все деревья переходов, представленные как строки параметрических символов. Каждая ветвь поискового дерева, т. е. каждый символ, представляет движение робота из одного положения к другому по сети траекторий. Выражения в языке переходов представляют поиски оптимальной (субоптимальной) операции, такой как оптимальный план задачи управления роботом. Порождения в этом языке управляются взаимодействием траекторных сетей. Это порождение сказывается в существенном уменьшении поискового дерева, которое и дает оптимальное решение задачи управления робототехническими системами.

Литература

1. Stilman B. Linguistic Geometry from search to construction. Kluwer Academic Publishers Boston, Dordrecht, London, 1999. 395 p.

Алцыбеев В. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование линейного ускорителя электронов с бипериодической ускоряющей структурой¹

Рекомендовано к публикации профессором Овсянниковым Д. А.

1. Введение. Ускорители с бипериодической ускоряющей структурой (БУС) [1, 2] представляют собой регулярную последовательность омега-образных и цилиндрических резонаторов, соединенных щелями связи (рис. 1). Подобный ускоритель так же может иметь нерегулярный группирователь, состоящий из нескольких цилиндрических резонаторов. Данные структуры рассчитаны на высокочастотный диапазон стоячих волн и позволяют создавать высокие напряженности электрического поля вблизи оси резонаторов. С помощью данной конфигурации при небольших габаритах возможно эффективно ускорять электроны.

Такие ускорители могут использоваться, например, в качестве медицинских установок или для управления ядерным реактором. Но во многих случаях применения встает задача управления пучком и оптимизации его динамики [3, 4]. Кроме того, для применения ускорителей в реальных задачах необходимо знать точный спектр пучка на выходе. Потому необходимо решать задачу моделирования динамики пучка с учетом реальной геометрии и электромагнитных полей.

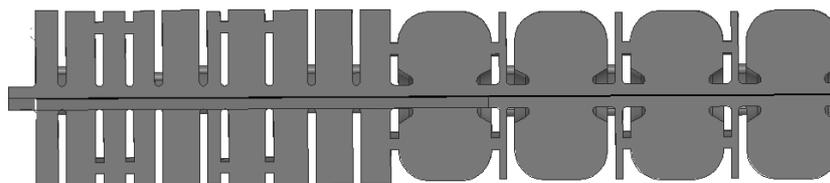


Рис. 1. Ускоритель с БУС

2. Описание структуры. Моделируемая ускоряющая структура состоит из десяти резонаторов группирователя и восемнадцати ре-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, тема 9.38.673.2013

гулярных ячеек. Группирователь и первые четыре регулярные ячейки приведены на рис. 1. Длина ускорителя 1,06 м, радиус апертуры 5 мм, энергия инжекции электронов 50 кэВ.

3. Расчет электромагнитных полей. Для первоначального расчета полей в ускоряющей структуре удобно рассмотреть резонансную задачу, не учитывающую влияние генератора.

Рассмотрим трехмерную область Ω , ограниченную поверхностью S . Вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} внутри этой области удовлетворяет уравнению

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{J}. \quad (1)$$

Здесь μ_r и ε_r — относительные магнитные и диэлектрические проницаемости соответственно, $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \omega/c$ — волновое число.

Уравнение (1) также должно быть дополнено граничными условиями, соответствующими решаемой задаче. В случае нахождения собственных колебаний в резонаторах ускорителя, граница решаемой области будет представлять собой идеально проводящую поверхность. Тогда

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_S = 0. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) было произведено с помощью конечно-элементного пакета ANSYS Multiphysics (Academic Research) [5–7] решателем High-Frequency Electromagnetic Field Simulation на сетке из тетраэдральных элементов HF119. Предполагая, что поле одинаково во всех регулярных ячейках, возможно рассчитать отдельно группирующую секцию ускорителя (700000 элементов в сетке) и две регулярных ячейки с резонатором связи между ними (400000 элементов в сетке), а затем объединить результаты расчета. Продольная компонента электрического поля на оси структуры и поперечная компонента на расстоянии 5 мм от оси в группирователе и первых четырех регулярных ячейках приведены на рис. 2.

4. Моделирование динамики пучка. Положим $\xi = z/\lambda$, $\eta = r/\lambda$, $\tau = ct/\lambda$. Здесь z — продольная координата, λ — длина волны, r — радиус, t — время. Тогда

$$\beta_\eta = \frac{d\eta}{d\tau}, \quad \beta_\xi = \frac{d\xi}{d\tau}, \quad p_\eta = \gamma\beta_\eta, \quad p_\xi = \gamma\beta_\xi.$$

Здесь β_η и β_ξ — приведенные поперечная и продольная скорости, γ — фактор Лоренца, p_η и p_ξ — приведенные поперечный и продольный

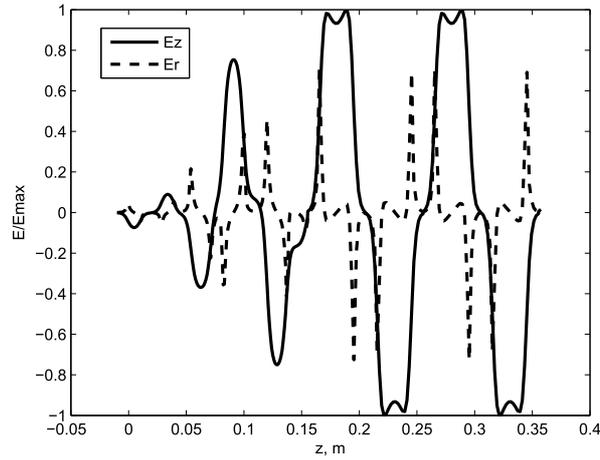


Рис. 2. Распределение E_z и E_r

импульсы. В соответствии с введенными обозначениями, получим следующую математическую модель

$$\begin{aligned} \frac{dp_\xi}{d\tau} &= -\frac{e\lambda}{m_0c^2} (E_z(\eta, \xi)\cos(2\pi\tau) + F_{int}), \\ \frac{dp_\eta}{d\tau} &= -\frac{e\lambda}{m_0c^2} \times \\ &\times \left(E_r(\eta, \xi)\cos(2\pi\tau) + c\frac{p_\xi B_x(\eta, \xi)}{\sqrt{1+p_\xi^2}}\sin(2\pi\tau) + \frac{I\lambda^2\eta\sqrt{1+p_\xi^2}}{2\pi cR^2\epsilon_0 p_\xi} \right), \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{p_\xi}{\sqrt{1+p_\xi^2}}, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{p_\eta}{\sqrt{1+p_\xi^2}}, \end{aligned}$$

где F_{int} — кулоновское взаимодействие частиц пучка (используется модель толстых дисков), I — ток пучка, R — радиус пучка.

Результаты моделирования динамики пучка при максимальной амплитуде напряженности на оси структуры 28 МВ/м и токе пучка 140 мА представлены на рис. 3, 4. Потери частиц составляют 16,5%.

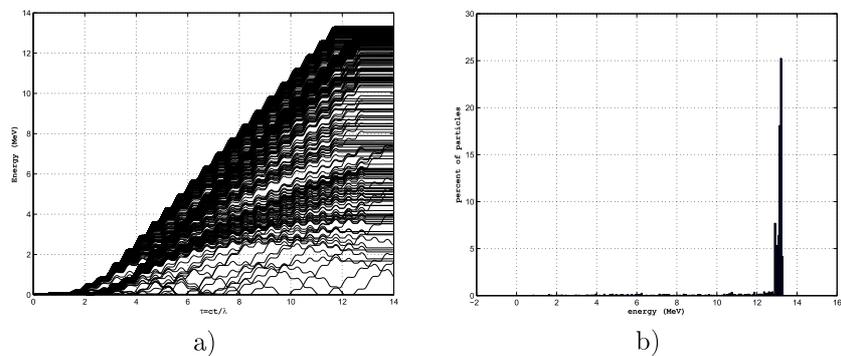


Рис. 3. Моделирование динамики пучка: а) энергетические траектории, б) энергетический спектр на выходе

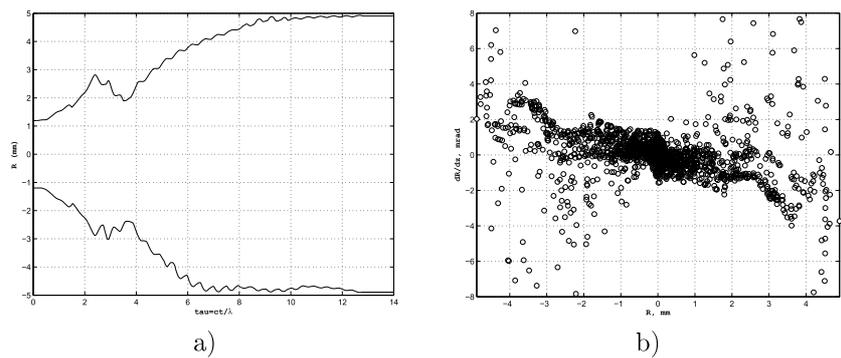


Рис. 4. Моделирование динамики пучка: а) огибающие радиальных траекторий, б) поперечный эмиттанс на выходе

5. Выводы. В работе решена задача моделирования динамики электронов в линейном ускорителе в реальных электромагнитных полях, однако не было учтено влияние тока пучка на внешнее поле, т. е. расчет проводился при так называемом «холостом ходе». Поэтому, полученные результаты достаточно точны для низких токов. Для интенсивных пучков необходимо производить учет нагрузки структуры для получения более корректных результатов, что показывает сравнение результатов моделирования с результатами, полученными при учете нагрузки током пучка в 140 мА в НИИЭФА им. Ефремова (рис. 5).

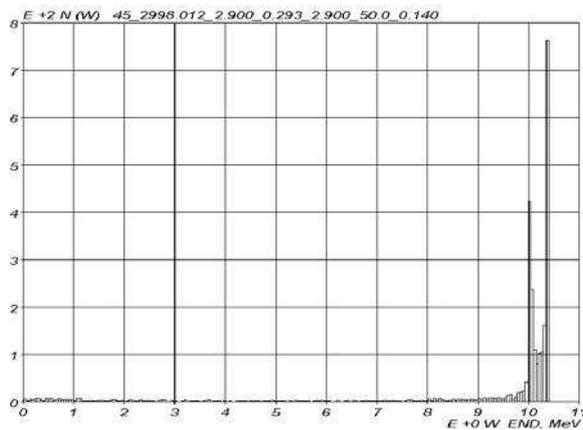


Рис. 5. Энергетический спектр

Литература

1. Завадцев А. А., Завадцев Д. А., Каминский В. И., и др. Комплексы для инспекции элементного состава грузов на основе линейных ускорителей электронов. М.: НИЯУ МИФИ, 2011. 148 с.
2. Алимов А. С., Ветров А. А., Ишханов Б. С., и др. Численное моделирование и экспериментальные исследования ускоряющей структуры с внутренними ячейками связи для двухстороннего разрезного микротрона непрерывного действия на энергию 1.5 ГэВ. <http://istina.imec.msu.ru/publications/article/3093177/>
3. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 312 с.
4. Овсянников А. Д. Управление программным и возмущенными движениями // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2006. Вып. 4. С. 111–124.
5. Theory Reference for Mechanical APDL and Mechanical Applications. ANSYS, Inc. November 2009. 1228 p.
6. Volakis J. L., Chatterjee A., Kempel L. C. Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications. IEEE Press. 1998. 344 p.
7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 341 с.

Алцыбеев В. В., Овсянников Д. А.
Санкт-Петербургский государственный университет

Об оптимизации структуры с фокусировкой ускоряющим полем¹

1. Введение. В настоящее время большое значение приобретают разработки в области построения ускорителей с фокусировкой ускоряющим полем [1–3]. Подобная фокусировка давно осуществляется в ускорителях с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой, однако переменнo-фазовая фокусировка (ПФФ) еще требует развития. В данной статье рассматривается задача оптимизации динамики пучка в ускорителе с ПФФ на основе принципов, изложенных в [4].

2. Постановка задачи. Пусть динамика пучка описывается следующей системой уравнений [5]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = F(t, x(t), y(t), u(t)), \quad (2)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \in \overline{M}_0.$$

Здесь x и y — скаляр и n -мерный вектор фазовых координат. $f(t, x(t), u(t))$ и $F(t, x(t), y(t), u(t))$ — скалярная и n -мерная функции. Управления $u(t)$ составляют класс D кусочно-непрерывных функций со значениями в U , M_0 — компакт ненулевой меры. Введем функционал

$$I(u) = \int_{M_{T,u}} g(y_T) dy_T, \quad (3)$$

характеризующий состояние пучка на выходе системы. Здесь $M_{T,u}$ — сечение пучка траекторий в момент времени T , т. е. $y_T = y(T) \in M_{T,u}$. Будем рассматривать задачу минимизации функционала (3) по всем допустимым управлениям.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, тема 9.38.673.2013

3. Модель динамики пучка. Для структуры с ПФФ системе (1), (2) соответствует модель [6, 7]

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_s}{d\tau} &= \frac{\alpha}{2\gamma_s} \cos(\varphi_s(\tau)), \\ \frac{dp}{d\tau} &= (\alpha/2)\beta_s(\cos(\varphi_s(\tau)) - \cos(\varphi_s(\tau) + \psi)), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{2\pi(1 - \beta_s^2)^{3/2}}{\beta_s^2} p,\end{aligned}$$

где $\psi = \varphi - \varphi_s$, $p = \gamma_s - \gamma$, $\varphi_s(\tau)$, β_s — приведенная скорость синхронной частицы, $\tau = ct/\lambda$, $\alpha = e\lambda E_{max}/(m_0 c^2)$ — параметр амплитуды ускоряющего поля, φ и φ_s — фазы частицы пучка и синхронной частицы, γ и γ_s — приведенные энергии частицы пучка и синхронной частицы, λ — длина волны ускоряющего поля. Здесь $\varphi_s(\tau)$ является кусочно-постоянной функцией управления такой, что $\varphi_s(\tau) = \varphi_s^{(i)}$, $\tau \in [\mu_{i-1}, \mu_i]$, $\mu_i - \mu_{i-1} = (\varphi_s^{(i)} - \varphi_s^{(i-1)} + \pi)/2\pi$. Таким образом, функция управления является параметризованной только по параметрам $\varphi_s^{(i)}$.

Также для рассмотрения поперечной динамики использовались уравнения

$$\frac{dr}{d\tau} = \eta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\alpha\pi(1 - \beta_s^2)^{3/2}}{2\beta_s} r \sin(\varphi_s(\tau) + \psi).$$

Здесь r — радиус частицы, η — расходимость радиуса.

4. Вариация функционала. Вариацию функционала (3) можно представить в виде

$$\delta I = - \int_0^T \int_{M_{t,u}} (\mu^T \Delta_u F + \nu^T \Delta_u f) dy_t dt, \quad (4)$$

где функции μ и ν удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\mu}{dt} = - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^T \mu, \quad \frac{d\nu}{dt} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \nu - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T \mu.$$

с конечными условиями

$$\mu(T, x(T)) = \left(\frac{\partial g(y_T)}{\partial y} \right)^T, \quad \nu(T, x(T)) = 0.$$

5. Численная оптимизация. На основе вариации (4) был построен алгоритм оптимизации по параметрам $\varphi_s^{(i)}$ и получены численные результаты. Параметры моделируемого ускорителя дейтронов следующие:

- начальная энергия 3,5 МэВ;
- энергия на выходе 14 МэВ;
- длина структуры 3,5 м;
- число ускоряющих периодов 110;
- амплитуда нарядженности на оси структуры 110 МВ/см.

Для оптимизации ускорителя использовался следующий функционал

$$I = \int_{M_{T,u}} F(\psi_T) d\psi_T dp_T,$$

где

$$F = \begin{cases} c(\psi_T - \psi_1)^2, & \text{если } \psi_T < \psi_1, \\ 0, & \text{если } \varphi_T \in [\psi_1, \psi_2], \\ c(\psi_T - \psi_2)^2, & \text{если } \psi_T > \psi_2. \end{cases}$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 — положительные константы, ψ_T и p_T — фазовые координаты пучка на выходе системы.

Начальные данные пучка изображены на рис. 1. Результаты работы алгоритма представлены на рис. 2–4. В итоге оптимизации потери частиц пучка удалось сократить с 19,3 % до 5,8 %.

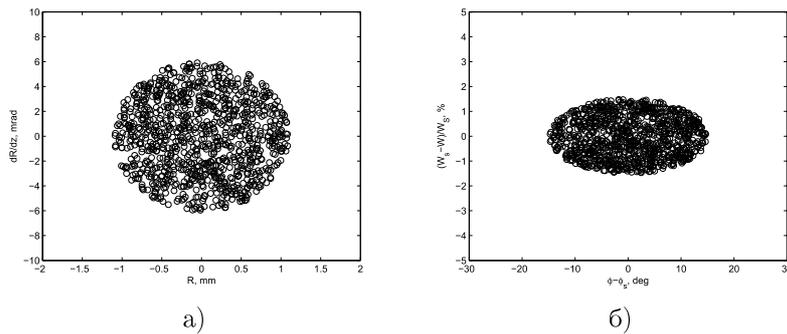


Рис. 1. Начальные данные: а) поперечный эмиттанс, б) продольный эмиттанс

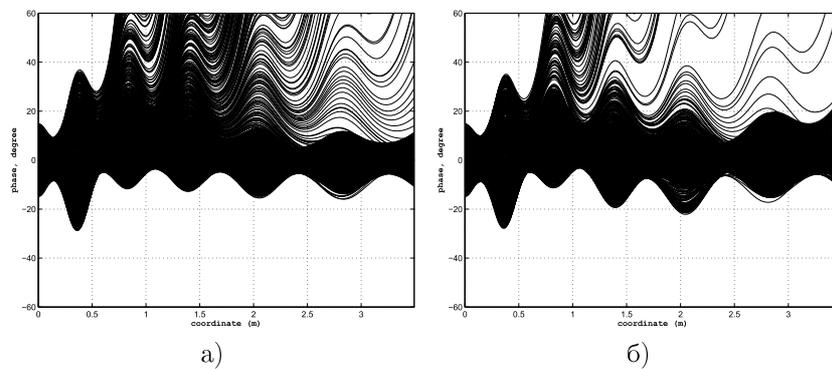


Рис. 2. Результаты расчета: а) фазовые колебания до оптимизации, б) фазовые колебания после оптимизации

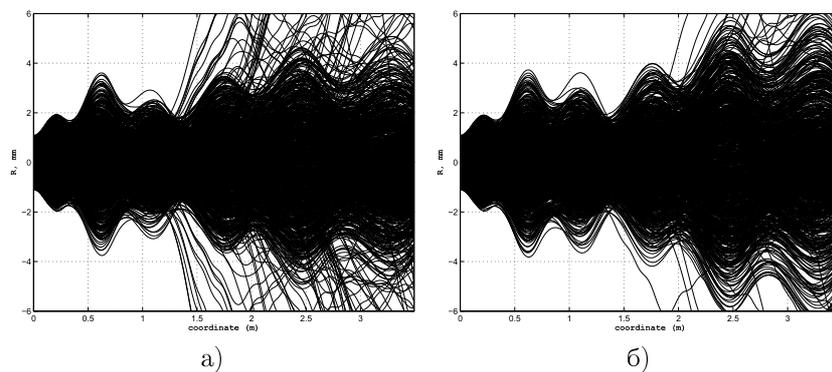


Рис. 3. Результаты расчета: а) радиальные траектории до оптимизации, б) радиальные траектории после оптимизации

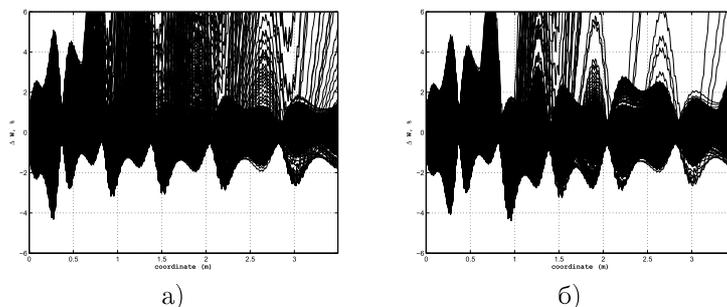


Рис. 4. Результаты расчета: а) энергетические колебания до оптимизации, б) энергетические колебания после оптимизации

6. Выводы. В работе предложена математическая модель оптимизации динамики пучка в ускорителе с переменнo-фазовой фокусировкой, приводится вариация функционала качества. Приведенный численный пример отражает работоспособность данного подхода. Однако расширение поперечного спектра пучка на выходе показывает необходимость рассмотрения совместной оптимизации поперечного и продольного движения в дальнейшем.

Литература

1. Kapin V., Yamada S., Iwata Y. Design of APhF-III Linac for a Compact Medical Accelerator // National Institute of Radiological Sciences, Japan, 2003. 37 p.
2. Kapin V.V., Nesterovich A.V. Feasibility of alternative phase focusing for a chain of short independently-phased resonators // Proceedings of RuPAC-2010, Protvino, Russia, 2010. P. 322–324.
3. Kushin V.V. On improving the phase-alternating focusing in linear accelerators // Nuclear Energy, 1970. Vol. 29, No 2, P. 123–124.
4. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 312 с.
5. Овсянников А. Д. Управление программным и возмущенными движениями // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2006. Вып. 4. С. 111–124.
6. Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей. М.: Атомиздат, 1966. 312 с.
7. Ovsyannikov A. D., Shirokolobov A. Y. Mathematical model of beam dynamic optimization intraveling wave // Proceedings of RuPAC-2012, Saint-Petersburg, Russia, 2012. P. 355–357.

Андреева Т. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Анализ гибридных потенциалов метода функционала электронной плотности

Рекомендовано к публикации доцентом Бедриной М. Е.

1. Постановка задачи. Теория межмолекулярных взаимодействий в настоящее время является широко развивающейся областью науки, с ней приходится сталкиваться не только при рассмотрении актов соударения инертных атомов, но и при изучении процессов взаимодействия сложных биологически активных молекул и макроскопических тел, при нахождении равновесной геометрии кристаллов и во многих других процессах. Расчеты потенциальных кривых даже в случае простейших систем представляют сложную задачу. Слабые ван-дер-ваальсовы взаимодействия очень чувствительны к выбору метода расчета в целом и, в частности, к выбору потенциала [1]. Выбранная нами в качестве исследования молекула цианобифенила и ее ассоциаты, являющиеся одним из характерных представителей органических молекул, способных к образованию жидких кристаллов, интересны с точки зрения процесса образования жидкокристаллической фазы. Квантово-механическое исследование этой задачи на атомно-молекулярном уровне с учетом всех типов межмолекулярных сил до сих пор не проводилось. Решение этой задачи требует применения сложных современных расчетных методов и больших затрат вычислительного ресурса. Нами были рассмотрены ассоциаты молекулы цианобифенила ЦБ5 (димеры, тримеры) и найдены комплексы с наиболее выигрышной структурой в вакууме с энергетической точки зрения [2, 3].

2. Математическая модель. Математическая модель процесса выбора потенциала с последующей оптимизацией структур строится с привлечением аппарата квантовой механики. Нами использовался подход, основанный на теории функционала плотности (DFT) [4]. В методах DFT ключевой физической величиной является электронная плотность ρ , которая есть функция координат всех электронов, составляющих систему. Полную энергию квантовой системы можно

представить в виде

$$E_{total} = T + E_{ne} + J + K + E_{nn}.$$

При использовании приближения Борна — Оппенгеймера энергия межъядерного отталкивания постоянна, $E_{nn} = const.$ Энергия притяжения электронов к ядрам E_{ne} и кулоновская энергия отталкивания электронов J могут быть выражены через электронную плотность точно так же, как в теории Хартри — Фока:

$$E_{ne}(\rho(r)) = - \sum_{\alpha}^N \sum_i^M \int \phi_i(r) \frac{Z_{\alpha}}{r} \phi_i(r) dr = - \sum_{\alpha}^N \int \frac{Z_{\alpha}}{r} \rho(r) dr,$$

$$\begin{aligned} J_{ij}(\rho(r)) &= \frac{1}{2} \iint |\phi_i(r)|^2 \frac{1}{|r_1 - r_2|} |\phi_j(r)|^2 dr_1 dr_2 = \\ &= \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(r_1)\rho(r_2)}{|r_1 - r_2|} dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Функционалы для кинетической (T) и обменной (K) энергий в ранних методах DFT рассматривали в приближении однородного электронного газа. Начало использованию DFT методов положило внедрение в расчетную схему орбиталей, предложенное Коном и Шапом. Их основная идея теории состоит в разделении функционала кинетической энергии на две части, первая вычисляется точно с использованием формально построенных орбиталей, отвечающих системе невзаимодействующих электронов T_S , вторая представляет собой поправочный член — коррекцию T_C :

$$T(\rho) = T_S(\rho) + T_C(\rho).$$

Коррекция к кинетической энергии T_C в методе Кона — Шама просто включается в обменный член K и, таким образом, полная электронная энергия в теории функционала плотности вычисляется в виде

$$E_{DFT}(\rho) = T_S(\rho) + E_{ne}(\rho) + J(\rho) + E_{XC}(\rho),$$

где T_S — кинетическая энергия, рассчитываемая с помощью детерминанта Слэтера (S), составленного из орбиталей Кона — Шама; E_{XC} — корреляционно-обменный функционал, причем обменный

член дает больший вклад. Различные DFT методы отличаются друг от друга только выбором формы $E_{XC}(\rho)$ функционала, наличием различных наборов подгоночных параметров. Разделим функционал E_{XC} на обменный E_X и корреляционный E_C :

$$E_{XC}(\rho) = E_X(\rho) + E_C(\rho) = \int \rho(r)\varepsilon_X(\rho(r))dr + \int \rho(r)\varepsilon_C(\rho(r))dr.$$

Существует несколько вариантов конкретного вида функционалов E_X и E_C . В наиболее популярном в настоящее время DFT методе используется корреляционный функционал Бекке, Ли, Янга и Парра — B3LYP.

$$E_{XC}^{B3LYP} = (1 - \alpha)E_X^{LSDA} + aE_X^{HF} + b\Delta E_X^{B88} + (1 - c)E_C^{VWN} + c\Delta E_C^{LYP},$$

где a , b и c — константы, которые были подобраны Бекке с использованием надежных экспериментальных данных для репрезентативного набора сравнительно простых химических соединений. В 2008 году в работе Труяра [5] был предложен гибридный потенциал, специально калиброванный таким образом, чтобы хорошо описывать слабые ван-дер-ваальсовы взаимодействия. Гибридный метафункционал M06 можно представить в виде следующей суммы:

$$E_X^{M06} = \sum_{\sigma} \int (F_{X\sigma}^{PBE}(\rho_{\sigma}, \nabla\rho_{\sigma})f(w_{\sigma}) + \varepsilon_{X\sigma}^{LSDA}h_X(\chi_{\sigma}, Z_{\sigma})) dr,$$

где $F_{X\sigma}^{PBE}(\rho_{\sigma}, \nabla\rho_{\sigma})$ является плотностью обменной энергии модели PBE , $\varepsilon_{X\sigma}^{LSDA}$ — приближение локальной спиновой плотности, $f(w_{\sigma})$ — фактор повышения спиновой кинетической плотности энергии. Гибридный обменно-корреляционный функционал энергии можно в общем записать в виде

$$E_{XC}^{hyb} = \frac{X}{100}E_X^{HF} + \left(1 + \frac{X}{100}\right)E_X^{DFT} + E_C^{DFT},$$

где E_X^{HF} — хартри-фоковская энергия обмена, X — процент хартри-фоковского взаимодействия в функционале, E_X^{DFT} — локальная DFT энергия обмена и E_C^{DFT} — локальная DFT энергия корреляции.

3. Результаты. Для наиболее энергетически выгодных структур, предварительно полученных нами с помощью полуэмпирического квантово-химического метода AM1, было проведено сравнительное исследование использования различных видов потенциалов метода DFT. Расчеты производились методами B3LYP и M06 в базе 6-31G с использованием программного пакета *Gaussian03*, *Gaussian09* на высокопроизводительном вычислительном комплексе факультета ПМ-ПУ (см. таблицу 1).

Таблица 1. Ассоциаты, рассчитанные методами B3LYP/6-31G, M06/6-31G

Название	Структура в B3LYP	Структура в M06
DimerI		
DimerII		
DimerIII		
TrimerI		

Применение функционала B3LYP и нового функционала M06 дает одинаковую картину образования димеров и тримеров, т. е. наиболее выгодными энергетически были те же конфигурации, которые

были получены нами ранее. При изучении процесса образования ассоциатов рассматриваются различные варианты задания начального положения молекул. Главная сложность заключается в существовании нескольких локальных минимумов энергии на потенциальной поверхности. Глобальному минимуму отвечает наименьшее значение полной энергии системы. Нахождение равновесной геометрии вычисляется методом наискорейшего спуска. Энергия связи отдельных молекул в комплексе вычисляется по формуле

$$\Delta E = E - (E_1 + E_2),$$

где E — энергия комплекса, E_1 , E_2 — энергии изолированных молекул (см. таблицу 2).

Таблица 2. Комплексы, рассчитанные методами ВЗЛур/6-31G и M06/6-31G

Название	ВЗЛур, Полная энергия E , (ат.ед.)	Энергия связи ΔE , (kcal/mol)	M06, Полная энергия E , (ат.ед.)	Энергия связи ΔE , (kcal/mol)
DimerI	-1503,892776	7,83	-1502,746122	8,75
DimerII	-1503,883715	7,82	-1502,746225	8,82
DimerIII	-1503,888359	5,06	-1502,748972	10,54
DimerIV	-1503,883715	2,15	-1502,736539	2,74
TrimerI	-2255,829866	5,92	-2254,124921	15,79

Однако, с точки зрения сходимости процесса оптимизации геометрии, метод ВЗЛур является более устойчивым. Он дает более низкие энергии комплекса. Характерный вид кривой сходимости димеров и тримеров представлен на рис. 1.

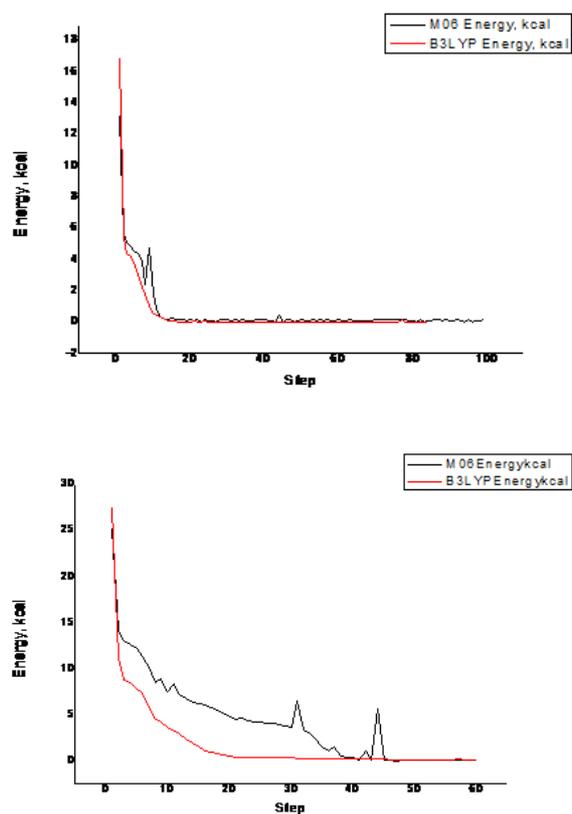


Рис. 1. Кривые сходимости для структур DimerI, TrimerI

Проверив результаты новыми теоретическими моделями функционалов, с которыми кроме авторов никто не работал, мы отдаем предпочтение методу B3LYP.

Литература

1. Bauman D. The study of the guest effect on the nematic phase stabilization // Molecular Crystals Liquid Crystals Incorporating Nonlinear Optics, 1988. Vol. 159. P. 197–217.

2. Андреева Т. А., Бедрина М. Е. Моделирование механизма взаимодействия молекул в жидкокристаллической фазе // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 483–487.
3. Бедрина М. Е., Глебовский Д. Н., Жучкова Т. В. Квантово-химическое исследование структуры межмолекулярных комплексов мезогенов ряда цианобифенила // Тезисы Международной конференции «Химия XXI век». СПб., 2009. С. 81.
4. Wolfram Koch, Max C. Holthausen. A chemist's guide to density functional theory. Second Edition. Germany, 2001. 306 с.
5. Yan Zhao, Donald G. Truhlar. The M06 suite of density functionals for main group thermochemistry, thermochemical kinetics, noncovalent interactions, excited states, and transition elements: two new functionals and systematic testing of four M06-class functionals and 12 other functionals. Theor. Chem. Account. USA, 2008. P. 215–241.

Андривский Д. С., Никифоров К. А
Санкт-Петербургский государственный университет

Алгоритмы эмиссии макрочастиц в методе частица-в-ячейке

1. Введение. В работе исследуются модели и алгоритмы инжекции электронного пучка в методе частица-в-ячейке с целью выбора наиболее подходящей модели для явления полевой электронной эмиссии.

Метод частица-в-ячейке (particle-in-cell) является одной из разновидностей метода макрочастиц и разработан Ф. Харлоу для расчета процессов с большими изменениями исходной области интегрирования, при которых применение других численных методов наталкивается на ряд серьезных проблем [1].

При решении задач электродинамики, связанных с моделированием эмиссионных устройств, важным является выбор модели эмиссии, по которой макрочастицы инжектируются с поверхности эмиттера в расчетную область. В работе рассмотрены три модели эмиссии: инжекция по закону Фаулера — Нордгейма, по закону Гаусса и по закону постоянной плотности тока.

2. Уравнения физической модели. Поскольку каждый из рассматриваемых алгоритмов инжекции макрочастиц в вычислительную область подразумевает собственную физическую модель, то для их сопоставления будем рассматривать задачу, физические условия в которой объединяют эти модели.

Модель эмиссии по закону Гаусса соответствует прохождению электрического тока в режиме ограничения пространственным зарядом. В этом режиме электростатические силы в пучке эмитированных заряженных частиц становятся достаточными для замедления и отражения новых частиц после их эмиссии. Эмиттер, функционирующий в этом режиме, неэффективен из-за больших энергетических затрат, так как значительная часть пучка может отражаться обратно к эмиттеру. Величина пропускаемого тока в этом режиме зависит от конфигурации электродов устройства. Выберем эту конфигурацию в виде бесконечного цилиндрического диода с электродами в форме коаксиальных цилиндров. Область эмиссии конечна и расположена на внутреннем цилиндре-катоде (рис. 1). Между катодом и анодом

прикладывается напряжение, ускоряющее эмитированные электроны. Подобную конфигурацию имеют многие эмиссионные устройства, например, катодолуминесцентные источники света, ультрафиолетового излучения, рентгеновские трубки и т. п.

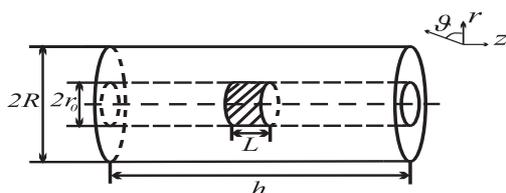


Рис. 1. Схематическое изображение цилиндрического диода. Область эмиссии заштрихована

По закону Гаусса в вычислительную область инжектируется ровно столько частиц, чтобы нормальная составляющая напряженности электрического поля вблизи поверхности эмиттера была равна нулю.

Закон Фаулера — Нордгейма задает плотность тока эмиссии в одномерном приближении [2]

$$j(E) = \frac{AE^2}{\varphi t^2(y)} \exp\left(-B \frac{\varphi^{3/2}}{E} \nu(y)\right). \quad (1)$$

Здесь j — плотность тока эмиссии, A и B — постоянные, связанные с фундаментальными физическими величинами, $A = e^3/(8\pi h)$, $B = 8\pi\sqrt{2m}/(3eh)$, h — постоянная Планка, e — заряд электрона, m — масса покоя свободного электрона, $t(y)$, $\nu(y)$ — эллиптические функции Нордгейма аргумента $y = \sqrt{e^3 E/(4\pi\epsilon_0 \varphi^2)}$, для которых используются аппроксимации $t^2(y) \approx 1,11619$, $\nu(y) \approx 0,95 - y^2$, ϵ_0 — электрическая постоянная, E — величина напряженности внешнего электрического поля, φ — работа выхода материала, являющаяся мерой энергии связи электронов с твердым телом.

При построении модели сделаны упрощающие предположения: аксиальная симметрия процессов и квазиэлектростатическое приближение. Динамика эмитированных электронов описывается системой классических уравнений движения в цилиндрических координатах. Собственное поле пучка описывается уравнением Пуассона для

скалярного электростатического потенциала Φ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_i, \quad (2)$$

где ρ_i — плотность заряда пучка на i -ой итерации метода частица-в-ячейке.

На начальной итерации плотность заряда пучка задается как $\rho_0 = 0$, что соответствует отсутствию пучка в пространстве диода.

Граничные условия для потенциала задаются, исходя из условий идеальной проводимости поверхности цилиндров $r = r_0$, $r = R$ и условия линейности радиального распределения потенциала на торцевых границах $z = \pm h/2$ (предполагается что они значительно удалены от пучка и не испытывают его воздействие, моделируя условие при $z \rightarrow \pm\infty$):

$$\Phi|_{r=r_0} = 0, \quad \Phi|_{r=R} = V, \quad \Phi|_{z=\pm h/2} = V \frac{r - r_0}{R - r_0}. \quad (3)$$

3. Результаты моделирования.

Для решения задачи (2), (3) применялся метод частица-в-ячейке с программной реализацией в коде ХООРІС [3].

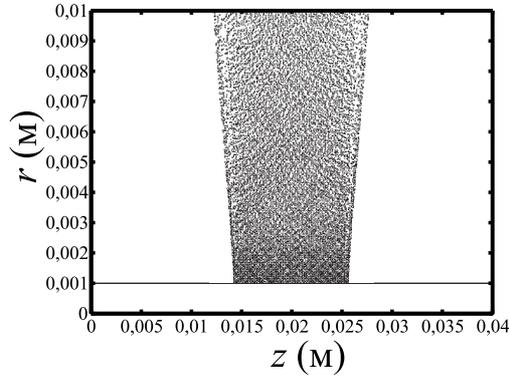


Рис. 2. Пучок макрочастиц в межэлектродном пространстве диода. Инжекция с постоянной плотностью тока

Пространственная сетка имела ячейки размером 0,2 мм в осевом направлении и 0,1 мм в радиальном направлении. Величина шага по времени составляла 10^{-12} с. Размер вычислительной области задавался значениями $r = 0,1$ см, $R = 1$ см, $h = 4$ см; $L = 1$ см. Потенциал на катоде — 0 В, на аноде — от 3 кВ. Для величины h выбрано минимальное значение, начиная с которого ее вариация практически не влияет на результаты моделирования. Поскольку задача имеет аксиальную симметрию, форма макрочастиц принимается в виде нитей (рис. 2).

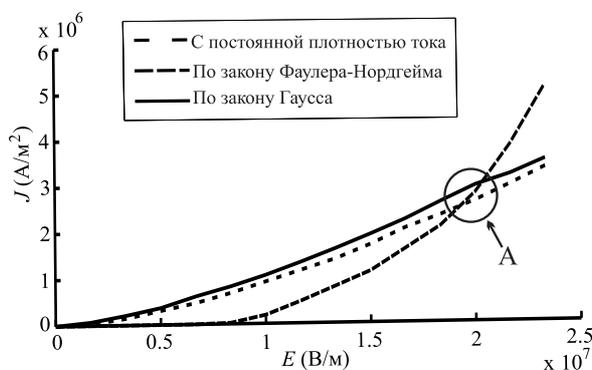


Рис. 3. Средние плотности тока эмиссии по закону Фаулера — Нордгейма, закону Гаусса и закону постоянного значения в зависимости от приложенного поля. Область А выбрана для сопоставления этих моделей

С целью моделирования режима ограничения пространственным зарядом для эмиссии с постоянной плотностью тока использовался так называемый метод избыточной инжекции [4]. Метод состоит в серии численных экспериментов при возрастающих значениях постоянной плотности тока эмиссии. Когда инжектированный ток начинает превышать величину тока, ограниченного пространственным зарядом (характеристика данного устройства), появляются электроны, возвращающиеся обратно к катоду под действием электростатических сил отталкивания со стороны объемного заряда. Максимальный инжектированный ток, при котором нет отраженных электронов, принимается за величину тока, ограниченного пространствен-

ным зарядом. Далее данная величина тока инжектировалась по трем моделям и сопоставлялись результаты. На рис. 3 изображена зависимость средней плотности тока эмиссии от напряженности приложенного электрического поля для различных моделей и показана область А, выбранная для сопоставления результатов.

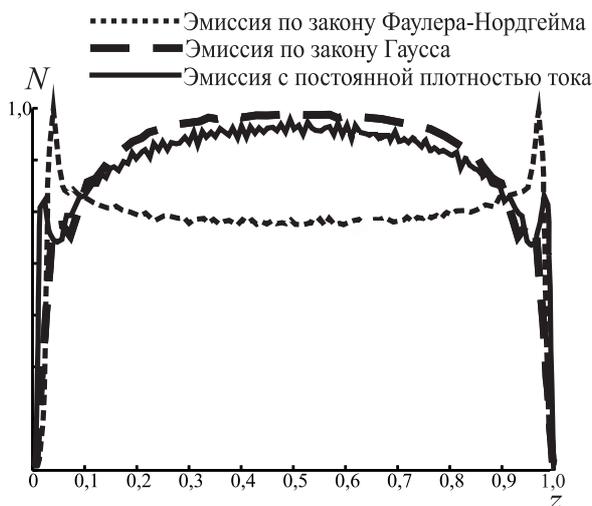


Рис. 4. Осевое распределение макрочастиц на аноде. Значения по осям нормированы

В качестве характеристики для сопоставления выбрано осевое распределение макрочастиц на поверхности анода, связанное с распределениями плотности заряда в пучке и плотности тока эмиссии. Из рис. 4 видно, что эти распределения имеют трапецевидную форму с закругленными углами. Это объясняется тем, что пучок с ограниченной областью эмиссии расширяется в направлении оси системы благодаря воздействию пространственного заряда, поэтому распределение плотности тока вдоль оси не равномерно. Для случая постоянной плотности тока эмиссии этот результат качественно совпадает с результатами [4].

В случае эмиссии по закону Фаулера — Нордгейма плотность инжектированного тока на катоде имеет максимумы у краев эмитте-

ра, так как в центре эмиттера «вытягивающее» электроны поле в большей степени экранировано объемным зарядом пучка. Поэтому кривая осевого распределения макрочастиц в прианодной области пучка имеет противоположную выпуклость, нежели в двух других случаях.

Результаты моделирования эмиссии по закону Гаусса и с постоянной плотностью тока практически совпадают как по величине средней плотности тока инжекции (рис. 3), так и по осевому распределению частиц в пучке (рис. 4).

4. Заключение. Модели эмиссии по закону Гаусса и по закону постоянной плотности тока дают схожие результаты в режиме ограничения пропускаемого тока пространственным зарядом пучка. Модель эмиссии по закону Фаулера — Нордгейма существенно отличается от них как по средней плотности инжектированного тока, так и по осевому распределению макрочастиц в пучке. По результатам моделирования можно сделать вывод, что эта модель в большей степени подходит для описания явления полевой электронной эмиссии.

Литература

1. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.
2. Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронная эмиссия. Принципы и приборы. М.: Интеллект, 2011. 528 с.
3. Verboncoeur J. P., Langdon A. B., Gladd N. T. An object-oriented electromagnetic PIC code // Comput. Phys. Commun. 87, 1995. P. 199–211.
4. Kostov K. G., Barroso J. J. Space-charge-limited current in cylindrical diodes with finite-length emitter // Phys. Plasmas 9, 2002. P. 1039–1042.

Башканкова Е. А., Греков М. А.
Санкт-Петербургский государственный университет

Метод возмущений в задаче об упругой плоскости с эллиптическим отверстием¹

Введение. Среди всевозможных концентраторов напряжений существуют, пожалуй, только два — круговое и эллиптическое отверстия, для которых найдены точные аналитические решения задачи теории упругости, если размеры отверстий малы по сравнению с расстояниями от них до внешней границы [1, 2]. В общем случае произвольной формы отверстия решение соответствующей задачи может быть найдено только численным методом. Однако в случае, если форма отверстия мало отличается от круговой, то к нему можно применить приближенный аналитический метод, который называется методом возмущений. В данной работе этот метод применяется к эллиптическому отверстию, близкому по форме к круговому и расположенному в бесконечной плоскости, с целью сравнения приближенного решения с точным и определения погрешности метода возмущений.

Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу линейной теории упругости для области с отверстием. Считаем, что отверстие имеет форму эллипса (рис. 1), который мало отличается от круга единичного радиуса и в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2 имеет следующее параметрическое представление:

$$x_1 = (1 + \varepsilon) \cos \varphi, \quad x_2 = (1 + k\varepsilon) \sin \varphi. \quad (1)$$

Здесь ε — малый параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$, $|k| < 1$, φ — полярный угол.

Считаем, что граница отверстия Γ свободна от внешних усилий

$$\sigma_{nn} + i\sigma_{nt} = 0, \quad (2)$$

где σ_{nn}, σ_{nt} — нормальные и касательные усилия, действующие на площадке с нормалью \mathbf{n} , которая в соотношении (2) совпадает с нормалью к границе, i — мнимая единица.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00230, и Санкт-Петербургского университета, НИР № 9.37.129.2011

На бесконечности заданы напряжения σ_{ij} в системе координат x_1, x_2 и угол поворота ω

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{ij} = s_{ij}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \omega = 0.$$

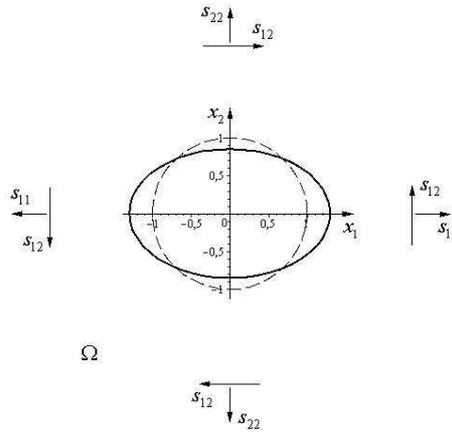


Рис. 1. Плоскость с эллиптическим отверстием ($\varepsilon = 0,3, k = -0,5$) под действием напряжений на бесконечности

Основные соотношения. Введя комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$, уравнение границы (1) перепишем в виде

$$z = \zeta = s(1 + \varepsilon f(s)), \quad s = e^{i\varphi}, \quad (3)$$

где

$$f(s) = \frac{1}{2}(1 + k + (1 - k)s^{-2}).$$

Согласно [3] напряжения и перемещения определяются через две функции Φ, Ψ , голоморфные в области Ω вне отверстия, равенством

$$G(z) = \eta\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]e^{-2i\alpha}, \quad (4)$$

где $G(z) = \sigma_n(z)$ при $\eta = 1$ и $G(z) = -2\mu du/dz$ при $\eta = -\varkappa$; $\sigma_n = \sigma_{nm} + i\sigma_{nt}$, $u = u_1 + iu_2$, u_1, u_2 — компоненты вектора перемещений соответственно вдоль осей x_1, x_2 ; α — угол между осью

t и осью x_1 , отсчитываемый от оси x_1 против часовой стрелки; $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ при плоском напряженном состоянии, $\varkappa = 3 - 4\nu$ при плоской деформации; ν — коэффициент Пуассона; μ — модуль сдвига; черта сверху означает комплексное сопряжение, штрих — производную по аргументу.

Поведение функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ на бесконечности определяется соотношениями $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = D_1$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \Psi(z) = D_2$, где

$$D_1 = (\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty)/4, \quad D_2 = (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty)/2.$$

Далее, следуя [1], введем функцию $\Upsilon(z)$, голоморфную в конечной области $D = \{z : \bar{z}^{-1} \in \Omega\}$ с границей $\hat{\Gamma}$:

$$\Upsilon(z) = -\overline{\Phi(\bar{z}^{-1})} + z^{-1}\overline{\Phi'(\bar{z}^{-1})} + z^{-2}\overline{\Psi(\bar{z}^{-1})}, \quad (5)$$

Выразив функцию $\Psi(z)$ из (5) и подставив в (4), приходим при $z \in \Omega$ к следующему выражению

$$\sigma_n = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \left[\frac{1}{\bar{z}^2} \left(\overline{\Phi(z)} + \Upsilon\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \right) + \left(z - \frac{1}{\bar{z}} \right) \overline{\Phi'(z)} \right] e^{-2i\alpha}. \quad (6)$$

Переходя в (6) к пределу при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_n(\zeta) = & \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \\ & + \left[\frac{1}{\bar{\zeta}^2} \left(\overline{\Phi(\zeta)} + \Upsilon\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \right) + \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \overline{\Phi'(\zeta)} \right] e^{-2i\alpha}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\Phi(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Phi(z)$ при $z \in \Omega$ и $\Upsilon(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Upsilon(z)$ при $z \in D$.

Примем $\alpha = \alpha_0$ в (7), где α_0 — угол наклона касательной к границе Γ . Так как $e^{i\alpha_0} = d\zeta/|d\zeta|$, то с учетом (3) имеем $d\zeta = is(1 + \delta(s) + s\delta'(s))$, где $\delta(s) = \varepsilon f(s)$. В этом случае на основании (2) соотношение (7) превращается в граничное условие, которому должны удовлетворять функции $\Phi(z)$, $\Upsilon(z)$:

$$\begin{aligned} 0 = & \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \\ & - \frac{1}{s^2} \left[\frac{1}{\bar{\zeta}^2} \left(\overline{\Phi(\zeta)} + \Upsilon\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \right) + \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \overline{\Phi'(\zeta)} \right] \frac{1 + \bar{\delta} + \bar{s}\bar{\delta}'}{1 + \delta + s\delta'}. \quad (8) \end{aligned}$$

В уравнении (8) $\zeta \in \Gamma$, а $\bar{\zeta}^{-1} \in \hat{\Gamma}$, причем $\Gamma = \hat{\Gamma}$ только при $\varepsilon = 0$, т. е. в случае кругового отверстия. В общем случае при

$0 < \varepsilon \ll 1$ кривые Γ и $\widehat{\Gamma}$ представляют собой малое возмущение единичной окружности. В связи с этим для нахождения функций $\Phi(z)$, $\Upsilon(z)$ и решения задачи в целом можно применить метод возмущений (см., например, [4]), который сводится к разложению искомых функций по степеням малого параметра ε

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_n(z), \quad \Upsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Upsilon_n(z). \quad (9)$$

Устремим в первом равенстве (9) $z \rightarrow \zeta$ при $z \in \Omega$, а во втором $z \rightarrow 1/\bar{\zeta}$ при $z \in D$. Разлагая затем граничные значения соответствующих коэффициентов в ряды Тейлора, приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(s)s)^k}{k!} \Phi_n^{(k)}(s), \\ \Upsilon\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(\bar{s})\bar{s})^k}{k!} \frac{d^k}{d\bar{s}^k} \Upsilon_n\left(\frac{1}{\bar{s}}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Будем считать, что $|\delta + s\delta'| < 1$. Тогда при учете $|\delta| \ll 1$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} \frac{1 + \bar{\delta} + \bar{s}\bar{\delta}'}{1 + \delta + s\delta'} &= (1 + \bar{\delta} + \bar{s}\bar{\delta}') \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\delta + s\delta')^j, \\ \zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}} &= s \left(\delta - \sum_{k=1}^{\infty} (-\bar{\delta})^k \right), \quad \frac{1}{\bar{\zeta}^2} = s^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-\bar{\delta})^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим (10) и (11) в (8). Собирая затем в полученном равенстве коэффициенты при ε^n , $n = 0, 1, \dots$, приходим для каждого приближения к краевой задаче Римана — Гильберта о скачке функции $F_n(z)$, голоморфной вне единичной окружности $|z| = 1$

$$F_n^+(s) - F_n^-(s) = q_n(s), \quad |s| = 1. \quad (12)$$

Здесь $F_n^{\pm} = \lim_{|z| \rightarrow 1 \mp 0} F_n(z)$, q_n — известные функции, зависящие при $n > 0$ от всех предыдущих приближений, а функция

$$F_n(z) = \begin{cases} \Phi_n(z), & |z| > 1, \\ \Upsilon_n(z), & |z| < 1. \end{cases} \quad (13)$$

Согласно Мусхелишвили [1] решение задачи (12) имеет вид

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{q_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + R_n(z), \quad (14)$$

где $R_0 = D_1 + \overline{D_2}z^{-2}$, $R_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Решение в первом приближении. В нулевом и первом приближениях функции q_n в (12), (14) равны

$$\begin{aligned} q_0(s) &= 0, \\ q_1(s) &= \left[f(s) + \overline{f(s)} + sf'(s) - \overline{s}f'(\overline{s}) \right] \left(\overline{\Phi_0(s)} + \Upsilon_0(s) \right) + \\ &+ sf(s)\Phi'_0(s) - \overline{s}f(\overline{s}) \frac{d\Upsilon_0(\overline{s}^{-1})}{d\overline{s}} - \overline{s} \left(f(s) + \overline{f(s)} \right) \overline{\Phi'_0(s)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13)–(15) следует, что комплексные потенциалы в нулевом приближении имеют вид

$$\Upsilon_0(z) = \Phi_0(z) = D_1 + \overline{D_2}z^{-2}. \quad (16)$$

Потенциалы (16) отвечают решению соответствующей краевой задачи для кругового отверстия единичного радиуса. Подставим q_1 в (14). Тогда, используя свойства интегралов типа Коши, получим

$$\Phi_1(z) = 3k_2\overline{D_2}z^{-4} + 2(k_1\overline{D_2} + k_2D_1)z^{-2},$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(z) &= 5k_2D_2z^4 + 6(k_2D_1 + k_1D_2)z^2 + \\ &+ 4k_1D_1 + k_2D_2 + k_2\overline{D_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $k_1 = (1+k)/2$, $k_2 = (1-k)/2$.

Найдем в первом приближении выражение для окружных напряжений σ_{tt} на границе отверстия. Для этого в (7) положим $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$. Тогда правая часть соотношения (7) равна $\sigma_{tt} - i\sigma_{nt}$. Учитывая разложения (10), (11), а также соотношения (16), (17), находим

$$\begin{aligned} \sigma_{tt} &= 4D_1 + D_2s^2 + \overline{D_2}s^{-2} + \\ &+ \varepsilon(1-k) \left[D_2s^4 + 2D_1(s^2 + s^{-2}) + \overline{D_2}s^{-4} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Численные результаты и выводы. Наибольший практический интерес представляет $\max \sigma_{tt}$, которое достигается при одноосном растяжении перпендикулярно большой оси эллипса в точках пересечения этой оси с границей [2], т. е. при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

Для сравнения в таблице приведены точные (K^c) и приближенные (K^a) значения коэффициентов концентрации напряжений, вычисленные в случае одноосного растяжения ($s_{22} > 0, s_{11} = s_{12} = 0$) соответственно по формуле $K^c = 1 + 2(1 + \varepsilon)/(1 + k\varepsilon)$ [2] и формуле $K^a = \max \sigma_{tt}/s_{22}$, в которой значения $\max \sigma_{tt}$ найдены по формуле (18) при $\varphi = 0$.

Таблица. Точные (K^c) и приближенные (K^a) значения коэффициентов концентрации напряжений при различных значениях параметров эллипса ε и k

ε	0,1	0,3	0,5	0,1	0,3	0,5	0,1	0,3	0,5
k		-0,5			0			0,5	
K^c	3,32	4,06	5,00	3,20	3,60	4,00	3,095	3,26	3,40
K^a	3,30	3,90	4,50	3,20	3,60	4,00	3,100	3,30	3,50

Из таблицы видно, что в случае $\varepsilon = 0,5, k = -0,5$ разница между приближенным решением и точным составляет примерно 10%. В остальных случаях оба решения практически совпадают. Анализ изменений σ_{tt} вдоль контура отверстия показал, что наибольшее расхождение приближенных и точных значений этих напряжений наблюдается в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

Литература

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Черных К. Ф. и др. Введение в механику сплошных сред. Л.: ЛГУ, 1984. 280 с.
3. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 192 с.
4. Греков М. А. Метод возмущений в задаче о деформации композита со слабо искривленной границей раздела // Вестн. СПбГУ. Сер. 1, 2004. Вып. 1. С. 81–88.

Бедрина М. Е., Трофимов В. В.
Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование голографических изображений в Gaussian

1. Введение. В конце 80-х годов Финк и др. [1] и несколько позже Н. В. Егоров и др. [2] продемонстрировали новый тип электронного безлинзового микроскопа с точечным источником электронов низкой энергии, способный к атомному разрешению структуры исследуемого объекта (рис. 1). Точечным источником для ко-

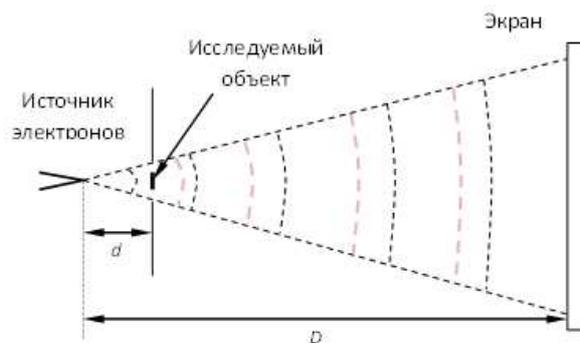


Рис. 1. Принципиальная схема установки

герентного электронного пучка служит сверхтонкое металлическое острие из вольфрама. Электроны, ускоренные до энергий порядка $20 \div 200$ эВ, рассеиваются атомами образца, расположенного на расстоянии $0,1 \div 1$ мкм. На экране, расположенном на расстоянии порядка 10 см формируется голографическое изображение, увеличение которого пропорционально отношению расстояний от источника до объекта и от объекта до экрана. Для атомарного разрешения необходимо, чтобы это отношение было примерно 10^5 . Небольшая часть электронного пучка взаимодействует с объектом, а остальная часть проходит сквозь образец без изменения в виде нерассеянной электронной волны. Наложение этих двух волн дает типичную голографическую картину (рис. 2).

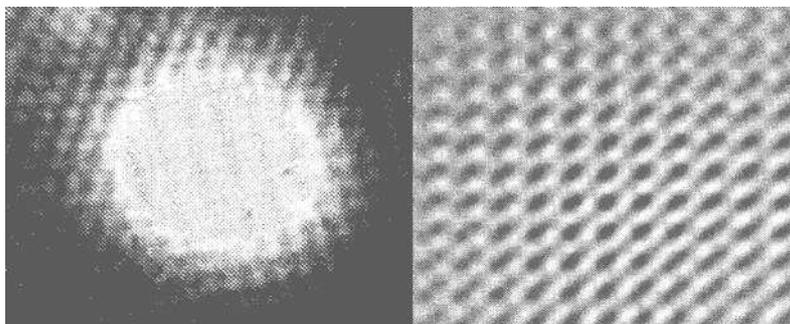


Рис. 2. Типичное голографическое изображение для пленки золота [3]

Такая картина содержит полную информацию о трехмерной структуре исследуемого образца, но при этом данная картина является плоской. Для получения реального изображения требуется сложное математическое преобразование с целью восстановления трехмерной структуры объекта, пример такой численной реконструкции для осевой голографии приведен в работах [4, 5]. В данной статье освещается возможность прямого моделирования голографического изображения по заранее известной структуре объекта исследования.

2. Модель рассеяния электронного пучка. В микроскопе точечный источник электронов эмиттирует сферически симметричную волну на сравнительно большие расстояния от него. Периодические структуры, облученные такой сферической волной, создают Фурье-изображение. Сферическая волна имеет вид

$$\psi^{in}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi^{in} \rangle = \frac{1}{r} \exp(ikr) \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} (-i)^l Y_l^m \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \right],$$

где ψ^{in} — волновая функция падающей волны, \vec{r} — радиус вектор точки объекта от источника волны, r — модуль вектора \vec{r} , k — волновое число, Y_l^m — сферическая гармоника степени l и порядка m , c_{lm} — коэффициенты Клебша — Гордона, i — мнимая единица. Попадая на исследуемый объект, эта сферическая электронная волна взаимодействует с атомами данной структуры. При этом логично предполагать, что рассеивание данной волны будет происходить на

электронах образца. Таким образом, если найти распределение электронной плотности в срезе объекта исследования, перпендикулярном фронту данной волны, то получится дифракционное изображение, которое является результатом этого взаимодействия. Для отыскания распределения электронной плотности надо иметь представление о волновой функции состояния системы, т. е. необходимо решить уравнение Шрёдингера для той структуры, которая выбирается в качестве исследуемого объекта. Наиболее вероятными объектами исследования являются регулярные структуры тонких пленок золота, фталоцианинов, графена, серебра и платины. Заданная начальная геометрия исследуемой системы оптимизировалась с помощью методов силового поля и недавно предложенного метода TNDO, учитывающего, помимо кулоновских составляющих энергии взаимодействия, электронную специфику атомов. Волновая функция находилась с помощью решения уравнения Шрёдингера методом Хартри — Фока, а также в рамках полуэмпирического метода Хюккеля в программном пакете Gaussian [6, 7]. Метод силового поля подразумевает вычисление потенциальной энергии системы

$$E = \Delta E_R + \Delta E_\varphi + \Delta E_\omega + \Delta E_\gamma + \Delta E_\varepsilon,$$

где ΔE_R — функция, характеризующая деформацию длин химических связей; ΔE_φ — функция, характеризующая деформацию валентных углов; ΔE_ω — функция, характеризующая деформацию торсионных (двугранных) углов; ΔE_γ — функция, характеризующая невалентные взаимодействия (взаимодействия между химически несвязанными атомами); ΔE_ε — функция, характеризующая электростатическое взаимодействие. В результате с использованием сеток различной размерности построены дифракционные картины поверхностного слоя.

3. Результаты моделирования. Результаты моделирования приводятся на примере золота. В качестве первого образца для построения дифракционной картины брался кластер золота, состоящий из двух атомных слоев. На рис. 3а) приводится результат построения дифракционной картины для двух слоев золота, которая была рассчитана для кластера из 50 атомов. Атомы располагались как в кристаллической решетке золота, а геометрия оптимизировалась с помощью метода TNDO. На рис. 3б) приводится результат расчёта для той же структуры, только из первого атомного слоя было исключено шесть атомов золота. По этим изображениям можно

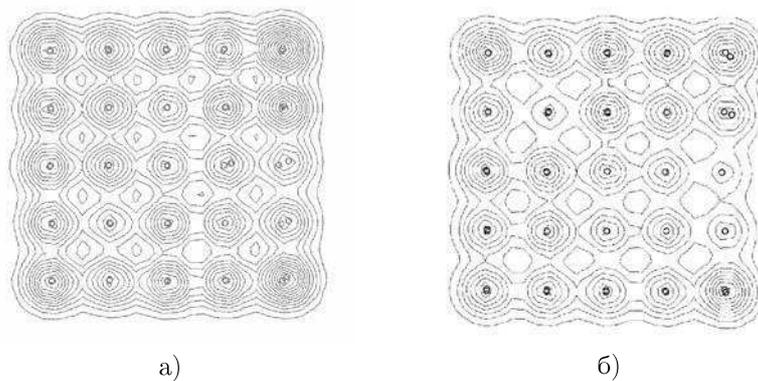


Рис. 3. Дифракционная картина, полученная для: а) 50 атомов золота;
б) для 44 атомов золота

судить о том, как изменяется дифракционная картина при наличие в образце каких-либо неоднородностей. На рисунках показаны линии с одинаковой электронной плотностью, атомы золота показываются как кружочки. По этим картинам хорошо видно, что они согласуются с экспериментально полученными голографическими изображениями для золота (рис. 2). Так же можно видеть, что неоднородность, соответствующая рис. 3б), влияет на распределение электронной плотности и, соответственно, на перераспределение интенсивностей в дифракционном изображении. Так же было интересно посмотреть, как изменится дифракционная картина, если в кластере золота атомы располагаются не в регулярной кристаллической решетке, а занимают какие-то произвольные стабилизированные положения. На рис. 4 приведены результаты моделирования такой структуры. Из них видно, что для произвольного расположения атомов, дифракционная картина теряет регулярную структуру и значительно отличается от дифракционной картины для кристалла золота.

4. Заключение. В этой работе продемонстрированы результаты численного моделирования дифракционных картин золота. Полученные для кластера золота дифракционные картины согласуются с экспериментальными данными. В дальнейшем планируется расчет дифракционных картин для различных структур и материалов. Данные изображения планируется включить в комплекс программ для

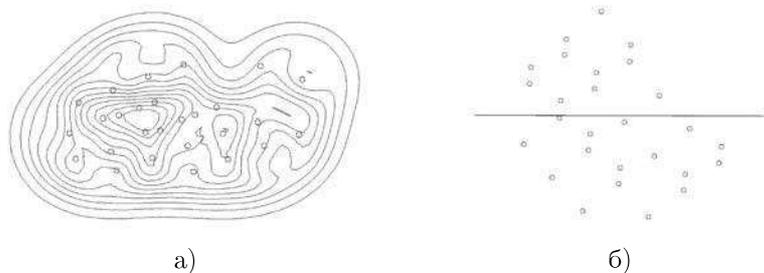


Рис. 4. а) дифракционная картина, полученная для произвольного кластера золота; б) сечение этого кластера в плоскости распространения фронта волны

обработки изображений, полученных на электронном голографическом микроскопе.

Литература

1. Fink H. W, Schmid H. Holography with low-energy electrons // *Phys. Rev. Lett.*, 1990. Vol. 65, Iss. 10. P. 1204–1206.
2. Егоров Н. В., Антонова Л. И., Татаринов П. С., Денисов В. П. Безлинзовый низкоэнергетический проекционный микроскоп для осевой электронной голографии (кендроскоп) // *ПТЭ*, № 5, 2000. С. 157–158.
3. Fink H. W, Schmid H., Kreuzer H. J., Wierzbicki A. Atomic resolution in lensless low-energy electron holography // *Phys. Rev. Lett.*, 1991. Vol. 67. Iss. 12. P. 1543–1546.
4. Федоров А. Г., Карпов А. Г. Численное восстановление голографических изображений для исследования структуры тонких пленок // *Вестник СПбГУ. Сер. 10*, 2011. Вып. 2. С. 76–80.
5. Егоров Н. В., Карпов А. Г., Антонова Л. И. и др. Методика исследования пространственной структуры тонких пленок на наноуровне // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*, 2011. № 10. С. 83–86.
6. Бедрина М. Е., Егоров Н. В., Клемешев В. А. Моделирование наноструктур на высокопроизводительном вычислительном комплексе // *Вестник СПбГУ. Сер. 4*, 2010. Вып. 4. С. 136–140.
7. Райк А. В., Егоров Н. В., Бедрина М. Е. Моделирование потенциалов межмолекулярного взаимодействия // *Вестник СПбГУ. Сер. 10*, 2012. Вып. 3. С. 79–87.

Вакаева А. Б., Греков М. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Метод возмущений в задаче о криволинейном отверстии в упругой плоскости¹

1. Введение. Характерными концентраторами напряжений в материалах и элементах приборов и конструкций являются различного рода отверстия и вырезы. Так, на границе кругового отверстия при одноосном растяжении (задача Кирша) возникают напряжения, в три раза превышающие приложенную нагрузку. Для кругового отверстия известно точное решение [1], однако на практике отверстие считается круговым с некоторой погрешностью. В связи с этим в данной работе поставлена цель: разработать метод, позволяющий оценить влияние этой погрешности на напряженное состояние вблизи отверстия и, в частности, на концентрацию напряжений.

Для решения задачи используется метод возмущений, суть которого состоит в том, что решение задачи для упругой плоскости с отверстием, близким к круговому, представляется в виде ряда по степеням малого параметра, который равен максимальному отклонению границы отверстия от единичной окружности. Дается алгоритм нахождения любого приближения. В первом приближении приводятся численные результаты для заданной формы границы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую плоскость комплексного переменного $z = re^{i\theta}$ с отверстием, форма которого мало отличается от круга единичного радиуса. В общем случае считаем, что на границе отверстия Γ действуют нормальные σ_{nn} и касательные σ_{nt} усилия

$$\sigma_{nn} + i\sigma_{nt} = p(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (1)$$

а на бесконечности заданы напряжения σ_{ij} в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2 ($z = x_1 + ix_2$) и угол поворота ω

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\infty = s_{ij}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \omega = 0. \quad (2)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00230, и Санкт-Петербургского университета, НИР № 9.37.129.2011

Граница отверстия Γ определяется соотношением

$$z \equiv \zeta = \rho e^{i\theta} = (1 + \varepsilon f(\theta)) e^{i\theta}, \quad (3)$$

где $|f| \leq 1$, ε — малый параметр, равный максимальному отклонению границы отверстия от единичной окружности, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$.

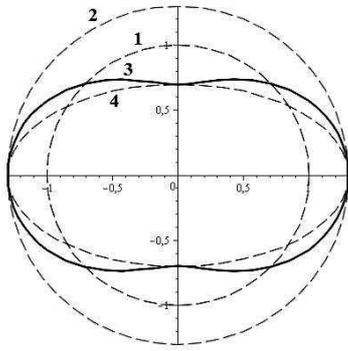


Рис. 1. Границы круговых отверстий (1, 2), эллиптического отверстия (4) и криволинейного отверстия (3)

На рис. 1 кривая 3 построена при $f(\theta) = \cos 2\theta$. Ее максимальное отклонение от единичной окружности (кривая 1) равно $\varepsilon = 0,3$. Для сравнения на рис. 1 приведены также границы кругового отверстия радиуса $1 + \varepsilon$ (кривая 2) и эллиптического отверстия (кривая 4), для которых известны точные решения соответствующих краевых задач.

3. Вывод граничного условия для комплексных потенциалов. Для решения задачи используем

комплексные потенциалы Гурса — Колосова и метод Мусхелишвили [1]. Согласно [1, 2] вектор напряжений $\sigma = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$ на площадке с нормалью \mathbf{n} и вектор перемещений $u = u_1 + iu_2$ выражаются через две голоморфные вне отверстия (область Ω) функции Φ, Ψ при помощи равенств

$$\sigma = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \left[z\Phi'(z) + \overline{\Psi(z)} \right] \frac{d\bar{z}}{dz}, \quad (4)$$

$$2\mu \frac{du}{dz} = \varkappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \left[z\Phi'(z) + \overline{\Psi(z)} \right] \frac{d\bar{z}}{dz},$$

где $dz = |dz|e^{i\alpha}$, $d\bar{z} = \overline{dz}$, α — угол между площадкой и осью x_1 ; $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ при плоском напряженном состоянии, $\varkappa = 3 - 4\nu$ при плоской деформации; ν, μ — соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига упругого тела; u_1, u_2 — компоненты вектора перемещений вдоль осей x_1, x_2 соответственно.

Следуя [1], введем новую функцию $\Upsilon(z)$, голоморфную в конечной области $D = \{z : \bar{z}^{-1} \in \Omega\}$ с границей $\tilde{\Gamma}$, которая симметрична кривой Γ относительно единичной окружности,

$$\Upsilon(z) = -\overline{\Phi(\bar{z}^{-1})} + z^{-1}\overline{\Phi'(\bar{z}^{-1})} + z^{-2}\overline{\Psi(\bar{z}^{-1})}, \quad \bar{z}^{-1} \in \Omega. \quad (5)$$

Подставив (5) в первое равенство (4), осуществим предельный переход при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma, z \in \Omega$. Тогда приходим к следующему равенству:

$$\sigma(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \left[\frac{1}{\zeta^2} \left(\overline{\Phi(\zeta)} + \Upsilon\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \right) + \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \overline{\Phi'(\zeta)} \right] \frac{d\bar{z}}{dz}, \quad (6)$$

где $\Phi(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Phi(z)$ при $z \in \Omega$ и $\Upsilon(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Upsilon(z)$ при $z \in D$.

Возьмем приращение dz в (6) вдоль касательной к Γ . Тогда, учитывая (3), получим $dz = d\zeta = (\rho'(\theta) + i\rho(\theta))s(\theta)d\theta$, где $s(\theta) = e^{i\theta}$. В результате равенство (6) сводится к краевому условию, которому должны удовлетворять функции Φ и Ψ :

$$p(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\rho' - i\rho}{\rho' + i\rho} \left[\frac{1}{\zeta^2} \left(\overline{\Phi(\zeta)} + \Upsilon\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \right) + \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \overline{\Phi'(\zeta)} \right] \bar{s}^2. \quad (7)$$

4. Метод возмущений. В силу того, что форма границы зависит от малого параметра ε , функции $\Phi(z), \Upsilon(z)$ также должны зависеть от этого параметра и, следовательно, их можно представить в виде сходящихся степенных рядов по ε [3]

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_n(z), \quad \Upsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Upsilon_n(z). \quad (8)$$

В свою очередь разложим граничные значения функций $\Phi_n(z)$ на Γ и функций $\Upsilon_n(z)$ на $\tilde{\Gamma}$, а также функцию $p(\zeta)$ в соответствующие ряды Тейлора в окрестности окружности $\rho = 1$. Тогда приходим к следующим выражениям для функций в (7) при $\zeta \in \Gamma$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(s)s)^k}{k!} \Phi_n^{(k)}(s), \quad p(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(s)s)^n}{n!} p^{(n)}(s).$$

$$\Upsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(\bar{s})\bar{s})^k}{k!} \frac{d^k}{d\bar{s}^k} \Upsilon_n\left(\frac{1}{\bar{s}}\right), \quad (9)$$

Кроме того, полагая $\delta = \varepsilon f(s)$ и $|\delta - i\delta'| < 1$, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\rho' - i\rho}{\rho' + i\rho} &= -1 - 2\delta' i \sum_{j=0}^{\infty} (i\delta' - \delta)^j, \\ \zeta - \frac{1}{\zeta} &= s\left[\delta - \sum_{k=1}^{\infty} (-\delta)^k\right], \quad \frac{1}{\zeta^2} = s^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-\delta)^k. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим ряды (9) и (10) в (7). Собирая затем в полученном равенстве коэффициенты при ε^n ($n = 0, 1, \dots$), приходим для каждого приближения к краевой задаче Римана — Гильберта о скачке функции $\Xi_n(z)$, голоморфной вне единичной окружности $\rho = 1$

$$\Xi_n^+(s) - \Xi_n^-(s) = q_n(s), \quad |s| = 1. \quad (11)$$

Здесь $\Xi_n^\pm = \lim_{|z| \rightarrow 1 \mp 0} \Xi_n(z)$, q_n — известные функции, зависящие при $n > 0$ от всех предыдущих приближений, и

$$\Xi_n(z) = \begin{cases} \Phi_n(z), & |z| > 1, \\ \Upsilon_n(z), & |z| < 1. \end{cases} \quad (12)$$

Согласно Мухелишвили [1] решение задачи (11) можно записать в виде

$$\Xi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{q_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + R_n(z), \quad (13)$$

где $R_0 = C + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2}$, $R_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, и

$$4C = \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty, \quad C_1 = \frac{\varkappa P}{2\pi(\varkappa + 1)}, \quad 2C_2 = \sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty - 2i\sigma_{12}^\infty, \quad (14)$$

а P — главный вектор сил, приложенных к границе отверстия.

В нулевом и первом приближениях функция q_n в (11) и (13) равна

$$\begin{aligned} q_0(s) &= -p(s), \quad q_1(s) = -p'(s) - \bar{s}f(\bar{s}) \frac{d\Upsilon_0(\bar{s}^{-1})}{d\bar{s}} + sf(s)\Phi_0'(s) + \\ &+ 2(f(s) - if_\theta'(s)) \left(\overline{\Phi_0(s)} + \Upsilon_0(\bar{s}^{-1}) \right) - 2\bar{s}f(s)\overline{\Phi_0'(s)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Будем считать далее, что контур отверстия свободен от внешних нагрузок, т. е. $p(\zeta) \equiv 0$. Тогда, согласно (12), (13), комплексные потенциалы в нулевом приближении имеют вид

$$\Upsilon_0(z) = \Phi_0(z) = C + C_2 z^{-2}. \quad (16)$$

Потенциалы (16) отвечают решению соответствующей краевой задачи для кругового отверстия единичного радиуса. Для нахождения первого приближения рассмотрим отверстие, форма которого определяется функцией $f(\theta) = \cos 2\theta$ (кривая 3 на рис. 1). Подставим (16) в (15) и затем q_1 в (13). После интегрирования получим с учетом (12) выражения для комплексных потенциалов в первом приближении

$$\Phi_1(z) = 3C_2 z^{-4} + 2Cz^{-2}, \quad \Upsilon_1(z) = 5\overline{C_2} z^4 + 6Cz^2 + C_2 + \overline{C_2}. \quad (17)$$

Учитывая (8), (14), (16) и (17), направим приращение dz в (6) по нормали к границе отверстия Γ . Тогда из последнего равенства находим в первом приближении следующее выражение для окружного напряжения на границе:

$$\begin{aligned} \sigma_{tt} = & \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + 2(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \cos 2\theta - 4\sigma_{12}^\infty \sin 2\theta + \\ & + 2\varepsilon(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty) \cos 2\theta + 2\varepsilon\overline{C_2}(2s^4 - 1) + 2\varepsilon C_2(2s^{-4} - 1). \end{aligned} \quad (18)$$

5. Численные результаты и выводы. На рис. 2 представлены распределения окружных напряжений σ_{tt} вдоль границы отверстия, полученные по формуле (18) при различных значениях малого параметра ε . Из рис. 2 следует, что чем больше ε , тем больше максимальные значения напряжений σ_{tt} . Оказывается, что эти значения превышают также соответствующие значения для кругового отверстия радиуса $1 + \varepsilon$ (кривая 2 на рис. 1).

Таким образом, в работе методом возмущений построено решение задачи определения напряженно-деформированного состояния упругой плоскости с криволинейным отверстием, близким к круговому. Разработан алгоритм нахождения любого приближения. В первом приближении получено решение задачи для заданной формы отверстия. В дальнейшем планируется получить решение данной задачи с помощью пакета конечно-элементного анализа ANSYS, а также рассмотреть более сложные конфигурации границ отверстий.

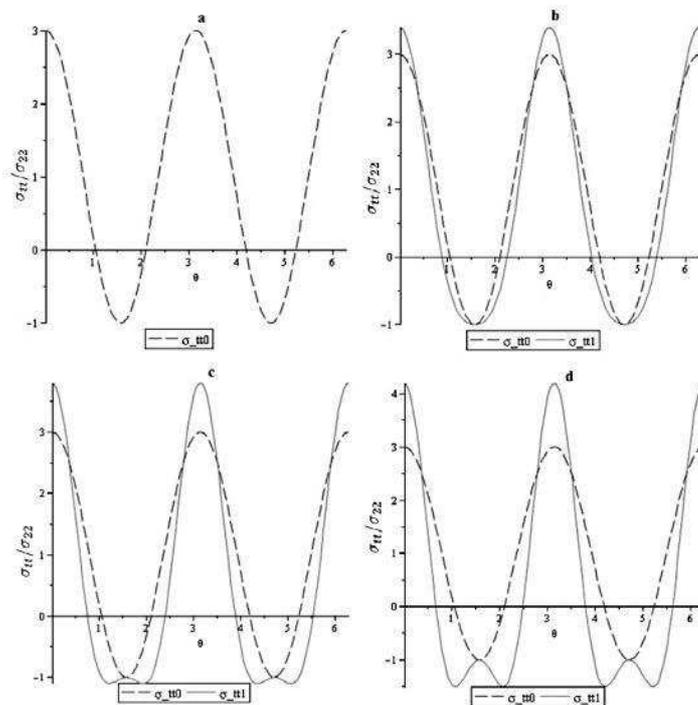


Рис. 2. Зависимость напряжений σ_{tt} от полярного угла θ при $\varepsilon = 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3$ (соответственно a, b, c, d)

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 192 с.
3. Греков М. А., Макаров С. Н. Концентрация напряжений у слабо искривленного участка поверхности упругого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2004. № 6. С. 53–61.

Викулина Ю. И.

Санкт-Петербургский государственный университет

Влияние формы поверхности на напряженное состояние тела нанометрового размера¹

Рекомендовано к публикации профессором Грековым М. А.

1. Введение. Поверхностные напряжения — одна из главных причин экстраординарных механических свойств наноструктур и наноматериалов. Появление этих напряжений в твердых телах связано с различными условиями равновесия атомов внутри тела и вблизи поверхности [1].

Данное исследование является продолжением работы [2], в которой была решена задача определения напряженного состояния упругого тела со слабо искривленной поверхностью при учете поверхностных напряжений и рассмотрен частный случай, когда форма границы описывается косинусом. Целью данной работы является получение аналогичных зависимостей для произвольной формы границы и последующий анализ влияния формы поверхности на напряженное состояние тела.

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую среду, занимающую полупространство, поверхность которого близка к плоской форме и обладает упругими свойствами, отличными от аналогичных свойств объема. Предполагаем, что среда находится в условиях плоской деформации под действием внешних сил и дополнительных поверхностных напряжений. Таким образом, приходим к формулировке краевой задачи о деформации полуограниченной области $\Omega = \{z : \text{Im } z < \varepsilon f(x_1), \text{Re } z \in \mathbb{R}^1\}$ в плоскости комплексного переменного $z = x_1 + ix_3$. Граница Γ области Ω определяется равенством $z = x_1 + i\varepsilon f(x_1)$. Здесь $f(x_1)$ — непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом a , удовлетворяющая условиям $\max |f(x_1)| = a$, $|f'(x_1)| < 1/\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Таким образом, максимальное отклонение точек поверхности от плоскости $x_3 = 0$ равно εa .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00230, и СПбГУ, НИР № 9.37.129.2011

Согласно обобщенному закону Лапласа — Юнга [2], граничное условие в случае плоской деформации имеет вид

$$\sigma_n(\zeta) = \frac{\sigma_{tt}^s}{r} - i \frac{1}{h} \frac{d\sigma_{tt}^s}{dx_1} + p(\zeta) \equiv t^s(\zeta) + p(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (1)$$

где $\sigma_n = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$; $p(\zeta) = p_n(\zeta) + ip_t(\zeta)$; σ_{nn}, σ_{nt} — нормальное и касательное напряжения в локальной декартовой прямоугольной системе координат n, t (в уравнении (1) ось n перпендикулярна Γ); p_n, p_t — проекции вектора внешней нагрузки на соответствующие оси координат n, t ; σ_{tt}^s — поверхностное напряжение; r — радиус кривизны кривой Γ и h — метрический коэффициент.

Считаем, что функция p удовлетворяет условию Гёльдера всюду на Γ и является периодической, т. е. $p(\zeta) = p(\zeta + a)$. При этом на бесконечности выполнены условия

$$\lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \sigma_{33} = \lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \sigma_{13} = \lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \omega = 0, \quad \lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \sigma_{11} = \sigma_1, \quad (2)$$

где ω — угол поворота материальной частицы.

Определяющие соотношения поверхностной [2] и объемной теории упругости в случае плоской деформации сводятся к следующим:

$$\sigma_{tt}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s - \gamma_0)\varepsilon_{tt}^s, \quad \sigma_{22}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + \gamma_0)\varepsilon_{tt}^s, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{nn} + \lambda\varepsilon_{tt}, & \sigma_{tt} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{tt} + \lambda\varepsilon_{nn}, \\ \sigma_{nt} &= 2\mu\varepsilon_{nt}, & \sigma_{22} &= \nu(\sigma_{tt} + \sigma_{nn}), \end{aligned} \quad (4)$$

где γ_0 — остаточное поверхностное напряжение, действующее при отсутствии деформаций; λ_s, μ_s — модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе λ, μ ; ε_{ij} — компонента объемной деформации; ν — коэффициент Пуассона; ε_{tt}^s — поверхностная деформация в плоскости x_1, x_3 .

Соотношения (1)–(4) замыкаются условием совместности деформаций поверхности и основного материала

$$\varepsilon_{tt}^s(\zeta) = \varepsilon_{tt}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma,$$

которое следует из условия непрерывности смещений на границе контакта.

3. Интегральное уравнение n -го приближения. Для решения поставленной задачи воспользуемся равенством [2, 3]

$$\sigma_n(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \left(\Upsilon(\bar{z}) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad (5)$$

в котором $\Phi(z)$ — функция, голоморфная в Ω , а $\Upsilon(z)$ — в области $D = \{z : \bar{z} \in \Omega\}$; α — угол между осями t и x_1 , отсчитываемый от оси x_1 против часовой стрелки; черта сверху означает комплексное сопряжение.

Следуя методу возмущений [2], разлагая комплексные потенциалы Φ, Υ в степенные ряды по малому параметру ε и представляя σ_{tt}^s в виде

$$\sigma_{tt}^s(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \tau_n(\zeta),$$

приходим к решению последовательности гиперсингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_n'(x_1) - \frac{M(\varkappa + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_n'(t)}{(t - x_1)^2} dt = G_n'(x_1) + \\ + \operatorname{Re} \left\{ \frac{M(1 - \varkappa)}{2} F_n'(x_1) - \frac{M(1 + \varkappa)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_n(t)}{(t - x_1)^2} dt \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $M = (\lambda_s + 2\mu_s - \gamma_0)/(2\mu)$, $\varkappa = 3 - 4\nu$, а функции F_n, G_n при $n > 0$ выражаются через все предыдущие приближения, в частности,

$$G_0(x_1) = \gamma_0, \quad F_0(x_1) = p(x_1),$$

$$\begin{aligned} G_1(x_1) = -if(x_1)\tau_0'(x_1) + M \operatorname{Re} \left\{ -2if'(x_1) \left(\overline{\Phi_0^-(x_1)} + \Upsilon_0^+(x_1) \right) - \right. \\ \left. - if(x_1) \left(\varkappa \overline{\Phi_0^-(x_1)} + \Upsilon_0^+(x_1) + 2\overline{\Phi_0^-(x_1)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(x_1) = -f(x_1)\tau_0''(x_1) - f''(x_1)\tau_0(x_1) - if(x_1) \left(\overline{\Phi_0^-(x_1)} + \Upsilon_0^+(x_1) + \right. \\ \left. + 2\overline{\Phi_0^-(x_1)} \right) 2if'(x_1) \left(\overline{\Phi_0^-(x_1)} + \Upsilon_0^+(x_1) \right) - if(x_1)p'(x_1). \end{aligned}$$

4. Численный анализ. Найдем решение уравнения (6) и задачи в целом в первом приближении при $p = 0$ и различных формах границы, определяемых функцией, которая была рассмотрена в [3]:

$$f = \frac{a}{d} \left(\operatorname{Im} \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi x}{a} - iy \right) \right\} - 1 \right), \quad d = \operatorname{Im} \{ \operatorname{ctg}(iy) \} + 1, \quad (7)$$

$$f_{\infty}(x_1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x_1) = -a \cos \frac{2\pi x_1}{a}.$$

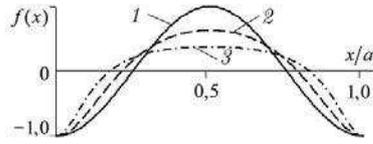


Рис. 1. Формы поверхностей в пределах одного периода

Вещественная величина y в (7) играет роль параметра, задающего форму поверхности. На рис. 1 показаны рельефы поверхности для функции f при $y = \infty; 1, 5; 0, 8$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Ограничимся далее первым приближением и приведем некоторые результаты

расчетов.

Учитывая периодичность задачи, решение уравнения (6) найдем в виде ряда Фурье (8), при этом функцию $f(x_1)$ представим в виде соответствующего ряда (9)

$$\tau'_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin b_k x + B_k \cos b_k x, \quad b_k = 2\pi k/a, \quad (8)$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos b_k x. \quad (9)$$

Подставив ряды (8), (9) в интегральное уравнение (6), получим явное выражение коэффициентов A_k и B_k через известные коэффициенты разложения в ряд функции f :

$$A_k = \frac{MC_k ab_k^2 (\sigma_1(\chi + 1) + b_k \tau_0(\chi - 1))}{2 + Mb_k(\chi + 1)}, \quad B_k = 0.$$

Затем с помощью найденных коэффициентов A_k можно вычислить комплексные потенциалы и подставить в соотношение (5). Так вычисляются все компоненты напряжений.

Изменения окружных (рис. 2а, б) и нормальных (рис. 2в, г) напряжений на границе Γ показаны на рис. 2 для $\nu = 0, 3; M = 0, 113$ нм; $\gamma_0 = 0$ Н/м, характерных для алюминия. В расчетах принято $\varepsilon = 0, 01$. На графиках рис. 2а, в изображена зависимость максимумов соответствующих компонентов напряжений от периода рельефа поверхности, а на графиках рис. 2б, г — распределение напряжений в диапазоне одного периода, равного 1 нм. Кривым 1, 2, 3 на рис. 2 соответствуют напряжения, полученные для различных рельефов поверхности при параметре формы $y = \infty; 1, 5; 0, 8$.

Из рисунков видно, что для всех форм рельефа характерен масштабный эффект, который проявляется в зависимости напряжений от периода рельефа поверхности в диапазоне от 1 до 30 нм.

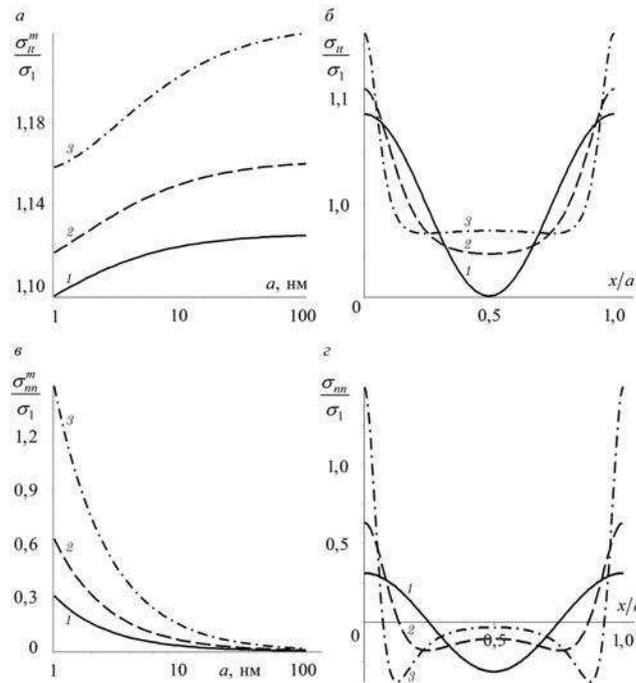


Рис. 2. Зависимость максимальных значений σ_{tt} и σ_{nn} от периода a (слева) и распределение напряжений в диапазоне одного периода (справа);

$$\sigma_{tt}^m = \max \sigma_{tt}, \sigma_{nn}^m = \max \sigma_{nn}$$

Окружные напряжения значительно уменьшаются при стремлении периода к 1 нм (рис. 2а). На рис. 2в проиллюстрирован эффект появления нормальных напряжений, в 1,5 раза превышающих приложенную нагрузку. Это влияние объясняется не только изменением радиуса кривизны впадины, но и действием поверхностных напряжений.

5. Заключение. Предложенная в работе [2] аналитическая модель использована для определения напряженного состояния наноструктурных материалов с произвольной слабо искривленной грани-

цей. Решение задачи получено в первом приближении с точностью до малого параметра ε в виде рядов Фурье. Обнаружен масштабный эффект, а также проиллюстрировано влияние формы рельефа поверхности на напряженное состояние наноматериала.

Литература

1. Ansari R., Sahmani S. Surface stress effects on the free vibration behavior of nanoplates // Int. Journal of Engineering Science, 2011. Vol. 49. P. 1204–1215.
2. Викулина Ю. И., Греков М. А., Костырко С. А. Напряженно-деформированное состояние упругого тела со слабо искривленной поверхностью при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й межд. научной конф. асп. и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 112–118.
3. Викулина Ю. И., Греков М. А., Костырко С. А. Модель пленочного покрытия со слабо искривленной поверхностью // Изв. РАН. Сер.: Механика тв. тела, 2010. № 6. С. 16–28.

Воскобойникова Е. В., Кривовичев Г. В.
Санкт-Петербургский государственный университет

Двухстадийная разностная схема для системы кинетических уравнений с дискретными скоростями

1. Введение. Кинетические разностные схемы, которые основаны на решении задач не для уравнений механики сплошной среды, а для кинетических уравнений, в настоящее время широко применяются при решении ряда задач механики жидкости и газа [1]. Популярность таких схем связана с простотой их алгоритмов и широкими возможностями для распараллеливания вычислений.

В настоящей работе предложена двухстадийная схема (типа предиктор-корректор) решения задач для системы кинетических уравнений с дискретными скоростями. Эффективность схемы показана при решении двух тестовых задач: задачи о течении в каверне и задачи о вихрях Тейлора — Грина.

2. Кинетические уравнения с дискретными скоростями. Система дискретных по скоростям кинетических уравнений, полученная при дискретизации кинетического уравнения Бхатнагара — Гросса — Крука, имеет следующий вид [1]

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\lambda} (f_i - f_i^{(eq)}), \quad (1)$$

где t — время, $f_i = f_i(t, \mathbf{r})$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$ — функции распределения, соответствующие крупным частицам со скоростями $\mathbf{V}_i = v \mathbf{v}_i$, где $v = \frac{l}{\delta t}$, l — длина свободного пробега крупных частиц, δt — время свободного пробега крупных частиц, $\mathbf{r} = (x, y)$ — вектор пространственных переменных, λ — время релаксации, $f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t, \mathbf{r}))$ — функции, аппроксимирующие равновесные функции распределения Максвелла, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. В работе рассматривается только случай плоского изотермического течения вязкой ньютоновской жидкости, при котором можно воспользоваться набором скоростей D2Q9, для которого $n = 9$, а векторы \mathbf{v}_i задаются следующим образом [1]:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_4 = (-1, 0), \quad \mathbf{v}_5 = (0, -1),$$

$$\mathbf{v}_6 = (1, 1), \quad \mathbf{v}_7 = (-1, 1), \quad \mathbf{v}_8 = (-1, -1), \quad \mathbf{v}_9 = (1, -1).$$

Величины, характеризующие состояние на макроуровне, такие как плотность $\rho(t, \mathbf{r})$ и скорость среды $\mathbf{U}(t, \mathbf{r})$, можно получить как моменты функции распределения:

$$\rho(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^9 f_i(t, \mathbf{r}), \quad \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{U}(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i f_i(t, \mathbf{r}).$$

Наиболее часто встречающаяся в литературе разностная схема, аппроксимирующая (1), имеет вид [1]

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})), \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ — радиус-вектор узла пространственной равномерной сетки, построенной с шагом h по x и по y , t_j — узел временной равномерной сетки, δt — шаг разбиения по времени.

Недостаток схемы (2) связан с тем, что значения шагов сеток по времени и по пространственным переменным в силу самой решеточной модели жестко связаны друг с другом [1]. Выражение для параметра Куранта, фигурирующего в условиях устойчивости разностных схем, в случае (2):

$$\gamma = v \frac{\delta t}{l} = \frac{l}{\delta t} \frac{\delta t}{l} = 1.$$

Параметр Куранта равен единице, а следовательно, его нельзя варьировать и улучшать таким образом устойчивость схемы. Поэтому было предложено использовать схемы, для которых есть возможность использовать разные шаги по времени и по пространственным переменным, а следовательно, варьировать γ и влиять на устойчивость. Такие схемы принято называть конечно-разностными решеточными схемами Больцмана.

3. Схема типа предиктор-корректор. Выпишем систему (1) в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{q}), \quad (3)$$

где введены обозначения

$$q_i = f_i, \quad F_i = V_{ix}f_i, \quad G_i = V_{iy}f_i, \quad S_i = -\frac{1}{\lambda} \left(f_i - f_i^{(eq)} \right), \quad i = \overline{1, 9}.$$

Рассмотрим равномерную сетку, построенную с шагом h по x и по y и шагом Δt по времени. Для построения схемы, реализующей этап предиктора, было предложено аппроксимировать производные по времени и пространственным переменным с помощью правых разностных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}(t_n, \mathbf{r}_{jk})}{\partial t} &\approx \frac{\mathbf{q}_{jk}^{n+1} - \mathbf{q}_{jk}^n}{\Delta t}, & \frac{\partial \mathbf{F}(t_n, \mathbf{r}_{jk})}{\partial x} &\approx \frac{\mathbf{F}_{j+1k}^n - \mathbf{F}_{jk}^n}{h}, \\ \frac{\partial \mathbf{G}(t_n, \mathbf{r}_{jk})}{\partial y} &\approx \frac{\mathbf{G}_{jk+1}^n - \mathbf{G}_{jk}^n}{h}. \end{aligned}$$

Соответствующая разностная схема примет вид

$$\mathbf{q}_{jk}^{n+1} = \mathbf{q}_{jk}^n - \frac{\Delta t}{h} (\mathbf{F}_{j+1k}^n - \mathbf{F}_{jk}^n) - \frac{\Delta t}{h} (\mathbf{G}_{j+1k}^n - \mathbf{G}_{jk}^n) + \Delta t \mathbf{S}_{jk}^n. \quad (4)$$

Полученное по (4) приближенное решение будем рассматривать как предварительное, требующее дальнейшей коррекции.

Для построения схемы, реализующей этап корректора, аппроксимируем производную по времени с помощью правой разностной производной с использованием полуцелого шага:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{r}_{jk})}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{q}_{jk}^{n+1} - \mathbf{q}_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}}.$$

Производные по пространственным переменным аппроксимируем с помощью левых разностных производных:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{r}_{jk})}{\partial x} \approx \frac{\mathbf{F}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-1k}^{n+\frac{1}{2}}}{h}, \quad \frac{\partial \mathbf{G}(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{r}_{jk})}{\partial y} \approx \frac{\mathbf{G}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{G}_{jk-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h}.$$

Получаем разностную схему

$$\mathbf{q}_{jk}^{n+1} = \mathbf{q}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2h} \left(\mathbf{F}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-1k}^{n+\frac{1}{2}} \right) -$$

$$-\frac{\Delta t}{2h} \left(\mathbf{G}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{G}_{jk-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_{jk}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Из этого выражения получим схему, реализующую этап корректора. Для этого представим решение в полуцелом узле следующим образом:

$$\mathbf{q}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} \left(\mathbf{q}_{jk}^n + \mathbf{q}_{jk}^{n+1} \right), \quad (6)$$

Предположим, что шаг по времени настолько мал, что верны приближения

$$\mathbf{F}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \approx \mathbf{F}_{jk}^{n+1}, \quad \mathbf{G}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \approx \mathbf{G}_{jk}^{n+1}, \quad \mathbf{S}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \approx \mathbf{S}_{jk}^{n+1}. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получим разностную схему, которая будет использоваться на этапе корректора. Как можно заметить, такая схема является неявной, что приведет к определенным сложностям при практической реализации. Ситуацию предлагается исправлять следующим образом. Полученное на этапе предиктора по (4) решение \mathbf{q}^* подставляется в правую часть этой разностной схемы:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{jk}^{n+1} = & \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{jk}^n + \mathbf{q}_{jk}^*) - \frac{\Delta t}{2h} (\mathbf{F}_{jk}^* - \mathbf{F}_{j-1k}^*) - \\ & - \frac{\Delta t}{2h} (\mathbf{G}_{jk}^* - \mathbf{G}_{jk-1}^*) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_{jk}^*, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}(\mathbf{q}^*), \quad \mathbf{G}^* = \mathbf{G}(\mathbf{q}^*), \quad \mathbf{S}^* = \mathbf{S}(\mathbf{q}^*).$$

Формулой (8) и будет задаваться этап корректора. Перепишем схему применительно к решению задач для системы (1). Этап предиктора:

$$\begin{aligned} f_i^*(t_{n+1}, \mathbf{r}_{jk}) = & f_i(t_n, \mathbf{r}_{jk}) - \frac{\Delta t}{h} v_{ix} (f_i(t_n, \mathbf{r}_{j+1k}) - f_i(t_n, \mathbf{r}_{jk})) - \\ & - \frac{\Delta t}{h} v_{iy} (f_i(t_n, \mathbf{r}_{jk+1}) - f_i(t_n, \mathbf{r}_{jk})) - \\ & - \frac{1}{\tau} \left(f_i(t_n, \mathbf{r}_{jk}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_n, \mathbf{r}_{jk})) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

Этап корректора:

$$f(t_{n+1}, \mathbf{r}_{jk}) = \frac{1}{2} (f_i(t_n, \mathbf{r}_{jk}) + f_i^*(t_{n+1}, \mathbf{r}_{jk})) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Delta t}{2h} v_{ix} (f_i^*(t_{n+1}, \mathbf{r}_{jk}) - f_i^*(t_{n+1}, \mathbf{r}_{j-1k})) - \\
& -\frac{\Delta t}{2h} v_{iy} (f_i^*(t_{n+1}, \mathbf{r}_{jk}) - f_i^*(t_{n+1}, \mathbf{r}_{jk-1})) + \\
& + \frac{1}{2\tau} (f_i^*(t_{n+1}, \mathbf{r}_{jk}) - f_i^{(eq)}(f_i^*(t_{n+1}, \mathbf{r}_{jk}))). \quad (10)
\end{aligned}$$

В дальнейшем полученную схему будем называть схемой типа предиктор-корректор (ПК).

С помощью метода дифференциального приближения удалось показать, что схема (9), (10) аппроксимирует (1) со вторым порядком по пространственным переменным и по времени.

Будем сравнивать результаты, полученные при расчете по схеме ПК с другими известными из литературы схемами. Будем рассматривать схему с направленными разностями первого (НР1) и второго порядка (НР2). Выражения для этих разностных схем представлены, например, в работе [3]. Программная реализация разностных схем производилась на языке C++.

4. Постановка тестовых задач. Схема типа ПК применяется при решении двух модельных плоских задач гидродинамики.

4.1. Задача о течении в квадратной каверне. В начальный момент времени скорость жидкости во внутренних точках области квадратной формы полагается равной нулю, плотность $\rho = 1$. В рассматриваемой задаче верхняя стенка движется с постоянной скоростью, остальные стенки неподвижны. В качестве граничных условий выступают условия прилипания: скорость жидкости на твердой границе равна скорости самой границы. Для реализации граничного условия прилипания использовался подход, предложенный в [4]. Расчеты производились на сетке 200×200 при задании значений такого критерия подобия, как число Рейнольдса Re . Результаты, полученные при $Re = 50, 100, 200, 300, 400$, сравнивались с решением, полученным по другим схемам.

4.2. Задача о вихрях Тейлора — Грина. Постановка задачи и ее аналитическое решение представлены в [5]. Расчеты производились на сетке 100×100 при $Re = 50, 100, 200, 300, 400$.

5. Результаты расчетов. В таблицах 1, 2 приведены значения числа Куранта для представленных схем.

Таблица 1. Сравнение значений γ в случае задачи о течении в каверне для сетки 200×200

	Схема ПК	Схема НР1	Схема НР2
$Re = 50$	0,442	0,398	0,221
$Re = 100$	0,415	0,352	0,204
$Re = 200$	0,306	0,269	0,177
$Re = 300$	0,241	0,221	0,153
$Re = 400$	0,204	0,187	0,135

Таблица 2. Сравнение значений γ в случае задачи о вихрях Тейлора — Грина для сетки 100×100

	Схема ПК	Схема НР1	Схема НР2
$Re = 50$	0,426	0,354	0,198
$Re = 100$	0,303	0,265	0,158
$Re = 200$	0,205	0,187	0,132
$Re = 300$	0,151	0,141	0,109
$Re = 400$	0,122	0,115	0,093

Сравнивая значения числа Куранта для разных схем, видим, что для схемы ПК оно больше, чем значение для других схем. Следовательно, при применении схемы ПК можно использовать больший шаг по времени, а схема является более устойчивой и экономичной.

Литература

1. Wolf-Gladrow D. A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer, 2005. 311 p.
2. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике. М.: Бинوم, 2006. 528 с.
3. Кривовичев Г. В. Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование, 2012. Т. 13. С. 332–340.
4. Zou Q., He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // Physics of Fluids, 1997. No 9. P. 1591–1598.
5. Taylor G. I. On the decay of vortices in a viscous fluid // Philosophical Magazine, 1923. No 46. P. 671–674.

Гаёва Е. С., Кривовичев Г. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Применение модифицированных разностных схем типа Лакса в методе решеточных уравнений Больцмана

1. Введение. В последние годы в вычислительной гидродинамике разрабатываются схемы, основанные на решении не тех уравнений, которые описывают динамику жидкости или газа на макроуровне, а кинетических уравнений, описывающих процесс на мезоуровне [1, 2]. Метод решеточных уравнений Больцмана [2] эффективен для решения ряда задач, но параметр Куранта разностной схемы, на основе которой производится расчет, постоянен и равен единице. Это приводит к тому, что данный параметр невозможно варьировать и тем самым влиять на устойчивость схемы. Поэтому актуален вопрос о разработке других схем, позволяющих изменять данный параметр. Для конечно-разностных схем [3, 4] параметр Куранта можно варьировать в широких пределах.

В настоящей статье проведено сравнение двух предложенных модифицированных разностных схем типа Лакса для системы кинетических уравнений при решении двух тестовых задач: задачи о течении в каверне и задачи Куэтта.

2. Конечно-разностные решеточные схемы Больцмана. Кинетические схемы строятся на основе использования системы, которая описывает динамику ансамбля крупных частиц, перемещающихся с заданными скоростями без соударений между узлами регулярной решетки в физическом пространстве и взаимодействующих друг с другом в узлах. Эта система в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{(eq)}). \quad (1)$$

где t — безразмерное время, $f_i = f_i(t, \mathbf{r})$ — одночастичные функции распределения частиц со скоростями \mathbf{v}_i , $f_i^{(eq)}$ — приближенные равновесные максвелловские функции распределения, τ — безразмерное время релаксации. Макровеличины, такие как плотность ρ и скорость \mathbf{U} , находятся из следующих формул, которые имеют при-

ближенный характер [2]:

$$\rho(t_l, \mathbf{r}_{jk}) \approx \sum_{i=1}^9 f_i(t_l, \mathbf{r}_{jk}), \quad \rho \mathbf{U}(t_l, \mathbf{r}_{jk}) \approx \sum_{i=1}^9 \mathbf{v}_i f_i(t_l, \mathbf{r}_{jk}),$$

где \mathbf{r}_{jk} — узел пространственной сетки, t_l — узел сетки по времени. В статье рассматривается случай плоского изотермического течения вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. В этом случае можно воспользоваться набором скоростей модели D2Q9 [2]. Как известно [2], при определенных условиях из (1) могут быть выведены уравнения механики сплошной среды, что и учитывается при практическом использовании схем.

2.1. Первая модифицированная схема типа Лакса. Рассматриваются явные схемы, построенные на равномерных по безразмерному времени и по безразмерным пространственным переменным сетках с безразмерными шагами Δt и h . Для получения первой модифицированной схемы типа Лакса (далее схема № 1) производная по t аппроксимируется правой разностной производной

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t} \approx \frac{f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\Delta t}. \quad (2)$$

Производные по пространственным переменным аппроксимируются центральными разностными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} &\approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{2h}, \\ \frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} &\approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{2h}. \end{aligned}$$

Значения f_i в узле (t_j, \mathbf{r}_{kl}) заменяются их средними арифметически по соседним четырем узлам:

$$\begin{aligned} f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) &\approx \frac{1}{4} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) + \right. \\ &\quad \left. + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично заменяются и значения равновесных функций распределения. Можно показать, что получающаяся разностная схема

аппроксимирует (1) с первым порядком по t и со вторым — по пространственным переменным.

2.2. Вторая модифицированная схема типа Лакса. В первой схеме производные по пространственным переменным аппроксимируются отдельно друг от друга. Для второй модифицированной схемы типа Лакса (далее схема № 2) был выбран другой способ: аппроксимируется все слагаемое $\mathbf{v}_i \nabla f_i$ посредством выражения [4]

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i \approx \frac{1}{2h} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l} + \mathbf{v}_i h) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l} - \mathbf{v}_i h) \right).$$

Производная по t аппроксимируется правой разностной производной. Значения f_i и $f_i^{(eq)}$, как и в случае схемы № 1, заменяются их средними арифметическими по соседним четырем узлам. Полученная разностная схема аппроксимирует (1) с первым порядком по t и со вторым — по пространственным переменным.

3. Сравнение разностных схем. Сравнение эффективности представленных выше разностных схем проводилось при решении двух известных задач гидродинамики посредством сравнения результатов, полученных с помощью разностных схем, представленных в [3]. Это схемы с центральными разностями (далее ЦР), с направленными разностями первого порядка (далее НР1) и второго порядка (далее НР2). Цель заключалась в нахождении для каждой из них на различных пространственных сетках и при некоторых числах Рейнольдса Re максимально возможного значения параметра Куранта $\gamma = v \Delta t / h$, где v — характерная безразмерная скорость крупных частиц по основным координатным направлениям, при котором разностные схемы будут устойчивы.

3.1. Задача о течении в каверне. Каверна представляет собой квадратную полость, верхняя граница которой подвижна, а остальные неподвижны. В начальный момент времени предполагается, что жидкость в каверне покоится, а функции распределения полагаются совпадающими с равновесными. Для реализации граничного условия прилипания был выбран подход, предложенный в [5].

3.2. Задача Куэтта. Задача состоит в расчете течения в прямоугольной области, у которой нижняя граница неподвижна, верхняя движется с постоянной скоростью, а на боковых границах скорость меняется линейно.

4. Результаты. Для наглядности были построены графики зависимости компонент скорости U_x и U_y от пространственных коор-

динат (рис. 1, 2), найденных с помощью схем № 1 и № 2. В качестве эталонного решения задачи о течении в каверне было взято решение задачи для уравнений гидродинамики в переменных «завихренность — функция тока».

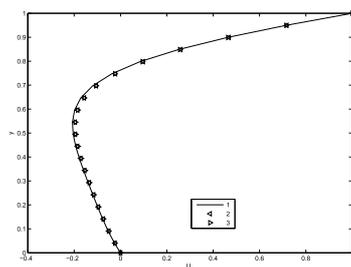


Рис. 1. Зависимость компоненты скорости U_x от координаты y , где 1 — эталонное решение, 2 — схема № 1, 3 — схема № 2

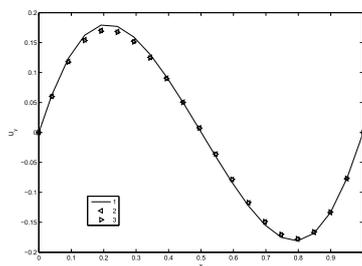


Рис. 2. Зависимость компоненты скорости U_y от координаты x , где 1 — эталонное решение, 2 — схема № 1, 3 — схема № 2

Сравнение значений γ , полученных при решении задачи о течении в каверне (таблица 1) дает информацию о том, что предложенная авторами первая модифицированная схема типа Лакса, по сравнению со второй модифицированной схемой и другими разностными схемами, более эффективна для численного решения, так как имеет большее значение параметра Куранта для различных чисел Рейнольдса.

Таблица 1. Значения величин γ для сетки 200×200 при решении задачи о течении в каверне

	$Re = 10$	$Re = 30$	$Re = 50$	$Re = 80$
Схема № 1	0,5	0,5	0,5	0,47
Схема № 2	0,47	0,42	0,4	0,38
ЦР	0,02	0,01	0,4	0,01
НР1	0,46	0,41	0,38	0,36
НР2	0,16	0,16	0,16	0,13

По сравнению с первой задачей, сравнение значений γ при решении задачи Куэтта (таблица 2) показывает, что первая модифицированная схема типа Лакса и вторая одинаково эффективны, так как имеют одинаковые значения параметра γ .

Таблица 2. Значения величин γ для сетки 200×200 при решении задачи Куэтта

	$Re = 10$	$Re = 30$	$Re = 50$	$Re = 80$
Схема № 1	0,4	0,32	0,27	0,2
Схема № 2	0,4	0,32	0,27	0,2
ЦР	0,18	0,18	0,18	0,18
НР1	0,4	0,27	0,23	0,18
НР2	0,23	0,18	0,16	0,13

5. Заключение. Рассмотрены две модифицированные разностные схемы типа Лакса решения задач для системы кинетических уравнений (1). В результате численных расчетов показано, что значение γ для первой предложенной схемы типа Лакса больше, чем для второй. Этот факт позволяет назвать схему № 1 более экономичной и устойчивой, так как она позволяет использовать больший шаг по времени.

Литература

1. Четверушкин Б. Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1999. 232 с.
2. Wolf-Gladrow D. A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer, 2005. 311 p.
3. Кривовичев Г. В. Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование, 2012. № 13. С. 332–340.
4. Кривовичев Г. В. Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование, 2013. № 14. С. 1–8.
5. Zou Q., He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // Physics of Fluids, 1997. No 9. P. 1591–1598.

Головкина А. Г.

Санкт-Петербургский государственный университет

К вопросу усиления мощности подкритического реактора¹

Рекомендовано к публикации профессором Овсянниковым Д. А.

1. Введение. В настоящее время в России и за рубежом интенсивно развиваются исследования, связанные с созданием безопасной электроядерной установки (ЭЛЯУ) [1–4], схема которой в качестве основных элементов включает подкритический реактор и мощный генератор нейтронов. В качестве генератора нейтронов в таких системах выступает пучок высокоэнергетических заряженных частиц, взаимодействующих с ядрами мишеней из различных материалов.

Безопасность такой установки обусловлена несколькими факторами:

- реакция деления ядер осуществляется в подкритическом реакторе, что принципиально исключает возможность возникновения неконтролируемой цепной ядерной реакции;
- генерация нейтронов прекращается значительно быстрее, чем в обычном реакторе, так как время отключения не зависит от скорости срабатывания механических систем.

Электроядерные установки могут использоваться для трансмутации радиоактивных отходов, а также для производства энергии. Стоит отметить, что использование ЭЛЯУ в качестве источника энергии целесообразно только в том случае, если затраты на ускорение заряженных частиц меньше, чем энергия, выделяемая на выходе. В связи с этим возникают задачи оптимизации не только для ускорителя [5–8], но и для самого реактора. В данной работе рассматривается задача получения максимального усиления внешнего источника нейтронов (заданной интенсивности) в подкритическом реакторе.

2. Усиление источника нейтронов в активной зоне. В случае, если пространственное распределение внешнего источника нейтронов соответствует распределению источников нейтронов деления

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, НИР № 9.38.673.2013.

в активной зоне («реперный» источник) [9], то интенсивность генерации нейтронов деления и мощность энерговыделения в активной зоне ЭЛЯУ определяются выражениями:

$$Q_{f0} = S_0 \frac{k_{\text{эф}}}{1 - k_{\text{эф}}},$$

$$N_T = \frac{E_f Q_{f0}}{\nu},$$

где S_0 — интенсивность реперного источника нейтронов, $k_{\text{эф}}$ — эффективный коэффициент размножения активной зоны, E_f — энергия, выделяемая при делении одного ядра топлива, ν — среднее число нейтронов на один акт деления топлива.

Для оценки усиления интенсивности генерации нейтронов в активной зоне введем коэффициент усиления, равный отношению интенсивности генерации нейтронов деления для заданного и реперного источников деления:

$$k_{\text{усил}} = \frac{Q_f}{Q_{f0}}, \quad (1)$$

здесь $Q_f = \int_V \int_E \nu \Sigma_f(r, E) \Phi(r, E) dE dV$, V — объем размножающей области, E — энергия нейтронов, $\Sigma_f(r, E)$ — макроскопическое сечение деления ядер топлива, $\Phi(r, E)$ — распределение потока нейтронов.

2.1. Однородная активная зона. Интенсивность генерации нейтронов деления в реакторе зависит от пространственно-энергетического распределения внешнего источника нейтронов заданной интенсивности. В частности, локализация внешнего источника нейтронов в центре активной зоны позволяет увеличить мощность реактора, благодаря уменьшению утечки нейтронов внешнего источника из активной зоны.

Для однородных зон будем рассматривать зависимость коэффициента усиления от $\bar{a} = \frac{r_s}{2r}$ (r — радиус активной зоны, $r_s/2$ — радиус внешнего источника нейтронов). Безразмерный комплекс $k_{\text{усил}}$ характеризует усиление интенсивности нейтронов внешнего источника в подкритическом реакторе, а параметр \bar{a} — неравномерность пространственного распределения внешнего источника нейтронов.

На рис. 1 представлена указанная зависимость для реактора на быстрых нейтронах при $k_{\text{эф}} = 0,98$ и различных геометриях. Расчеты производились на основе многогруппового диффузионно-возрастного приближения [10].

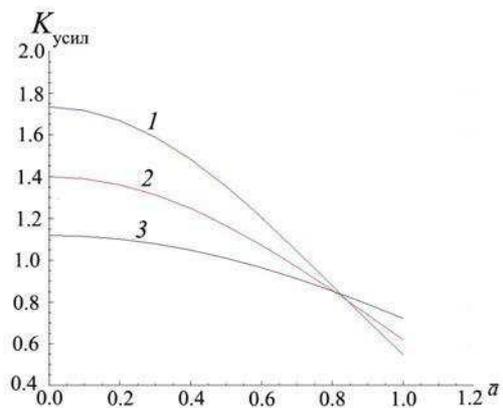


Рис. 1. Зависимость $k_{\text{эф}}$ от \bar{a} ; 1 — сферическая геометрия, 2 — цилиндрическая, 3 — плоская

2.2. Неоднородная активная зона.

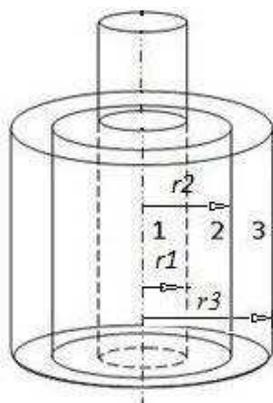


Рис. 2. Схема каскадной активной зоны: 1 — внутренняя секция, 2 — вентиль, 3 — внешняя секция

Также можно добиться дополнительного усиления интенсивности генерации нейтронов деления в реакторе при использовании, так называемых, «каскадных» активных зон (см. рис. 2), состоящих из двух секций, разделенных слоем поглощающего тепловые нейтроны вещества («нейтронный вентиль»). Но расчеты показали, что усиления в таких системах можно добиться только при больших габаритах активной зоны. Поэтому предлагается вместо «нейтронного» использовать «геометрический» вентиль — внутренняя и внешняя зоны на быстрых нейтронах разделены цилиндрическим зазором [11].

Задача определения коэффициента усиления была аналитически решена в однорупповом диффузионном приближении с использованием специальных условий сопряжения в зазоре. Рассматривались активные зоны различных размеров при коэффициенте размножения активной зоны, не превышающем 0,986. Результаты вычислений приведены в таблице.

Таблица. Полученные коэффициенты усиления при различных габаритах зоны

r_1 [см]	r_2 [см]	r_3 [см]	$k_{эф}$	$k_{усил}$
3,60	14,20	20	0,986	2,085
4,10	44,30	50	0,979	2,879
4,60	94,35	100	0,986	3,686
4,60	144,26	150	0,979	4,289
4,60	184,22	190	0,974	4,648

3. Заключение. Расчеты показали, что локализация внешнего источника быстрых нейтронов в центре активной зоны позволяет увеличить мощность реактора по сравнению со случаем равномерного распределения источника по всей активной зоне в 1,4 раза для цилиндрической зоны. При использовании «каскадной» размножающей схемы можно достичь дополнительного усиления интенсивности генерации нейтронов деления до 4,65 раз на длине 190 см.

Литература

1. MYRRHA: Multi-purpose hybrid research reactor for high-tech applications. <http://myrrha.sckcen.be/>
2. MEGAPIE Project. <http://megapie.web.psi.ch/>
3. Oak Ridge National Laboratory Spallation Neutron Source. <http://neutrons.ornl.gov/facilities/SNS/>
4. Kiyavitskaya H., Routkovskaia C., Serafimovich I., et al. Experimental investigations at sub-critical facilities of Joint Institute for Power and Nuclear Research-Sosny of the National Academy of Sciences of Belarus. http://www.iaea.org/OurWork/ST/NE/NEFW/documents/TMonUseofLEUonADS/PDFPapers/Kiyavitskaya_Paper.pdf

5. Свистунов Ю. А., Зуев Ю. В., Овсянников А. Д., Овсянников Д. А. Разработка малогабаритного ускорителя дейтронов для нейтронного генератора на энергию 1 МэВ // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2011. Вып. 1. С. 49–59.
6. Golovkina A. G., Ovsyannikov D. A., Bogdanov A. A., Kudinovich I. V., Struev V. P., Svistunov Yu. A. Project of low-energy accelerator driven power plant // Proceedings of RuPAC 2012, Saint-Petersburg, Russia, 2012. P. 224–226.
7. Свистунов А. Ю., Овсянников А. Д. Разработка компактных ускоряющих структур для комплексов прикладного назначения // Вопросы атомной науки и техники, 2010. Вып. 2. С. 48–51.
8. Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov A. D., Vorogushin M. F., Svistunov Y. A., Durkin A. P. Beam dynamics optimization: Models, methods and applications // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research Section A: Accelerators Spectrometers Detectors and Associated Equipment, 2006. Vol. 558, No 1. P. 11–19.
9. Селиверстов В. В. Умножение нейтронов внешнего источника в каскадных подкритических системах с односторонней нейтронной связью // Атомная энергия, 1996. Т. 81. Вып. 5. С. 378–390.
10. Головкина А. Г., Кудинович И. В., Овсянников Д. А. Мощность подкритического однородного реактора в зависимости от пространственного распределения и энергии нейтронов внешнего источника // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2012. Вып. 2. С. 13–24.
11. Golovkina A. G., Kudinovich I. V., Ovsyannikov D. A. On accelerator Driven Subcritical Reactor Power Gain // Proceedings of ICAP 2012, Rostock, Germany, 2012. P. 259–261.

Громов А. О.

Санкт-Петербургский государственный университет

Проекция плотности для моделей звездных систем с обобщенно-изотермическим потенциалом

Рекомендовано к публикации доцентом Осипковым Л. П.

1. Введение. Классические модели звездных систем с двумя интегралами движения: энергии и площадей — встречают затруднения в описании некоторых наблюдательных фактов. Предполагая существование третьего интеграла, можно объяснить, например, отмечаемую в окрестности Солнца трехосность распределения скоростей.

Следуя Г. Г. Кузмину [1], в рассматриваемом ниже семействе моделей будем предполагать наличие третьего квадратичного по скоростям интеграла движения, который имеет вид:

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2v_\theta^2 + z_0^2(v_z^2 - 2\Phi^*),$$

где R, z — цилиндрические координаты, z_0 — постоянная с размерностью длины, а функция Φ^* связана с потенциалом Φ соотношениями, приведенными в [1].

При работе с такими моделями удобно перейти к эллиптическим координатам $\xi_1 \in [1; \infty)$, $\xi_2 \in [-1; 1]$ по формулам:

$$R = z_0 \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = z_0 \xi_1 \xi_2.$$

Третий квадратичный интеграл движения, как и любой другой, накладывает ограничение на потенциал, который в эллиптических координатах записывается в виде:

$$\Phi = \frac{\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)}{\xi_1^2 - \xi_2^2},$$

где функция φ выбирается так, чтобы выполнялись условия неотрицательности плотности и конечности массы.

Г. Г. Кузминым было показано, что такие модели применимы к реальным звездным системам, в частности к нашей Галактике.

В данной статье, продолжая работу автора [2],[3], исследуется семейство моделей распределения масс в звездных системах,

для которых существует интеграл I_3 . Найдены проекции плотности таких моделей на картинную плоскость.

2. Модели с обобщенно-изотермическим потенциалом.

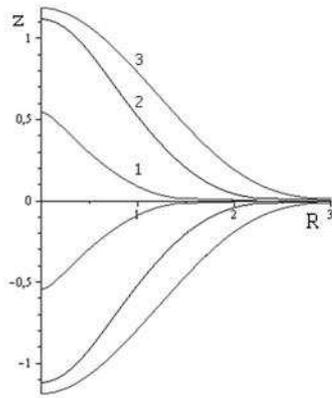


Рис. 1. Эквиденситы для значений параметров $\beta = 1$ и $z_0 = 1.5$

В данном разделе приведем некоторые результаты, которые были получены ранее и более подробно описаны в [2],[3].

Методы построения моделей с третьим квадратичным интегралом движения были разработаны Г. Г. Кузминым [4].

Будем рассматривать модели, потенциал которых в экваториальной плоскости имеет вид:

$$\Phi = \Phi_0 \ln \left(1 + \frac{\beta}{w(R)} \right),$$

где $\Phi_0, \beta \in [0; +\infty)$ — структурные параметры, а функция $w(R)$ определяется как $w^2(R) = 1 + \kappa^2 R^2$, здесь $\kappa^2 = O(\beta^2)$. Масштабный параметр модели полагаем равным единице.

Отметим, что такой потенциал относится к типу потенциала Штеккеля, для которого возможно разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби.

Функция φ оказалась следующей:

$$\varphi(\xi) = \xi^2 \Phi_0 \ln \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}} \right).$$

Для сферических систем такой потенциал предложили Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн и П. Л. Теньес и назвали его обобщенно-изотермическим [5].

Для таких моделей было получено аналитическое выражение для пространственной плотности, которое приводилось в [2]. Также были

построены эквиденситы (кривые равной плотности), которые изображены на рис. 1.

Кривая 1 на рис. 1 соответствует $\rho = 0.3\rho_0$, 2 — $\rho = 0.1\rho_0$, 3 — $\rho = 0.05\rho_0$, где ρ_0 — значение плотности в центре модели.

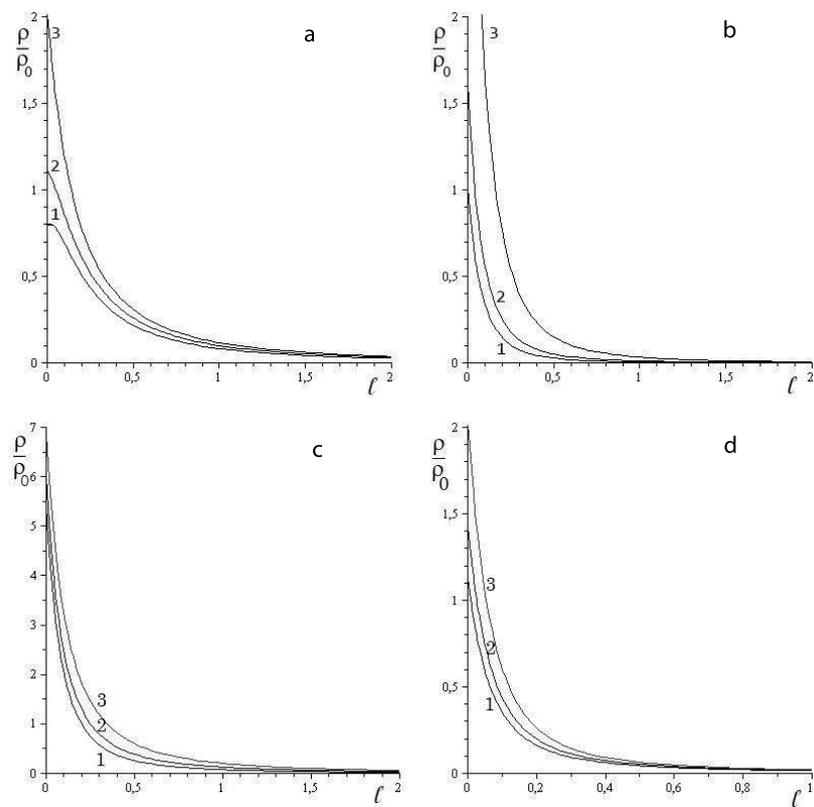


Рис. 2. Проекция плотности вдоль видимой малой оси модели (1 — $\beta = 0.5$, 2 — $\beta = 1$, 3 — $\beta = 2$)

Для моделей с обобщенно-изотермическим потенциалом было получено, что на бесконечности плотность убывает как r^{-4} . Такой порядок убывания дает конечную массу.

3. Проекция плотности. Одной из интересных задач при моделировании звездных систем является нахождение проекций на картинную плоскость. Результаты проектирования могут показать, как согласуются наблюдательные и модельные данные.

Для нахождения спроектированной плотности необходимо проинтегрировать полученную в [2] пространственную плотность вдоль луча зрения. В силу того, что выражение для пространственной плотности получилось довольно-таки громоздким, произвести непосредственное интегрирование не удастся. Сделаем поворот системы координат так, чтобы новая ось z_1 была направлена по лучу зрения. Разложим выражение для пространственной плотности в ряд Лорана по переменной z_1 , взяв его главную часть. Такой выбор обуславливается тем, что на бесконечном удалении от центра, плотность должна монотонно стремиться к нулю. Такой результат для моделей с обобщенно-изотермическим потенциалом был получен в [2]. Необходимое стремление дает только разложение в ряд по отрицательным степеням.

На рис. 2 представлены проекции плотности вдоль видимой малой оси модели для различных значений параметров. По оси 1 будем отсчитывать расстояния от центра звездной системы.

На рис. 2а $z_0 = 1.5$, угол наклона луча к экваториальной плоскости составляет $\frac{\pi}{3}$. В отличие от рис. 2а на рис. 2б угол наклона составляет $\frac{\pi}{6}$. В связи с этим увеличивается скорость убывания функции плотности. Задавая $z_0 = 2$ (см. рис. 2с), видим, что изменяется значение плотности в центре модели. В силу того, что количество членов разложения выбирается произвольно (7 членов главной части), уместно посмотреть, что будет происходить при изменении их числа. На рис. 2d представлены графики, в которых использовалось 10 членов разложения. Как видим, изменения не существенны.

Также интересно построить эквиденситы спроектированной плотности, графики которых представлены ниже. Будем полагать, что в картинной плоскости задана прямоугольная система координат Ouv , начало которой совпадает с началом звездной системы. Такая система координат получается путем такого поворота, что ось w , перпендикулярная плоскости Ouv , направлена по лучу зрения.

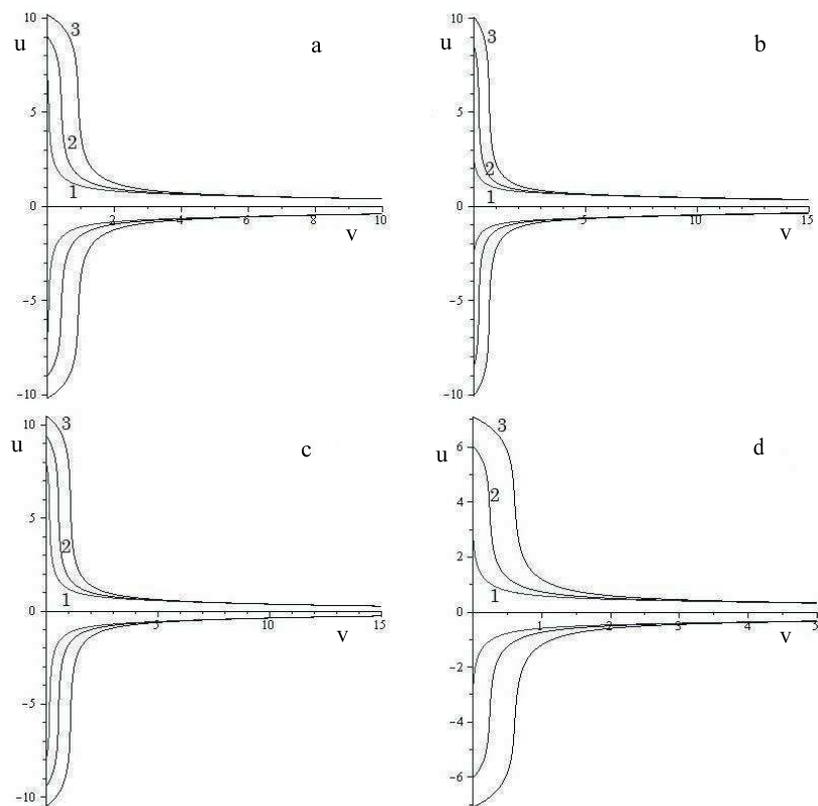


Рис. 3. Эквиденситы спроектированной плотности (1 — $\rho = 0.3\rho_0$,
2 — $\rho = 0.1\rho_0$, 3 — $\rho = 0.05\rho_0$)

Далее будем полагать, что $\beta = 1$. На рис. 3а даны графики для моделей, у которых $z_0 = 1.5$ и угол наклона луча зрения к экваториальной плоскости составляет $\frac{\pi}{3}$. На рис. 3б угол наклона изменен на $\frac{\pi}{6}$. Полагая $z_0 = 2$, получаем графики, показанные на рис. 3с. Изменение этих параметров, а также β , графики для которого не представлены, ведет к изменению сплюснутости эквиденсит. Увеличение количества членов разложения (см. рис. 3д) существенных измене-

ний не вносит.

Заметим, что вытянутость полученных эквиденсит по оси v , возможно, связана с тем, что спроектированная плотность вычисляется приближенно.

4. Заключение. В данной статье были построены графики видимой плотности для моделей звездных систем с обобщенно-изотермическим потенциалом. Такие модели были предложены ранее в [2]. Были исследованы зависимости видимой плотности от значений различных параметров. Необходимость данной работы обуславливается тем, что возможности наблюдения и исследования звездных систем, в частности галактик, ограничены. Сравнение наблюдаемых результатов с моделируемыми дает возможность судить о значимости модели.

Литература

1. Кузмин Г. Г. Третий интеграл движения звезд и динамика стационарной Галактики // Публикации Тартуской астрофизической обсерватории имени В. Струве. 1952. Т. 32. С. 332–368.
2. Громов А. О. Штеккелевские изотермические модели галактик // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. С. 125–129.
3. Gromov A. O. New quasi-isothermal models of galaxies // Astron. Tsirkulyar. 2012. No 1579.
4. Кузмин Г. Г. Модель стационарной Галактики, допускающая трехосное распределение скоростей // Астрономический журнал. 1956. Т. 33. С. 27–45.
5. Кузмин Г. Г., Велтманн Ю.-И. К., Теньес П. Л. Квази-изотермические модели сферических звездных систем // Публикации Тартуской астрофизической обсерватории имени В. Струве. 1986. Т. 51. С. 232–242.

Доманская Т. О., Мальков В. М.
Санкт-Петербургский государственный университет

Задача Мичела для полулинейного материала

Введение. Рассматривается плоская задача нелинейной теории упругости (плоская деформация и плоское напряженное состояние) для полуплоскости при действии сосредоточенной силы на границе. Механические свойства описываются моделью полулинейного материала. Использование этой модели позволило применить теорию комплексных функций и получить общее аналитическое решение краевой задачи. Исходя из этого решения, построена асимптотика напряжений и деформаций в окрестности точки приложения силы.

Общие соотношения. Уравнения обобщенной плоской деформации и плоского напряженного состояния для полулинейного материала представлены в работе [1]. Эти уравнения используются в данной работе.

Уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций плоской задачи в комплексной форме имеют вид

$$\begin{aligned} (s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 &= 0, \\ (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где s_{ij} — компоненты тензора номинальных напряжений, g_{ij} — компоненты градиента деформации, $i, j = 1, 2$.

Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ и комплексную функцию напряжений $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$. Уравнения (1) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, & s_{22} - is_{21} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, & g_{22} - ig_{12} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Комплексные функции $\zeta(z, \bar{z})$ и $\sigma(z, \bar{z})$ находятся из закона упругости и граничных условий задачи.

Закон упругости для полулинейного материала [1]

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + ig_{21}) + \lambda(g_{22} - ig_{12}) + k e^{i\omega}, \\ s_{22} - is_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - ig_{12}) + \lambda(g_{11} + ig_{21}) + k e^{i\omega}, \\ s_{33} &= \lambda[(g_{11} + g_{22}) \cos \omega + (g_{21} - g_{12}) \sin \omega] + k + 2\mu\lambda_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где λ, μ — параметры Ляме, $k = \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu$. Угол ω , характеризующий поворот элемента среды, вычисляется по формуле [2]

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{g_{21} - g_{12}}{g_{11} + g_{22}} = \frac{s_{12} - s_{21}}{s_{11} + s_{22}}.$$

Подставив в первое и второе соотношения (3) выражения (2), получим систему уравнений для функций $\sigma(z, \bar{z})$ и $\zeta(z, \bar{z})$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = -2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (4)$$

Константа c зависит от рассматриваемой задачи. Нужно учесть, что при плоской деформации $\lambda_3 = 1$, $k = -2(\lambda + \mu)$. В случае плоского напряженного состояния λ_3 и k являются функциями, определяемыми из условия $s_{33} = 0$ и третьей формулы (3),

$$\lambda_3 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{2\nu}{1 - \nu} \frac{\partial \zeta}{\partial z} e^{-i\omega}, \quad k = -2\mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \lambda \frac{2\nu}{1 - \nu} \frac{\partial \zeta}{\partial z} e^{-i\omega}.$$

Для указанных задач получим, соответственно

$$c = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad c = \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

где ν — коэффициент Пуассона. Решение уравнений (4) имеет вид

$$2\mu\zeta = \frac{1}{1 + c} [\varphi(z) - \overline{\psi(z)} - f(z, \bar{z})],$$

$$\sigma = \frac{1}{1 + c} [c\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + f(z, \bar{z})],$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические функции комплексной переменной z ,

$$f(z, \bar{z}) = -2\mu c \int e^{i\omega} dz,$$

$$e^{i\omega} = \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|} = \frac{|\varphi'(z)|}{\varphi'(z)} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}}}.$$

Выразим напряжения через функцию $\zeta(z, \bar{z})$

$$s_{11} + is_{12} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right) + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}},$$

$$s_{22} - is_{21} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right) - 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (5)$$

Задача Мичела о сосредоточенной силе. Получим решение нелинейной задачи о сосредоточенной силе на границе верхней полуплоскости. Пусть в начале координат приложена внешняя сила с компонентами F_1 и F_2 , обозначим $F = F_1 + iF_2$. Предполагается, что на бесконечности напряжения и поворот отсутствуют. Условие на границе полуплоскости имеет вид

$$[s_{22} - is_{21}]^+ = p(t), \quad p(t) = -iF\delta(t). \quad (6)$$

Заменяем напряжения в формуле (6) выражениями (5), записав их через функции $\varphi'(z)$ и $\bar{\psi}'(z)$, затем введем комплексную функцию $h(z)$ для верхней S_2 и нижней S_1 полуплоскостей по формулам

$$h(z) = \frac{c}{1+c}\varphi'(z), \quad z \in S_2, \quad h(z) = -\frac{1}{1+c}[\bar{\psi}'(z) + q(z)], \quad z \in S_1,$$

$$q(z) = k \left(\sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\bar{\varphi}'(z)}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\varphi}''(z)}{(\bar{\varphi}'(z))^{3/2}} \int \sqrt{\varphi'(z)} dz \right).$$

Для функции $h(z)$ из условия (6) получим граничную задачу $[h(t)]^+ - [h(t)]^- = p(t)$, решение которой имеет вид

$$h(z) = -\frac{F}{2\pi} \frac{1}{z} + h(\infty), \quad h(\infty) = \frac{2\mu c}{1+c}.$$

Используя это решение, найдем следующие функции

$$\varphi'(z) = -\frac{1+c}{c} \frac{F}{2\pi} \frac{1}{z} + 2\mu, \quad \bar{\psi}'(z) + q(z) = -c\varphi'(z).$$

$$e^{i\omega} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\bar{\varphi}'(z)}} = \sqrt{\frac{(z - F_0)\bar{z}}{(\bar{z} - \bar{F}_0)z}},$$

$$f(z, \bar{z}) = -2\mu c \int e^{i\omega} dz = -2\mu c p(z) \sqrt{\frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{F}_0}},$$

$$q(z) = -2\mu c \left[\sqrt{\frac{z - F_0}{z - \bar{F}_0}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{F}_0}{z - \bar{F}_0} \frac{p(z)}{\sqrt{(z - \bar{F}_0)z}} \right],$$

$$p(z) = \sqrt{z^2 - F_0 z} - F_0 \ln \left(\frac{\sqrt{z - F_0} + \sqrt{z}}{\sqrt{-F_0}} \right),$$

где $F_0 = (1 + c)F/(4\mu\pi c)$. Вычислим производные

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2\mu c \sqrt{\frac{(z - F_0)\bar{z}}{(\bar{z} - \bar{F}_0)z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu c \frac{\bar{F}_0}{\bar{z} - \bar{F}_0} \frac{p(z)}{\sqrt{(\bar{z} - \bar{F}_0)\bar{z}}}.$$

Напряжения будем вычислять по формулам (5), предварительно найдя функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{1}{1 + c} \left[\frac{z - F_0}{z} + c \sqrt{\frac{(z - F_0)\bar{z}}{(\bar{z} - \bar{F}_0)z}} \right], \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} &= \frac{c}{1 + c} \left[\frac{\bar{z} - F_0}{\bar{z}} - \sqrt{\frac{\bar{z} - F_0}{\bar{z} - \bar{F}_0}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{F}_0}{\bar{z} - \bar{F}_0} \frac{p(z) - p(\bar{z})}{\sqrt{(\bar{z} - \bar{F}_0)\bar{z}}} \right]. \end{aligned}$$

Построим асимптотические разложения функций при $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{1}{1 + c} \left(-F_0 \frac{1}{z} + 1 + c\alpha \right) + O(z^2), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} &= \frac{c}{1 + c} \left(-F_0 \frac{1}{\bar{z}} + \beta \right) + O(z^2), \\ e^{i\omega} &= \alpha + O(z^2), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(1 - \frac{z}{2F_0} + \frac{\bar{z}}{2\bar{F}_0} \right) \sqrt{\frac{F_0}{\bar{F}_0}} e^{-i\theta}, \\ \beta &= 1 - \sqrt{\frac{F_0}{\bar{F}_0}} + \frac{1}{2} \bar{z} \left(\frac{1}{F_0} - \frac{1}{\bar{F}_0} \right) \sqrt{\frac{F_0}{\bar{F}_0}} + \frac{1}{3} \frac{z\sqrt{\bar{z}} - \bar{z}\sqrt{z}}{\sqrt{F_0\bar{F}_0\bar{z}}}. \end{aligned}$$

Асимптотические разложения напряжений в этой точке

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= -\frac{2\mu c}{1 + c} \left[F_0 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) - 1 + \alpha - \beta \right] + O(z^2), \\ s_{22} - is_{21} &= -\frac{2\mu c}{1 + c} \left[F_0 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right) - 1 + \alpha + \beta \right] + O(z^2). \end{aligned}$$

Главные члены разложений совпадают с полученными раньше для модели материала Джона [2].

Построим асимптотические разложения напряжений в полярных координатах

$$s_{rr} + is_{r\theta} = -\frac{2\mu c}{1+c} \left(2F_0 \frac{1}{z} - 1 + \alpha - \beta e^{-2i\theta} \right) + O(z^2),$$

$$s_{\theta\theta} - is_{\theta r} = -\frac{2\mu c}{1+c} (-1 + \alpha + \beta e^{-2i\theta}) + O(z^2).$$

Радиальное напряжение s_{rr} и касательное напряжение $s_{r\theta}$ имеют особенность вида $1/r$ в окрестности точки приложения силы, а окружное напряжение $s_{\theta\theta}$ и касательное напряжение $s_{\theta r}$ не имеют особенности. Отсутствие особенностей у напряжений $s_{\theta\theta}$ и $s_{\theta r}$ соответствует граничным условиям (6), которые можно записать так: $[s_{\theta\theta} - is_{\theta r}]^+ = -iF\delta(t)$.

Разложения текущих координат в окрестности точки приложения силы в случаях плоской деформации и плоского напряженного состояния при $r \rightarrow 0$

$$\zeta = -\frac{2}{1+c} F_0 \ln r + \frac{1}{1+c} r e^{i\theta} + \frac{2c}{1+c} \sqrt{\frac{F_0}{F_0}} r + O(r^2).$$

Выводы. Сравнение с результатами решения линейных задач Мичела и Фламана [3] показало, что напряжения и перемещения имеют одинаковый вид особенности в окрестности точки приложения силы: напряжения $-1/r$, перемещения имеют логарифмическую особенность $\ln r$. В то же время имеются и принципиальные различия: в линейных задачах только радиальные напряжения отличны от нуля, а в нелинейных и касательные напряжения не равны нулю. Кроме того, коэффициенты при сингулярных членах в нелинейных и линейных задачах различны.

Литература

1. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоские задачи упругости для полулинейного материала // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2012. Вып. 3. С. 93–106.
2. Мальков В. М. Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. 276 с.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1957. 576 с.

Елаев Е. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Расчет допусков в ускоряющих и фокусирующих структурах¹

Рекомендовано к публикации профессором Овсянниковым Д. А.

1. Введение. При проектировании любой системы определяются номинальные (расчетные) значения ее параметров, при которых система будет функционировать удовлетворяя заданному критерию качества. Но ускоритель любого типа является очень сложной структурой, в которой невозможно обеспечить совпадения реальных значений параметров с номинальными. Отклонения значений параметров от расчетных в общем случае влияют на качество функционирования системы и вызывают отклонения от заданного критерия качества, что может вызвать негативные последствия. Задача определения допусков состоит в нахождении максимально возможных отклонений реальных параметров от расчетных, при которых качество функционирования системы удовлетворяет заранее заданному критерию.

В статье рассмотрена задача нахождения допусков в ускоряющих и фокусирующих структурах на примере ускорителе заряженных частиц с трубками дрейфа. Предложены методы нахождения допусков. Приведен статистический анализ полученных значений допусков.

2. Математическая постановка. Рассматривается задача нахождения допусков динамики продольного и поперечного движения пучка заряженных частиц в ускорителе с трубками дрейфа. Уравнения, описывающие данный процесс, имеют следующий вид:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \quad (1)$$

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \alpha(\xi) \cos \varphi, \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, НИР 9.38.673.20 13

$$\frac{dr}{d\xi} = \eta, \quad (3)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\pi\alpha \sin \varphi}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} r - \frac{\alpha \cos \varphi}{\gamma} \eta - \frac{1}{2} \frac{\gamma \cos \varphi}{\gamma^2 - 1} r \frac{d\alpha}{d\xi} \quad (4)$$

где $\alpha(\xi)$ — кусочно-постоянная функция, заданная на интервале $[0, L]$, причем

$$\alpha(\xi) = \alpha^i, \quad \xi \in [\mu_{i-1}, \mu_i], \quad i = \overline{1, m}.$$

Здесь μ_i — точки разбиения промежутка $[0, L]$ такие, что $0 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_m = L$, m — фиксированное неотрицательное целое число. Уравнения (1), (2) описывают продольное движения заряженных частиц, а (3), (4) — соответственно поперечное.

Введем в рассмотрение функционал качества I , характеризующий качество функционирования системы в зависимости от параметра μ_i

$$I = \int_{M_{L, \mu, \alpha}} \left(a(\varphi_L - \bar{\varphi})^2 + b \left(\frac{\gamma_L}{\bar{\gamma}} - 1 \right) + cr^2 + d\eta^2 \right) d\varphi_L d\gamma_L dr_L d\eta_L$$

Отметим, что $M_{L, \mu, \alpha}$ — сечение пучка траекторий, соответствующих управляющим параметрам α и μ ; $\bar{\varphi}$, $\bar{\gamma}$ — средние энергия и фаза.

Известны номинальные значения параметров $\mu_0 = (\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})$. Требуется теоретически по заданному $\Delta > 0$ определить допуски $\Delta_i > 0$, где $i = \overline{1, m}$, такие, что

$$|\Delta I| = |I(\mu_0 + \Delta\mu) - I(\mu_0)| \leq \Delta$$

при $|\Delta\mu_i| \leq \Delta_i$, $\Delta\mu = (\Delta\mu_1, \dots, \Delta\mu_m)$, и провести статистический анализ полученных значений допусков.

3. Определение допусков. При расчете допусков методами теории чувствительности предполагается, что отклонения значений параметров от номинальных малы и что изменения параметров в пределах поля допуска являются линейными. Тогда полное приращение функционала качества I можно заменить его вариацией

$$\delta I \approx \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial I(\mu_0)}{\partial \mu_i} \right) \Delta\mu_i.$$

Для определения допусков будем использовать принцип равных влияний [2], который предполагает, что изменение каждого входного параметра на выходную величину влияет одинаковым образом. Отсюда получаем формулу для расчета допусков

$$\Delta_i = \Delta(m^{-\frac{1}{2}}) \left| \frac{\partial I(\mu_0)}{\partial \mu_{i0}} \right|^{-1}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Для нахождения допусков при $i = \overline{1, m}$ используется следующее представление коэффициентов чувствительности [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\mu)}{\partial \mu_i} = & - \int_{M_{\mu_i, \alpha}} (\psi_2 \cos \varphi(\mu_i)(\alpha_i - \alpha_{i+1}) - \lambda \frac{\cos \varphi(\mu_i) \eta}{\gamma} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \\ & + \psi_4 \left(\frac{r \pi \sin \varphi(\mu_i)}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{\eta \cos \varphi(\mu_i)}{\gamma} \right) (\alpha_i - \alpha_{i+1}) dx_{\mu_i}, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Величины $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \lambda$ находим, решая следующую сопряженную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\xi} &= \psi_1 \frac{\alpha \cos \varphi}{\gamma} + \psi_2 \alpha \sin \varphi - \psi_4 \frac{\pi \alpha r \cos \varphi}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - \psi_4 \frac{\alpha \eta \sin \varphi}{\gamma} - \lambda \frac{\alpha \sin \varphi}{\gamma}, \\ \frac{d\psi_2}{d\xi} &= \psi_1 \frac{2\pi}{(\gamma^2 - 1)^{3/2}} + \psi_2 \frac{\alpha \cos \varphi}{\gamma} + \psi_4 \frac{\pi \alpha r \gamma \sin \varphi}{(\gamma^2 - 1)^{3/2}} - \psi_4 \frac{\alpha \eta \cos \varphi}{\gamma^2} - \\ & - \lambda \frac{\alpha \cos \varphi}{\gamma^2}, \\ \frac{d\psi_3}{d\xi} &= \frac{\alpha \cos \varphi}{\gamma} \psi_3 - \frac{\pi \alpha \sin \varphi}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \psi_4, \\ \frac{d\psi_4}{d\xi} &= -\psi_3 + \frac{2\alpha \cos \varphi}{\gamma} \psi_4, \\ \frac{d\lambda}{d\xi} &= \frac{\alpha \cos \varphi}{\gamma} \lambda, \end{aligned}$$

с конечными условиями

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -2a(\varphi_L - \bar{\varphi}), \\ \psi_2 &= -\frac{2b}{\bar{\gamma}}\left(\frac{\gamma_L}{\bar{\gamma}} - 1\right), \\ \psi_3 &= -2cr_L, \\ \psi_4 &= -2d\eta_L, \\ \lambda &= a(\varphi_L - \bar{\varphi})^2 + b\left(\frac{\gamma_L}{\bar{\gamma}} - 1\right)^2 + cr_L^2 + d\eta_L^2,\end{aligned}$$

где $\bar{\gamma}, \bar{\varphi}$ — средняя энергия и фаза пучка. При этом учитывается импульсное воздействие на элементы сопряженной системы в точках разрыва управления α [1]. После нахождения значений допусков осуществляется статистический анализ полученных результатов [3].

4. Результаты. Был проведен расчет допусков на параметры системы μ_i , $i = \overline{1, m}$, при которых отклонение функционалов качества системы, характеризующих продольное и радиальное движение заряженных частиц в ускорителе с трубками дрейфа не превысит 5% (см. рис. 1).

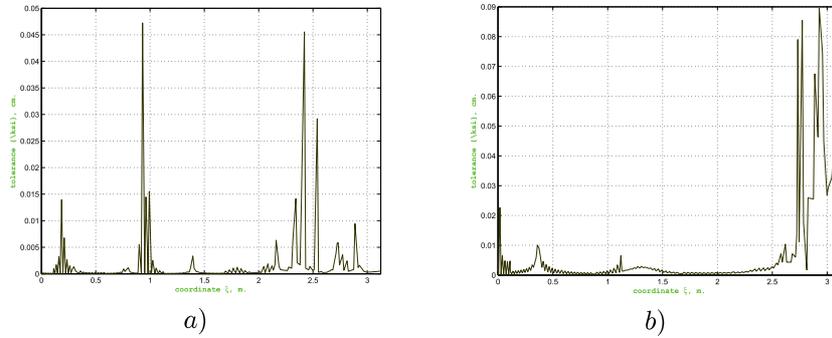


Рис. 1. Значения допусков, при которых отклонения функционалов качества, характеризующих соответственно продольное *a)* и радиальное *b)* движение, не превысит 5%

Напомним, что параметры μ_i , $i = \overline{1, m}$, являются координатами начала и конца трубок дрейфа.

Статистический анализ показал, что при увеличении поля допусков радиального движения в 2,5 раза отклонение функционала

качества, характеризующего это движение составит 4,2%, и соответственно при расширении поля допусков продольного движения в 3,4 раза отклонение функционала качества, характеризующего это движение, составит 4,4%, что сопоставимо с первоначально заданным отклонением в 5% (см. рис. 3).

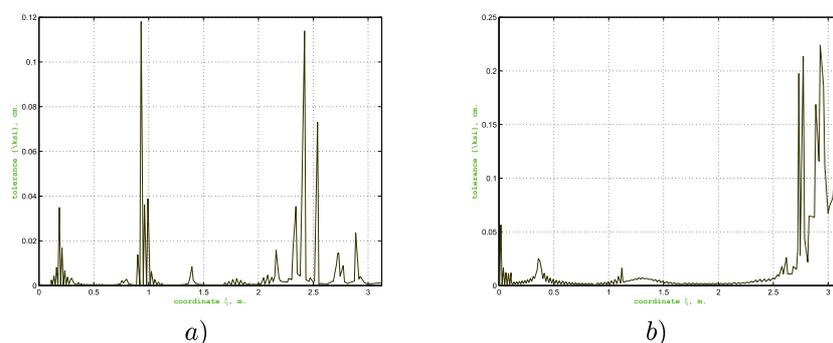


Рис. 2. Значения допусков, при которых отклонения функционалов качества, характеризующих соответственно продольное *a)* и радиальное *b)* движение, не превысит 5%, после статистической проверки

Очевидно, что для того чтобы получить допуски, в пределах которых отклонение функционалов качества, характеризующих как поперечное, так и продольное движение, не превышало бы заранее заданной величины (см. рис. 3), следует допуск на каждый параметр структуры принять, равным наименьшему значению из полученных выше значений допусков (см. рис. 2).

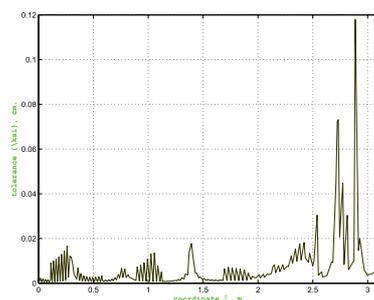


Рис. 3. Общее значение допусков, при которых отклонение функционала качества не превысит 5%

5. Заключение. В статье исследована методика определения допусков, соединяющая в себе как поиск допусков с использованием аналитического представления вариации функционала, так и статистический анализ полученных результатов. В результате работы получена ситуация, которая позволяет учитывать распределенные допуски на систему. В дальнейшем для нахождения допусков радиального движения планируется использовать уравнения для огибающей пучка.

Литература

1. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 228 с.
2. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1986. 463 с.
3. Yelaev Y. V. Calculation of tolerance and statistical test // Proceedings of RuPAC2012, St. Petersburg, Russia, 2012. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/rupac2012/papers/tuppb021.pdf>
4. Власов А. Д. Теория линейных укорителей. М.: Атомиздат, 1965. 308 с.

Ермолин В. С., Митюшин Ф. М.
Санкт-Петербургский государственный университет

Расчет временных зон радиовидимости района

1. Введение. Рассматривается задача построения расписания временных зон радиовидимости района на заданном интервале времени. Необходимость рассмотрения такой задачи возникает при решении проблем космической навигации и эксплуатации спутниковых систем космической связи.

Под временной зоной радиовидимости района понимается отрезок времени, в течение которого из любой точки района, заданного на поверхности Земли, может быть осуществлен контакт со спутником при заданных ограничениях. Контакт возможен только тогда, когда спутник виден из любой точки района под углом места $\varepsilon \geq \varepsilon_{min}$, и длительность временной зоны радиовидимости удовлетворяет неравенству

$$t_{6yx} - t_{6x} \geq \tau_0.$$

Величины $\varepsilon \geq 0$ и $\tau_0 > 0$ принимают фиксированные значения для каждого района. Моменты времени t_{6x} и t_{6yx} называются параметрами временной зоны радиовидимости района: t_{6x} — начало зоны, t_{6yx} — ее конец. Контакты осуществляются во время сеансов связи, которые проводятся в зонах радиовидимости. Задача определения сеансов связи для района рассматривалась в работах [1, 2]. В них дано описание алгоритма, основанного на методе расчета зон радиовидимости района с применением процедуры вычисления угла места некоторой характерной точки района. При движении спутника эта точка меняла положение в районе. Такой факт вызывал необходимость проведения дополнительных расчетов для определения угла места, соответствующего новому значению момента времени.

Алгоритм, предлагаемый в данной статье, в отличие от того, который описан в [2], не использует расчета угла места для какой-либо точки района. По нему временные параметры t_{6x} и t_{6yx} зоны радиовидимости района (сеансов связи) находятся как решение уравнения, вытекающего из необходимого условия видимости района. Вывод уравнения дается на основе анализа соотношений между геометрическими характеристиками заданного района и характеристиками

географической зоны видимости спутником точек поверхности Земли. Под географической зоной видимости, как и в [3, 4], понимается часть поверхности Земли, из любой точки которой спутник виден под углом места $\varepsilon \geq \varepsilon_{min}$.

2. Постановка задачи. В общей постановке задача формирования базы данных для расписаний сеансов связи заданных районов формулируется следующим образом. На поверхности Земли задаются k районов. Имеется сеть из n спутников связи с орбитами на малых и средних высотах порядка от 600 км до 1300 км. В гринвичской системе координат в моменты времени t_{0i} , $i = \overline{1, n}$, задаются начальные положения и скорости $x_i, y_i, z_i, V_{xi}, V_{yi}, V_{zi}$, а также баллистический коэффициент S_i . Этот коэффициент является параметром в законах влияния аэродинамических сил на движения спутников. Вместе с начальными условиями указываются доверительные интервалы J по времени, в течение которых поступившие данные могут быть использованы для расчета положений спутников. При описании районов принимается сферическая модель Земли. Для каждого района указываются:

- а) ε_{min}^j — минимальное значение угла места, начиная с которого из всех точек района с номером j можно установить контакт со спутником;
- б) географические координаты центра района — широта φ_j и долгота λ_j (в градусах);
- в) угловой радиус α_p района (в градусах), $j = \overline{1, k}$.

Под угловым радиусом α_p района понимается конический угловой радиус сегмента на поверхности Земли, который, с одной стороны, совпадает с заданным районом, а с другой — является пересечением ее поверхности с круговым конусом. Конус имеет вершину в центре Земли. Его ось проходит через центр района (см. рис. 1). На рисунке точка O обозначает центр Земли, P_{φ} — центр района, C — положение спутника, Γ_{r1}, Γ_{r2} — граничные точки заданного района. Все указанные геометрические объекты находятся в плоскости, проходящей через центр Земли, центр района и положение спутника, которое он занимает в фиксированный момент времени t .

Задача состоит в построении временных параметров зон радиовидимости районов на доверительных интервалах J действия начальных условий и в формировании базы данных для построения рас-

писаний сеансов связи. Очевидно, основой построения базы данных для k районов и n спутников на заданном интервале времени является построение такой базы по одному району и одному спутнику. А потому дадим решение этой задачи. Прежде всего, найдем условия, при которых она разрешима, а затем опишем алгоритм решения.

3. Уравнения движения спутника. Для описания движения спутников в указанном в постановке задачи диапазоне высот воспользуемся уравнениями, приведенными в работах [3, 5]. Эти уравнения в течение длительного периода времени используются в качестве математической модели движения для таких спутников. Как показывают результаты, точность определения положения космических аппаратов по данным моделям достаточна для решения практических задач обеспечения связью наземных объектов. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = (\omega_3^2 - A)x + 2\omega_3 V_y - S\rho V V_x, \\ \dot{V}_y = (\omega_3^2 - A)y - 2\omega_3 V_x - S\rho V V_y, \\ \dot{V}_z = (2BC - A)z - S\rho V V_z, \\ \dot{x} = V_x, \quad \dot{y} = V_y, \quad \dot{z} = V_z. \end{cases} \quad (1)$$

Они описывают движения спутника в гринвичской системе координат с учетом силы притяжения Земли, силы переносного движения, возникающей из-за вращения Земли вокруг своей оси, силы Кориолиса и силы сопротивления воздуха. В потенциале Земли при вычислении силы притяжения учитывается коэффициент α_{20} сжатия Земли. Сила сопротивления воздуха определяется по закону, описанному в [5, стр. 398–400]. В уравнениях (1) коэффициент S при плотности ρ обозначает баллистический коэффициент.

4. Условия существования временных зон радиовидимости. Цель данного раздела — вывести соотношения, которым должны удовлетворять временные характеристики t_{bx} и t_{bvx} зоны радиовидимости.

Фиксируем произвольный момент времени t . В этот момент спутник занимает положение $\vec{r}_c = \vec{r}(t)$, где $\vec{r}(t)$ — вектор-функция, описывающая движение спутника относительно гринвичской системы координат. На рис. 2 изображена географическая зона видимости спутником точек поверхности Земли под углом места $\varepsilon \geq \varepsilon_{min}$. На нем точка O обозначает центр Земли, C — точка, в которой нахо-

дится спутник, а Γ_{C1}, Γ_{C2} — граничные точки географической зоны видимости. Все граничные точки принадлежат окружности, ортогональной положению \vec{r}_c спутника. Географическая зона видимости является сегментом сферы на поверхности Земли, ограниченным ее пересечением с конусом, имеющим вершину C и ось CO . Образующие конуса находятся под углом ε_{min} к касательным к сфере в граничных точках зоны видимости, расположенных в плоскостях, содержащих ось конуса. На рис. 2 показаны также углы γ_c — это половина сферического угла при вершине C и β_c — половина сферического угла конуса с вершиной в центре Земли. Угол γ_c будем называть угловым радиусом обзора спутником географической зоны видимости, а угол β_c — угловым радиусом поверхности географической зоны видимости. Из построения географической зоны видимости следует, что γ_c, β_c и ε_{min} связаны соотношениями

$$\gamma_c + \beta_c + \varepsilon_{min} = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \beta_c < \frac{\pi}{2}, \quad \sin \gamma_c = \frac{R}{r_c} \cos \varepsilon_{min}.$$

Из них находим

$$\gamma_c = \arcsin \left(\frac{R}{r_c} \cos \varepsilon_{min} \right), \quad \beta_c = \frac{\pi}{2} - (\gamma_c + \varepsilon_{min}). \quad (2)$$

Для того чтобы из любой точки района был виден спутник и был возможен контакт с ним, необходимо, чтобы центр района P_u и все граничные точки района принадлежали географической зоне видимости. Легко заметить, если $\alpha_p > \beta_c$, то заданный район по размерам превышает географическую зону видимости. В таком случае момент времени t , для которого построена географическая зона, не принадлежит зоне радиовидимости.

Обозначим β_p — угол между векторами \vec{r}_c и \vec{r}_{pu} , где \vec{r}_{pu} — радиус-вектор центра района (см. рис. 1). Имеем

$$\cos \beta_p = \frac{(\vec{r}_c, \vec{r}_{pu})}{r_c \cdot R}. \quad (3)$$

Угол β_p при любых t удовлетворяет неравенствам $0 \leq \beta_p \leq \pi$. Если $\beta_p > \beta_c > 0$, то центр района находится вне географической зоны видимости. Нарушается необходимое условие существования зоны радиовидимости. Если $\beta_p \leq \beta_c < \frac{\pi}{2}$, то центр района принадлежит географической зоне видимости. Из геометрических построений

(см. рис. 1, 2) заключаем, что для того чтобы в фиксированный момент времени t район находился в географической зоне видимости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha_p \leq \beta_c, \quad 0 \leq \beta_p \leq \beta_c - \alpha_p. \quad (4)$$

Углы β_c и β_p зависят от положения \vec{r}_c спутника в момент времени t и определяются по формулам (2) и (3), соответственно. При выполнении условий (4) параметры $t_{вх}$ и $t_{вых}$ зоны радиовидимости будут корнями уравнения

$$\beta_p = \beta_c - \alpha_p. \quad (5)$$

Пусть в момент времени \bar{t} район находится в географической зоне видимости, т. е. в этот момент выполняются условия (4). Тогда параметр «время $t_{вых}$ » — время выхода из зоны радиовидимости района совпадает с ближайшим моментом τ времени после \bar{t} , в который нарушается хотя бы одно из неравенств (4).

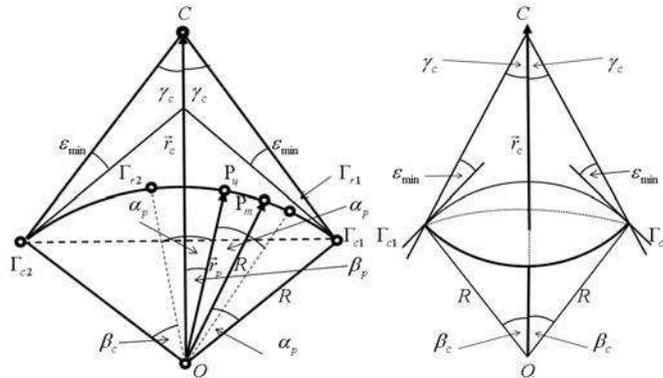


Рис. 1.

Рис. 2.

Если нарушается второе неравенство (4), т. е. имеет место соотношение $\beta_p > \beta_c - \alpha_p$, то «время $t_{вых}$ » совпадает с максимальным корнем уравнения (5), удовлетворяющим условию $\bar{t} \leq t_{вых} < \tau$. Если нарушается первое неравенство (4), т. е. имеем в момент τ неравенство $\alpha_p > \beta_c$, то $t_{вых}$ является максимальным корнем уравнения $\alpha_p = \beta_c$, удовлетворяющим условию $\bar{t} \leq t_{вых} < \tau$.

Пусть в момент времени \bar{t} район находится вне географической зоны видимости, т. е. в этот момент нарушается хотя бы одно из неравенств (4). В таком случае параметр «время $t_{\text{вых}}$ » — время входа в зону радиовидимости района совпадает с ближайшим моментом времени после \bar{t} , в который выполняются неравенства (4).

5. Описание алгоритма. Алгоритм решения задачи состоит из пяти блоков.

Блок 1. Производит обработку базы данных, содержащей неизменяющуюся и переменную исходную информацию, поступившую на входе. Формирует начальную базу данных для одного района и спутника, необходимую для расчета зон радиовидимости. Производит расчет геоцентрических координат центра района.

Блок 2. Рассчитывает баллистическую базу данных спутника. База содержит баллистические параметры спутника (идентификаторы района и спутника, время, положение и скорость), полученные интегрированием уравнения (1) с заданным шагом.

Блок 3. Формирует расчетную базу данных для построения временных параметров зон радиовидимости. Для каждого узлового момента времени из баллистической базы находит значение идентификатора взаимного расположения района и географической зоны видимости. Оно устанавливается в зависимости от выполнения или не выполнения условий (4) и записывается в выходную базу в форме, удобной для использования в работе блоков 4 и 5.

Блок 4. Формирует базу данных для работы блока 5. Для этого по расчетной базе данных, построенной в блоке 3, находит интервалы времени, на которых имеются корни уравнения (5), и с заданной точностью строит эти корни. Результаты записывает в базу данных для работы блока 5.

Блок 5. На основе базы данных, построенной в блоке 4, проводит проверки сочетаний значений идентификаторов взаимного расположения района и географической зоны видимости, а также логические проверки, описанные в конце раздела 3. По их результатам находятся временные параметры «вход-выход» для всех зон радиовидимости на доверительном интервале времени.

6. Заключение. В заключение отметим, что описанный алгоритм позволяет оперативно и быстро формировать базу данных для построения расписаний сеансов связи, которые проводятся через спутник, между любыми объектами, находящимися в заданном

районе. Основное время работы по этому алгоритму занимает интегрирование системы уравнений (1) и поиск корней трансцендентного уравнения для временных характеристик зон радиовидимости.

Литература

1. Ермолин В. С. Определение временных параметров зон видимости района // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тезисы докладов 2-й международной конференции. Саранск: Мордовский ун-т, 1996. С. 71.
2. Демьянова Э. В., Ермолин В. С. Расчет зон видимости в системах спутниковой связи // Дифференциальные уравнения и их приложения: Труды 3-й международной конференции. Саранск: Мордовский ун-т, 1998. С. 118–119.
3. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
4. Кутузов С. А., Марданова М. А., Осипков Л. П., Старков В. Н. Моделирование обстоятельств наблюдения ИСЗ // Учебное пособие: Проблемы математического моделирования космических систем / СПб.: «СОЛО», 2009. 228 с.
5. Космические траекторные измерения // Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных / Под ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева. М.: Советское радио, 1969. 504 с.

Ефимова П. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Об особенностях управления космическими роботами-манипуляторами

Рекомендовано к публикации доцентом Шиманчуком Д. В.

Введение. Одной из актуальнейших проблем робототехники является проблема создания систем дистанционного управления роботами-манипуляторами. В первую очередь это обусловлено резко возросшей необходимостью проведения работ в экстремальных условиях, т. е. условиях, которые характеризуются высокой потенциальной опасностью для человека.

Одним из примеров экстремальных условий служит космическое пространство. Робототехника здесь необходима для снижения влияния на космонавтов таких неблагоприятных факторов как вакуум, радиация, перепады температур, а также для повышения надежности, качества и производительности при выполнении операций.

Космические роботы-манипуляторы по многим характеристикам отличаются от наземных, что выделяет их исследование в отдельную научно-техническую проблему. К таким особенностям относятся:

- отсутствие поля тяжести;
- большие размеры и массы грузов;
- подвижность основания робота-манипулятора;
- управление объектом должно осуществляться в рамках ограничений на топливно-энергетические расходы, ограничений на управляющие воздействия;
- возможность изменения числа степеней свободы в процессе функционирования;
- присутствие двух основных фаз перемещения: полет с грузом и порожний полет;
- требование особо высокого уровня безопасности и предельной легкости управления.

Эти и еще многие другие особенности работы манипуляторов в условиях космоса требуют поиска новых решений как в принципах построения системы управления, так и в алгоритмах реализации их основных функций.

Системы управления робота. Имеются ручной, полуавтоматический и автоматический режимы управления. Несмотря на современные достижения робототехники, реально используемые роботы все еще далеки от устройств с искусственным интеллектом и главная обратная связь в них по-прежнему осуществляется через оператора.

С учетом того, что при работе в космосе в течение десятка лет изменяется как сама среда, так и стоящие перед робототехническими системами задачи, априорная неопределенность условий, в которых должны функционировать космические роботы-манипуляторы, не позволяет решать все задачи с использованием только программных и адаптивных режимов управления. В контур управления должен включаться человек-оператор.

Полуавтоматические и ручные системы являются, с другой стороны, слишком примитивными и могут использоваться только фрагментарно в процессе работы наряду с другими — основными режимами управления. Таким образом, единственно разумным способом управления космической робототехнической системой является супервизорный [1], когда человек-оператор ставит робототехнической системе достаточно локальные, не слишком сложные для нее цели, которые она исполняет в автоматическом режиме, как правило, под визуальным и иным контролем оператора.

Иерархия системы управления робота. Обычно выделяют пять функциональных уровней иерархии системы управления робота [2]:

- общее функционирование;
- законченные технологические операции;
- элементарные операции в функции информации о внешней среде;
- элементарные программные операции;
- приводы.

Входом каждого уровня являются команды, поступающие с предыдущего уровня, а выходом — команды для следующего уровня. Первые два уровня приведенной иерархии отвечают супервизорному управлению, именно на них оператор формирует задание роботу в некотором обобщенном виде или в виде конкретной операции.

С точки зрения архитектуры сформировалось представление о двухуровневой структуре системы управления робота [2]:

- верхний уровень;
- приводной уровень.

Верхний уровень обеспечивает функции планирования, программирования, формирования и отработки задания в целом, в то время как приводной уровень — отработку приводами поступающих с верхнего уровня обобщенных координат робота.

Супервизорная система управления. Место супервизорной системы управления в составе верхнего уровня системы управления и ее структура отображены на рис. 1 [2].

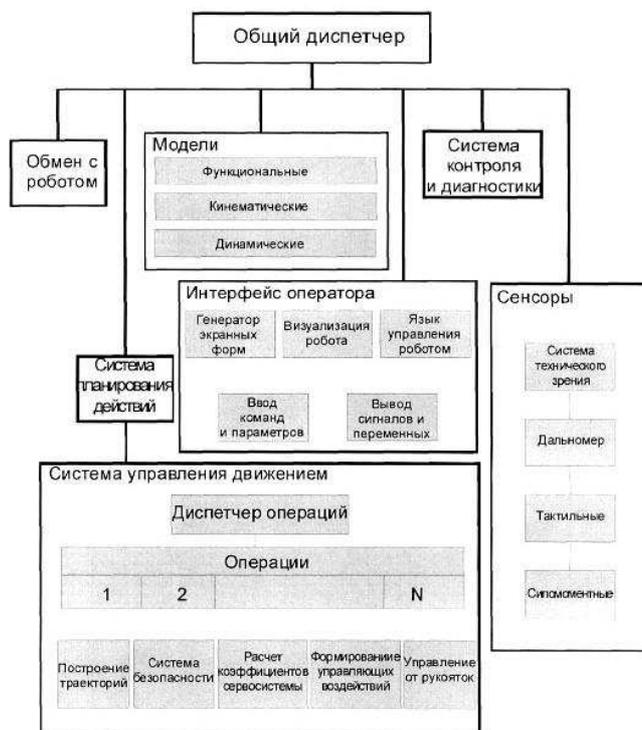


Рис. 1. Структура верхнего уровня супервизорной системы управления робота

Из структуры верхнего уровня супервизорной системы управления робота видно, что человек-оператор, сообразуясь с внешней

ситуацией и характером решаемой задачи, составляет командную фразу-директиву, которая фактически является планом для высшего управляющего уровня робота. В дополнение к этому человек должен непрерывно контролировать процесс выполнения роботом этой директивы и в случае необходимости, т. е. при возникновении непредвиденной или аварийной ситуации, непосредственно вмешиваться в процесс управления роботом.

Заключение. В результате проведенного исследования были выделены наиболее характерные особенности функционирования манипуляторов в космическом пространстве. Поставлена задача построения и реализации системы управления для такого типа роботов. Обоснована значимость супервизорного управления для робототехнических систем космического назначения, показано его место в иерархии системы управления робота.

Литература

1. Кулаков Ф. М. Супервизорное управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. Макарычев В. П. Разработка и исследование систем супервизорного управления космическими манипуляторами. Диссертация на соискание уч. степени канд. техн. наук, ЦНИИ Робототехники и технической кибернетики. Санкт-Петербург., 2005. 203 с.

Зартдинов А. Н., Никифоров К. А.
Санкт-Петербургский государственный университет

Усиление электрического поля на наноструктурной эмиссионной поверхности

1. Введение. Объектом исследования является полевой эмиссионный катод, представляющий собой многоэмиттерную матричную структуру. Микроэмиттеры автоэмиссионной матрицы расположены в квадратной решетке и имеют цилиндрическую форму с острой верхней кромкой [1].

Матричные автоэлектронные катоды используются в тех случаях, когда требуется высокая плотность тока и его большие интегральные значения. Преимуществами автоэлектронных эмиттеров являются отсутствие энергетических затрат на подогрев и безынерционность работы.

2. Нанорельеф поверхности. Детализированный анализ в сканирующем электронном микроскопе (СЭМ) зазубренного лезвия эмиттера выявил множество острых выступов с радиусом кривизны < 10 нм, которые работают как точечные полевые эмиттеры с чрезвычайно большой суммарной эмиссионной поверхностью. Такой нанорельеф естественным образом влияет на распределение электростатического поля и определяет автоэмиссионные характеристики катода. Пример СЭМ изображения нанорельефа поверхности показан на рис. 1. Снимки получились размытыми из-за недостаточной разрешающей способности СЭМ. Для выделения на этих снимках четких контуров были опробованы различные алгоритмы цифровой обработки изображений. Наилучшие результаты (рис. 1) продемонстрировал метод, использующий дискретный дифференциальный оператор Собеля, вычисляющий приближенное значение градиента (или его нормы) яркости изображения в каждой точке.

Обработанные изображения позволили определить приближительную структуру нанорельефа. На снимке можно заметить, что радиусы кривизны вершин, высоты острий различаются несильно, также имеются некоторые закономерности в их расположении. Путем многочисленных измерений были найдены средние величины радиуса кривизны острия r , высоты h , шага между вершинами b и угла

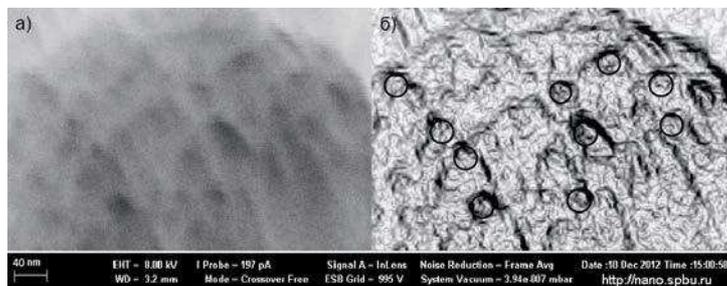


Рис. 1. а) Изображение нанорельефа в СЭМ б) Изображение нанорельефа после обработки

при вершине α : $r = 6$ нм, $h = 14$ нм, $b = 15$ нм, $\alpha = 54^\circ$.

3. Коэффициент усиления поля. Коэффициент усиления поля характеризует степень воздействия нанорельефа поверхности на распределение электростатического поля.

Под коэффициентом усиления поля будем понимать величину

$$\beta(\mathbf{s}) = \frac{E_n(\mathbf{s})}{E_0(\mathbf{s})},$$

где $E_n(\mathbf{s})$ — величина нормальной составляющей локальной напряженности поля на наноструктурной поверхности в точке \mathbf{s} , $E_0(\mathbf{s})$ — напряженность прикладываемого электрического поля на расстоянии d от поверхности (без учета нанорельефа).

Зная коэффициент усиления поля в каждой точке, можно вычислить величину плотности тока в этой точке по формуле Фаулера — Нордгейма:

$$j(\beta(\mathbf{s})E_0(\mathbf{s})) = \frac{A(\beta(\mathbf{s})E_0(\mathbf{s}))^2}{\phi} \exp \frac{-B\phi^{\frac{3}{2}}}{\beta(\mathbf{s})E_0(\mathbf{s})},$$

где ϕ — работа выхода материала, A и B — величины, зависящие от физических констант.

Зная плотность тока в области S , можно определить величину

силы тока, эмиттированного поверхностью:

$$I = \int_S j(\beta(\mathbf{s})E_0(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \quad (1)$$

В формуле (1), в отличие от «микрозадачи», область интегрирования S является сложной поверхностью нанорельефа. Для того, чтобы упростить вычисление тока эмиссии, используется эффективное значение коэффициента усиления поля $\beta_{\text{эфф}}$, при котором гладкая поверхность, интегрирования в рамках «микрозадачи», соответствует сложной поверхности в «нанозадаче»:

$$I = \int_{S_0} j(\beta_{\text{эфф}}E_0)d\mathbf{s}, \quad (2)$$

где S_0 — гладкая поверхность эмиттера в микромасштабе, а величина I вычисляется по формуле (1) [2]. Величина E_0 полагается постоянной в границах ячейки моделирования. Целью работы является вычисление значения $\beta_{\text{эфф}}$.

4. Математическая модель.

Математической моделью полученного на снимках нанорельефа будем считать бесконечную гексагональную решетку конических острий с вписанными сферами на вершинах. Периодичность такой решетки позволяет в качестве вычислительной области рассматривать только один нановыступ вместе с его цилиндрической окрестностью (рис. 2). Для достижения поставленной цели необходимо рассчитать электрическое поле и эмиссионный ток в ячейке нановыступа.

Требуется решить уравнение Лапласа для электростатического потенциала

$$\Delta\varphi = 0$$

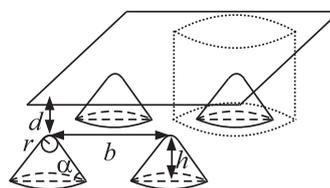


Рис. 2. Схематическое изображение нанорельефа поверхности. Показана ячейка для моделирования с условиями симметрии (периодичности) на боковой поверхности

в замкнутой области, соответствующей геометрии ячейки, с граничными условиями

$$\varphi|_{\Gamma_i} = \varphi_i = \text{const},$$

где Γ_1 — верхний торец цилиндрической ячейки, а Γ_2 — нижняя граница вычислительной области;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_3} = 0,$$

где Γ_3 — боковая поверхность ячейки.

Решение этой граничной задачи и вычисление величины электростатического поля

$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ проводилось методом конечных элементов в среде MATLAB, пакете MATLAB PDE Toolbox, с использованием линейных треугольных элементов. При адаптивном построении сетки использовался индикатор ошибок, включающий норму невязки уравнения и скачки градиента конечноэлементного решения, поскольку они связаны с одной из основных в данной задаче физических величин — напряженностью электрического поля. Была определена величина минимального расстояния d , на котором электрическое поле не испытывает влияние нанорельефа: $d = 220$ нм. Картина эквипотенциальных линий изображена на рис. 3; на расстоянии d от нановыступа эквипотенциаль практически прямолинейна, поле E_0 однородно.

На основе рассчитанного распределения поля вычислялось эффективное значение коэффициента усиления $\beta_{\text{эфф}}$ по формулам (1), (2). Численное интегрирование в формулах (1), (2) проводилось по квадратурам Гаусса — Лобатто. На рис. 4 показано, как меняется коэффициент $\beta_{\text{эфф}}$ при различных значениях напряженности E_0 приложенного поля.

5. Заключение. Можно заметить, что при увеличении напряженности поля эффективный коэффициент усиления уменьшается.

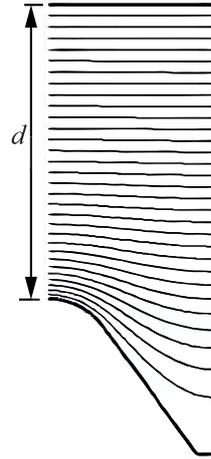


Рис. 3. Эквипотенциальные линии у поверхности эмиттера

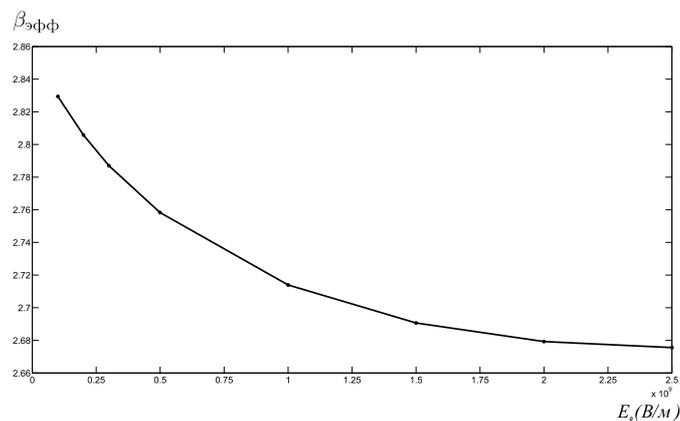


Рис. 4. Зависимость эффективного коэффициента усиления от приложенного электрического поля

Это объясняется тем, что площадь эмиссии занимает все большую часть поверхности нанорельефа S , а величина гладкой, модельной поверхности S_0 остается неизменной.

Работа была выполнена с использованием программного обеспечения и вычислительного оборудования Ресурсного центра «Вычислительный центр» СПбГУ, и аналитического оборудования «Междисциплинарного ресурсного центра по направлению Нанотехнологии» СПбГУ.

Литература

1. Трофимов В. В., Никифоров К. А., Антонова Л. И. Исследование матриц полевых эмиссионных катодов // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 228–233.
2. Feng Y., Verboncoeur J. P. A model for effective field enhancement for Fowler–Nordheim field emission // Phys. Plasmas 12, 103301, 2005.

Зверков В. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование турбулентных течений со свободной поверхностью вблизи корпуса судна

Рекомендовано к публикации профессором Павловским В. А.

1. Введение. На данный момент наиболее надежным методом предсказания движения нового корпуса судна является проведение модельного эксперимента в опытовом бассейне. Однако, к сожалению, проведение экспериментального исследования — сложная и весьма дорогостоящая задача, которая может занять продолжительный промежуток времени. Более того, при проведении эксперимента в масштабе невозможно одновременно удовлетворить критериям подобия Фруда и Рейнольдса. Это приводит к необходимости пользоваться дополнительными экстраполяционными методами, вносящими дополнительные погрешности в результат.

Отличной альтернативой экспериментам является получение аналитического решения уравнений движения жидкости в окрестности корпуса судна. Однако, на данный момент получение точных решений уравнений гидродинамики возможно лишь для очень простых течений, когда нелинейные эффекты незначительны, и не может быть применено к областям сложной геометрической формы.

Таким образом, на нынешнем этапе развития гидродинамики единственной альтернативой проведению экспериментов остается численное моделирование. Для моделирования движения судна необходимо рассмотреть один из наиболее сложных типов течений: двусоставное турбулентное течение со свободной поверхностью. Сложность моделирования такого типа течений заключается в наличии подвижной границы — поверхности раздела жидкостей. Положение этой границы известно только в начальный момент времени и в дальнейшем должно быть определено как часть решения. Существует два основных подхода к определению положения свободной поверхности при решении уравнений Навье — Стокса. Первый основан на динамически перестраиваемых сетках и хорошо зарекомендовал себя при расчете течений с малыми отклонениями свободной поверхности. Однако, этот подход не применим к течениям в областях сложной формы, какой является область вблизи корпуса судна. Второй

подход основан на той или иной аппроксимации свободной поверхности, не использующей перестраиваемую сетку. В качестве аппроксимации свободной поверхности может использоваться множество не обладающих массой частиц как в методе Marker-and-Cell [2]. Или свободная поверхность может определяться с помощью решения уравнения переноса для специальной величины, характеризующей объемное содержание жидкости в ячейке сетки, как это реализовано в методе Volume of Fluid [3]. Методы второго подхода получили наиболее широкое распространение благодаря широкому диапазону задач, к решению которых они могут быть применены.

В данной работе для моделирования течения вблизи корпуса моторной яхты использован метод Volume of Fluid совместно с решением осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стока [1]. Для моделирования эффектов турбулентности использована SST $k - \omega$ модель. Анализ результатов моделирования проведен с использованием экспериментальных данных полученных в ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова.

2. Метод решения. Для расчета вязкого течения вблизи корпуса судна был использован пакет FLUENT, который решает осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье—Стокса (1), (2), используя метод конечных объемов на неструктурированных сетках.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\rho u'_i u'_j), \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ — плотность, p — давление, u — скорость, μ — молекулярная вязкость.

В качестве модели турбулентности использована SST $k - \omega$ модель:

$$-\rho u'_i u'_j = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}, \quad (4)$$

где μ_t — турбулентная вязкость, k — кинетическая энергия турбулентности, ω — удельная скорость диссипации турбулентности.

Для моделирования формы свободной поверхности был использован метод Volume of Fluid (VOF). Метод базируется на решении уравнения переноса

$$\frac{1}{\rho_q} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \Delta \cdot (\alpha_q \rho_q v_q) \right] = \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}), \quad (5)$$

где α_q — объемная доля фазы q , \dot{m}_{pq} — перенос массы из p в q , \dot{m}_{qp} — перенос массы из q в p .

Величина α_q называется объемной долей и характеризует степень заполненности жидкостью рассматриваемой ячейки сетки. При $\alpha_q = 1$ ячейка полностью заполнена фазой q , при $\alpha_q = 0$ ячейка полностью заполнена фазой p , при $0 < \alpha_q < 1$ ячейка содержит границу раздела фаз.

3. Расчетная сетка. Сетка для моделирования построена в пакете ICEM CFD. Сетка состоит из 2,4 миллионов элементов, включающих тетраэдры и призмы. Максимальная скошенность элемента составляет 0,89, пограничный слой обеспечивается призматическими элементами.

Метод VOF требует построения специальной сетки в области, которую предположительно будет занимать поверхность раздела. Эту область, как правило, называют зоной захвата интерфейса. Для того чтобы избежать численной диффузии, сетка в зоне захвата должна быть хорошо разрешена в направлении, перпендикулярном свободной поверхности жидкости. В данной работе этой цели служат слои призматических элементов, находящихся на плоскости, соответствующей начальному положению поверхности раздела.

4. Полученные результаты. В результате проведенного моделирования были получены данные о ходовом волнении. На рис. 1 изображены контуры волнения, образующегося за судном при значении числа Фруда $Fr = 0,159$. На рис. 2 изображены контуры ходового волнения, образующегося за судном при $Fr = 0,319$. Можно видеть развитие ходового волнения с увеличением скорости движения судна, что имеет огромное прикладное значения для проектирования корпусов судов.

Также был произведен расчет коэффициента полного сопротивления движению C_T . Графики сравнения расчетных и эксперимен-

тальных данных для C_T приведены на рис. 3. Данные расчета полного коэффициента сопротивления отличаются от экспериментально полученных не более чем на 15%, что соответствует международным требованиям точности при проведении модельных экспериментов. Таким образом, проведенное численное моделирование может быть сравнимо по точности с экспериментом.

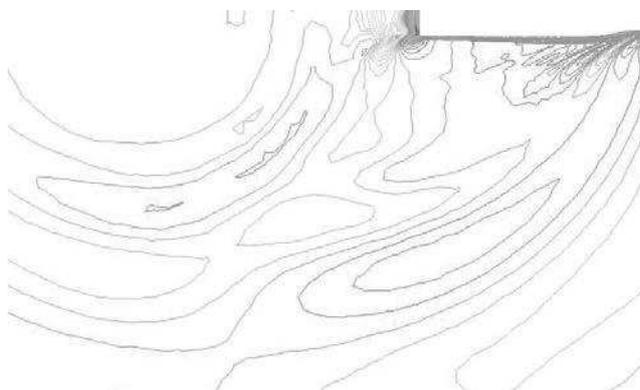


Рис. 1. Контуры ходового волнения при $Fr=0,159$

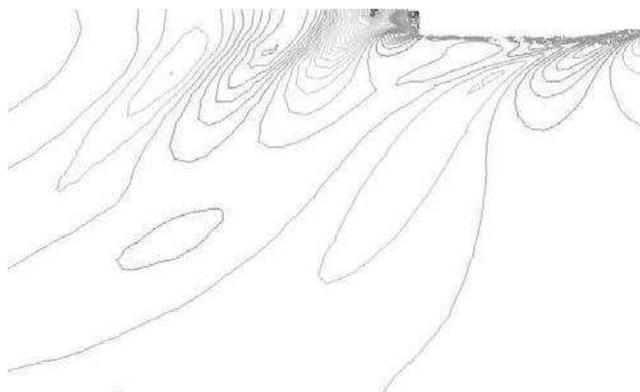


Рис. 2. Контуры ходового волнения при $Fr=0,319$

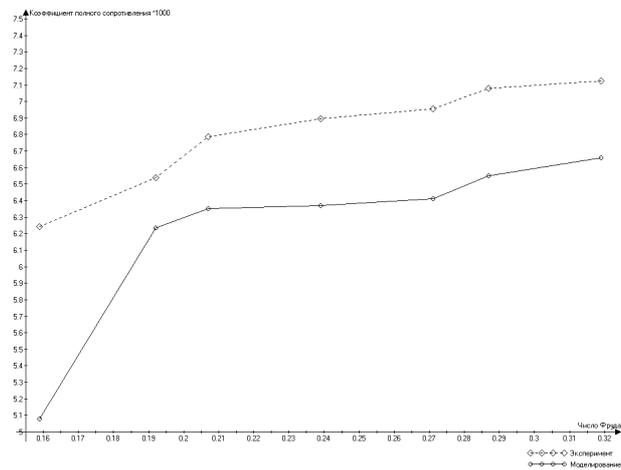


Рис. 3. Коэффициент полного сопротивления

Литература

1. Azcueta R. Ship resistance prediction by free – surface RANS computations // Ship Technology Research, 2000. Vol. 47, No 2. P. 47–62.
2. Harlow F., Welsh J. E. Numerical calculation of time dependant viscous incompressible flow with free surface // The Physics of Fluids, 1965. No 8. P. 2182–2189.
3. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid/VOF/ method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics, 1981. No 39. P. 201–225.

Климаков А. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование электронной пушки с системой фокусирующих линз с учетом распределения пространственного заряда при различных конфигурациях фокусирующей системы

Рекомендовано к публикации профессором Виноградовой Е. М.

1. Введение. Полевая эмиссия (ПЭ) используется во многих областях современной науки и техники электронно-вакуумных приборов: эмиссионные дисплеи, источники микроволновых волн, электронная литография, электронные пушки [1, 2]. Применение ПЭ позволяет получить высокие плотности тока при малых напряжениях [3].

В процессе работы электронной пушки в пространстве около острия образуется объемный заряд, который может оказывать сильное влияние на эмиссию электронов. В работах [4–6] рассматриваются вопросы влияния объемного заряда на сформированные пучки электронов.

В данной статье рассматривается электронная пушка на основе полевого эмиттера с системой фокусирующих электродов в форме косоугольных линз.

2. Физическая модель. Для моделирования была выбрана система, состоящая из катода в виде острия, двух фокусирующих косоугольных линз и анода (плоскость). На рис. 1 представлено схематическое представление эмиссионной системы в цилиндрической системе координат (r, z) .

Поверхность острия представляет собой полуэллипсоид с радиусом кривизны на вершине R_0 , высотой z_0 и напряжением u_0 ; (r_1, z_1) , (r_1, z_2) — координаты отверстий косоугольных линз, α — угол наклона косоугольных линз; напряжение на первой фокусирующей линзе составляет u_1 , на второй — u_2 . Поверхность анода — $z = z_3$; напряжение на аноде — u_2 . Поверхность $r = r_3$ ограничивает систему по координате r .

В силу аксиальной симметрии рассматриваемой модели задача была сведена к двумерному случаю в цилиндрических координатах.

Для расчета была рассмотрена система со следующими параметрами: $u_0 = 0$ В, $u_1 = 7$ кВ, $u_2 = 5$ кВ, $r_0 = 2,36$ мкм (данный параметр подбирался таким образом, чтобы радиус кривизны на вершине острия был равен 5 нм), $r_1 = 100$ мкм, $r_3 = 1000$ мкм, $z_0 = 1120$ мкм, $z_1 = 1500$ мкм, $z_2 = 4000$ мкм, $z_3 = 8000$ мкм, $\alpha = 40^\circ$.

Управление системой осуществляется путем изменения напряжения u_1 на первой линзе: от 5 кВ до 7 кВ.

Целью работы является анализ влияния параметров фокусирующей системы на радиус раствора пучка электронов, попадающего на анод.

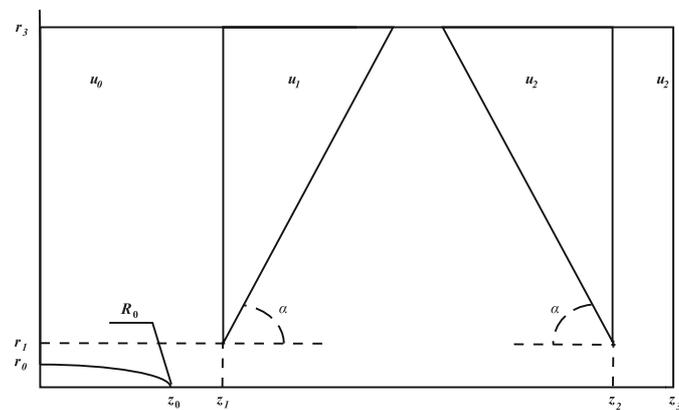


Рис. 1. Схематическое изображение системы

3. Математическая модель. Для нахождения распределения потенциала u использовалось уравнение Пуассона

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad u \in \Omega \in R^3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_3} = 0.$$

Решение было найдено с помощью метода конечных элементов (МКЭ), реализованного в библиотеке численных расчетов deal.II. Для построения сетки области использовалась программа Gmsh.

Для решения задачи поверхность катода была разбита на участки, на каждом из которых поле считается постоянной величиной. Для каждого участка вычислялась плотность тока, который проходит через этот участок. Для вычисления плотности тока j в узловых точках было использовано соотношение Фаулера — Нордгейма

$$j = \frac{a}{\phi} E^2 e^{-\frac{b\phi^{\frac{3}{2}}}{E}}, \quad (2)$$

где ϕ — работа выхода электрона из катода, E — поле на катоде, a и b — известные константы в теории ПЭ [7].

С помощью второго закона Ньютона и силы Лоренца были рассчитаны траектории и скорости движения пучков электронов

$$F_L = q_e E,$$

$$F = m_e a,$$

где m_e — масса электрона, q_e — заряд электрона. При расчете не учитывалась магнитная составляющая силы Лоренца.

Начальная скорость электронов принималась за ноль, начальное направление совпадает с силовыми линиями поля.

Плотность тока, эмитированного с каждого участка катода, принимается постоянной вдоль траектории пучка, поэтому плотность заряда определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{j}{v}, \quad j = const, \quad (3)$$

где v — скорость электронов.

Для расчета поля с учетом распределения пространственного заряда был использован метод итераций: на первом шаге рассчитывалось поле без учета пространственного заряда (решалось уравнение Лапласа) (1), затем считался ток (2) и плотность распределения пространственного заряда (3); в последующих шагах решалось уравнение Пуассона (1) с распределением заряда, найденным на предыдущем шаге.

4. Результаты. Результаты вычисления распределения потенциала получены на сетке, состоящей из 370 тыс. узлов. При расчете системы итерационный процесс останавливался, когда изменение тока относительно предыдущей итерации становилось меньше 1%. Для

данной конфигурации системы потребовалось девять итераций. На рис. 2 представлен итерационный процесс вычисления тока системы, видно что на ток сильно влияет распределение пространственного заряда. Также было произведено измерение зависимости радиуса разброса электронов на правой границе системы (аноде) от угла наклона α фокусирующих линз (рис. 3): при увеличении угла α линзы становятся более тонкими и, соответственно, фокусируют поток электронов точнее.

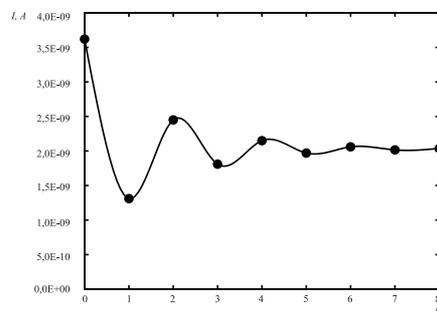


Рис. 2. Ток системы для каждой итерации, n — номер итерации

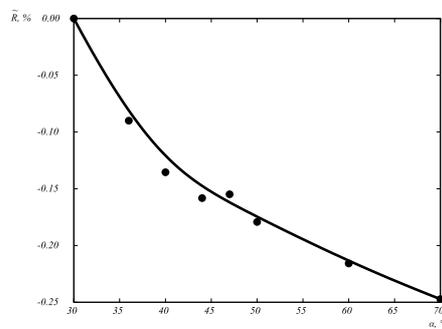


Рис. 3. Изменение радиуса пучка электронов в зависимости от угла наклона α фокусирующих линз. $\tilde{R} = (R_1 - R_k)/R_1$, где R_1 — радиус раствора пучка электронов на аноде при $\alpha = 30^\circ$, R_k — радиус раствора пучка электронов

5. Заключение. Произведено моделирование электронной пушки с системой фокусирующих линз с учетом пространственного заряда методом итераций, рассчитан ток системы и величина раствора электронного пучка на аноде. Расчеты проводились с использованием библиотеки численных расчетов deal.II и программы Gmsh.

Произведена оценка изменения радиуса раствора пучка электронов на аноде при изменении геометрии фокусирующих линз.

Литература

1. Овсянников Д. А., Егоров Н. В. Математическое моделирование систем формирования электронных и ионных пучков. СПб.: СПбГУ, 1998. 276 с.
2. Павлов В. Г. Влияние объемного заряда эмиттированных электронов на полевую электронную эмиссию // Журнал технической физики, 2004. Т. 74. Вып. 12. С. 72–79.
3. Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронная эмиссия. Принципы и приборы. СПб.: Издательский Дом Интеллект, 2011. 528 с.
4. Завьялов М. А., Переводчиков В. И., Сыровой В. А. Проблемы электронно-оптических систем для перспективных пучково-плазменных приборов СВЧ // Прикладная физика, 2000. № 2. С. 122–132.
5. Сыровой В. А. Торцевые формирующие электроды для плотных электронных пучков и осесимметричные бриллюэновские образования // Радиотехника и электроника, 2008. Т. 53, № 4. С. 494–512.
6. Акимов П. И. Использование ионов для усиления тока электронных пушек // Прикладная физика, 2002. № 4. С. 90–101.
7. Lau Y. Y., Liu Youfan. Electron emission: from the Fowler — Nordheim relation to the Child — Langmuir law // Phys. Plasmas, 1994. Vol. 1, No 6. P. 2082–2085.

Куруч О. С., Виноградова Е. М.
Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование полевой эмиссионной системы

1. Введение. С развитием нанотехнологий по изготовлению катодов за последние годы значительно вырос интерес к явлению полевой электронной эмиссии [1].

Целью данной работы является построение математической модели полевой эмиссионной системы, в которой значение радиуса кривизны на вершине острия является заданной величиной. Одной из часто встречающихся форм острий, описанных в литературе, является «сфера на конусе» [2–4].

В работе рассматривается математическая модель системы формирования пучков электронов, представляющая собой диодную систему (с диэлектриками): катод специальной формы (сфера на конусе) на сферической подложке — анод (часть сферы). Область системы заполняют два различных диэлектрика. Диодные системы можно рассматривать как простейшие электронно-оптические системы при расчете катодных узлов электронных пушек.

В данной работе найдено распределение электростатического потенциала во всей области исследуемой эмиссионной системы. Для решения задачи использован метод парных рядов по функциям Лежандра.

2. Физическая постановка задачи. Данная осесимметричная задача решается в сферической системе координат (r, α) .

На рис. 1 представлено схематическое изображение диодной эмиссионной системы с острием в виде сферы на конусе. Поверхность катода, тонкого полевого острия, представляет собой сферу на конусе. Поверхность анода моделируется сферическим сегментом радиуса $r = R_1$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, поверхность вершины катода моделируется сферой радиуса $r = R_0$, поверхность «тела» катода моделируется усеченным конусом $\alpha = \alpha_0$ ($R_0 \leq r \leq R_1$). В систему входят три диэлектрика, которые разбивают всю область диодной системы на три подобласти: 1) $R_0 \leq r \leq R_1$, 2) $R_1 \leq r \leq R_2$, 3) $R_2 \leq r < \infty$.

3. Математическая модель. Потенциал $U(r, \alpha)$ электростатического поля в диодной системе удовлетворяет уравнению Лапласа

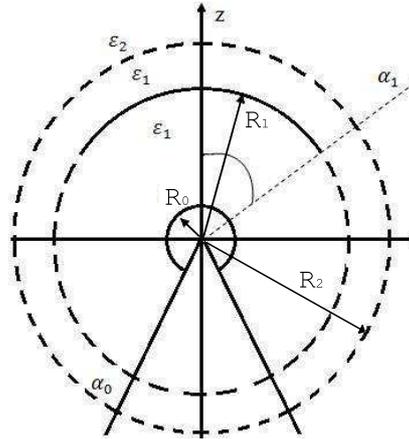


Рис. 1. Схематическое изображение диодной эмиссионной системы с диэлектриками

и граничным условиям:

$$\Delta U(r, \alpha) = 0; \quad (1)$$

$$U(R_1, \alpha) = V, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1; \quad (2)$$

$$U(R_0, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0; \quad (3)$$

$$U(r, \alpha_0) = 0, \quad R_0 \leq r < \infty. \quad (4)$$

4. Решение граничной задачи (1)–(4). Для решения уравнения Лапласа (1) с учетом (2)–(4) разбиваем всю область $R_0 \leq r < \infty$ на три: 1) $R_0 \leq r < R_1$, 2) $R_1 \leq r < R_2$, 3) $R_2 \leq r < \infty$. Тогда

$$U(r, \alpha) = \begin{cases} U_0(r, \alpha), & R_0 \leq r \leq R_1, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0, \\ U_1(r, \alpha), & R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0, \\ U_2(r, \alpha), & R_2 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0; \end{cases} \quad (5)$$

$$U_0(R_0, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0; \quad (6)$$

$$U_0(R_1, \alpha) = U_1(R_1, \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0; \quad (7)$$

$$U_0(R_1, \alpha) = U_1(R_1, \alpha) = V, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1; \quad (8)$$

$$U_1(R_2, \alpha) = U_2(R_2, \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0; \quad (9)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial U_0(R_1, \alpha)}{\partial r} = \varepsilon_1 \frac{\partial U_1(R_1, \alpha)}{\partial r}, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_0; \quad (10)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial U_1(R_2, \alpha)}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_2(R_2, \alpha)}{\partial r}, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0; \quad (11)$$

$$U_0(r, \alpha_0) = 0, \quad R_0 \leq r \leq R_1; \quad (12)$$

$$U_1(r, \alpha_0) = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2; \quad (13)$$

$$U_2(r, \alpha_0) = 0, \quad R_2 \leq r < \infty; \quad (14)$$

Здесь ε_1 и ε_2 — диэлектрические проницаемости сред.

Общее решение уравнения Лапласа в каждой из областей можно записать в виде [3, 5]

$$\begin{cases} U_0(r, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\nu_n} - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-\nu_n-1} \right] P_{\nu_n}(\cos \alpha), \\ U_1(r, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\left(\frac{r}{R_2} \right)^{\nu_n} + E_n \left(\frac{r}{R_2} \right)^{-\nu_n-1} \right] P_{\nu_n}(\cos \alpha), \\ U_2(r, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{r}{R_2} \right)^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos \alpha), \end{cases} \quad (15)$$

где $P_{\nu_n}(\cos \alpha)$ — функции Лежандра первого рода степени ν_n , ν_n — корни уравнений $P_{\nu_n}(\cos \alpha_0) = 0$. Распределение потенциала (15) удовлетворяет граничным условиям на катоде (6), (12)–(14).

Используя граничное условие (7) и свойство ортогональности функций Лежандра [6]

$$\int_0^{\alpha_0} \sin \alpha P_{\nu_n}(\cos \alpha) P_{\nu_m}(\cos \alpha) d\alpha = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ N_n, & n = m, \end{cases} \quad (16)$$

где $N_n = \int_0^{\alpha_0} P_{\nu_n}^2(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha$ — нормировочный коэффициент, получим

$$\begin{aligned} A_n \left[\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{\nu_n} - \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{-\nu_n-1} \right] = \\ = B_n \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\nu_n} + E_n \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{-\nu_n-1} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Граничное условие (9) приводит к

$$B_n + E_n = D_n. \quad (18)$$

Связь коэффициентов B_n и E_n определяется граничным условием (11)

$$B_n = E_n \frac{(\nu_n + 1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 \nu_n + \varepsilon_2 (\nu_n + 1)}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим

$$D_n = E_n \frac{\varepsilon_1 (2\nu_n + 1)}{\varepsilon_1 \nu_n + \varepsilon_2 (\nu_n + 1)}.$$

Подставив (19) в (17), получим

$$A_n = E_n \frac{(\xi_1 + \nu_n \beta_2^{-\nu_n-1}) \varepsilon_1 - (\xi_1 - (\nu_n + 1) \beta_2^{-\nu_n-1}) \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 \nu_n + \varepsilon_2 (\nu_n + 1)) (\beta_1^{-\nu_n} - \beta_1^{\nu_n+1})}, \quad (20)$$

где $\beta_1 = \frac{R_0}{R_1}$, $\beta_2 = \frac{R_1}{R_2}$, $\xi_1 = (\nu_n + 1) \beta_2^{\nu_n}$.

Используя граничные условия (8) и (10), с учетом некоторых преобразований (19) и (20), введем для удобства обозначения [7]

$$\begin{aligned} C_n = E_n \frac{(\nu_n + 1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \beta_3^{\nu_n} + (\varepsilon_1 \nu_n + \varepsilon_2 (\nu_n + 1)) \beta_3^{-\nu_n-1}}{(\varepsilon_1 \nu_n + \varepsilon_2 (\nu_n + 1)) (\beta_1^{-\nu_n-1} - \beta_1^{\nu_n})}, \\ g_n = \frac{(-\beta_1^{2\nu_n+1} + 1) (\xi_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \beta_2^{\nu_n+1} + (\varepsilon_1 \nu_n + \varepsilon_2 (\nu_n + 1)))}{((\nu_n + 1) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \beta_3^{2\nu_n+1} + (\varepsilon_1 \nu_n + \varepsilon_2 (\nu_n + 1)))}, \end{aligned}$$

где $\beta_3 = \beta_1\beta_2 = \frac{R_0}{R_2}$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 1$, которые приводят к соотношениям

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (2\nu_n + 1) C_n P_{\nu_n}(\cos \alpha) = 0, & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n (1 - g_n^*) P_{\nu_n}(\cos \alpha) = V, & 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \end{cases} \quad (21)$$

являющимся стандартными парными рядами [7], где

$$g_n^* = 1 - g_n,$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^* = 0$.

Задача нахождения неизвестных коэффициентов C_n в виде [7]

$$C_n = \beta_n \int_0^{\alpha_1} \varphi(t) \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t dt,$$

где

$$\beta_n = \frac{1}{\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) N_n},$$

ν_n – корни уравнений $P_{\nu_n}(\cos \alpha_0) = 0$, сводится к решению уравнения Фредгольма второго рода [7]

$$\varphi(x) - \int_0^{\alpha_1} K_0(x, t) \varphi(t) dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{V \sin \alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos x)}} d\alpha, \quad (22)$$

ядро которого представляется в явном виде [7]

$$\begin{aligned} K_0(x, t) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos \alpha_1) \operatorname{ch}(x\tau) \operatorname{ch}(t\tau)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \alpha_1) \operatorname{ch} \pi\tau} d\tau + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n g_n^* \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) x \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t, \end{aligned} \quad (23)$$

где $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \alpha_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_1} \frac{\operatorname{ch} \tau x}{\sqrt{2(\cos x - \cos \alpha)}} dx$ – функции конуса [8], с правой частью

$$\frac{2V}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos x)}} d\alpha = \frac{2V}{\pi} \cos \frac{x}{2} = F(x). \quad (24)$$

5. Заключение. В данной работе построена математическая модель диодной эмиссионной системы с полевым острием (в виде «сфера на конусе»). Решение граничной задачи (1)–(4) ищется в виде разложения по функциям Лежандра первого рода степени ν_n . Граничные условия приводят к парным интегральным рядам (21). Нахождение неизвестных коэффициентов в разложении электростатического потенциала сведено к решению уравнения Фредгольма второго рода (22) с явным симметричным ядром (23) и правой частью (24).

Литература

1. Виноградова Е. М., Егоров Н. В. Математическое моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера // Журнал технической физики, 2011. Т. 81, Вып. 9. С. 1–5.
2. Chen P. Y., Cheng T. C., Tsai J. H., Shao Y. L. Space charge effects in field emission nanodevices // Nanotechnology, 2009. Vol. 20. P. 405202–405210.
3. Egorov N. V., Vinogradova E. M. Mathematical modeling of the electron beam formatting systems on the basis of field emission cathodes with various shapes // Vacuum, 2004. Vol. 72. P. 103–111.
4. Hazra K. S., Koratkar N. A., Misra D. S. Improved field emission from multiwall carbon nanotubes with nano-size defects produced by ultra-low energy ion bombardment // Carbon, 2011. Vol. 49. P. 4760–4766.
5. Виноградова Е. М. Математическое моделирование электронно-оптических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 110 с.
6. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
7. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.

Леонтьев В. А.

Балтийский государственный технический университет «Военмех»
им. Д. Ф. Устинова

Дифракция морских волн неподвижным доком, расположенным перед наклонным дном

Рекомендовано к публикации профессором Нуднером И. С.

Для проектирования морских гидротехнических сооружений требуется оценить силовое воздействие на них морских волн. Дифракция волн на доке для условий бесконечной глубины рассмотрена в работе [1], при конечной глубине жидкости и ровным дном — в [2, 3]. Экспериментальные исследования этой задачи выполнены в [4]. Взаимодействие морских волн с неподвижным доком, расположенным перед наклонным дном, в литературе практически не рассматривается. Его исследованию посвящена настоящая работа.

Рассматривается плоская линейная задача воздействия волн на прямоугольный контур, расположенный над ровным дном у наклонного берега. Жидкость занимает область, ограниченную снизу непроницаемым дном, а сверху — свободной поверхностью и пересекающим её твёрдым непроницаемым контуром преграды. Система координат Oxy выбрана так, что ось Ox расположена на свободной поверхности в направлении слева направо, ось Oz направлена вертикально вверх, начало координат совпадает с центром симметрии преграды. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, ее движение — потенциальным. Из бесконечности в положительном направлении оси Ox распространяются регулярные волны. Потенциал скорости набегающих волн определяется равенством

$$\Phi_0 = A \operatorname{ch}(k_0(z+d)) e^{-i(k_0x - \sigma t)},$$

где $A = \frac{gh\dot{i}}{2\sigma \operatorname{ch}(k_0d)}$ — комплексная амплитуда, σ — круговая частота, d — глубина, h — высота волн, g — ускорение свободного падения, λ — длина волн, $\frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, определяемое из дисперсионного уравнения $\sigma^2 = g k_0 \operatorname{th}(k_0d)$.

Преграда вносит возмущение в волновой поток, потенциал скорости потока представляет сумму потенциалов набегающих на преграду волн и возмущённого движения жидкости. Рассматривается

установившееся волновое движение, потенциал которого представлен в виде

$$\Phi(x, z, t) = \varphi(x, z) e^{i\sigma t}.$$

При сделанных предположениях функция $\varphi(x, z)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi(x, z) = 0$ и следующим граничным условиям:

- на твёрдых непроницаемых границах $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, где n — внешняя нормаль к поверхности;
- на свободной поверхности жидкости (при $z = 0$) выполняются кинематическое и динамическое условия, которые можно записать в виде $-\sigma^2\varphi + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$;
- на бесконечном удалении от тела (при $x \rightarrow \infty$) $|\Delta\varphi| < \infty$.

Задача решается следующим образом. Наклонный участок, примыкающий к берегу, схематизируется системой прямоугольных уступов. Область, занятая жидкостью разбивается на прямоугольные подобласти S_1, \dots, S_r , которым соответствуют глубины d_1, \dots, d_r , причём $d_1 = d_2 = d_3 = d$. Заданы расстояния от начала координат до уступов a_3, a_4, \dots, a_r . Последний уступ, координата которого равна a_r , представляет собой вертикальную стенку высотой, исключающей перелив волн. Ширина дока равна $2b$ (рис. 1).

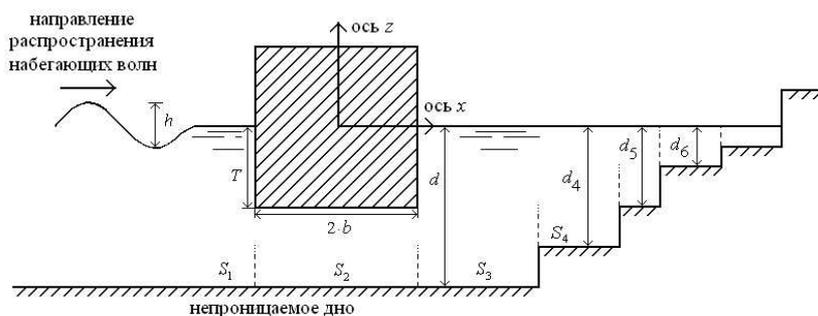


Рис. 1. Схема расчетной области

Функцию $\varphi(x, z)$ в каждой области обозначим как φ_j , $j = 1, \dots, r$). На границах подобластей должны выполняться равенства скоростей и потенциалов скоростей:

- на границе областей S_1 и S_2 ($x = -b$)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \begin{cases} 0, & -T \leq z \leq 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & -d_2 \leq z \leq -T, \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad -d_2 \leq z \leq -T. \quad (2)$$

- на границе областей S_2 и S_3 ($x = b$)

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = \begin{cases} 0, & -T \leq z \leq 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & -d_2 \leq z \leq -T, \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3, \quad -d_2 \leq z \leq -T. \quad (4)$$

- на границе областей S_j и S_{j+1} ($x = a_{j+1}$)

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \begin{cases} 0, & -d_j \leq z \leq -d_{j+1}, \\ \frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial x}, & -d_{j+1} \leq z \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\varphi_j = \varphi_{j+1}, \quad -d_{j+1} \leq z \leq 0, \quad j = 3, 4, \dots, r-1. \quad (6)$$

- на правой границе области S_r ($x = a_r$)

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x} = 0, \quad -d_r \leq z \leq 0. \quad (7)$$

Решаемая задача сводится к отысканию функций $\varphi_j(x, z)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta \varphi_j = 0$ и граничным условиям (1)–(7). Функции $\varphi_j(x, z)$ отыскиваются методом разделения переменных. В результате получаем

$$\begin{aligned}\varphi_1 = & (Ae^{-ik_{01}x} + A_0e^{ik_{01}x}) \operatorname{ch}(k_{01}(z + d_1)) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{k_{n1}x} \cos(k_{n1}(z + d_1)),\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 = & B_0x + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n e^{\frac{n\pi}{d_2 - T}x} + C_n e^{-\frac{n\pi}{d_2 - T}x} \right) \times \\ & \times \cos\left(\frac{n\pi}{d_2 - T}(z + d_2)\right),\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\varphi_j = & (D_{0j}e^{ik_{0j}x} + E_{0j}e^{-ik_{0j}x}) \operatorname{ch}(k_{0j}(z + d_j)) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (D_{nj}e^{ik_{nj}x} + E_{nj}e^{-ik_{nj}x}) \cos(k_{nj}(z + d_j)), \\ & j = 3, 4, \dots, r - 1.\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\varphi_r = & D_{0r} \cos(k_{0r}(x - a_r)) \operatorname{ch}(k_{0r}(z + d_r)) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} D_{nr} \operatorname{ch}(k_{nr}(x - a_r)) \cos(k_{nr}(z + d_r)),\end{aligned}\quad (11)$$

где k_{0j} , k_{nj} , k_{0r} , k_{nr} — действительные решения уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{gk_{0j}} = \operatorname{th}(k_{0j}d_j), \quad -\frac{\sigma^2}{gk_{nj}} = \operatorname{tg}(k_{nj}d_j), \\ \frac{\sigma^2}{gk_{0r}} = \operatorname{th}(k_{0r}d_r), \quad -\frac{\sigma^2}{gk_{nr}} = \operatorname{tg}(k_{nr}d_r),\end{aligned}$$

соответственно.

Так как согласно геометрии задачи $d_1 = d_2 = d_3 = d$, то также будет справедливо $k_{01} = k_{02} = k_{03} = k_0$ и $k_{n1} = k_{n2} = k_{n3} = k_n$.

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A_0 , B_0 , C_0 , D_{03} , E_{03} , \dots , D_{0r-1} , E_{0r-1} , D_{0r} , A_1 , B_1 , необходимо в граничные условия (1)–(7) подставить формулы (8)–(11), определяющие потенциал скорости в разных областях. Получившиеся соотношения для

каждой из введенных подобластей S_1, \dots, S_r следует умножить на соответствующие им собственные функции и проинтегрировать по глубине. Воспользовавшись ортогональностью собственных функций, получим в результате бесконечномерную систему уравнений с бесконечным числом неизвестных. Система уравнений решается методом редукции, т. е. фактически решается линейная система, состоящая из $(N + 1)(2r - 2)$ уравнений с таким же числом неизвестных. Решения этой системы суть интересующие нас неизвестные коэффициенты уравнений (8)–(11). Таким образом, может быть определено значение потенциала скорости в любой точке расчетной области.

Используя формулу $\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$ из [5], получим возвышение водной поверхности в любой момент времени: $\zeta(x, t) = \text{Re} \left(-\frac{i\sigma}{g} \varphi(x, 0) e^{i\sigma t} \right)$. Аналогичным образом можно определить волновое давление в каждой точке расчетной области. По формуле $p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ из [5] имеем $p(x, z, t) = \text{Re} (-i\sigma \rho \varphi(x, z) e^{i\sigma t})$.

Проинтегрировав функцию $p(x, z, t)$ по интересующим нас поверхностям, можно найти силы, действующие на эти поверхности и, как следствие, нагрузки на элементы гидротехнических сооружений.

Литература

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде: математическая теория и приложения / Пер. с англ. под ред. М. А. Лаврентьева и Н. Н. Моисеева. М.: Изд-во ИЛ, 1959. 617 с.
2. Витюк В. Ф. Дифракция поверхностных волн на доке конечной ширины // Прикладная математика и механика, 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 32–40.
3. Нуднер И. С. О дифракции волн неподвижным доком // Труды координационных совещаний по гидротехнике. Вып. 75. Изд-во «Энергия», 1972. С. 148–153.
4. Балашов Б. В. К вопросу об определении волновой нагрузки на неподвижные и плавучие сооружения // Труды координационных совещаний по гидротехнике. Вып. 61. Л.: Изд-во «Энергия», 1970. С. 183–187.
5. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 196 с.

Листрукова А. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Математическое моделирование электронно–оптической системы

Рекомендовано к публикации профессором Виноградовой Е. М.

Введение. Одним из весьма распространенных применений численных и аналитических методов являются расчёты электронно-оптических систем (ЭОС) — основных узлов электронно-лучевых приборов (ЭЛП). Повышение точности расчётов ЭОС способствует улучшению технических характеристик приборов [1]. Это требует разработки эффективных алгоритмов для практических расчётов ЭЛП. Такие алгоритмы дают возможность заменить длительный и дорогостоящий технологический эксперимент расчетом на компьютере с выбором наилучшего решения разнообразных и сложных по геометрии ЭОС. Весьма актуальной задачей в настоящее время является автоматизация расчётов ЭОС на компьютерах. Целью данной работы является нахождение функции распределения электростатического потенциала через его осевое распределение [2].

Математическая постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическую область, ограниченную координатными поверхностями в цилиндрической системе координат (r, z) , $z = z_1$, $z = z_2$, $r = R_1$. На границе области заданы f_1, f_2, f_3 — некоторые функции, зависящие от r . Данная система представлена на рис. 1.

В этой системе уравнение Лапласа и граничные условия имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} U(z_1, r) &= f_1, & r \in [0, R_1], \\ U(z_2, r) &= f_3, & r \in [1, R_1], \\ U(z, R_1) &= f_2, & r \in [z_1, z_2]. \end{aligned} \quad (2)$$

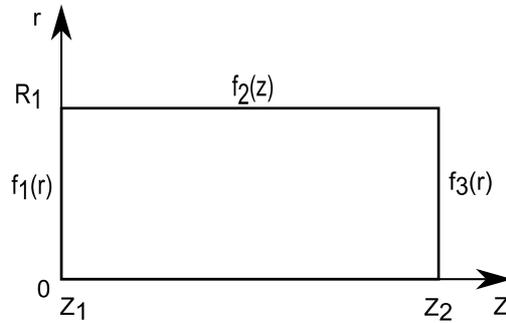


Рис. 1. Схематическое изображение системы

В силу осевой симметрии [3]

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0.$$

Решение. Решим граничную задачу (1), (2) методом разделения переменных. Частное решение представим в виде

$$U(\rho, \varphi, z) = S(\rho)T(z).$$

Тогда

$$\begin{cases} S_1(\rho) = C' J_0(\lambda\rho) + D' Y_0(\lambda\rho), \\ S_2(\rho) = C K_0(\lambda\rho) + D I_0(\lambda\rho), \\ T_1(z) = A \sin \lambda z + B \cos \lambda z, \\ T_2(z) = A' \operatorname{sh} \lambda z + B' \operatorname{ch} \lambda z, \end{cases}$$

где \$C', D', C, D, A, B, A', B'\$ — константы разделения, \$J_0, Y_0\$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Таким образом, частный интеграл уравнения (1) имеет вид

$$U(r, z) = (A \sin \lambda z + B \cos \lambda z)(C K_0(\lambda\rho) + D I_0(\lambda\rho)) + (A' \operatorname{sh} \lambda z + B' \operatorname{ch} \lambda z)(C' J_0(\lambda\rho) + D' Y_0(\lambda\rho)).$$

Вычислим собственные значения \$\lambda\$ относительно переменной \$r\$ из граничных условий (2):

$$\lambda_n = \frac{\gamma_n}{R_n},$$

где γ_n — корни функций Бесселя $J_0(\gamma_n) = 0$. Пользуясь однородностью граничных условий, определим собственные значения по переменной z :

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{z_2 - z_1}.$$

Общее решение уравнения Лапласа строится в виде ряда Фурье — Бесселя с неизвестными коэффициентами

$$U(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sin(\mu_k(z - z_1))) \frac{I_0(\mu_k r)}{I_0(\mu_k R_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\text{sh}(\nu_n(z - z_1))}{\text{sh}(\nu_n(z_2 - z_1))} + D_n \frac{\text{sh}(\nu_n(z_2 - z))}{\text{sh}(\nu_n(z_2 - z_1))} \right) J_0(\nu_n r), \quad (3)$$

где

$$\mu_k = \frac{\pi k}{z_2 - z_1}, \quad \nu_n = \frac{\gamma_n}{R_1}.$$

Неизвестные коэффициенты B_k , C_n , D_n вычисляются из граничных условий (2). В случае, если на всех границах $r = R_1$, $z = z_1$, $z = z_2$ граничные условия — постоянные функции, то

$$B_k = f_2(z) \frac{z_2 - z_1}{\pi k} ((-1)^{k+1} + 1),$$

$$D_n = \frac{2f_1}{J_1(\gamma_n)},$$

$$C_n = \frac{2f_3}{J_1(\gamma_n)}.$$

Найдем распределение потенциала во всей области системы через осевое распределение, считая, что разложение происходит для $r < 1$. По принципу симметрии поля по переменной r

$$U(-r, z) = U(r, z),$$

распределение потенциала можно представить в виде

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(z) r^{2n}, \quad (4)$$

$$A_{2n} = -\frac{1}{(2n)^2} A_{2n-2}^2. \quad (5)$$

Тогда из формулы (5) все коэффициенты ряда (4) определяются через осевое распределение потенциала

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{A_0^{2n}(z)}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Итак из (4), распределение потенциала во всей области системы через осевое распределение потенциала $A_0(z)$ имеет вид

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A_0^{2n}(z)}{2^{2n}(n!)^2} r^{2n}, \quad (6)$$

где

$$A_0(z) = U(0, z). \quad (7)$$

Заключение. В данной работе рассмотрена задача о нахождении функции распределения электростатического потенциала через его осевое распределение. Построено общее решение уравнения Лапласа в виде ряда Фурье — Бесселя (3), неизвестные коэффициенты которого найдены в явном виде. Распределение потенциала так же представлено в виде ряда (6) по переменной r через осевое распределение (7) во всей области системы для граничной задачи (1), (2).

Литература

1. Виноградова Е. М. Математическое моделирование электронно-оптических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 110 с.
2. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Баранов Р. Ю. Расчет электростатического поля системы соосных аксиально-симметричных электродов // Радиотехника и электроника, 2007. Т. 52, № 2. С. 212–217.
3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

Малявкин Г. П., Шмыров А. С.
Санкт-Петербургский государственный университет

Ударное воздействие на сближающийся с Землёй объект в околоземном пространстве

Одной из важных задач современной астрономии является изучение так называемой «астероидно-кометной опасности», которая исходит от космических объектов солнечной системы, сближающихся с Землёй (NEO) и грозящих значительными разрушениями и глобальными экологическими последствиями в случае столкновения с ней.

Проходя на близком расстоянии от Земли, такие объекты подвергаются её гравитационному воздействию, вследствие чего существенно изменяются параметры их движения на гелиоцентрической орбите, что может увеличить риск столкновения в будущем и затрудняет дальнейшее прогнозирование.

Примером подобных объектов может служить сближающийся с Землёй астероид (NEA) (99942) Апофис (Aporhis) диаметром 325 метров и массой приблизительно 30 млн. тонн, который в 2029 году пройдёт на расстоянии примерно 38000 км от центра Земли.

В процессе исследования астероидно-кометной опасности были предложены различные способы коррекции орбит NEO, например, ударное воздействие, долговременное гравитационное воздействие на объект космическим аппаратом, располагаемым вблизи него, ядерный взрыв на его поверхности или внутри и другие. В данной работе при помощи упрощённой модели проводится качественная оценка параметров ударного воздействия на NEO в околоземном пространстве, приводящего к существенному изменению его орбитальных элементов, на примере астероида Апофис.

Исследование проводится методом сфер действия, при этом сфера действия Земли считается точечной. Для этого область сближения Земли и астероида представляется точкой на их гелиоцентрических орбитах, а в этой области учитывается только взаимодействие этих объектов в рамках так называемой «задачи двух тел», согласно которой движение астероида относительно Земли происходит по гиперболической траектории. В точке перигея, т. е. в точке наибольшего сближения Земли и астероида, моделируется его столкновение

с космическим аппаратом (КА), приводимым в эту точку с круговой орбиты по «полуэллипсу Гоманна» — траектории, обеспечивающей минимум энергетических затрат на перелёт. В результате астероид получает приращение скорости и, как следствие, меняет свою гелиоцентрическую орбиту.

Целью данного исследования являлось выяснить: использование КА с массой какого порядка может привести к изменению в орбитальном периоде астероида порядка часов и тем самым к его прохождению на существенно большем расстоянии от Земли при его следующем сближении.

Известно, что 13 апреля 2029 года астероид Апофис пройдёт на максимально близком расстоянии $R = 0,000255540990995819$ а.е. (38228,388 км) на скорости $V_p^1 = 7,410$ км/с относительно Земли [1]. Эти данные позволяют вычислить скорость астероида «на бесконечности», т.е. скорость относительно Земли, с которой он выйдет из сферы её действия, и полный угол разворота его траектории, т.е. угол между образующими гиперболы:

$$V_\infty^1 = \sqrt{(V_p^1)^2 - \frac{2\mu_E}{R}},$$

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{R(V_\infty^1)^2}{\mu_E}}.$$

Здесь гравитационный параметр Земли

$$\mu_E = \gamma M_E,$$

где M_E — это масса Земли, а γ — гравитационная постоянная [2].

В случае столкновения с КА скорость астероида в точке перигея изменится, вследствие чего изменится и угол разворота. Так как КА предполагается приходящим в точку соударения по полуэллипсу Гоманна, его скорость в этой точке равна

$$V_{sc} = \sqrt{\frac{\mu_E}{R}} \sqrt{\frac{2r}{r+R}}.$$

Здесь r — это радиус исходной круговой орбиты космического аппарата, с которой он отправляется в точку столкновения [2].

В соответствии с законами сохранения импульса, после соударения астероид будет иметь скорость

$$V_p^2 = \frac{V_p^1 m_a - V_{sc} m_{sc}}{m_a + m_{sc}},$$

где m_{sc} и m_a — массы космического аппарата и астероида соответственно.

Следовательно, скорость астероида на бесконечности

$$V_\infty^2 = \sqrt{(V_p^2)^2 - \frac{2\mu_E}{R}}.$$

Нетрудно показать, что полный угол разворота траектории изменится следующим образом:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} + \arcsin \left(\frac{1}{1 + \frac{R(V_\infty^2)^2}{\mu_E}} \right).$$

На рис. 1 изображено изменение движения астероида в области его сближения с Землей в случае с его встречным столкновением с КА.

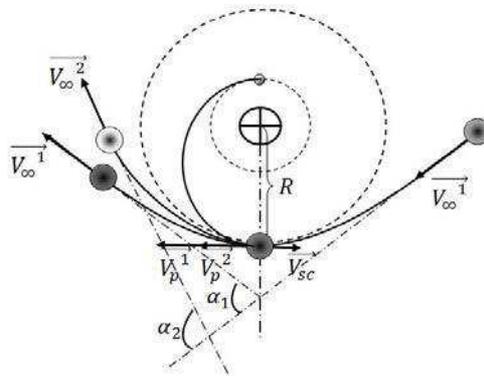


Рис. 1. Движение астероида относительно Земли

Считая, что относительно Солнца Земля совершает круговое движение со скоростью $V_E = 29,783$ км/с, а в точке сближения происходит касание орбит астероида и Земли, можно найти скорость астероида на гелиоцентрической орбите после сближения, соответственно

V_1 и V_2 :

$$(V_{1,2})^2 = (V_E)^2 + (V_\infty^{1,2})^2 + 2V_E V_\infty^{1,2} \cos \alpha_{1,2}.$$

На рис. 2 изображено изменение орбиты астероида в случае его прохождения с «ночной стороны».

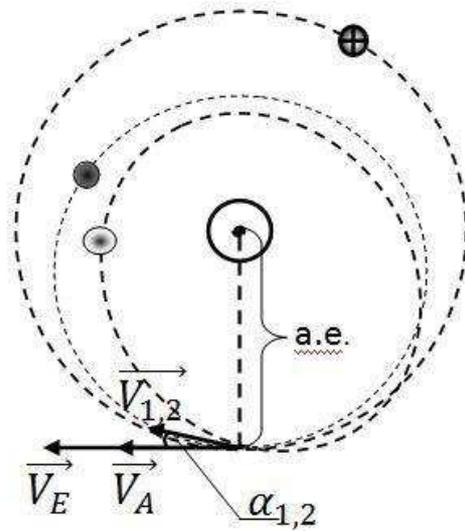


Рис. 2. Изменение гелиоцентрической орбиты астероида

Таким образом, зная скорость астероида и его удаление от Солнца в точке сближения с Землёй ($1 \text{ а.е.} = 149597870700 \text{ м}$), можно вычислить его энергетическую константу, большую полуось орбиты, а значит, и период обращения (индексами 2 и 1 помечены величины соответственно в случаях со столкновением и его отсутствием):

$$h_{1,2} = (V_{1,2})^2 - \frac{2\mu_S}{1 \text{ а.е.}},$$

$$a_{1,2} = -\frac{\mu_S}{h_{1,2}},$$

$$T_{1,2} = 2\pi \frac{(a_{1,2})^{3/2}}{\sqrt{\mu_S}}.$$

Здесь гравитационный параметр Солнца

$$\mu_S = \gamma M_S,$$

где M_S — масса Солнца [2].

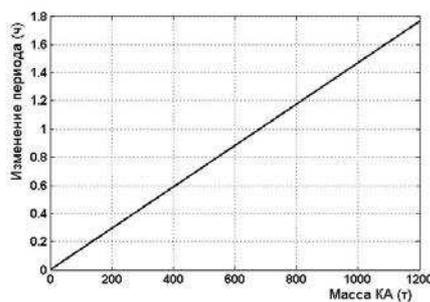


Рис. 3. Изменение орбитального периода астероида в зависимости от массы КА

На рис. 3 изображена зависимость изменения периода астероида на гелиоцентрической орбите от массы КА, который отправляется в точку столкновения с круговой орбиты высотой 1000 км, из которой можно сделать вывод, что для внесения в период обращения изменений порядка часов следует использовать КА массой порядка нескольких сотен тонн.

Литература

1. Информация об астероиде Апофис на сайте Лаборатории Реактивного Движения Калифорнийского технологического института. <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=99942;orb=1>
2. Охочимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полёта. М.: Наука, 1990. 448 с.

Мари́наки М.
Латвийский университет

Об итерационном решении задачи обтекания бесконечного ряда цилиндров

Рекомендовано к публикации профессором Калисом Х.

1. Введение. В данной статье разрабатывается численный метод решения нелинейной системы двух уравнений в частных производных, описывающей двухмерное стационарное течение вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости под действием магнитного поля. Эта система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \zeta + Sf, \\ -\Delta \psi = \zeta, \end{cases} \quad (1)$$

где $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ — вектор скорости, $\psi(x, y)$ — функция тока, $\zeta(x, y)$ — напряженность вихря; Re — число Рейнольдса, S — число Стюарта — безразмерные величины. Связь введенных функций с компонентами скорости следующая:

$$\zeta = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_y.$$

Величина f есть z -компонента вектора $\text{curl} F$, заданная в форме $f = \nabla \cdot (\tilde{A} \nabla \psi)$, где $\tilde{A} = \tilde{A}(\alpha)$ — матрица коэффициентов, зависящих от угла воздействия магнитного поля, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, F — сила Лоренца.

В [1] показана эквивалентность данной формы классической форме уравнений Навье — Стокса.

Разрабатываемый численный метод есть применение простых итераций к системе (1), с поиском решения в конечномерных пространствах Соболева на каждом шаге и передачей коэффициентов при разложении по базису, найденных с помощью метода конечных элементов, в следующий шаг. В общий итерационный процесс включаются также итерации Дородницына — специальные граничные условия [1].

2. Геометрия и постановка задачи. Желаемое расположение цилиндров показано на рис. 1.

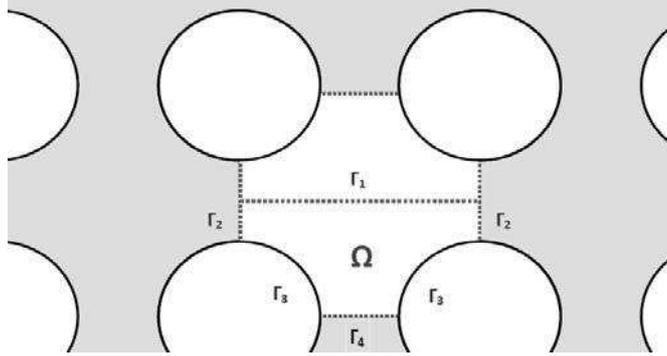


Рис. 1. Расположение цилиндров

Для анализа всей бесконечной области выделяется конечная под-область Ω , заданная в декартовых координатах:

$$\Omega := \left\{ (x, y) \mid 0 < x < L_1 \wedge y < L_2 \wedge y > \tilde{f}(x) \right\},$$

и области границы

$$\Gamma_1 := [0, L_1] \times \{L_2\},$$

$$\Gamma_2 := \{0\} \times [R, L_2 - R] \cup \{L_1\} \times [R, L_2 - R],$$

$$\Gamma_3 := [0, R] \times f_1([0, R]) \cup [L_1 - R, L_1] \times f_2([L_1 - R, L_1]),$$

$$\Gamma_4 := [R, L_1 - R] \times \{0\},$$

$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f_1(x), & 0 < x \leq R, \\ 0, & R < x < L_1 - R, \\ f_2(x), & L_1 - R \leq x < L_1, \end{cases}$$

$$f_1(x) := \sqrt{R^2 - x^2}, \quad f_2(x) := \sqrt{R^2 - (x - L_1)^2}.$$

Здесь L_1, L_2 — длина и ширина прямоугольника, R — радиус. Полагая $f_i(x) \equiv 1$, $i = 1, 2$, имеем цилиндры с квадратными основаниями.

Также задаются граничные условия следующих видов:

1. Условия симметрии. Симметрия для компонент скорости означает $u_y = 0$, $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$, отсюда $\zeta = 0$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_4$.
2. Периодические краевые условия. Полагая $\hat{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, задаются периодические краевые условия на участке границы Γ_2 .
3. Условия на твердых стенках. Компоненты скорости $u_x = u_y = 0$, Γ_3 .
4. Условия на верхней и нижней границах. Используется нормирование расхода $Q := \int_0^{L_2} u_x dy = 1$ (поток слева направо).

Эти граничные условия переводятся на функции ψ и ζ и поставленная задача в таком случае выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \zeta + Sf, \Omega, \\ -\Delta \psi = \zeta, \Omega, \\ \psi = 1, \Gamma_1, \psi = 0, \Gamma_4, \\ \zeta = 0, \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \psi(x, y) = \psi(x + L_1, y), \Gamma_2, \\ \zeta(x, y) = \zeta(x + L_1, y), \Gamma_2, \\ \nabla \psi(x, y) \cdot \hat{n} = \nabla \psi(x + L_1, y) \cdot \hat{n}, \Gamma_2, \\ \nabla \zeta(x, y) \cdot \hat{n} = \nabla \zeta(x + L_1, y) \cdot \hat{n}, \Gamma_2, \\ \psi = 0, \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2)$$

Краевые условия для функции вихря, как правило, не задаются на участке границы Γ_3 . Мы используем итерации Дородницына [1] в форме

$$\begin{aligned} \zeta^{(k+1)}|_{\Gamma_3} &= \sigma \nabla \psi^{(k)} \cdot \hat{n}|_{\Gamma_3} + \zeta^{(k)}|_{\Gamma_3}, \\ k &= 0, 1, \dots; \sigma \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3)$$

и включаем их в общий процесс (5) итеративного решения задачи (2).

3. Численный метод. Этот метод основывается на рассмотрении каждого из уравнений в нелинейной системе (2) в виде линейного уравнения эллиптического типа по отношению лишь к одной из искомых функций. Требования к гладкости решения снижаются, решения ищутся в подпространствах пространств Соболева $\mathcal{H}^1(\Omega)$. В конечномерных пространствах базисные функции определяются локально, фактически применяется метод конечных элементов.

Сначала получим обобщенную постановку для первого уравнения системы (2)

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} v \zeta dx \quad \forall v \in \mathcal{H}_{E_0}^1, \quad \psi \in \mathcal{H}_{E_1}^1,$$

где

$$\mathcal{H}_{E_1}^1 := \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \psi = 1, \Gamma_1; \psi = 0, \Gamma_3 \cup \Gamma_4; \psi(x, y) = \psi(x + L_1, y), \Gamma_2\},$$

$$\mathcal{H}_{E_0}^1 := \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid v = 0, \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_1; v(x, y) = v(x + L_1, y), \Gamma_2\}.$$

Аналогично для второго уравнения системы (2), обозначив $u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} =: -\nabla^\perp \psi \cdot \nabla \zeta$, имеем:

$$-\int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla^\perp \psi \cdot \nabla \zeta v dx = \int_{\Omega} (\tilde{A} \nabla \psi) \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in \mathcal{H}_{E_0}^1, \quad \zeta \in \mathcal{H}_{E_2}^1,$$

$$\mathcal{H}_{E_2}^1 := \{\zeta \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \zeta = \zeta_0^{(k)}, \Gamma_3; \zeta = 0, \Gamma_1 \cup \Gamma_4; \zeta(x, y) = \zeta(x + L_1, y), \Gamma_2\},$$

где $\zeta_0^{(k)}$ — функция, полученная применением k итераций Дородницына (3).

Существование и единственность решения для подобных формулировок доказана в [2].

Используется сетка следующего вида:

$$\Omega_h := \{(x, y) : x = ih, \quad y = f_1(jh), \quad y = f_3(jh), \\ y \geq f_{1,2}(x), \quad i = 0, \dots, N_2, \quad j = 0, \dots, N_1\}, \quad (4)$$

где

$$f_3(x) := -\sqrt{R^2 - x^2} + L_2, \quad N_1 := \frac{R}{h}, \quad N_2 := \frac{L_1}{h}.$$

Триангуляция образуется посредством проведения диагоналей в полученных прямоугольниках и кусочно-линейные базисные функции задаются стандартным способом.

Теперь положим

$$\psi \in S_1^h := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{\tilde{N}}, \phi_{\tilde{N}+1}, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}, \dots, \phi_{N+N_{\partial_1}}\},$$

$$\zeta \in S_2^h := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{\tilde{N}}, \phi_{\tilde{N}+1}, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}, \dots, \phi_{N+N_{\partial_2}}\},$$

$$v \in S_0^h := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{\tilde{N}}, \phi_{\tilde{N}+1}, \dots, \phi_N\},$$

где $\phi_1, \dots, \phi_{\tilde{N}}$ — базисные функции, соответствующие внутренним точкам сетки, $\phi_{\tilde{N}+1}, \dots, \phi_N$ — периодические базисные функции, $\phi_{N+1}, \dots, \phi_{N+N_{\partial_1}}$ — базисные функции, интерполирующие данные Дирихле для функции ψ на участке границы Γ_1 , $\phi_{N+1}, \dots, \phi_{N+N_{\partial_2}}$ — базисные функции, интерполирующие данные Дирихле для функции ζ на участке границы Γ_3 . Положив

$$\psi = \sum_{j=1}^N \hat{\psi}_j \phi_j + \sum_{j=N+1}^{N+N_{\partial_1}} \phi_j, \quad \zeta = \sum_{j=1}^N \hat{\zeta}_j \phi_j + \sum_{j=N+1}^{N+N_{\partial_2}} \hat{\zeta}_{0,j}^{(k)} \phi_j,$$

имеем итерационный процесс в форме

$$\begin{cases} A\hat{\psi}^{(k)} = g_1(\hat{\zeta}^{(k)}), \\ B(\hat{\psi}^{(k)})\hat{\zeta}^{(k+1)} = g_2(\hat{\psi}^{(k)}, \hat{\zeta}_0^{(k)}), \\ k = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\hat{\psi}^{(k)}, \hat{\zeta}^{(k)} \in \mathbb{R}^N, \quad \hat{\zeta}_0^{(k)} \in \mathbb{R}^{N_{\partial_2}}, \quad a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx,$$

$$b(\phi_i, \phi_j) = -a(\phi_i, \phi_j) + \sum_{l=1}^N \hat{\psi}_l^{(k)} \int_{\Omega} \nabla \phi_l \cdot \nabla \phi_j \phi_i dx,$$

$$g_1(i) = D\hat{\zeta}^{(k)} - \sum_{j=N+1}^{N+N_{\partial_1}} 1 \cdot \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx,$$

$$g_2(i) = C\hat{\psi}^{(k)} + \sum_{j=N+1}^{N+N_{\partial_2}} \hat{\zeta}_{0,j}^{(k)} \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx -$$

$$- \sum_{j=N+1}^{N+N_{\partial_2}} \sum_{l=1}^N \hat{\psi}_l^{(k)} \hat{\zeta}_{0,j}^{(k)} \int_{\Omega} \nabla \phi_l \cdot \nabla \phi_j \phi_i dx,$$

$$c(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \tilde{A} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx, \quad d(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx.$$

Матрицы A, B, C, D являются неособыми, что доказано для эллиптического оператора общего вида в [2]. В качестве $\zeta^{(0)}$ можно выбрать нулевой вектор.

4. Численный эксперимент. Полученный процесс создан для удобной реализации кода в MATLAB, так как достаточно лишь один раз создать массивы A, C, D и управлять процессом сходимости, применяя нижнюю релаксацию, изменяя коэффициенты в зависимости от параметров проблемы (2).

Приведем пару случаев: обтекание прямоугольных цилиндров под воздействием магнитного поля и обтекание круглых цилиндров без воздействия магнитного поля. На рис. 2, 3 изображены предельные линии функции ψ . Вихрь образуется в области между двумя цилиндрами.

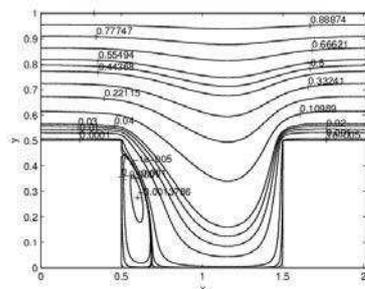


Рис. 2. $\psi(x, y)$ при $Re = 40, S = 2.5$, релаксация=0.4, $\sigma = 3$, количество итераций=1000, $h = \frac{1}{24}$

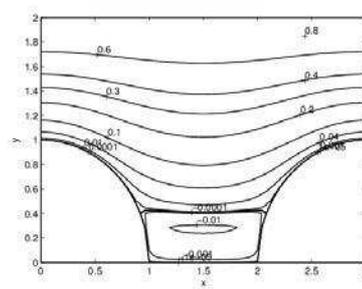


Рис. 3. $\psi(x, y)$ при $Re = 0, S = 0$, релаксация=0, $\sigma = 1$, количество итераций=300, $h = \frac{1}{24}$

5. Выводы. Результаты эксперимента показывают, что процесс (5) сходится в определенных случаях, и есть смысл изучать его подробнее, например, анализируя собственные значения полученных операторов и оценивая параметры релаксации для итераций (3).

Литература

1. Kalis H., Marinaki M., Gedroics A. Mathematical modeling of the 2D MHD flow around infinite cylinders with square-section placed periodically // Magnetohydrodynamics, 2012. Vol. 48, No 3. P. 527–542.
2. Renardy M., Rogers R. C. An introduction to partial differential equations. Texts in Applied Mathematics, Vol. 13, 2nd ed. Springer, 2004. 434 p.

Матросов А. В., Ширунов Г. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

Замкнутая форма операторов метода начальных функций для пространственной задачи теории упругости

1. Введение. Метод начальных функций (МНФ), теоретические основы которого разработаны Лурье А. И. [4], Власовым В. З. [2], Малиевым В. З. [5] и Агарёвым В. А. [1], предназначен для решения краевых задач теории упругости и строительной механики. Его идея проста: представить компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) упругого тела через компоненты НДС (начальные функции), определенные на начальной плоскости, являющейся частью границы рассчитываемого тела. Это представление получается с использованием символического способа [4] построения решения системы уравнений в частных производных в виде операторных соотношений. В статье получены замкнутые формы операторов МНФ для пространственной задачи изотропного тела на основе подхода [1], развитого для плоской задачи теории упругости.

2. Общее решение уравнений теории упругости. Уравнения равновесия Ламе для изотропного тела в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ запишем как систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$, предполагая при этом, что они зависят только от одной независимой переменной z .

$$\begin{aligned} & \left[2(\nu - 1)\partial_x^2 + (2\nu - 1)\left(\partial_y^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \right] u - \partial_x \partial_y v - \partial_x \frac{d}{dz} w = 0, \\ & -\partial_x \partial_y u + \left[2(\nu - 1)\partial_y^2 + (2\nu - 1)\left(\partial_x^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \right] v - \partial_y \frac{d}{dz} w = 0, \quad (1) \\ & -\partial_x \frac{d}{dz} u - \partial_y \frac{d}{dz} v + \left[(2\nu - 1)(\partial_x^2 + \partial_y^2) + 2(\nu - 1)\frac{d^2}{dz^2} \right] w = 0. \end{aligned}$$

Здесь E и ν — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного тела. Операторы дифференцирования ∂_x и ∂_y

по переменным x и y рассматриваем как некоторые символы (константы).

Неизвестные функции u , v и w ищем в виде линейных комбинаций начальных функций $u^0(x, y)$, $v^0(x, y)$, $w^0(x, y)$, $\sigma_z^0(x, y)$, $\tau_{yz}^0(x, y)$ и $\tau_{xz}^0(x, y)$, определенных на начальной плоскости $z = 0$

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= Z_{11}(\partial_x, \partial_y, z) u^0(x, y) + Z_{12}(\partial_x, \partial_y, z) v^0(x, y) + \\
&+ Z_{13}(\partial_x, \partial_y, z) w^0(x, y) + Z_{14}(\partial_x, \partial_y, z) \sigma_z^0(x, y) + \\
&+ Z_{15}(\partial_x, \partial_y, z) \tau_{yz}^0(x, y) + Z_{16}(\partial_x, \partial_y, z) \tau_{xz}^0(x, y), \\
v(x, y, z) &= Z_{21}(\partial_x, \partial_y, z) u^0(x, y) + Z_{22}(\partial_x, \partial_y, z) v^0(x, y) + \\
&+ Z_{23}(\partial_x, \partial_y, z) w^0(x, y) + Z_{24}(\partial_x, \partial_y, z) \sigma_z^0(x, y) + \\
&+ Z_{25}(\partial_x, \partial_y, z) \tau_{yz}^0(x, y) + Z_{26}(\partial_x, \partial_y, z) \tau_{xz}^0(x, y), \\
w(x, y, z) &= Z_{31}(\partial_x, \partial_y, z) u^0(x, y) + Z_{32}(\partial_x, \partial_y, z) v^0(x, y) + \\
&+ Z_{33}(\partial_x, \partial_y, z) w^0(x, y) + Z_{34}(\partial_x, \partial_y, z) \sigma_z^0(x, y) + \\
&+ Z_{35}(\partial_x, \partial_y, z) \tau_{yz}^0(x, y) + Z_{36}(\partial_x, \partial_y, z) \tau_{xz}^0(x, y).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $Z_{ij}(\partial_x, \partial_y, z)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 6$, — неизвестные операторы-функции (операторы МНФ), зависящие от операторов дифференцирования ∂_x , ∂_y и переменной z . Если удастся найти решение системы (1) в виде (2), то это решение можно рассматривать как общее решение системы (1), учитывая факт, что оно получено для произвольных начальных функций, а также, что оно позволяет удовлетворить граничным условиям на двух противоположных гранях параллелепипеда: $z = 0$ и $z = h$.

Подстановка (2) в (1) и группировка членов при соответствующих начальных функциях с учетом независимости и произвольности начальных функций приводит к шести системам дифференциальных уравнений для неизвестных операторов-функций $Z_{ij}(\partial_x, \partial_y, z)$

$$\begin{aligned}
&\left[2(\nu - 1)\partial_x^2 + (2\nu - 1)\left(\partial_y^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \right] Z_{1j}(\partial_x, \partial_y, z) - \\
&\quad - \partial_x \partial_y Z_{2j}(\partial_x, \partial_y, z) - \partial_x \frac{d}{dz} Z_{3j}(\partial_x, \partial_y, z) = 0, \\
&\left[2(\nu - 1)\partial_y^2 + (2\nu - 1)\left(\partial_x^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \right] Z_{2j}(\partial_x, \partial_y, z) - \\
&\quad - \partial_x \partial_y Z_{1j}(\partial_x, \partial_y, z) - \partial_y \frac{d}{dz} Z_{3j}(\partial_x, \partial_y, z) = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\left[(2\nu - 1) (\partial_x^2 + \partial_y^2) + 2(\nu - 1) \frac{d^2}{dz^2} \right] Z_{3j} (\partial_x, \partial_y, z) - \\ - \partial_x \frac{d}{dz} Z_{1j} (\partial_x, \partial_y, z) - \partial_y \frac{d}{dz} Z_{2j} (\partial_x, \partial_y, z) = 0.$$

Системы (3) решаются с начальными условиями $Z_{ij} (\partial_x, \partial_y, 0) = \delta_{ij}$ для операторов-функций на начальной плоскости $z = 0$. Значения для производных по переменной z на этой же плоскости определяются из представлений компонентов тензора напряжений через перемещения

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{-E}{(2\nu - 1)(1 + nu)} \left(\nu \partial_x u + \nu \partial_y v + (\nu - 1) \frac{d}{dz} w \right), \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{d}{dz} u + \partial_x w \right), \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{d}{dz} v + \partial_y w \right), \\ \sigma_x &= \frac{-E}{(2\nu - 1)(1 + nu)} \left(\nu \partial_x u + (\nu - 1) \partial_y v + \nu \frac{d}{dz} w \right), \\ \sigma_y &= \frac{-E}{(2\nu - 1)(1 + nu)} \left(\nu \partial_x u + \nu \partial_y v + (\nu - 1) \frac{d}{dz} w \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} (\partial_x v + \partial_y u). \end{aligned} \quad (4)$$

Полагая в первых трех уравнениях $z = 0$ с учетом представлений (2) перемещений через начальные функции, получим значения производных по переменной z на начальной плоскости $z = 0$ операторов МНФ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} Z_{11} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{d}{dz} Z_{21} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{d}{dz} Z_{31} \Big|_{z=0} &= \frac{\nu}{(\nu - 1)} \partial_x, \\ \frac{d}{dz} Z_{12} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{d}{dz} Z_{22} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{d}{dz} Z_{32} \Big|_{z=0} &= \frac{\nu}{(\nu - 1)} \partial_y, \\ \frac{d}{dz} Z_{13} \Big|_{z=0} &= -\partial_x, & \frac{d}{dz} Z_{23} \Big|_{z=0} &= -\partial_y, & \frac{d}{dz} Z_{33} \Big|_{z=0} &= 0, \\ \frac{d}{dz} Z_{14} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{d}{dz} Z_{24} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{d}{dz} Z_{34} \Big|_{z=0} &= \frac{2\nu^2 + \nu - 1}{E(\nu - 1)}, \\ \frac{d}{dz} Z_{15} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{d}{dz} Z_{25} \Big|_{z=0} &= \frac{2}{E(1 + \nu)}, & \frac{d}{dz} Z_{35} \Big|_{z=0} &= 0, \\ \frac{d}{dz} Z_{16} \Big|_{z=0} &= \frac{2}{E(1 + \nu)}, & \frac{d}{dz} Z_{26} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{d}{dz} Z_{36} \Big|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение соответствующих задач Коши для систем (3) найдено с помощью системы аналитических вычислений Maple. Все операторы получены в виде комбинаций тригонометрических синусов и косинусов. Несколько первых операторов МНФ для перемещения u представлены ниже

$$Z_{11} = \cos\left(\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}z\right) + \frac{\partial_x^2 z \sin\left(\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}z\right)}{2\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}(\nu - 1)},$$

$$Z_{12} = \frac{z\partial_x\partial_y \sin\left(\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}z\right)}{2\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}(\nu - 1)},$$

$$Z_{13} = \frac{-\partial_x}{2(\nu - 1)}\left(\frac{(2\nu - 1)\sin\left(\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}z\right)}{\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}} - z\cos\left(\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}z\right)\right)\dots$$

Полученные замкнутые формы операторов МНФ для пространственной задачи теории упругости изотропного континуума совпадают с вычисленными в [3] с использованием смешанного подхода при решении уравнений теории упругости и на основе умозрительных соображений.

3. Применение тригонометрических функций. Выберем тригонометрическое представление для начальных функций в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^0(x, y) &= t_{mn}^1 c_m s_n, & v^0(x, y) &= t_{mn}^2 s_m c_n, & w^0(x, y) &= t_{mn}^3 s_m s_n, \\ \sigma_z^0(x, y) &= t_{mn}^4 s_m s_n, & \tau_{yz}^0(x, y) &= t_{mn}^5 s_m c_n, & \tau_{xz}^0(x, y) &= t_{mn}^6 c_m s_n. \end{aligned}$$

Здесь $s_m = \sin(\alpha_m x)$, $c_m = \cos(\alpha_m x)$, $s_n = \sin(\beta_n y)$, $c_n = \cos(\beta_n y)$, $\alpha_m = m\pi/A$, $\beta_n = n\pi/B$, A и B — линейные размеры плиты соответственно вдоль осей Ox и Oy , t_{mn}^j , $j = 1, \dots, 6$, — вещественные числа, m и n — целые числа.

Тогда компоненты напряженного-деформированного состояния в соответствии с представлениями (2) и (4) будут выглядеть так

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{1j}(z)\right) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ v(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{2j}(z)\right) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \\ w(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{3j}(z)\right) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{4j}(z) \right) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\
\tau_{yz}(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{5j}(z) \right) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \\
\tau_{xz}(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{6j}(z) \right) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\
\sigma_x(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{7j}(z) \right) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\
\sigma_y(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{8j}(z) \right) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\
\tau_{xy}(x, y, z) &= \left(\sum_{j=1}^6 t_{mn}^j \bar{Z}_{9j}(z) \right) \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y).
\end{aligned}$$

В (6) функции $\bar{Z}_{ij}(z)$, $i = 1, \dots, 9$, $j = 1, \dots, 6$, суть коэффициенты в реализации соответствующих трансцендентных операторов МНФ на соответствующие тригонометрические функции.

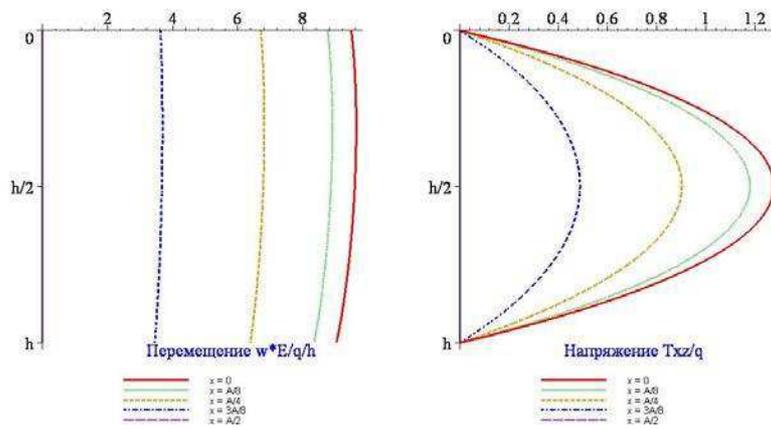


Рис. 1. Безразмерные перемещения wE/qh и касательные напряжения τ_{xz}/q в сечении $y = B/2$

С помощью основных соотношений МНФ (6) легко решается задача периодически нагруженного бесконечного слоя толщиной h . На начальной плоскости $z = 0$ могут быть заданы три из шести начальных функций. Неизвестные три начальные функции находятся из решения системы трех алгебраических уравнений, получающейся при удовлетворении граничным условиям на противоположной грани $z = h$ периодически нагруженного слоя [6]. Если из периоди-

чески нагруженного слоя вырезать плиту с размерами $x = (0, A)$ и $y = (0, B)$, то получим для нее решение при следующих граничных условиях на боковых гранях:

$$\begin{aligned} x = 0, A : w = 0, v = 0, \sigma_x = 0, \\ y = 0, B : w = 0, u = 0, \sigma_y = 0. \end{aligned}$$

Пусть на верхней грани $z = 0$ квадратной $A = B$, $h = A/3$ изотропной плиты ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 1/3$) задано нормальное напряжение $\sigma_z^0(x, y) = q \sin(\pi x/A) \sin(\pi y/B)$ (касательные напряжения нулевые), нижняя грань $z = h$ свободна от нагрузок. Результаты расчета в сечении $y = B/2$ плиты нормальных перемещений и касательных напряжений по толщине плиты представлены на рис. 1.

4. Заключение. Представленный алгоритм позволил получить операторы МНФ в замкнутой трансцендентной форме, минуя стадию их представления в виде степенных операторных рядов по переменной z .

Литература

1. Агарев В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1963. 203 с.
2. Власов В. З. Метод начальных функций в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. Серия ОТН, 1955. № 7. С. 49–69.
3. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматлит, 1960. 491 с.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 491 с.
5. Малиев А. С. О выборе функций в общих решениях задачи равновесия изотропного упругого тела // Труды ЛЭТИИЖТа. М.: Трансжелдориздат, 1952. Вып. 4. С. 180–244.
6. Матросов А. В. Вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2010. Вып. 4. С. 30–39.

Михеев С. А., Кривовичев Г. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Трехслойная конечно-разностная схема для решения системы кинетических уравнений Больцмана с дискретными скоростями

1. Введение. В настоящее время для решения ряда задач механики жидкости и газа стали применяться кинетические разностные схемы, которые основаны на решении задач не для уравнений механики сплошной среды, а для кинетических уравнений, из которых могут быть получены макроскопические уравнения [1]. Популярность таких методов связана с тем, что их алгоритмы являются достаточно простыми и легко подвергаются распараллеливанию.

В настоящей работе предложена модифицированная трехслойная схема с центральными разностями для решения системы кинетических уравнений. Эффективность представленной схемы показана при решении двух тестовых задач: задачи о течении в каверне и задачи Куэтта.

2. Кинетические уравнения с дискретными скоростями.

Система уравнений, полученная методом дискретных скоростей из кинетического уравнения Бхатнагара — Гросса — Крука, имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\lambda} (f_i - f_i^{(eq)}), \quad (1)$$

где $f_i = f_i(t, \mathbf{r})$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$ — функции распределения, соответствующие крупным частицам со скоростями $\mathbf{V}_i = v \mathbf{v}_i$, $v = l/\delta t$, $\mathbf{r} = (x, y)$ — вектор пространственных переменных, t — время, λ — время релаксации, l — длина свободного пробега крупных частиц, δt — время свободного пробега крупных частиц, $f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t, \mathbf{r}))$ — функции, аппроксимирующие равновесные функции распределения Максвелла, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. В работе рассматривается только случай плоских течений, при котором можно воспользоваться набором скоростей $D2Q9$, для которого $n = 9$, а векторы \mathbf{v}_i задаются следующим образом [1]:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_4 = (-1, 0), \quad \mathbf{v}_5 = (0, -1),$$

$$\mathbf{v}_6 = (1, 1), \quad \mathbf{v}_7 = (-1, 1), \quad \mathbf{v}_8 = (-1, -1), \quad \mathbf{v}_9 = (1, -1).$$

Для данного случая такие макроскопические переменные, как плотность $\rho(t, \mathbf{r})$ и скорость среды $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ вычисляются следующим образом [1]:

$$\rho(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^9 f_i(t, \mathbf{r}), \quad \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i f_i(t, \mathbf{r}).$$

Наиболее часто встречающаяся в литературе разностная схема для решения (1) (так называемое решеточное уравнение Больцмана) имеет следующий вид [1]:

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{1}{\tau} f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})), \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ — радиус-вектор узла пространственной равномерной сетки, построенной с шагом l по x и по y , t_j — узел временной равномерной сетки, построенной с шагом δt , τ — безразмерное время релаксации ($\tau = \lambda/\delta t$).

Необходимо отметить недостаток схемы (2), который связан с тем, что параметр Куранта γ для этой схемы равен единице, что влияет на ее устойчивость, так как его нельзя варьировать:

$$\gamma = v \frac{\delta t}{l} = \frac{l}{\delta t} \frac{\delta t}{l} = 1.$$

Поэтому в этой области исследований актуальной является задача разработки схем, для которых имеется возможность варьирования значения γ и тем самым улучшения их устойчивости. Такие схемы принято называть конечно-разностными решеточными схемами Больцмана [2].

3. Трехслойные разностные схемы. Рассмотрим равномерную сетку с шагом h по пространственным переменным и с шагом Δt по времени. Построим трехслойную (двухшаговую по времени) конечно-разностную схему. Будем аппроксимировать производные по времени и по пространственным переменным в узле (t_j, \mathbf{r}_{kl}) с помощью центральных разностных производных:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t} \approx \frac{f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j - \Delta t, \mathbf{r}_{kl})}{2\Delta t},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} &\approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{2h}, \\ \frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} &\approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{2h}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в систему (1), получим в узле (t_j, \mathbf{r}_{kl}) :

$$\begin{aligned}f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) &= f_i(t_{j-1}, \mathbf{r}_{kl}) - V_{ix} \frac{\Delta t}{h} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l}) \right) - \\ &\quad - V_{iy} \frac{\Delta t}{h} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1}) \right) - \\ &\quad - \frac{2\Delta t}{\lambda} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) \right).\end{aligned}\quad (3)$$

Разностная схема (3) является явной и аппроксимирует систему (1) со вторым порядком по всем переменным в сеточной норме C . Была произведена ее программная реализация, но оказалось, что даже при решении простых задач она является неустойчивой.

Ситуацию с неустойчивостью схемы (3) предлагается исправить следующим образом: для аппроксимации производной по t использовать центральную разностную производную не с целым шагом Δt , а с полуцелым шагом $\Delta t/2$:

$$\frac{\partial f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t} \approx \frac{f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\Delta t},$$

не меняя приближенных выражений для производных по пространственным переменным.

Тогда получим схему

$$\begin{aligned}f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) &= f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - V_{ix} \frac{\Delta t}{2h} \left(f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k-1l}) \right) - \\ &\quad - V_{iy} \frac{\Delta t}{2h} \left(f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl-1}) \right) - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\lambda} \left(f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})) \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Данная схема ничем, кроме величины шага по t , не отличается от схемы (3). Однако, предлагается модифицировать ее следующим

образом — представлять значения f_i на слое t_j через значения на предыдущем и последующем слоях:

$$f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \tilde{f}_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \frac{1}{2} \left(f_i(t_{j-1/2}, \mathbf{r}_{kl}) + f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) \right),$$

с целью коррекции решения на этом слое и затем подставлять это значение в (4).

Тогда получим отличную от (4) схему

$$\begin{aligned} f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = & \tilde{f}_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - V_{ix} \frac{\Delta t}{2h} \left(f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k-1l}) \right) - \\ & - V_{iy} \frac{\Delta t}{2h} \left(f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl-1}) \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\lambda} \left(f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

которую будем называть модифицированной схемой с центральными разностями (далее МЦР).

С помощью метода дифференциального приближения удалось показать, что схема (5) аппроксимирует (1) со вторым порядком по пространственным переменным и с первым порядком по времени.

Выражение для схемной вязкости, полученное с использованием метода Чепмена — Энскога по аналогии с [2], имеет вид

$$\nu = \frac{1}{3} \frac{l^2}{\delta t} \tau,$$

и в точности совпадает с выражением, полученным при применении этого метода к системе кинетических уравнений (1) [2].

Будем сравнивать результаты, полученные при расчете по схеме МЦР с другими известными из литературы схемами. Это схема с центральными разностями (далее ЦР) и схемы с направленными разностями первого (далее НР1) и второго порядка (далее НР2). Выражения для этих разностных схем представлены, к примеру, в работе [3]. Программная реализация разностных схем проводилась на языке пакета MATLAB.

4. Постановка задачи о течении в каверне и задачи Куэтта. В качестве примера, иллюстрирующего применение полученной схемы, рассматривается задача о течении в квадратной каверне с подвижной верхней крышкой. Каверна представляет собой полость, заполненную жидкостью. Будем считать, что в начальный момент времени скорость жидкости во внутренних точках области равна нулю, плотность ρ равна единице. В качестве граничных условий выступают условия прилипания: скорость жидкости на твердой границе равна скорости этой границы. В рассматриваемой задаче все стенки неподвижны, кроме верхней, которая движется с постоянной скоростью. Для реализации граничного условия прилипания был выбран подход, предложенный в [4].

Расчеты производились при задании значений такого критерия подобия, как число Рейнольдса Re . Результаты, полученные при Re , равном 50 и 100, сравнивались с результатами из [5]. Расчеты были проведены на сетке 200×200 . Как можно видеть из рис. 1, результаты хорошо согласуются с данными из [5].

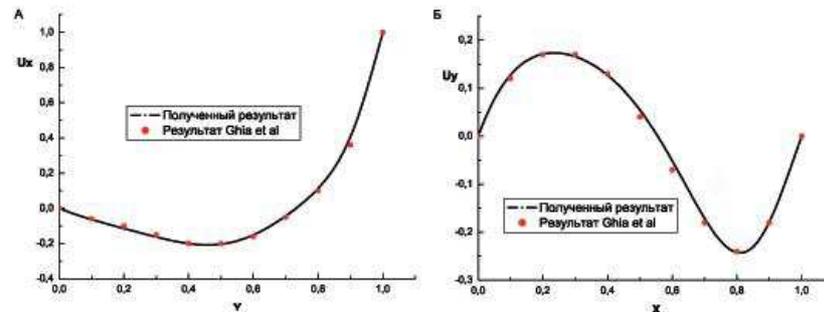


Рис. 1. Графики компонент вектора скорости U_x при $y = 0,5L$ (А) и U_y при $x = 0,5L$ (Б) при числе $Re = 100$

Рассматривалась еще одна тестовая задача — задача Куэтта. Она состоит в расчете течения в прямоугольной области, у которой нижняя граница неподвижна, верхняя движется с постоянной скоростью, а на боковых границах скорость меняется линейно. Расчеты были проведены на сетке 200×200 при Re , равном 50 и 100.

5. Результаты сравнения разностных схем. В таблицах 1 и 2 для сравнения приведены значения числа Куранта для представленных схем.

Таблица 1. Сравнение значений γ в случае задачи о течении в каверне для сетки 200×200

	Схема МЦР	Схема ЦР	Схема НР1	Схема НР2
$Re = 50$	0,559	0,320	0,400	0,160
$Re = 100$	0,455	0,419	0,348	0,133

Таблица 2. Сравнение значений γ в случае задачи Куэтта для сетки 200×200

	Схема МЦР	Схема ЦР	Схема НР1	Схема НР2
$Re = 50$	0,549	0,178	0,228	0,160
$Re = 100$	0,455	0,178	0,216	0,123

Как можно заметить, значение γ для предложенной схемы МЦР больше, чем для других схем. Это позволяет говорить о том, что с использованием данной схемы можно производить расчеты с большим шагом по времени, следовательно, она является более устойчивой и экономичной (по крайней мере, для данных задач).

Литература

1. Wolf-Gladrow D. A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer, 2005. 311 p.
2. Sofonea V., Sekerka R. F. Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // Journal of Computational Physics, 2003. No 184. P. 422–434.
3. Кривовичев Г. В. Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование, 2012. Т. 13. С. 332–340.
4. Zou Q., He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // Physics of Fluids, 1997. No 9. P. 1591–1598.
5. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High Re solutions for incompressible flow using the Navier — Stokes equations and a multigrid method // Journal of Computational Physics, 1982. Vol. 48, No 48. P. 387–411.

Морозов П. Д.

Санкт-Петербургский государственный университет

Об одном гладком локальном сплайне

Рекомендовано к публикации профессором Михеевым С. Е.

Введение. В узком смысле цифровой звук — это последовательность чисел, называемых сэмплами, каждое из которых представляет собой усредненное звуковое давление на последовательных интервалах времени фиксированной длины. Оцифровка, т. е. трансформация физического звука в последовательность сэмплов, осуществляется аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Обычно в АЦП имеется аппаратная возможность выбирать интервалы различной длины, по которым происходит усреднение. Количество таких интервалов в секунде называется частотой дискретизации. Производители АЦП обычно придерживаются стандартных частот. Так АЦП устройства ZET 230 позволяло создавать файлы с частотами дискретизации 11025, 22050, 32000, 44100, 48000, 88200 и 96000 Гц.

Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) устройства ZET 230, естественно, имеет те же частоты дискретизации. Работу ЦАП по восстановлению аналогового сигнала из потока сэмплов можно понимать как аппаратную интерполяцию, а если входной поток сэмплов интерпретировать как ступенчатый сигнал, то работа ЦАП есть аппаратное сглаживание. На весьма распространенной стандартной частоте 22050 Гц возможно появление обертонов, что, естественно, ухудшает в целом связку «запись-воспроизведение». Повышение частоты дискретизации облегчает аппаратное сглаживание, что обеспечивает меньший уровень паразитных шумов от работы ЦАП. Здесь будет исследован вопрос повышения качества выходного звука увеличением частоты дискретизации уже готового файла с оцифрованным звуком низкой частоты дискретизации.

Такая переработка исходного низкочастотного файла в выходной высокочастотный должна увеличить во столько раз число сэмплов в файле, во сколько раз возрастает частота. Такое дополнение естественно сделать с помощью интерполяции.

Представляется интересным исследование разных типов интерполяции с точки зрения качества звукового воспроизведения.

Здесь будет рассмотрен переход от низких частот дискретизации к частотам в 4, 3 и 2 раза более высоким. С помощью нестандартных сплайнов типа $S_{2,1}$ и $S_{3,2}$ (порядков 2 и 3, дефектов 1 и 2, соответственно). Сплайны типа $S_{3,2}$ могут эффективно сглаживаться до сплайнов типа $S_{3,1}$ с помощью алгоритма, изложенного в [1].

Описание задачи. Оцифрованный сигнал представим в виде последовательности сэмплов — чисел, привязанных к интервалам между равномерно расположенными моментами времени и соответствующих усредненным значениям исходного аналогового сигнала (звукового, электромагнитного). Требуется найти интерполяционный алгоритм, который приближал бы значения входного сигнала в промежуточных моментах времени, также образующих равномерную сетку в совокупности с исходными узлами. Требования к алгоритму:

1. Для получения дополнительных узлов из интервала $[t_i, t_{i+1}]$ следует ограничиться значениями входного сигнала в узлах, непосредственно примыкающих к t_i и t_{i+1} . Количество таких узлов желательно минимизировать.

2. В результате интерполяции нужно получить цифровой выходной сигнал, который при подаче на ЦАП дал бы наименьшее количество паразитных шумов.

Изменение частот дискретизации. При сохранении частотных характеристик входного сигнала на выходе, каждому входному сэмплу сопоставляется четыре сэмпла выходного сигнала, т. е. требуется назначить дополнительно три сэмпла. В связи с чем и производилась та или иная интерполяция [2]. Были рассмотрены линейная интерполяция и кубическая квазиэрмитовая. Оба варианта порождают локальные сплайны, т. е. не требующие одновременной обработки всего множества узлов.

Линейная интерполяция позволяла обрабатывать неограниченную последовательность входных сэмплов [3]. Результирующая ступенчатая функция при подаче в ЦАП достаточно хорошо сглаживалась аппаратно на добавленных узлах и несколько хуже на исходных, т. е. на каждом четвертом. Иными словами, если построить линейный сплайн по новой совокупности сэмплов, то он имеет разрывы производной на старых узлах, и им соответствует снижение качества аппаратного сглаживания.

В связи с этим возникает предположение, что если пожертвовать

немного гладкостью на дополнительных узлах, но уменьшить разрывы производной на старых узлах (для заключительного линейного сплайна), то можно ожидать общего улучшения качества воспроизведения. Такое перераспределение скачков производной с исходных узлов на дополнительные возможно при получении дополнительных сэмплов не линейной интерполяции, а такой, которая обеспечивает непрерывность производной сплайна, получаемого «склежкой» звеньев — интерполяционных многочленов между исходными узлами. Среди различных вариантов таких сплайнов выберем простейший.

Эрмитовы и квазиэрмитовы сплайны. Классический эрмитов сплайн состоит из звеньев, являющихся интерполяционными полиномами Эрмита, строящимися по двум значениям и по двум производным на двух узлах, ограничивающих участок интерполяции. «Склежка» таких узлов дает сплайн типа $S_{3,2}$, т. е. гладкий. В нашем случае значения производных в узлах отсутствуют. И имеющаяся теория и алгоритмы позволяют строить сплайн типа $S_{3,1}$, т. е. еще более гладкие. Однако, такой сплайн уже не локальный, и в вычислении четырех параметров каждого звена используется информация по всем узлам. При большом количестве (сотни тысяч) узлов задача становится практически неразрешимой. Поэтому здесь рассматривается сплайн типа $S_{3,2}$, т. е. менее гладкий, чем $S_{3,1}$, но зато локальный.

Для *интерполяции гладкими сплайнами* потребовался своего рода синтез эрмитовых сплайнов $S_{3,1}$ и кубических $S_{3,2}$. Первые применимы к бесконечным входным данным, но требуют знания производных в узлах, вторые не требуют производных, но разработаны только для конечного набора входных данных [4].

Построение квазиэрмитового сплайна. Каждому сэмплу, начиная с третьего и до предпоследнего, сопоставим центральную разностную производную:

$$m_i = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2h}, \quad i = 3, 4, \dots$$

Второму сэмплу сопоставим левую разностную производную:

$$m_2 = \frac{s_2 - s_1}{h}.$$

Начальное звено сплайна получим линейной интерполяцией по первому и второму сэмплу. Впрочем, можно было бы интерполировать между первым и вторым узлом как угодно. Последствия этого

произвола, как будет видно в дальнейшем, закончатся к третьему узлу. Остальные звенья от этого не зависят.

Прочие звенья между моментами i и $i + 1$, $i \geq 1$, получаются в результате решения задачи кратного интерполирования с помощью полинома третьей степени

$$H_3(j) = s_j, \quad H_3'(j) = m_j, \quad j = i, i + 1. \quad (1)$$

Поскольку m_j не являются значениями производной функции, такой полином назовем квазиэрмитовым.

Свойства квазиэрмитового сплайна. Решение задачи (1) с вычислительной точки зрения удобнее описать не через глобальную переменную t , а через локальную τ :

$$\tau = \frac{t - t_i}{h} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (2)$$

Из (2) видно, что τ пробегает значения от 0 до 1, когда t пробегает значения от t_i до t_{i+1} . Формула (2) не позволяет определить t по τ , но при построении интерполяционного сплайна этого не потребуются.

Не умаляя общности, можно положить единицу времени равной шагу дискретизации, т. е. $h = 1$. Тогда решение задачи (1) в локальных переменных доставляется известной формулой [4]:

$$C_i(\tau) = (1 - \tau)^2(1 + 2\tau)s_i + \tau^2(3 - 2\tau)s_{i+1} + \tau(1 - \tau)^2m_i - \tau^2(1 - \tau)m_{i+1}.$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях τ :

$$C_i(\tau) = a_i\tau^3 + b_i\tau^2 + c_i\tau + d_i, \quad d_i = s_i, \quad c_i = (s_{i+1} - s_{i-1})/2, \\ b_i = \frac{1}{2}(-s_{i+2} + 4s_{i+1} - 5s_i + 2s_{i-1}), \quad a_i = \frac{1}{2}(s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}).$$

Сравнение разных способов получения дополнительных сэмплов. Проведем две последовательные интерполяции гладкими сплайнами. Пусть $h = 1$, $s_{i-1} = 1,67$, $s_i = 0,9$, $s_{i+1} = 1,13$, $s_{i+2} = 0,36$ и $s_{i+3} = 0,5$. Тогда на участке $[i, i + 1]$ разностные производные равны $m_i = m_{i+1} = -0,27$, а сплайн получится $C_i(\tau) = -\tau^3 + 1,5\tau^2 - 0,27\tau + 0,9$. На участке $[i + 1, i + 2]$ имеем $m_{i+2} = -0,315$ и $C_{i+1}(\tau) = 0,955\tau^3 - 1,455\tau^2 - 0,27\tau + 1,13$. На рис. 1 представлены два последовательных звена, полученных линейной и квазиэрмитовой интерполяцией на отрезке $[i, i + 2]$. Здесь

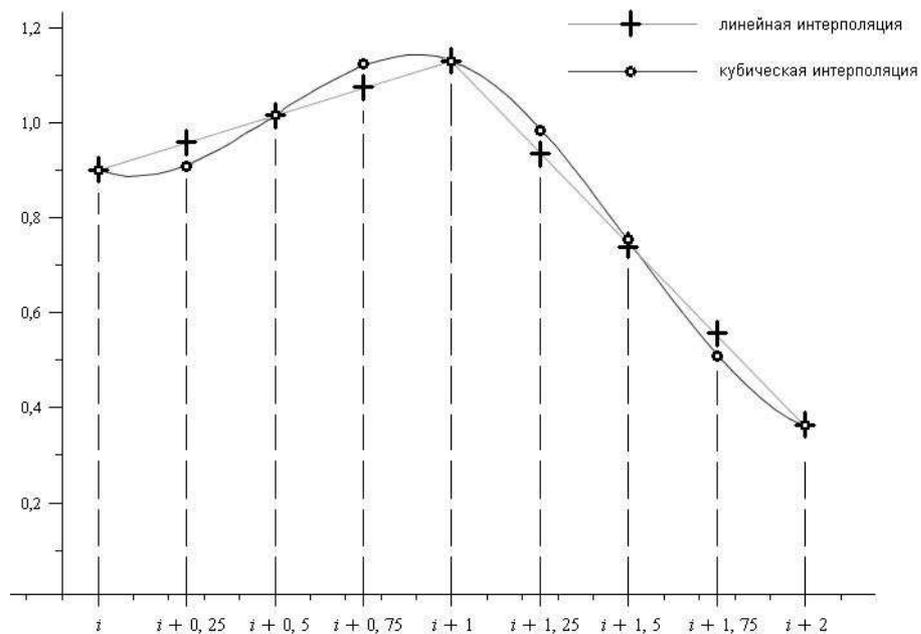


Рис. 1. Линейная и квазиэрмитова интерполяции

хорошо видно, что доставляемые квазиэрмитовым сплайном значения выходного сигнала, в сравнении с линейным сплайном, на дополнительных узлах при аппаратном сглаживании дадут меньшую скорость изменения производной [5]. И, соответственно, меньший уровень паразитных шумов.

Исследование выпуклости и вогнутости квазиэрмитовых сплайнов. Возможно ли изменение выпуклости на вогнутость и наоборот в i -ом звене? Ясно, что такому изменению соответствует точка перегиба $\tau_p = -\frac{b_i}{3a_i} = \frac{1}{3} \frac{s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1}}{s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}}$.

Отсюда получаем необходимое условие смены выпуклости и вогнутости в i -ом звене. Должно выполняться одно из двух неравенств:

$$0 < s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1} < 3(s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}),$$

$$0 < -s_{i+2} + 4s_{i+1} - 5s_i + 2s_{i-1} < -3(s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}),$$

что эквивалентно выполнению одной из двух систем:

$$\begin{cases} 0 < s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1}, \\ 0 < 2s_{i+2} - 5s_{i+1} + 4s_i - s_{i-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 > s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1}, \\ 0 > 2s_{i+2} - 5s_{i+1} + 4s_i - s_{i-1}. \end{cases}$$

Объединяя их, получаем

$$(s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1})(2s_{i+2} - 5s_{i+1} + 4s_i - s_{i-1}) > 0.$$

Результаты. «Родные» частоты АЦП–ЦАП ZET 230 давали следующие возможности умножения частот: двух- и четырехкратное от 22050 Гц к 44100 Гц и к 88200 Гц, и трехкратное с 32000 Гц к 96000 Гц. Во всех трех случаях дополнительные сэмплы (1, 3, 2, соответственно) вставлялись в выходной файл с помощью интерполяции двух видов: линейной и квазиэрмитовой. По сравнению с линейной интерполяцией при интерполяции квазиэрмитовыми кубическими сплайнами получался более чистый звук, т. е. в нем было снижено дребезжание и прочие шумы, что позволяло распознавать на слух выходной сигнал с субъективно меньшим напряжением и концентрацией внимания. Это и ожидалось, поскольку квазиэрмитовы кубические сплайны в сравнении с линейными подготавливают выходной сигнал, лучше подходящий для дальнейшего аппаратного сглаживания в ЦАП.

Литература

1. Михеев С. Е. Об одном парадоксе в теоремах о методе Ньютона // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2013. Вып. 1. С. 22–36.
2. Михеев С. Е. Нелинейные методы в оптимизации. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 276 с.
3. Михеев С. Е. Многомерная аппроксимация и интерполяция. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. 60 с.
4. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. Камачкин А. М., Михеев С. Е., Евстафьева В. В. Модели колебаний в нелинейных системах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 194 с.

Никифоров К. А., Сайфуллин М. Ф.
Санкт-Петербургский государственный университет

Разработка плоско-сферического диода с автоэмиссионным матричным катодом

1. Введение. Постановка задачи. Данная статья является продолжением [1] исследования матриц полевых эмиссионных катодов. Цель работы состоит в подборе параметров сферического анода, компенсирующего краевые эффекты катодной матрицы при функционировании в высоковольтном режиме. Исследуется возможность генерации катодными матрицами пучков не только большой плотности, но и высокой энергии электронов, что важно для многих практических применений. Ускорение эмитированных электронов производится в диодной конфигурации при межэлектродном расстоянии 1–3 мм и напряжении 1–12 кВ в условиях сверхвысокого вакуума. В эксперименте [1] наблюдались пробои, происходящие в области краев катодной матрицы, которые дестабилизировали ее работу. Эти пробои обусловлены, в первую очередь, электростатическим усилением поля на кромке катодной матрицы [1]. В соответствии с поставленной целью, необходимо решить задачу о нахождении распределения электростатического потенциала в двухэлектродной системе, состоящей из матрицы эмиссионных катодов и сферического анода. Далее необходимо найти радиус анода, расстояние до катодной матрицы и напряжение, обеспечивающее минимальное изменение модуля напряженности электрического поля по поверхности матрицы со средней величиной, достаточной для возникновения автоэлектронной эмиссии.

2. Распределение электрического поля. Задача о распределении электростатического потенциала решалась в двух постановках. Первая допускает применение *метода изображений* для нахождения поля между проводящими сферой и бесконечной плоскостью, моделирующими анод и катод соответственно. Будем рассматривать бесконечную плоскость с потенциалом $\varphi_p = 0$ и координатами $z = 0$, на расстоянии d от которой расположена сфера радиуса a с центром в точке $z = z_0$ и потенциалом $\varphi_s = V$ (рис. 1). В соответствии с методом изображений задача отыскания поля заданных источников в присутствии граничных поверхностей сводится к расчету поля тех

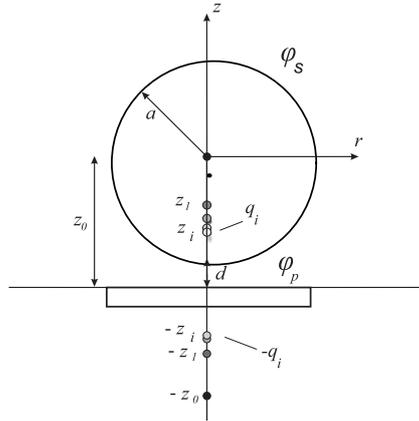


Рис. 1. Схематическое представление плоско-сферических электродов в цилиндрических координатах

же и некоторых добавочных источников в безграничной среде, которые помещаются вне области отыскания поля исходной задачи [2].

Положение и величина i -го добавочного заряда вычисляется по рекуррентной формуле [3]

$$z_i = z_0 - \frac{a^2}{z_0 + z_{i-1}}, \quad q_i = \frac{a}{z_0 + z_{i-1}} q_{i-1}.$$

Потенциал i -го заряда внутри сферы и его изображения в плоскости задается выражением

$$\varphi_i(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_i}{[(z - z_i)^2 + r^2]^{1/2}} - \frac{q_i}{[(z + z_i)^2 + r^2]^{1/2}} \right).$$

Общий потенциал определяется по принципу суперпозиции полей

$$\varphi(r, z) = \frac{aV}{q_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{q_i}{[(z - z_i)^2 + r^2]^{1/2}} - \frac{q_i}{[(z + z_i)^2 + r^2]^{1/2}} \right).$$

Напряженность электрического поля получается из выражения

$$\vec{E}(r, z) = -\nabla\varphi$$

и переписывается как

$$E_r(r, z) = \frac{aVr}{q_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{q_i}{[(z - z_i)^2 + r^2]^{3/2}} - \frac{q_i}{[(z + z_i)^2 + r^2]^{3/2}} \right),$$

$$E_z(r, z) = \frac{aV}{q_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{q_i(z - z_i)}{[(z - z_i)^2 + r^2]^{3/2}} - \frac{q_i(z + z_i)}{[(z + z_i)^2 + r^2]^{3/2}} \right),$$

где E_r и E_z — компоненты поля по направлению r и z соответственно.

Вторая постановка использовала модель катодной матрицы в виде параллелепипеда и состояла в решении внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в трехмерной области, со следующими граничными условиями:

$$\varphi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi|_{\Gamma_2} = V, \quad \varphi|_{\Gamma_3} = 0,$$

где Γ_1 — поверхность катода, Γ_2 — поверхность анода, Γ_3 — поверхность сферы, ограничивающая вычислительную область. Для этой задачи решение возможно получить только численно, для чего использовался *метод конечных элементов* и его реализация в COMSOL Multiphysics. Решения обеих задач представлены на рис. 2.

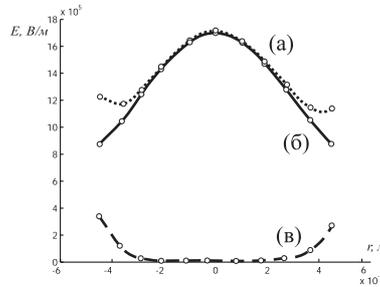


Рис. 2. Распределения модуля напряженности электрического поля по поверхности катода (вдоль диагонали верхней грани параллелепипеда) при использовании метода конечных элементов (а), при использовании метода изображений (б) и модуль их разности (в)

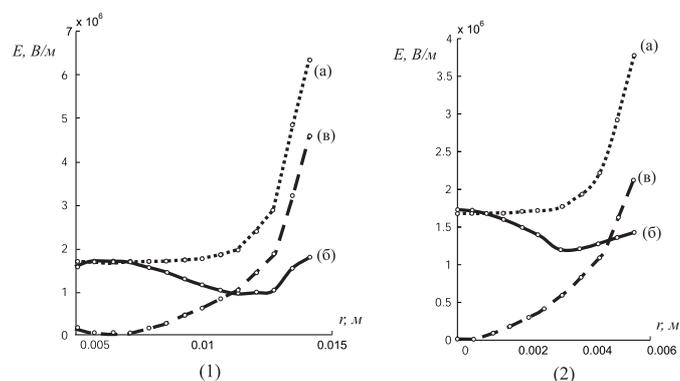


Рис. 3. Распределение модуля напряженности по поверхности катода от центра к краю вдоль диагонали (1) и вдоль средней линии (2) в случаях: (а) — цилиндрического анода, (б) — сферического анода, (в) — модуля разности (а) и (б)

Оба метода дают одинаковое решение в центре верхней грани катода. Поэтому для экспресс-оценки величины напряжения при подборе параметров далее используется метод изображений как более «быстрый». На краях катодной матрицы наблюдаются расхождения в решениях, обусловленные различием в постановках задач.

Далее рассмотрим две конфигурации электродов: круговой анод с катодной матрицей и упомянутую ранее систему плоско-сферического диода. Из рис. 3 видно, что сферическая форма анода снижает величину напряженности поля на краях матрицы примерно в два раза. В лучшем случае величина изменения модуля напряженности по поверхности катода не превышает 1 МВ/м при радиусе сферы $r = 5$ мм, межэлектродном расстоянии $d = 2$ мм и напряжении $V = 4$ кВ. Данные значения были подобраны методом простого перебора.

3. Заключение. В работе найдены параметры плоско-сферического диода, при которых электростатическое усиление поля на кромке катодной матрицы уменьшено в два раза по сравнению со случаем плоских электродов.

В учебно-научной лаборатории физического моделирования

управляющих полей и систем заряженных частиц факультета ПМ-ПУ создан прототип диода (рис. 4) и проводятся испытания.



Рис. 4. Прототип устройства

Работа выполнена с использованием программного обеспечения и вычислительного оборудования Ресурсного центра «Вычислительный центр» СПбГУ.

Литература

1. Трофимов В. В., Никифоров К. А., Антонова Л. И. Исследование матриц полевых эмиссионных катодов // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 228–233.
2. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во ИЛ, 1954. 606 с.
3. Dall'Agnol F. F., Mammana V. P. Solution for the electric potential distribution produced by sphere-plane electrodes using the method of images // Revista Brasileira de Ensino de Fisica, 2009. Vol. 31, No 3. P. 1–9.

Перегудин С. И., Холодова С. Е.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербургский национальный исследовательский

университет информационных технологий, механики и оптики

Редукция в задачах динамики вращающегося слоя электропроводной несжимаемой жидкости с учетом эффектов диффузии магнитного поля

1. Динамика тонкого вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости. Целью данной исследования является редукция системы уравнений с частными производными, моделирующей возмущение в слое идеальной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, ограниченном поверхностями, изменяющимся в пространстве и во времени, с учетом инерционных сил.

Для полученных в результате редукции уравнений построены решения, описывающие распространение волн малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали слое и в узком длинном канале.

Если электропроводная жидкая среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамическом движении в ней возникают электрические токи. Эти токи изменяют магнитное поле. Но на токи в магнитном поле действуют силы, способные изменить характер движения среды. Следовательно, гидродинамическое движение и электромагнитные явления взаимосвязаны. Эта связь описывается совместной системой уравнений поля и уравнений движения жидкости. Согласно работам известного шведского физика и астрофизика Г. Альфвена связь между электромагнитными и гидродинамическими явлениями возрастает с увеличением линейного масштаба явления. Для крупномасштабных явлений эта связь может быть достаточно сильной. В частности, это относится, например, к недрам звезд и жидкому ядру Земли [1]–[3].

Вопросам о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости посвящены работа [4], в которой рассматривалась модель, построенная в приближении быстрого вращения. В рамках этой теории в уравнении движения пренебрегается силой инерции. В результате отфильтровываются инерциальные, альфвеновские волны

и волны Россби. Кроме того, в пределе быстрого вращения скорость \mathbf{v} находится неоднозначно, а с точностью до слагаемого, представляющего собой геострофическую скорость. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что геострофическая скорость не удовлетворяет магнитогеострофическому уравнению. Для преодоления указанных трудностей привлекаются вязкие силы и пренебрегается вязкостью, когда это допустимо.

В работе [4] исследовалась задача о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости в слое между плоскостями $z = 0$ и $z = d$ в магнитогеострофическом приближении с учетом вязких сил.

В данном исследовании предполагается, что границы слоя не являются постоянными, а представляют собой поверхности, изменяющиеся в пространстве и во времени; кроме того, в уравнении движения учитываются инерционные силы.

Рассмотрим тонкий вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ слой электропроводной несжимаемой жидкости, ограниченный снизу подвижным дном, заданным относительно отсчетного уровня $z = 0$ поверхностью $z = -h_B(x, y, t)$, с неизвестной функцией $h_B(x, y, t)$, а сверху — известной поверхностью $-Z(x, y)$. Ось вращения жидкости совпадает с осью z , т.е. $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$.

Введем функцию полной глубины $H = h_B - Z$. Пусть толщина жидкого слоя в состоянии покоя равна $H_0(x, y)$. Представим функцию $H(x, y, t)$ в виде

$$H(x, y, t) = H_0(x, y) + \eta(x, y, t),$$

где $\eta(x, y, t)$ — малое возмущение, характеризуемое неравенством $\eta \ll H_0$.

Основные уравнения магнитной гидродинамики, описывающие распространение малых возмущений рассматриваемой среды имеют вид [1], [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} - \alpha v_y &= g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\mu \rho} \mathcal{D} b_x, & \frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha v_x &= g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\mu \rho} \mathcal{D} b_y, \\ \frac{\partial b_x}{\partial t} &= \mathcal{D} v_x + \frac{1}{R_m} \Delta b_x, & \frac{\partial b_y}{\partial t} &= \mathcal{D} v_y + \frac{1}{R_m} \Delta b_y, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H_0 v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H_0 v_y) &= 0, \end{aligned}$$

$$H_0 \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + b_{z0}^{(e)}(x, y, t) - b_{z0}(x, y, t) = 0,$$

где

$$\mathcal{D} = b_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial}{\partial y}$$

— дифференциальный оператор. Введем в рассмотрение функции $\tilde{\eta}(x, y, t)$, $\tilde{b}_x(x, y, t)$, $\tilde{b}_y(x, y, t)$, $\xi(x, y, t)$, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= \frac{1}{g} \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \tilde{\eta}(x, y, t), \quad b_x(x, y, t) = \\ &= \mu \rho \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \tilde{b}_x(x, y, t), \quad b_y(x, y, t) = \mu \rho \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \tilde{b}_y(x, y, t), \\ \mathcal{D}_t \tilde{\eta}(x, y, t) &= (\mathcal{F}^2 + (\alpha \mathcal{D}^2)^2) \xi(x, y, t) \end{aligned}$$

с использованием операторов

$$\mathcal{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{F} = \mu \rho (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) - \mathcal{D}^2 \mathcal{D}_t.$$

В результате исходная система уравнений редуцируется к одному уравнению, на основании чего следует

Утверждение. Любое решение $\mathbf{v}(x, y, t)$, $\mathbf{b}(x, y, t)$, $\eta(x, y, t)$ задачи о малых возмущениях в слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, удовлетворяющее необходимым условиям гладкости, представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(x, y, t) &= \mu \rho \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \tilde{\mathbf{b}}, \quad \eta = \frac{1}{g} \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta} = \mathcal{D}_t \tilde{\eta}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathcal{D}_t \tilde{\mathbf{b}}, \\ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & \alpha \\ -\alpha & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_x + \mathcal{D} \tilde{b}_x \\ \tilde{\eta}_y + \mathcal{D} \tilde{b}_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} = \mathcal{D} (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \mu \rho \mathcal{D}_t \left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - \mathcal{D}^2 & \alpha \mu \rho \left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \\ -\alpha \mu \rho \left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) & \mu \rho \mathcal{D}_t \left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - \mathcal{D}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}, \\ \tilde{\eta}(x, y, t) &= (\mathcal{F}^2 + (\alpha \mathcal{D}^2)^2) \xi(x, y, t), \\ \mathcal{F} &= \mu \rho (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - \mathcal{D}^2 \mathcal{D}_t, \quad \mathcal{D} = b_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

где функция $\xi(x, y, t)$ является решением уравнения

$$\mathcal{D} (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2)^2 \left(\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \mathcal{D}_t - \frac{\mathcal{D}^2}{\mu\rho} \right) \Delta_2 \xi = \frac{b_{z0} - b_{z0}^{(e)}}{(\mu\rho)^2 H_0}. \quad (1)$$

Замечание 1. Верно и обратное утверждение: любое решение уравнения (1) порождает решение системы, моделирующей малые возмущения в тонком слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, если построенные по вышеприведенным формулам функции \mathbf{v} , \mathbf{b} , η удовлетворяют в рассматриваемой области условиям гладкости.

Рассмотрим свободные линейные колебания вращающегося слоя электропроводной жидкости. А именно, исследуем распространение волн малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали слое.

Направляя ось Oy параллельно \mathbf{b}_0 , уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_m} \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} - \frac{b_{0y}^2}{\mu\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] A\zeta = \frac{b_{z0}(x, y, t) - b_{z0}^{(e)}(x, y, t)}{b_{0y}(\mu\rho)^2 H_0(x, y)},$$

решение которого

$$\zeta(x, y, t) = (C_1(x, y) + C_2(x, y)t) \cos \alpha t + (C_3(x, y) + C_4(x, y)t) \sin \alpha t + \\ + \left(\tilde{C}_1(x, y, t) + \tilde{C}_2(x, y, t)t \right) \cos \alpha t + \left(\tilde{C}_3(x, y, t) + \tilde{C}_4(x, y, t)t \right) \sin \alpha t,$$

где

$$\tilde{C}_1 = \frac{1}{2\alpha^3} \int_{t_0}^t (\alpha t \cos \alpha t - \sin \alpha t) S dt, \quad \tilde{C}_2 = -\frac{1}{2\alpha^2} \int_{t_0}^t S \cos \alpha t dt, \\ \tilde{C}_3 = \frac{1}{2\alpha^3} \int_{t_0}^t (\cos \alpha t + \alpha t \sin \alpha t) S dt, \quad \tilde{C}_4 = -\frac{1}{2\alpha^2} \int_{t_0}^t S \sin \alpha t dt, \\ d^2 = \frac{\frac{b_{0y}^2}{\mu\rho} + \frac{i\sigma}{R_m}}{\frac{b_{0y}^4}{(\mu\rho)^2} + \frac{\sigma^2}{R_m^2}}, \quad b_H = -d^2 \tilde{B}_H, \quad A = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right)^2, \quad \zeta = \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 y},$$

$$\tilde{C}_1(x, y) = -\frac{1}{d\sigma} \int_{y_0}^y b_H(x, y) \sin d\sigma y dy,$$

$$\tilde{C}_2(x, y) = \frac{1}{d\sigma} \int_{y_0}^y b_H(x, y) \cos d\sigma y dy,$$

$$S(x, y) = \left[\left(C_1(x) + \tilde{C}_1(x, y) \right) \cos d\sigma y + \left(C_2(x) + \tilde{C}_2(x, y) \right) \sin d\sigma y \right] \times \exp(-i\sigma t).$$

Произвольные функции C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничного условия непротекания через вертикальные поверхности, если таковые имеются.

Пусть $H_0 = \text{const}$ и $b_{z0} - b_{z0}^{(e)} = \text{Re } B e^{i(kx + ly - \sigma t)}$. Тогда уравнение (1) имеет решение

$$\zeta = \text{Re } A e^{i(kx + ly - \sigma t)},$$

если выполняется дисперсионное соотношение

$$(\sigma^2 - \alpha^2)^2 \left(\sigma^2 - \frac{(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} + i \frac{(k^2 + l^2)}{R_m} \sigma \right) \times \\ \times (k^2 + l^2) (b_{0x}k + b_{0y}l) = \frac{B}{Ai(\mu\rho)^2 H_0}.$$

В частности, при $b_{z0} = b_{z0}^{(e)}$ имеем

$$(\sigma^2 - \alpha^2)^2 \left(\sigma^2 - \frac{(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} + i \frac{(k^2 + l^2)}{R_m} \sigma \right) = 0,$$

откуда

$$\sigma = \pm\alpha, \quad \sigma = \pm \sqrt{\frac{4(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} - \frac{(k^2 + l^2)^2}{R_m^2}} - i \frac{(k^2 + l^2)}{2R_m}.$$

Для частоты σ имеются две четко разделяющиеся ветви. Первый тип колебаний — инерционная волна. В них существенную роль играют инерция и кориолисова сила. Частота инерционных волн вещественна, эти волны устойчивы. Второй тип колебаний — магнитные

волны. Их частота — комплексна. Но в силу того, что мнимая часть частоты σ отрицательная, магнитные волны неустойчивость также не обнаруживают.

Заметим, что при $\mathbf{b}_0 = 0$

$$\begin{aligned}\sigma &= \pm \sqrt{\frac{(k^2 + l^2)^2}{4R_m^2}} - i \frac{(k^2 + l^2)^2}{2R_m^2} = \\ &= \pm i \frac{(k^2 + l^2)^2}{2R_m^2} - i \frac{(k^2 + l^2)^2}{2R_m^2} = -i \frac{(k^2 + l^2)^2}{R_m^2},\end{aligned}$$

$$\zeta = \Re e A \exp i(kx + ly + i \frac{(k^2 + l^2)}{R_m} t) = A \exp - \frac{(k^2 + l^2)}{R_m} t \cos(kx + ly).$$

Таким образом, диффузия магнитного поля способствует его затуханию, в то время как в случае замороженного поля наблюдается установившийся во времени процесс, т.е. индуцированное магнитное поле может существовать сколь угодно длительное время.

В частности, при $R_m \rightarrow \infty$ получаем известное дисперсионное соотношение для волны Альфвена

$$\sigma = \pm \frac{kb_{0x} + lb_{0y}}{\sqrt{\mu\rho}}.$$

Литература

1. Холодова С. Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008. Т. 48, № 5. С. 882–898.
2. Холодова С. Е., Перегудин С. И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. 455 с.
3. Перегудин С. И., Холодова С. Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой неоднородной жидкости в экваториальной области // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010. Т. 50, № 11. С. 1–15.
4. Zhang K.-K., Busse F. H. Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // Phys. Earth Planet. Inter., 1990, Vol. 59. P. 208–222.

Седова О. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

О моделировании радиационного воздействия, обусловленного выбросами радиоактивных веществ в атмосферу

Рекомендовано к публикации профессором Далем Ю. М.

1. Введение. Об актуальности моделирования радиационного воздействия при выбросах свидетельствует большой интерес, проявленный к этой теме профильными исследовательскими институтами и отдельными специалистами. Это связано с широким использованием атомной энергии в современном мире.

Данное исследование является частью работы по подготовке оригинальной отечественной компьютерной программы, которая позволяет оценивать степень радиационного воздействия на человека и окружающую среду в связи с работой предприятий, использующих атомную энергию. В частности, определяется оптимальная структура программы, выбор расчетной модели и проводится сравнительный анализ методов описания коэффициентов дисперсии.

2. Структура программы. Фундаментальной задачей описываемой программы является осуществление расчётного моделирования уровней радиационного воздействия, обусловленного выбросами радиоактивных веществ в атмосферу на действующих промышленных объектах. Сложность её структуры объясняется необходимостью учёта множества существенных факторов для получения корректных результатов.

Технология проведения радиационно опасных работ на предприятиях обуславливает важность получения достоверных результатов на расстояниях от источника выброса радионуклидов, не превышающих 10 км и высотах выброса менее 100 м. Размещение предприятий в регионах с различными географическими и метеорологическими условиями требует учёта различных погодных условий, типа подстилающей поверхности и рельефа местности. Также важно принимать во внимание особенности источника (высота трубы, температура выброса, состав поступающих в атмосферу радионуклидов).



Рис. 1. Структурная схема программы

3. Описание расчетной модели. Теория атмосферной турбулентной диффузии, которая (вместе с ветровым переносом) определяет распространение примесей, включая радиоактивные, в атмосфере, несмотря на интенсивное развитие [1, 2], имеет ещё много нерешённых вопросов. В связи с этим, путём получения расчётных формул, адекватно описывающих существующие физико-математические модели переноса примесей в атмосфере, является аппроксимация теоретическими формулами экспериментальных данных.

В настоящее время предложено множество моделей атмосферной диффузии и ещё больше расчётных формул. Их сопоставление для указанного диапазона расстояний и высот выброса позволяет выбрать для прогнозирования уровней радиационного воздействия модель Пасквилла – Гиффорда [1], основанную на статистическом (гауссовом) распределении радиоактивных примесей в горизонтальном и вертикальном направлении.

Введём прямоугольную систему координат, в центре которой расположен источник выброса, ось x совпадает с направлением ветровой струи, оси y и z — расстояния в горизонтальном и вертикальном направлениях от точки детектирования, расположенной на оси x . Через промежуток времени t после выброса приземная объёмная концентрация радионуклидов может быть рассчитана с помощью следующей общей формулы [1]

$$A^i(x, y, z, t) = \frac{Q_0 F^i}{2\pi^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \times \exp\left(-\frac{(x-ut)^2}{2\sigma_x^2}\right) \times \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left(\exp\left(-\frac{(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right)\right),$$

где x, y, z — координаты точки; t — время, прошедшее после выброса, с; Q_0 — активность источника, Бк; F^i — функция истощения облака за счёт радиоактивного распада, сухого и влажного оседания нуклидов; u — скорость ветра, м/с; h — высота облака над землёй на расстоянии x , м; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — стандартное отклонение распределения примеси в направлении соответствующих осей, м.

Получение детальной информации о пространственном и временном распределении величин объёмной активности для каждого i -го радионуклида $A^i(x, y, z, t)$, поступающего в атмосферу, позволяет определить основные характеристики радиационного воздействия:

1. Дозу внешнего облучения, обусловленную прохождением облака радиоактивных газов. При этом в зависимости от расстояния до места выброса облако, в качестве источника облучения, может аппроксимироваться различными объёмными элементами (полупространством, цилиндром конечных размеров, конусом и т. д.).
2. Дозу внешнего облучения, обусловленную поверхностным загрязнением почвы (подстилающей поверхности) за счёт осадения радионуклидов.
3. Дозу внутреннего облучения, обусловленную вдыханием радиоактивных газов и аэрозолей.

В модели Пасквилла — Гиффорда на основании параметров ветрового режима и других метеорологических характеристик определено шесть классов стандартных состояний устойчивости атмосферы

ных процессов (категории погоды A, B, C, D, E, F), которые отражают основные особенности процессов рассеяния примеси. Неустойчивые состояния (категории A, B) характеризуются сильным турбулентным перемешиванием. Устойчивые состояния (E, F) соответствуют условиям слабых турбулентных перемешиваний, вследствие которых примеси могут уноситься на большие расстояния от источника выброса. Категории C и D представляют нейтральные, средние по характеру устойчивости состояния.

4. Сравнительный анализ коэффициентов дисперсии. Существенное влияние на результат расчетов доз облучения оказывает выбор коэффициентов горизонтальной и вертикальной дисперсии σ_y, σ_z . Их численные значения могут сильно различаться в зависимости от аппроксимации исходных данных. Чаще всего для оценки этих коэффициентов используется подход Смита — Хоскера [1–3]. Однако в работе [2] вместо обычно используемых формул [4–6] для определения величины дисперсии струи предлагается использовать аппроксимацию формул Смита — Хоскера (для σ_z) и Бриггса (для σ_y), предложенную Эйри [2].

Особенность этого подхода состоит в том, что построенная на его основе расчетная модель рассеяния примеси в атмосфере не содержит набора констант, который необходимо корректировать при переходе от одних погодных условий к другим. При этом изменяющимися параметрами служат две величины, задающие погодные условия и шероховатость поверхности, что упрощает вычисления и позволяет вводить любые значения шероховатости в диапазоне от 0,001 до 4 м.

Были проведены расчеты величины относительного отклонения соответствующих значений коэффициентов вертикальной и горизонтальной дисперсии $\delta^E(x) = (\sigma^{SH} - \sigma^E)/\sigma^{SH}$, полученных по аппроксимации Эйри (σ^E) и по модели Смита — Хоскера (σ^{SH}). Расчеты выполнялись для шести категорий устойчивости атмосферы A, B, C, D, E, F и стандартного набора шероховатостей $z_0 = 1, 10, 100, 400$ см в диапазоне расстояний от источника выброса от $x = 100$ до 10000 м.

Полученные значения величин отклонения для наиболее часто используемых на практике наборов параметров z_0 и x приведены в таблице, из которой видно, что расчет для σ_y даёт существенно большие отклонения (превышающие 300 % при шероховатости 4 м

и категории погоды F). Объясняется это тем, что в соответствии с моделью Смита — Хоскера шероховатость не входит в число параметров определения коэффициента горизонтальной дисперсии σ_y , а в аппроксимации Эйри включена в качестве аргумента при определении как σ_z , так и σ_y .

Таблица. Относительные отклонения в величине дисперсий δ_y^E , δ_z^E , %.

x , м	А	В	С	Д	Е	Ф
$z_0 = 1 \text{ см}$						
100	$\delta_y = -23$ $\delta_z = -31$	$\delta_y = -0,4$ $\delta_z = 39$	$\delta_y = 2,8$ $\delta_z = 42$	$\delta_y = 8,2$ $\delta_z = 50$	$\delta_y = 5,4$ $\delta_z = 59$	$\delta_y = 13,7$ $\delta_z = 63$
1000	$\delta_y = -0,4$ $\delta_z = 29$	$\delta_y = -2,5$ $\delta_z = 37$	$\delta_y = -4$ $\delta_z = 40$	$\delta_y = -1,9$ $\delta_z = 48$	$\delta_y = 0,3$ $\delta_z = 57$	$\delta_y = -4,7$ $\delta_z = 62$
10000	$\delta_y = -3$ $\delta_z = 12,9$	$\delta_y = -14,8$ $\delta_z = 23$	$\delta_y = -9,7$ $\delta_z = 27$	$\delta_y = -1,9$ $\delta_z = 36$	$\delta_y = 7,4$ $\delta_z = 48$	$\delta_y = 0,2$ $\delta_z = 54$
$z_0 = 10 \text{ см}$						
100	$\delta_y = -11$ $\delta_z = 0$	$\delta_y = 7,5$ $\delta_z = 4,5$	$\delta_y = 8,2$ $\delta_z = -0,9$	$\delta_y = 10,9$ $\delta_z = 0,1$	$\delta_y = 5,2$ $\delta_z = 5,4$	$\delta_y = 10,4$ $\delta_z = 0,3$
1000	$\delta_y = -1,8$ $\delta_z = 0$	$\delta_y = -6,1$ $\delta_z = 4,3$	$\delta_y = -8,3$ $\delta_z = -0,7$	$\delta_y = -6,1$ $\delta_z = 0,9$	$\delta_y = -3,7$ $\delta_z = 6,9$	$\delta_y = -9,7$ $\delta_z = 2,9$
10000	$\delta_y = -2,6$ $\delta_z = -0,3$	$\delta_y = -16,8$ $\delta_z = 3,3$	$\delta_y = -10,5$ $\delta_z = 0,2$	$\delta_y = -2,4$ $\delta_z = 4,6$	$\delta_y = 5,9$ $\delta_z = 13,4$	$\delta_y = -3,5$ $\delta_z = 13,6$
$z_0 = 100 \text{ см}$						
100	$\delta_y = 2$ $\delta_z = -43$	$\delta_y = 16,6$ $\delta_z = -49$	$\delta_y = 15,4$ $\delta_z = -74$	$\delta_y = 15,8$ $\delta_z = -95$	$\delta_y = 8,1$ $\delta_z = -113$	$\delta_y = 10,6$ $\delta_z = -161$
1000	$\delta_y = 0,2$ $\delta_z = -29$	$\delta_y = -6$ $\delta_z = -34$	$\delta_y = -8,3$ $\delta_z = -54$	$\delta_y = -5,4$ $\delta_z = -67$	$\delta_y = -2,6$ $\delta_z = -73$	$\delta_y = -9,3$ $\delta_z = -97$
10000	$\delta_y = -1,2$ $\delta_z = 7,3$	$\delta_y = -18,1$ $\delta_z = 2,9$	$\delta_y = -11,6$ $\delta_z = -6,8$	$\delta_y = -4,1$ $\delta_z = -8,8$	$\delta_y = 2,7$ $\delta_z = -4,9$	$\delta_y = -9,7$ $\delta_z = -10,8$
$z_0 = 400 \text{ см}$						
100	$\delta_y = 1$ $\delta_z = -75$	$\delta_y = 14,7$ $\delta_z = -91$	$\delta_y = 12,3$ $\delta_z = -138$	$\delta_y = 11,6$ $\delta_z = -184$	$\delta_y = 2,3$ $\delta_z = -232$	$\delta_y = 3,7$ $\delta_z = -336$
1000	$\delta_y = -0,4$ $\delta_z = -38$	$\delta_y = -8,1$ $\delta_z = -51$	$\delta_y = -10,2$ $\delta_z = -81$	$\delta_y = -6,6$ $\delta_z = -102$	$\delta_y = -3,6$ $\delta_z = -114$	$\delta_y = -11$ $\delta_z = -148$
10000	$\delta_y = 1,2$ $\delta_z = 18,6$	$\delta_y = -17,1$ $\delta_z = 10,6$	$\delta_y = -11,1$ $\delta_z = -2,2$	$\delta_y = -4,5$ $\delta_z = -8$	$\delta_y = 1$ $\delta_z = -7,8$	$\delta_y = -13,3$ $\delta_z = -18$

5. Заключение. В работе представлена структура компьютерной программы, позволяющей расчётным путем оценивать возможное радиационное воздействие на человека и окружающую среду при выбросах в атмосферу. В рамках гауссовой модели атмосферной дисперсии проанализированы различные подходы к выбору коэффициентов σ_y и σ_z . Определены оптимальные способы их описания, которые позволяют наиболее эффективно моделировать поведение радиоактивной примеси в рассматриваемом диапазоне расстояний от

источника выброса и в широком диапазоне шероховатости подстилающей поверхности.

Литература

1. Гусев Н. Г., Беляев В. А. Радиоактивные выбросы в биосфере. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1986. 224 с.
2. Методические указания по расчету радиационной обстановки в окружающей среде и ожидаемого облучения населения при кратковременных выбросах радиоактивных веществ в атмосферу (технический документ МПА-98). М., 1998. 212 с.
3. Руководство по установлению допустимых выбросов радиоактивных веществ в атмосферу (ДВ-98). М.: Госкомэкология России; Минатом России, 1999. 196 с.
4. Учет дисперсионных параметров атмосферы при выборе площадок для атомных электростанций. Руководство по безопасности № 50 SG S3. МАГАТЭ, Вена, 1982. 376 с.
5. Руководство по организации контроля состояния природной среды в районе расположения АЭС / Под ред. К. П. Махонько. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 320 с.
6. Generic models and parameters for assessing the environmental transfer of radionuclides from routine releases. Safety Series No 57. IAEA, Vienna, 1982.

Семяшкина Е. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Оптимизация параметров упруго-механической системы

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Постановка задачи. В практике проектирования судового и другого оборудования важную роль играют расчеты деталей на действие ударных нагрузок. Подобного рода нагрузки на судах возникают при столкновениях судов, ударах волн о корпус судна, ударах о мели, камни, лед и другие препятствия.

Рассмотрим модель динамической системы с виброизоляцией, состоящей из двух механизмов на общей раме, установленной на фундаменте. На примере такой системы можно наглядно отследить, как ударное воздействие на фундамент передается на элементы системы.

Требуется в рамках выбранной модели получить правило выбора таких параметров, которые позволили бы минимизировать вредное воздействие ударного импульса.

2. Модель динамической системы. На общей раме массы m_c на виброизоляторах установлены два механизма с массами m_1 и m_2 .

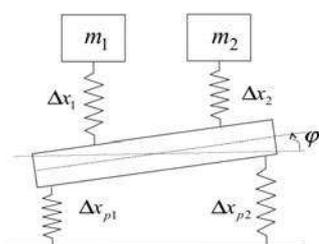


Рис. 1. Трехмассовая система

В качестве обобщенных координат будем использовать вертикальные смещения двух механизмов и центра тяжести рамы относительно исходного положения равновесия, обозначим их x_1 , x_2 и x_c соответственно, а также угол наклона рамы φ (рис. 1), т. е. рассматриваем систему с четырьмя степенями свободы [1].

При построении модели будем рассматривать механизмы как массы, связанные невесомыми пружинами. Линейные размеры системы заданы: l — расстояние от одной опоры рамы до другой, l_1 , l_2 — расстояния от центра масс рамы до главной оси жесткости опор механизмов.

Будем использовать для сил следующие обозначения: F_1 и F_2 — силы, действующие со стороны рамы на опоры механизмов, а P_1 и P_2 — силы, действующие на фундамент со стороны опор рамы. Составим уравнения движения центров масс

$$\begin{cases} m_p \ddot{x}_c = -F_1 - F_2 - P_1 - P_2, \\ m_1 \ddot{x}_1 = F_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_2. \end{cases} \quad (1)$$

Для полного описания модели необходимо добавить уравнение относительно φ — угла поворота рамы. В принятых обозначениях уравнение запишется следующим образом:

$$J\ddot{\varphi} = l_1 F_1 - l_2 F_2 + l P_1 - l P_2, \quad (2)$$

где J — момент инерции рамы. Силы F_1 , F_2 , P_1 , P_2 зависят от деформаций соответствующих пружин (рис. 1)

$$\begin{aligned} F_1 &= c_1 \Delta x_1 = c_1(x_c - x_1 + l_1 \varphi), \\ F_2 &= c_2 \Delta x_2 = c_2(x_c - x_2 - l_2 \varphi), \\ P_1 &= c_3 \Delta x_{p1} = c_3(x_c - w + l \varphi), \\ P_2 &= c_4 \Delta x_{p2} = c_4(x_c - w - l \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь c_i — жесткости соответствующих пружин (регулируемые параметры) а смещение фундамента w определяем по заданному ускорению, порожденному ударным импульсом [2]

$$w = \begin{cases} \frac{\tau_1 W_1}{\pi} t - \frac{\tau_1^2 W_1}{\pi^2} \sin \frac{\pi t}{\tau_1}, & t \in [0, \tau_1], \\ \frac{\tau_2 W_2}{\pi} t + \frac{\tau_2^2 W_2}{\pi^2} \sin \frac{\pi(t - \tau_1)}{\tau_2}, & t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2], \\ \frac{\tau_2 W_2(\tau_1 + \tau_2)}{\pi}, & t \in [\tau_1 + \tau_2, +\infty). \end{cases}$$

Здесь τ_1 , τ_2 , W_1 , W_2 — параметры ударной волны.

Жесткости виброизоляторов будем подбирать таким образом, чтобы минимизировать влияние заданного ударного импульса на механизмы. При этом деформации пружин и ускорения механизмов не должны превышать заранее заданных положительных значений [3]

$$\begin{aligned} |\ddot{x}_j(t)| &\leq q_j, & j &\in \{1, 2, c\}, \\ |\Delta x_k| &\leq \delta_k, & k &\in \{1, 2, p1, p2\}. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Исследование системы. Нетрудно понять, что при подстановке выражений для сил (3) в уравнения системы (1) и (2) получится линейная система дифференциальных уравнений вида $\dot{X} = AX + W$, где A — постоянная по времени матрица, зависящая от выбранных жесткостей, а X и W определяются следующим образом:

$$X = (\varphi, x_c, x_1, x_2)^T, \\ W = \left(\frac{c_4 - c_3}{J} w(t), \frac{c_4 + c_3}{m_p} w(t), 0, 0 \right)^T.$$

Для удобства работы с системой выполним неособую замену переменных

$$Y = \left(\frac{\varphi}{\sqrt{J}}, \frac{x_c}{\sqrt{m_p}}, \frac{x_1}{\sqrt{m_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{m_2}} \right)^T.$$

В результате матрица системы будет приведена к виду

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{J} & \frac{a_{12}}{\sqrt{Jm_p}} & \frac{-l_1 c_1}{\sqrt{Jm_1}} & \frac{l_2 c_2}{\sqrt{Jm_2}} \\ \frac{a_{12}}{\sqrt{Jm_p}} & \frac{a_{22}}{m_p} & \frac{c_1}{\sqrt{m_p m_1}} & \frac{c_2}{\sqrt{m_p m_2}} \\ \frac{-l_1 c_1}{\sqrt{Jm_1}} & \frac{c_1}{\sqrt{m_p m_1}} & \frac{-c_1}{m_1} & 0 \\ \frac{l_2 c_2}{\sqrt{Jm_2}} & \frac{c_2}{\sqrt{m_p m_2}} & 0 & \frac{-c_2}{m_2} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} = -l_1^2 c_1 - l_2^2 c_2 - l^2 c_3 - l^2 c_4$, $a_{12} = l_1 c_1 - l_2 c_2 + l c_3 - l c_4$, $a_{22} = -c_1 - c_2 - c_3 - c_4$.

Собственные числа матриц старой и новой систем совпадают, так как матрицы подобны. Отметим, что матрица новой системы симметрична, поэтому все ее собственные числа вещественны. Нетрудно также проверить, что знаки главных миноров матрицы \hat{A} чередуются, т. е. она отрицательно определена. Обозначим через λ_j , $j \in \overline{1, 4}$, собственные числа матрицы A . Имеем $\lambda_j < 0$, следовательно, линейная система устойчива, и ее решения ограничены.

4. Решение системы. Неоднородность в системе задается различным образом на трех временных промежутках: $[0, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$, $[\tau_1 + \tau_2, +\infty)$. Будем рассматривать решение отдельно на каждом из этих промежутков.

Решение на первых двух интервалах представимо в виде

$$X_1 = X_l t + X_{\tau_1} \sin \frac{\pi t}{\tau_1} + X_{1\lambda}(t).$$

Здесь X_l и X_{τ_1} можно найти, непосредственно подставив первое и второе слагаемые решения в систему (1) и решив систему линейных алгебраических уравнений. Третье слагаемое отвечает собственным колебаниям системы и может быть записано следующим образом:

$$X_{1\lambda}(t) = S^{-1} \sum_{j=1}^4 v_j Z_{1j} \sin \left(t \sqrt{-\lambda_j} \right),$$

где S — матрица замены переменных, $Y = SX$, v_j — собственные векторы матрицы \hat{A} , соответствующие собственным числам λ_j . Для нахождения амплитуд Z_{1j} используем начальные условия

$$X_1(0) = 0, \quad \dot{X}_1(0) = 0.$$

Аналогично, на втором временном промежутке решение системы представляет собой сумму трех компонентов

$$X_2 = X_l t + X_{\tau_2} \sin \frac{\pi(t - \tau_1)}{\tau_2} + X_{2\lambda}(t),$$

$$X_{2\lambda}(t) = S^{-1} \sum_{j=1}^4 v_j \left(Z_{2j} \sin \left((t - \tau_1) \sqrt{-\lambda_j} \right) + K_{2j} \cos \left((t - \tau_1) \sqrt{-\lambda_j} \right) \right),$$

Амплитуды Z_{2j} и K_{2j} находим из условия гладкости решения

$$X_2(\tau_1) = X_1(\tau_1), \quad \dot{X}_2(\tau_1) = \dot{X}_1(\tau_1).$$

На третьем, бесконечном, промежутке решение будет состоять только из двух слагаемых

$$X_3 = (\tau_1 + \tau_2) X_l + X_{3\lambda}(t),$$

$$X_{3\lambda}(t) = S^{-1} \sum_{j=1}^4 v_j \left(Z_{3j} \sin \left((t - \tau_1 - \tau_2) \sqrt{-\lambda_j} \right) + K_{3j} \cos \left((t - \tau_1 - \tau_2) \sqrt{-\lambda_j} \right) \right).$$

Для нахождения амплитуд Z_{3j} и K_{3j} снова используем условия гладкости

$$X_3(\tau_1 + \tau_2) = X_2(\tau_1 + \tau_2), \quad \dot{X}_3(\tau_1 + \tau_2) = \dot{X}_2(\tau_1 + \tau_2).$$

5. Алгоритм выбора жесткостей виброизоляторов. Перейдем непосредственно к решению задачи подбора таких значений параметров модели, чтобы выполнялись условия (4). Решение выполнено в среде MATLAB.

Однако с учетом естественных ограничений на величины жесткостей, добиться выполнения неравенств (4) для любых t из промежутка $[0, +\infty)$ не всегда представляется возможным, поэтому переформулируем задачу следующим образом. Будем требовать, чтобы максимальное нарушение указанных неравенств было наименьшим. Для записи скалярного критерия выполнения требований воспользуемся штрафными функциями: будем начислять за каждое нарушение неравенства положительные «штрафы», соразмерные отклонению от заданного уровня:

$$\alpha_j = \begin{cases} |\ddot{x}_j(t) - q_j, & t : |\ddot{x}_j(t)| \geq q_j, \\ 0, & t : |\ddot{x}_j(t)| < q_j; \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} |\Delta x_k| - \delta_k, & t : |\Delta x_k| \geq \delta_k, \\ 0, & t : |\Delta x_k| < \delta_k; \end{cases}$$

где $j \in \{1, 2, c\}$, а $k \in \{1, 2, p1, p2\}$.

Единый критерий выполнения требований запишем следующим образом:

$$\varepsilon = \sum_{j \in \{1, 2, c\}} \max_{t \in [0, +\infty)} \alpha_j + \sum_{k \in \{1, 2, p1, p2\}} \max_{t \in [0, +\infty)} \beta_k.$$

Вычисление максимумов по t в выражении для ε происходит в несколько этапов. На первом и втором временных промежутках поиск максимумов производится с использованием стандартных функций языка MATLAB поиска экстремума в окрестности начальной точки. В качестве начального приближения выбираются последовательно все попадающие в рассматриваемый промежуток точки экстремума каждого из слагаемых решения в отдельности. Затем из найденных алгоритмом экстремумов выбирается наибольшее значение.

На третьем, бесконечном, промежутке максимальное значение каждого компонента решения можно считать равным сумме амплитуд входящих в него волн, так как в общем случае их частоты несоизмеримы.

Штрафная функция принимает только неотрицательные значения, что позволяет избежать при минимизации ε компенсирования больших значений одного слагаемого за счет очень маленьких значений другого.

Как уже было сказано, требуется подобрать такие значения жесткостей виброизоляторов, чтобы значение ε было минимальным. Требования (4) будут выполнены, если $\varepsilon = 0$.

Для поиска подходящих c_1, c_2, c_3, c_4 можно воспользоваться стандартной функцией MATLAB, реализующей алгоритм решения уравнений с несколькими переменными.

6. Заключение. Проверенные с помощью данной модели расчеты для реальной установки показали хорошее согласие с экспериментальными данными.

Литература

1. Артоболевский И. И., Боголюбов А. Н., Болотин В. В. Вибрации в технике. Том 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. Харрис С. М., Крид Ч. И. Справочник по ударным нагрузкам / Пер. с англ. Л.: Судостроение, 1980. 360 с.
3. Крючков Ю. С., Гусаров И. И., Гальцев А. А., Феденко В. И. Ударостойкость судового энергетического оборудования. Л.: Судостроение, 1969. 251 с.

Смирнов М. Н., Смирнова М. А.
Санкт-Петербургский государственный университет

Реализация программного комплекса для динамического управления нелинейным объектом

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. Современные информационные технологии активно внедряются в различные области науки и техники [1]. Одним из приоритетных направлений для внедрения является обрабатывающая промышленность, а именно, топливная, химическая, легкая промышленности, энергетика и машиностроение. При этом основным структурным элементом информатизации производства является оборудование для автоматического управления процессами производства и обслуживания, главными требованиями к которому являются высокая скорость и точность выполнения работ.

В то же время определяющим фактором для перспективного использования любого оборудования является применяемое для управления программное обеспечение, которое, в свою очередь, должно быть не только безотказным, но и гибким для легкого расширения и быстрой перенастройки под конкретную задачу. В данной статье рассматривается реализация программного комплекса в среде MATLAB – Simulink для динамического управления реальным объектом, имитирующим башню танка (см. рис. 1).



Рис. 1. Башня танка

2. Объект управления. Рассмотрим объект управления, имитирующий башню танка [2]. Он представляет собой горизонтальный маятник (см. рис. 2). Его основными элементами являются платформа («башня»), приводимая в движение сервоприводом, и закрепленный на ней стержень («дуло»). С платформой стержень соединен двумя пружинами одинаковой жесткости и длины, на нем закреплен груз, который можно перемещать для охвата более широкого множества объектов такого типа.

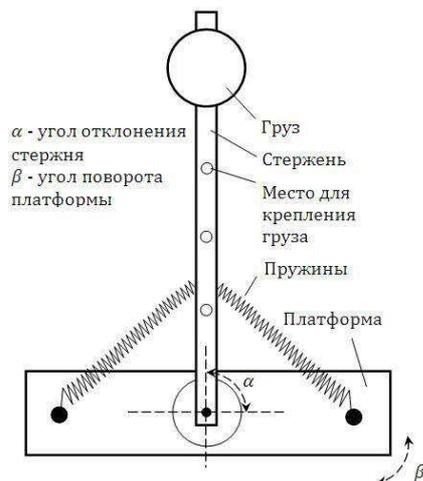


Рис. 2. Основные параметры объекта

«башни» является значение напряжения 2,5 вольта, а для «ду-

ла» — 0 вольт. Платформа может поворачиваться на 180 градусов. Основная задача управления данным объектом состоит в том, чтобы при повороте платформы на заданный угол β_c в конечной точке не происходило колебаний стержня. Кроме того, система управления должна возвращать объект управления в заданное положение при возникновении внешних возмущений.

Кроме того, была поставлена задача разработать программный комплекс, позволяющий изменять следующие параметры системы управления:

- выбирать закон управления и его параметры;
- выбирать расстояние до точки крепления груза и его вес;
- задавать угол β_c , на который необходимо повернуть платформу.

Данный программный комплекс предназначен для наглядной демонстрации применения теории управления к реальным физическим объектам и представляет студентам уникальную возможность увидеть и понять различия в реализации законов управления, сравнить поведение системы с управлением и без него.

3. Реализация в среде MATLAB – Simulink. Для решения поставленных задач был использован пакет MATLAB с подсистемой

Данный объект оснащен двумя аналоговыми потенциометрическими датчиками. Первый расположен на платформе и возвращает напряжение, подаваемое на сервопривод в пределах от 0 до 5 вольт, что соответствует повороту платформы на некоторый угол β , а второй находится на башне и возвращает напряжение в пределах от -5 до 5 вольт, которому соответствует угол α отклонения стержня относительно центра.

Положением равновесия для «башни» является значение напряжения 2,5 вольта, а для «ду-

Simulink, в котором были реализованы модель системы управления рассматриваемым объектом (см. рис. 3) и графический интерфейс пользователя (см. рис. 4) для работы с построенной моделью.

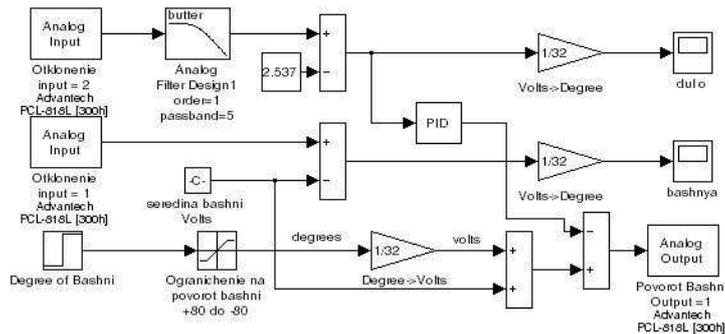


Рис. 3. Simulink-модель объекта управления

В разработанном графическом интерфейсе заложена возможность использовать в модели различные законы управления, а именно:

- управление по выходу $u = K_1(\beta(t) - \beta_c)$, где u — управляющее воздействие, $\beta(t)$ — угол поворота платформы, β_c — командный сигнал;
- пропорционально-интегральный регулятор (ПИ)
 $u = K_1(\beta(t) - \beta_c) + K_2 \int_0^t (\beta(\tau) - \beta_c) d\tau$;
- пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД)
 $u = K_1(\beta(t) - \beta_c) + K_2 \int_0^t (\beta(\tau) - \beta_c) d\tau + K_3 \frac{d}{dt}(\beta(t) - \beta_c)$.

При этом коэффициенты K_1, K_2, K_3 пользователь может задать самостоятельно или использовать уже подобранные коэффициенты, обеспечивающие приемлемую обработку командного сигнала.

Также реализованы возможность отработки командного сигнала без использования какого-либо управляющего воздействия, возможность задания командного сигнала β_c , возможность выбора места крепления груза и его вес. Колебания «дула» и поворот «башни» при отработке командного сигнала отображаются графически (см. рис. 4). По желанию пользователя можно сохранять историю отклонений «дула» и «башни» на графиках для сравнения при выборе

другого закона управления или изменения физических параметров объекта.

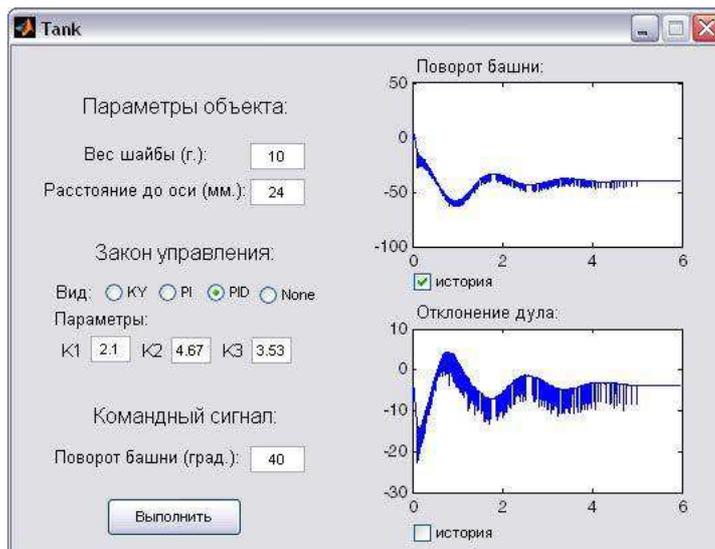


Рис. 4. Графический интерфейс пользователя

4. Заключение. В результате проделанной работы реализован программный комплекс динамического управления реальным объектом, имитирующим работу башни танка. В дальнейшем планируется расширить функционал данного комплекса, добавив в него новый тип устройства (желоб) [2], а также возможность выбора алгоритмов фильтрации сигналов и другие виды законов управления.

Литература

1. Веремей Е.И., Корчанов В.М., Коровкин М.В., Погожев С.В. Компьютерное моделирование систем управления движением морских подвижных объектов. СПб.: СПбГУ, 2002. 370 с.
2. Смирнов Н. В., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Решение прикладных задач теории управления в MATLAB. СПб.: Соло, 2013. 186 с.

Телевный Д. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера

Рекомендовано к публикации профессором Егоровым Н. В.

Введение. Полевые электронные источники находят применение в научных исследованиях и повседневной жизни. Такие технологии используются в электронных микроскопах, системах диагностики поверхности и светоизлучающих приборах [1, 2]. Эффективность эмиссии напрямую зависит от локального электрического поля вблизи поверхности острья [3, 4]. В случае большого числа источников обеспечивается высокая плотность тока, при этом возникает эффект экранирования близкостоящих острий, что уменьшает эффективность эмиссии [5, 6].

Физическая постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическую диодную систему на основе полевого катода (рис. 1). В основании системы ($z = 0$) находится подложка, на которой располагается острье. Полевое острье моделируется с помощью заряженной нити длиной z_0 . Плоскость при $z = z_1$ представляет собой анод. Катод имеет нулевой потенциал, на аноде задан потенциал V_1 . Требуется найти распределение потенциала во внутренней области системы на основе полевого острья и проверить влияние близкостоящих острий на распределение поля.

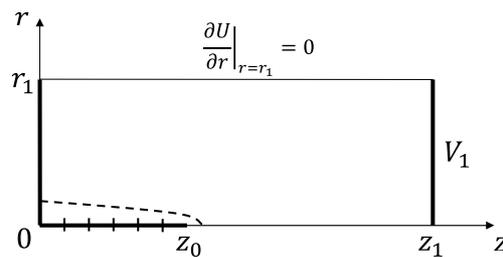


Рис. 1. Схематическое изображение ячейки системы

Математическая постановка задачи. Распределение потенциала в системе с объемным зарядом должно удовлетворять уравнению Пуассона. В цилиндрических координатах, с учетом аксиальной симметрии, данное уравнение имеет вид

$$\Delta U(r, z) = -\frac{\rho(r, z)}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} U(r, 0) &= 0, \quad r \in [0, r_1], \\ U(r, z_1) &= V_1, \quad r \in [0, r_1], \\ \left. \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \right|_{r=r_1} &= 0, \quad z \in [0, z_1], \end{aligned} \quad (2)$$

где r_1 — радиус ячейки.

Решение. Решение уравнения (1) можно представить в виде суммы решения уравнения Лапласа $U_1(r, z)$ с неоднородными граничными условиями (2) и решения уравнения Пуассона $U_2(r, z)$ с однородными граничными условиями

$$U(r, z) = U_1(r, z) + U_2(r, z).$$

Решения первой задачи имеет вид

$$U_1(r, z) = V_1 \frac{z}{z_1}. \quad (3)$$

Для решения уравнения (1) с однородными граничными условиями представим неизвестную функцию $U_2(r, z)$ в виде ряда [7]

$$U_2(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(z) J_0 \left(\frac{\omega_n}{r_1} r \right), \quad (4)$$

где ω_n — корни функции Бесселя первого рода первого порядка J_1 , $V_n(z)$ — неизвестная функция, J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Подставим (4) в (1). Используя свойство ортогональности функции Бесселя, приходим к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$V_n''(z) - \left(\frac{\omega_n}{r_1} \right)^2 V_n(z) = -\frac{2}{r_1^2 J_0^2(\omega_n)} \int_0^{r_1} r \frac{\rho(r, z)}{\varepsilon_0} J_0 \left(\frac{\omega_n}{r_1} r \right) dr, \quad (5)$$

где δ_r — предполагаемый радиус острия, $0 < \delta_r < r_1$.

Представим объемную плотность в виде кусочно-постоянной функции

$$\rho_i(z) = \begin{cases} \frac{\tau_i}{\pi \delta_r^2}, & z \in (\zeta_{i-1}, \zeta_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad z \leq z_0, \\ 0, & z > z_0, \end{cases}$$

где τ_i — кусочно-постоянные значения плотности заряда нити.

Тогда при достаточно малом значении δ_r в уравнении (5) интеграл $\int_0^{\delta_r} r J_1 \left(\frac{\omega_n r}{r_1} \right) \approx \frac{\delta_r^2}{2}$. Введем обозначение

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} \frac{1}{r_1^2 J_0^2(\omega_n)} \frac{\tau_i}{\pi \varepsilon_0}, & z \leq z_0, \\ 0, & z > z_0, \end{cases}$$

$$V_n''(z) - (\lambda_n)^2 V_n(z) = \varphi_i(z), \quad (6)$$

где $\lambda_n = \frac{\omega_n}{r_1}$. Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$V_n(z) = A_n(z) \operatorname{ch}(\lambda_n z) + B_n(z) \operatorname{sh}(\lambda_n z).$$

Функции $A_m(z)$ и $B_m(z)$ определяются с помощью метода вариации постоянных. Учитывая однородные граничные условия, в результате получаем

$$V_n(z) = \begin{cases} -\frac{r_1}{\omega_n} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_1 - z))}{\operatorname{sh}(\lambda_n z_1)} \int_0^z \operatorname{sh}(\lambda_n \eta) \varphi_i(\eta) d\eta - \\ -\frac{r_1}{\omega_n} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n z)}{\operatorname{sh}(\lambda_n z_1)} \int_z^{z_0} \operatorname{sh}(\lambda_n(z_1 - \eta)) \varphi_i(\eta) d\eta, & z \leq z_0, \\ -\frac{r_1}{\omega_n} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_1 - z))}{\operatorname{sh}(\lambda_n z_1)} \int_0^{z_0} \operatorname{sh}(\lambda_n \eta) \varphi_i(\eta) d\eta, & z > z_0. \end{cases}$$

Возвращаясь к виду (4), после интегрирования получим функцию распределения потенциала в случае $z \leq z_0$

$$U_2(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi \varepsilon_0 \omega_n^2 J_0^2(\omega_n)} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\operatorname{sh}(\lambda_n z_1)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\operatorname{sh}(\lambda_n(z_1 - z)) \sum_{s=1}^{m-1} \tau_s \left(\operatorname{ch}(\lambda_n \zeta_s) - \operatorname{ch}(\lambda_n \zeta_{s-1}) \right) + \tau_m \left(\operatorname{sh}(\lambda_n z_1) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \operatorname{sh}(\lambda_n(z_1 - z)) \operatorname{ch}(\lambda_n \zeta_{m-1}) - \operatorname{sh}(\lambda_n z) \operatorname{ch}(\lambda_n(z_1 - \zeta_m)) \right) - \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{sh}(\lambda_n z) \sum_{s=m+1}^N \tau_s \left(\operatorname{ch}(\lambda_n(z_1 - \zeta_s)) - \operatorname{ch}(\lambda_n(z_1 - \zeta_{s-1})) \right) \right], \quad z \leq z_0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Вид функции распределения потенциала в случае $z > z_0$

$$\begin{aligned}
U_2(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi \varepsilon_0 \omega_n^2 J_0^2(\omega_n)} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_1 - z))}{\operatorname{sh}(\lambda_n z_1)} \times \\
& \times \sum_{s=1}^N \tau_s \left(\operatorname{ch}(\lambda_n \zeta_s) - \operatorname{ch}(\lambda_n \zeta_{s-1}) \right) J_0(\lambda_n r), \quad z > z_0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Полное решение уравнения Пуассона (1) с граничными условиями (2) будет складываться из (3), (7), (8). Для вычисления коэффициентов τ_i , $i = \overline{1, N}$, задается система точек, в которых потенциал должен принимать нулевое значение [5], тем самым аппроксимируется форма острия в виде поверхности эллипсоида. Таким образом получим систему, связывающую неизвестные коэффициенты, состоящую из линейных алгебраических уравнений. Решая данную систему, вычислим кусочно-постоянные значения плотности заряда нити.

Численные результаты. По теоретическим расчетам была написана программа, которая проводит расчеты значений плотности заряда нити, потенциала и напряженности поля в цилиндрической системе [8, 9]. Использовались следующие параметры: $z_1 = 1, 0$, $r_1 = 1, 0$, $V_1 = 1, 0$, $z_0 = 0, 25$ — длина заряженной нити, $N = 20$ — количество неизвестных коэффициентов τ_i , $i = \overline{1, N}$. Значения геометрических параметров и электростатического потенциала приведены по отношению к соответствующим максимальным значениям.

На рис. 2а изображены эквипотенциальные линии электростатического потенциала во всей области системы. На рис. 2б — эквипотенциальные линии электростатического потенциала вблизи вершины острия. Жирной линией выделена нулевая эквипотенциаль, совпадающая с поверхностью катода, форма которой хорошо согласуется с заданной функцией для расчета коэффициентов.

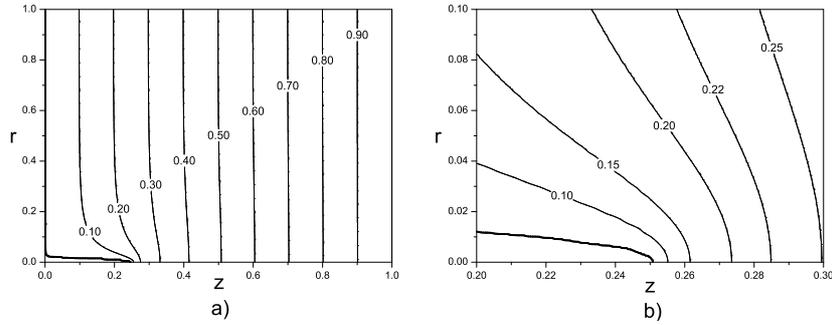


Рис. 2. Эквипотенциальные линии распределения потенциала: а) во всей области системы; б) вблизи острия

На рис. 3а, б представлены графики эквипотенциальных линий напряженности поля вблизи вершины острия для ячеек с радиусами $r_1 = 1, 0$ и $r_1 = 0, 1$. Из графиков видно, что уменьшение расстояния между катодами приводит к падению напряженности поля.

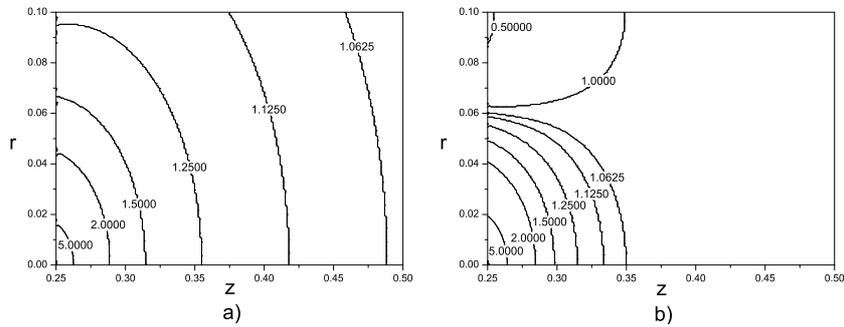


Рис. 3. Эквипотенциальные линии напряженности поля вблизи вершины острия: а) для ячейки с радиусом $r_1 = 1, 0$; б) для ячейки с радиусом $r_1 = 0, 1$

Выводы. В данной задаче проводилось моделирование тонкого полевого катода в цилиндрической ячейке. Решение представлено как сумма решения уравнения Лапласа с заданными граничными условиями на электродах и решения уравнения Пуассона с однородными граничными условиями. Функции распределения электростатического потенциала найдены в аналитическом виде (3), (7), (8).

Представлены графики распределения потенциала и напряженности поля. Показано влияние близкостоящих острий на распределение поля в системе.

Литература

1. Bargsten J. B., Schwoebel P. R., Holland C. E. et al. Field ion source development for neutron generators // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 2012. Vol. 663. P. 65–74.
2. Cui J. B., Robertson J., Milne W. I. Field emission site densities of nanostructured carbon // Materials Research Society Symposium Proceedings, 2001. Vol. 675. P. 651–655.
3. Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронная эмиссия. Принципы и приборы. Долгопрудный: Издат. Дом Интеллект, 2011. 704 с.
4. Egorov N. V., Vinogradova E. M. Mathematical model of electron gun on the field emission electron cathode basis // Vacuum, 2000. Vol. 57. P. 267–281.
5. Виноградова Е. М., Долгов Е. П., Егоров Н. В. Расчет электростатического потенциала в многоострийных и одноострийных полевых системах // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2007. Вып. 1. С. 29–37.
6. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Баранов Р. Ю. Расчет электростатического поля системы соосных аксиально-симметричных электродов // Радиотехника и электроника, 2007. Т. 52, № 2. С. 212–217.
7. Миролубов Н. Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 209 с.
8. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
9. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

Трофимов В. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Эффективные полевые катоды

Рекомендовано к публикации профессором Егоровым Н. В.

1. Введение. В настоящее время в литературе обсуждаются результаты исследований, направленных на снижение порогового напряжения в механизме полевой эмиссии. Одним из способов снижения напряжения является создания сложных многослойных эмиттерных систем, в частности, изучение полевой эмиссии из системы металл-полупроводник, которая обладает преимуществом по сравнению с чистым металлом и позволяет снизить пороговое напряжение эмиссионного тока [1, 2]. Одной из таких систем является Pt-TiO₂. В этой системе снижается эффективный поверхностный барьер на границе с вакуумом благодаря созданию области пространственного заряда в полупроводнике за счет инжекции электронов из металла. Использование такой системы приводит к появлению полевой электронной эмиссии при напряженности поля на два порядка меньшей, чем при эмиссии из чистого металла. Цель работы — в исследовании систем подобного типа и изучении механизма работы полевых эмиттеров, в сравнении эффективности работы полупроводникового покрытия для разных катодных систем и оценке чувствительности катодов при работе в условиях технического вакуума. В данной работе исследовались системы: вольфрам с напылённым тонким слоем полупроводника n-типа проводимости W-TiO₂-Cs.

2. Экспериментальная часть. Исследования проводились в сверхвысоковакуумной камере ($p \sim 10^{-9}$ мм. рт. ст.) при непрерывной откачке. Схема эксперимента была реализована согласно проекционному эмиссионному микроскопу Мюллера [3]. Катод изготавливался методом электрохимического травления на мениске из поликристаллической вольфрамовой проволоки ($d \sim 0,4$ мкм) в виде острия. Для проведения качественного эксперимента была предусмотрена термическая очистка катода в вакууме. Критерием чистоты поверхности вольфрама служило появление характерных для вольфрама рефлексов (рис. 1) на люминофорном экране [3]. Расстояние от катода до люминофорного экрана составляло 5 см. В камере

располагались источники с исследуемыми материалами для нанесения их на острие. Слой окиси титана (TiO_2) наносился на вольфрамовое острие путем испарения TiO_2 из нихромовой лодочки при нагреве ее проходящим током.

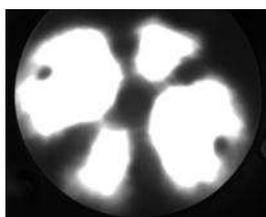


Рис. 1. Изображение, характерное для вольфрама

Цезий поступал из источника с бихроматом цезия (Cs_2CrO_4) путем разложения его при разогреве и выделении цезия. Контроль относительной толщины напыленного слоя проводился по измерению времени нагрева лодочки и последовательному контролю за изменением проекционной картины на люминофорном экране от чистого вольфрама, картина которого хорошо известна [3], до появления рефлексов,

связанных с появлением покрытия на нем. На основе этих систем были получены эффективные эмиттеры, у которых эмиссионная способность больше на 1,5–2 порядка по сравнению с чистым вольфрамом.

3. Результаты и их обсуждение. На рис. 2 изображены вольт-амперные характеристики (ВАХ) автоэмиттеров W , W-TiO_2 , $\text{W-TiO}_2\text{-Cs}$ в координатах Фаулера — Нордгейма, измеренные при одинаковых геометрических параметрах.

Из рисунка видно, что наибольшую эффективность имеют катоды, чувствительность которых на три порядка выше, чем у вольфрамового эмиттера (плотность тока при одинаковых значениях напряженности для W — $0,39 \text{ A/cm}^2$; для $\text{W-TiO}_2\text{-Cs}$ — 777 A/cm^2). В зависимости от количества нанесенного цезия работа выхода системы $\text{W-TiO}_2\text{-Cs}$ может быть снижена до 2,5 эВ с получением более эффективной эмиссии (кривая 4, рис. 2) или до 3,1 эВ с меньшей эффективностью (кривая 3, рис. 2). Контроль количества напыляемого цезия на острие проводился по времени его экспозиции. Использовались два режима пыления: около 30 мин и 5 мин. Приблизительная оценка количества осажденного цезия позволяет заключить, что малое время пыления (~ 5 мин.) соответствует небольшой доли монослоя цезия на поверхности острия, а длительное пыление (~ 30 мин.) близко к монослойному покрытию. Можно предполо-

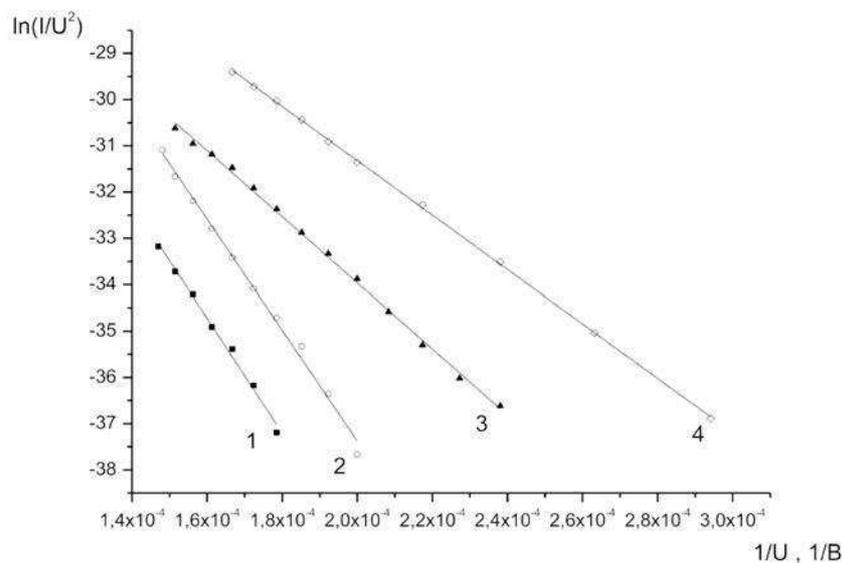


Рис. 2. Вольт-амперная характеристика полевых эмиссионных систем: 1 — W; 2 — W-TiO₂; 3 — W-TiO₂-Cs (2,5 эВ); 4 — W-TiO₂-Cs (3,1 эВ)

жить, что во втором случае на поверхности находилось некоторое количество слабосвязанного цезия, который со временем мигрировал, что приводило к низкой стабильности эмиттера. Как показал эксперимент, более стабильная эмиссия наблюдается для эмиттеров W-TiO₂-Cs с работой выхода ~3 эВ. Для таких эмиттеров на рис. 3 изображены ВАХ при хранении их в камере с непрерывной откачкой в течение 15 дней. Для сравнения на этом рисунке приведены ВАХ эмиттеров при хранении в аналогичных условиях в течение 9 дней. Из рисунка видно, что по эффективности эмиссии и по сохранению ее автокатоды W-TiO₂-Cs имеют существенное преимущество по сравнению с W-Cs. То же самое можно сказать, сравнивая ВАХ систем работы [1] и W-TiO₂-Cs данной работы. При напряженности поля для эмиттера наступает пробой при плотностях тока, в то время как автоэмиттер W-TiO₂-Cs работает стабильно при плотностях тока 4×10^3 А/см². Пороговое значение напряженности поля его немно-

го уступает эмиттеру, но это может быть связано с конструктивными особенностями узлов в эксперименте. Попытаемся объяснить,

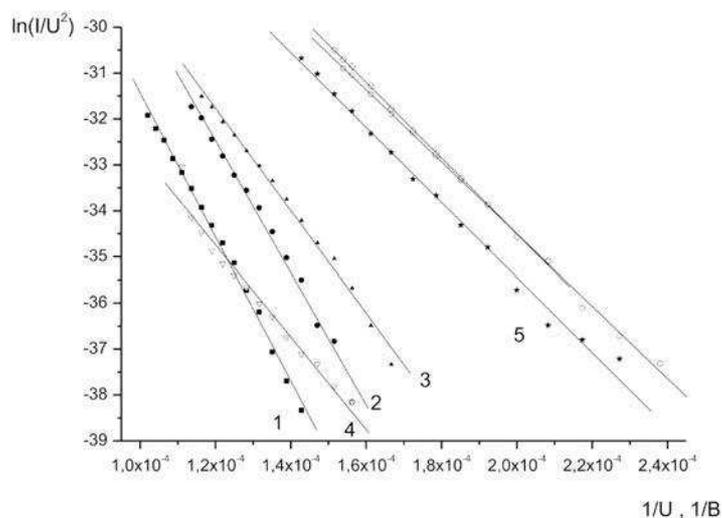


Рис. 3. Вольт-амперные характеристики при хранении: W-Cs: линия 2 — 2 минуты; 3 — 35 минут; 4 — 9 суток; W-TiO₂-Cs — 5: линия \diamond — 2 минуты; \circ — через сутки; \star — 15 суток. W — линия 1

что происходит в процессе создания многослойного полевого эмиттера. На термически очищенную в вакууме поверхность острия из вольфрама последовательно наносятся испарением в вакууме тонкие слои полупроводника n-типа и металлического цезия. Субмонослой полупроводника напыляется при контроле проекционной картины на люминофорном экране острейного эмиттера. Она хорошо известна для вольфрама [3] и почти не меняется при нанесение тонкого слоя TiO₂. Известно, что электронное сродство TiO₂ составляет 4,5 эВ [1], т. е. практически совпадает с работой выхода вольфрама. Поскольку барьер Шотки на контакте этих материалов практически отсутствует, электроны из зоны проводимости вольфрама диффундируют в зону проводимости TiO₂. При приложении внешнего поля, проникающего в тонкий слой полупроводника, электроны почти без потерь

оказываются на границе с вакуумом. В этом случае работа выхода φ системы $W-TiO_2$ составляет 4,3 эВ, что обеспечивает большую эффективность эмиттера $W-TiO_2$ по сравнению с чистым вольфрамом. С целью дополнительного снижения работы выхода на границе с вакуумом на поверхность $W-TiO_2$ наносится тонкий слой цезия, который снижает работу выхода всей системы до значений от 3 до 2,5 эВ в зависимости от количества осажденного цезия. На рис. 4а) представлена энергетическая диаграмма созданного многослойного эмиттера $W-TiO_2-Cs$, которая наглядно иллюстрирует характер прохождения электронов в вакуум. На рис. 4б) показано энергетическое распределение электронов системы $W-TiO_2-Cs$, у которого максимум соответствует энергии Ферми вольфрама.

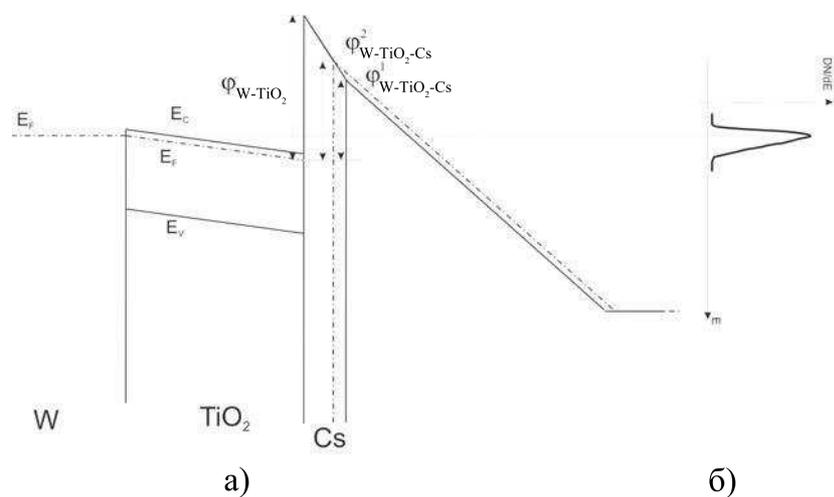


Рис. 4. а) Энергетическая диаграмма полевой эмиссионной системы $W-TiO_2-Cs$; б) энергетическое распределение электронов, вышедших в вакуум

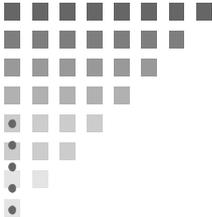
4. Заключение. На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Получены многослойные полевые катоды $W-TiO_2$, показывающие при сопоставимых напряжениях ток эмиссии на 1,5 порядка больший, чем традиционные вольфрамовые катоды, а катод $W-TiO_2-Cs$ — на 3 порядка больший.

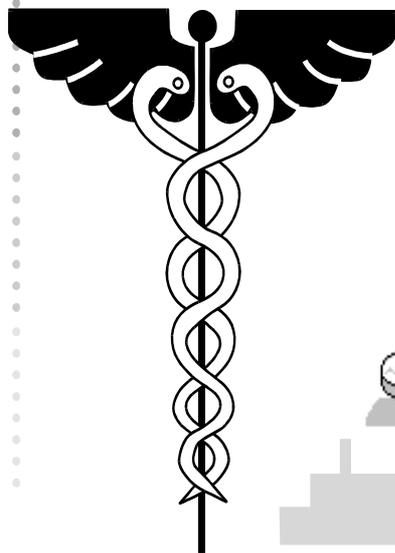
2. Предположения из работы [4] позволили реализовать модель более перспективного эмиттера W-TiO₂-Cs, демонстрирующего высокую стабильность эмиссионного тока.
3. Как известно [5], заточка катода с помощью термополевого испарения, дает положительные результаты в плане повышения эффективности полевого катода из вольфрама, а также стабилизации эмиссионного тока. Таким образом, можно предположить, что перестроенный вольфрамовый полевой катод с многослойным покрытием будет более эффективным.
4. Можно предположить, что использование многослойного покрытие TiO₂-Cs будет так же оказывать положительный эффект на многоэмиттерные системы на основе NbN [6].

Литература

1. Binh V. Th., Adessi Ch. New mechanism for electron emission from planar cold cathodes: the solid-state field-controlled electron emitter // *Phys. Rev. Lett.*, 2000. Vol. 85, No 4. P. 864–867.
2. Semet V., Binh V. T. Composite-layered solid-state field controlled emitter for a better control of the cathode surface barrier // *J. Vac. Sci. Technol. B.*, 2005. Vol. 23. Iss. 2. P. 824–830.
3. Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронная эмиссия. Принципы и приборы. М.: Интеллект, 2011. 528 с.
4. Егоров Н. В., Антонова Л. И., Антонов С. Р. и др. Эффективные электронные источники на основе полевой эмиссии // *Журнал технической физики*, 2009. Т. 79. Вып. 6. С. 150–152.
5. Трофимов В. В., Жуков Д. В. Моделирование перестроенного вольфрамового острия // Устойчивость и процессы управления. Всероссийская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения В. И. Зубова, г. Санкт-Петербург, 2010. С. 130.
6. Трофимов В. В., Никифоров К. А., Антонова Л. И. Исследование матриц полевых эмиссионных катодов // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 228–233.



*3. Математические
модели медико-
биологических систем*



Бабин А. В., Котина Е. Д.

Санкт-Петербургский государственный университет

Математическая обработка радионуклидных исследований томовентрикулографии сердца¹

1. Введение. Томовентрикулография — это радионуклидный томографический метод исследования сердца. С помощью томовентрикулографии можно определить объемы желудочков, их фракции выброса, гемодинамические параметры для систолы и диастолы, а также, основываясь на данных рассматриваемого радионуклидного метода, можно судить о глобальной и локальной сократимости желудочков. В данной работе предлагается алгоритм определения объемов желудочков сердца и вычисляются диагностические параметры, характеризующие их работу.

В основе томовентрикулографии лежит томография меченного (Tc^{99m}) кровяного пула сердца, синхронизированная с сигналом ЭКГ. Исследование проводится на двухдетекторной камере с коллиматором высокого разрешения [1]. Полагаем, что исходными данными является последовательность объемных распределений радиофармпрепарата, которые соответствуют определенным интервалам «представительного» сердечного цикла [2].

Большое количество зарубежных научных статей [3–8], посвящено обработке и анализу данных, полученных на основе данного метода. Задачи обработки данных томовентрикулографии, направленные на повышение качества и информативности исследований являются актуальными в настоящее время.

2. Алгоритм определения объемов левого и правого желудочков. Для вычисления диагностических параметров, характеризующих сокращение желудочка необходимо построить кривую активность/время, которая характеризует изменение объема желудочка на протяжении «представительного» сердечного цикла. При построении данной кривой возникает задача определения объема желудочка.

Первым шагом является выбор срединных срезов левого и правого желудочков для трех проекций (корональной, трансверсальной,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, грант № 9.39.1065.2012

сагиттальной) суммарного объема. Одновременно с выбором срезов задаются центры желудочков, а также основание и верхушка. После этого выделяются области желудочков на трех выбранных проекциях (рис. 1). При построении контуров желудочка сердца используются фазовые изображения [9], позволяющие отделять желудочки от предсердий.

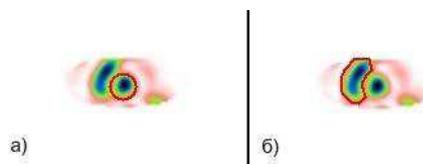


Рис. 1. Построение контура для корональной проекции: а) срез суммарного объема левого желудочка, б) срез суммарного объема правого желудочка

После построения контуров начальный объем желудочка определяется как пересечение трех цилиндров, основаниями которого служат указанные контуры. Следующим шагом является уточнение полученной границы желудочка для каждого интервала представительного сердечного цикла.

На основе начального объема желудочка строится куполообразная сетка. Верхушка купола рассматривается в полусферической системе координат, а основание — в цилиндрической. Под построением сетки понимается вычисление следующих параметров:

- N_t — количество точек в поперечной проекции;
- N_{ls} — количество точек в верхушке;
- N_{lc} — количество точек в основании;
- N_l — количество точек в произвольной продольной проекции (значение данного параметра равно $N_{ls} + N_{lc}$);
- C — центральная точка сетки, через которую проходит плоскость отделяющая основание сетки от его верхушки (в качестве данного параметра рассматривается центр начального объема);
- R_{max} — максимальный радиус на сетке.

Пусть $V_k^*(i, j, k)$ — это значение куполообразного объема, построенного на основе сетки и начального объема желудочка в момент времени $k = \overline{1, N}$. Куполообразный объем $V_k^*(i, j, k)$ можно рассматривать как совокупность цилиндрического $V_{c_k}^*(\phi, \rho, z)$ и сферического $V_{s_k}^*(\phi, \theta, \rho)$ объемов. Значение куполообразного объема $V_k^*(i, j, k)$ может быть представлено следующим образом:

$$V_k^*(i, j, k) = \begin{cases} V_{s_k}^*(h_t i, -h_{ls}(N_{ls} - j - 1), r), & j < N_{ls}, \\ V_{c_k}^*(h_t i, h_{lc}(N_{ls} - j - 1), r), & j \geq N_{ls}. \end{cases} \quad (1)$$

где h_t — это шаг сетки в поперечной проекции, h_{ls} — шаг в вершукше сетки, а h_{lc} — шаг в основании сетки.

Уточнение объема $V_k^*(i, j, k)$, $k = \overline{1, N}$, осуществляется с помощью порогового метода. Пусть T_k — это некоторое значение порога, тогда уточненное значение объема желудочка можно вычислить по формуле

$$V_k(i, j, k) = \begin{cases} V_{s_k}^*(i, j, k), & V_{s_k}^*(i, j, k) < T_k, \\ 0, & V_{s_k}^*(i, j, k) \geq T_k. \end{cases} \quad (2)$$

Для того, чтобы отделить правый желудочек от левого, пороговые значения T_k брались равными значениям активности на межжелудочковой перегородке. Для нахождения данных значений для каждого интервала «представительного» сердечного цикла строилась профильная кривая L_k (рис. 3), определяемая следующим выражением

$$L_k = \left[\left(i, V_k^h \left(i, \frac{h}{2}, \frac{d}{2} \right) \right), i = \overline{1, w} \right],$$

где V_k^h — это объем сердца, соответствующий определенному интервалу «представительного» сердечного цикла, а параметры w , h , d — это пространственные размеры данного объема. Точки x_l^k и x_r^k на рис. 2 соответствуют значениям интенсивности левого и правого желудочка, а x_{min}^k — значению интенсивности на межжелудочковой перегородке. Таким образом, если положить $T_k = x_{min}^k$, то уточненное значение объема можно вычислить по формуле (2).

3. Вычисление диагностических параметров. На основании полученных N объемов левого желудочка и N объемов правого желудочка строятся кривые активность/время (рис. 4), характеризую-

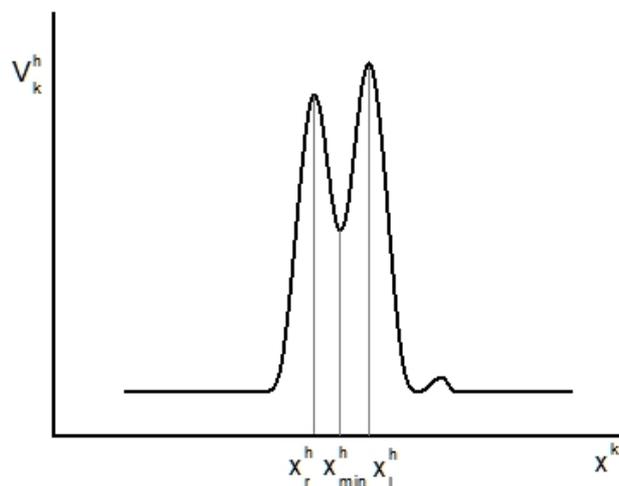


Рис. 2. Профильная кривая

щие изменение кровенаполнения соответствующего желудочка в течение «представительного» сердечного цикла. С помощью представленных на рис. 4 кривых можно вычислить важные диагностические параметры такие, как конечный диастолический объем (КДО), конечный систолический объем (КСО), ударный объем (УО) и фракцию выброса (ФВ). КДО и КСО можно получить, исходя из того, что они являются максимальным и минимальным объемом желудочка, а зная КДО и КСО, можно вычислить фракцию выброса и ударный объем:

$$\text{ФВ} = \frac{\text{КДО} - \text{КСО}}{\text{КДО}} 100\%,$$

$$\text{УО} = \text{КДО} - \text{КСО}.$$

Отдельно для каждого желудочка на основе полученных объемов вычисляются следующие параметры: индексы формы для конечной диастолы и конечной систолы, средние скорости изгнания и наполнения, скорость максимального изгнания, скорость минимального наполнения, время максимального изгнания, время минимального наполнения, продолжительность изгнания, фракции изгнания и наполнения.

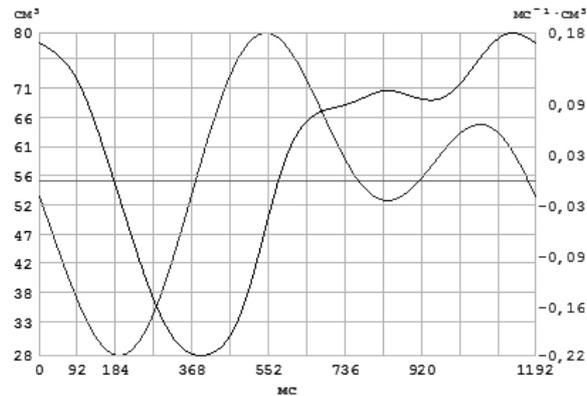


Рис. 3. Кривая кровенаполнения левого желудочка и кривая скорости изменения объема левого желудочка

4. Заключение. Благодаря своей высокой информативности томографию является на данный момент одним из самых используемых методов в радиокardiологии, поэтому обработка данных результатов исследований томографии, повышение качества и информативности метода является актуальной и важной задачей.

Для визуализации результатов обработки была написана программная реализация с использованием средств программного комплекса «Диагностика» [10].

Литература

1. Арлычев М. А., Новиков В. Л. Двухдетекторный однофотонный эмиссионный гамма-томограф «ЭФАТОМ» // Журнал технической физики, 2009. Т. 79. Вып. 10. С. 138–146.
2. Котина Е. Д., Чижов М. Н. Трехмерная визуализация результатов радионуклидных исследований перфузионной томосцинтиграфии миокарда // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2009. Вып. 4. С. 259–266.

3. Vilain D., Daou D., Casset-Senon D. et al. Optimal 3-dimensional method for right and left ventricular Fourier phase analysis in electrocardiography-gated blood-pool SPECT // *J. Nucl. Cardiol.*, 2001. P. 371–378.
4. Canclini S., Terzi A., Rossini P. et al. Gated blood pool tomography for the evaluation of global and regional left ventricular function in comparison to planar techniques and echocardiography // *J. Ital. Heart*, 2001. Vol. 2(1). P. 42–48.
5. Vanhove C., Franken P. R. Left ventricular ejection fraction and volumes from gated blood pool tomography: Comparison between two automatic algorithms that work in three-dimensional space // *J. Nucl. Cardiol.*, 2001. Vol. 8(4). P. 466–471.
6. Massardo T., Jaimovich R., Lavados H. Gutierrez D. et al. Comparison of radionuclide ventriculography using SPECT and planar techniques in different cardiac conditions // *J. Nucl. Cardiol.*, 2007. P. 1735–1746.
7. Harel F., Finnerty V., Gregoire J. et al. Comparison of left ventricular contraction homogeneity index using SPECT gated blood pool imaging and planar phase analysis // *J. Nucl. Cardiol.*, 2008. Vol. 15(1). P. 80–85.
8. M. Lalonde, D. Birnie, T. D. Ruddy et al. SPECT blood pool phase analysis can accurately and reproducibly quantify mechanical dyssynchrony // *J. Nucl. Cardiol.*, 2010. Vol. 17(5). P. 803–810.
9. Бабин А. В., Котина Е. Д. Обработка данных радионуклидных исследований томографию сердца // *Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 261–267.*
10. Котина Е. Д., Овсянников Д. А., Плоских В. А. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2010611873 «Программный комплекс для диагностической обработки радионуклидных исследований» (Диагностика).

Барабанова С. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

О проблеме оценивания параметров двучленных сумм

Рекомендовано к публикации профессором Шмыровым А. С.

1. Введение. В задачах математического моделирования часто появляется необходимость построения неизвестного распределения вероятности по результатам измерения. Если оно предполагается абсолютно непрерывным, то у него существует плотность. Для оценки плотности можно применять кривые Пирсона [1], если известна некоторая априорная информация о нем. Например, если оно достаточно близко к известному распределению и является результатом действия некоторого возмущения на исходное распределение, то можно применять гистограммную [2] и ядерную [3] оценки плотности. При аналогичных условиях можно воспользоваться и теоремой В. И. Зубова.

Теорема [4]. Пусть $F(x)$ и $F_0(x)$ непрерывные функции распределения. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N , набор действительных чисел a_1, \dots, a_N , набор положительных чисел b_1, \dots, b_N , набор неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, в сумме равных единице, такие, что

$$\max_x \left| F(x) - \sum_{k=1}^N \alpha_k F_0 \left(\frac{x - a_k}{b_k} \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Доказательство основано на непосредственном построении аппроксимирующей функции распределения [5], которую называют аппроксимационной суммой Зубова

$$sz(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k F_0 \left(\frac{x - a_k}{b_k} \right). \quad (1)$$

Отсюда, в частности, следует, что любую непрерывную функцию распределения можно с произвольной точностью аппроксимировать смесью нормальных функций распределения. Но статистическое оценивание большого числа параметров может представлять

определенную трудность для определения неизвестных коэффициентов $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N$.

2. Двучленная аппроксимационная сумма. В физических, химических, экономических исследованиях часто встречаются многомодальные распределения, например, при использовании методов ультрафиолетовой, инфракрасной спектроскопии, спектроскопии ядерного магнитного резонанса, зондовой диагностики плазмы.

С помощью метода максимального правдоподобия удалось получить следующий результат [6]: если искомое и порождающее распределение вероятности абсолютно непрерывны и плотности этих распределений близки, то при аппроксимации можно ограничиться рассмотрением двучленных сумм Зубова. Таким образом, выражение (1) представимо в виде

$$F(x) = \alpha_1 F_0\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right) + \alpha_2 F_0\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right),$$

где $b_1 > 0, b_2 > 0, \alpha_1 \approx 1, \alpha_2 \approx 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

В результате получена задача об оценивании пятипараметрического семейства распределений. Если предположить, что функция распределения абсолютно непрерывна и порождающее распределение нормальное, то можно получить выражение для смеси плотностей нормальных распределений

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi}b_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2b_1^2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\pi}b_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2b_2^2}}. \quad (2)$$

Аппроксимационная сумма может являться многомодальным распределением. В данной работе ограничимся бимодальным распределением, порожденным двучленной аппроксимационной суммой.

На рис. 1 изображена плотность бимодального распределения $f_1(x)$ с параметрами $\alpha_1^1 = 0,1, \alpha_2^1 = 0,9, a_1^1 = 5, a_2^1 = 0, b_1^1 = 1, b_2^1 = 1$. Для сравнения представлены плотности распределения $f_2(x)$ и $f_3(x)$, параметры которых имеют следующий вид $\alpha_1^2 = 0,1, \alpha_2^2 = 0,9, a_1^2 = 5, a_2^2 = 0, b_1^2 = 3, b_2^2 = 1$ и $\alpha_1^3 = 0,1, \alpha_2^3 = 0,9, a_1^3 = 2, a_2^3 = 0, b_1^3 = 1, b_2^3 = 1$.

В случае с $f_2(x)$ дисперсия распределения оказывается велика и одна вершина «размазывается». Для плотности $f_3(x)$ иная ситуация: пики обоих распределений находятся близко и смесь плотностей просто принимает асимметричный вид, уже не имея двух вершин. Таким

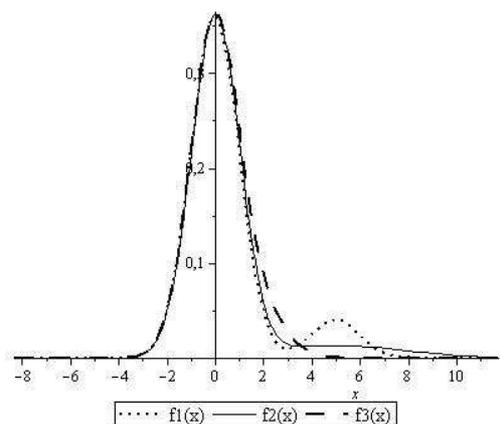


Рис. 1. Примеры графиков плотностей распределения двучленных сумм

образом ни $f_2(x)$, ни $f_3(x)$ не являются бимодальными распределениями.

Система уравнений, составленная по методу моментов для (2), была решена в [7]. Но вычисления с помощью математических пакетов показали неустойчивость решения системы уравнений, которая связана с погрешностью вычислений. Для получения верного решения конкретного примера достаточным оказался порядок вычисления с разрядностью более 30 знаков после запятой. Оценки, получаемые по методу моментов, часто оказываются неединственными и в данном случае целесообразней было бы искать эффективные оценки.

3. Эффективные оценки. Известно, что для семейств следующего вида возможно получение эффективных оценок [8]

$$f(x, \theta) = h(x) \exp \left[\sum_{i=1}^r \phi_i(x) c_i(\theta) + c_0(\theta) \right]. \quad (3)$$

Значимость экспоненциальных семейств подчеркивает и то, что они являются решением вариационной задачи на максимум энтропии.

В качестве примера можно взять эмпирическую оценку функции плотности распределения. Область значений случайной величины ξ разбивается на некоторое количество непересекающихся

интервалов $[a_1, b_1], \dots, [a_l, b_l]$. Задаются функции $g_1(x), \dots, g_l(x)$:

$$\begin{cases} g_i(x) = 0, & \text{если } x \notin [a_i, b_i], \\ g_i(x) = 1, & \text{если } x \in [a_i, b_i]. \end{cases}$$

Искомое распределение определяется из условий связи

$$\begin{aligned} M g_1(\xi) &= m_1, \\ &\dots \\ M g_l(\xi) &= m_l, \end{aligned}$$

и условия максимума энтропии

$$H_\xi = - \int_A \ln f(x) f(x) dx = -M \ln f(\xi).$$

Эффективные оценки параметров m_i будут достигаться при следующих оценках параметров

$$\begin{aligned} m_1^* &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_1(x_k), \\ &\dots \\ m_l^* &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_l(x_k). \end{aligned}$$

Согласно работе [9] плотность вида (2) не представима в виде (3) и для нее нельзя получить эффективные оценки. Но можно попробовать представить плотность (2) с ограничениями $\alpha_1 \approx 1$, $a_1 \approx 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $b_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$, $b_2 > 0$ (т. е. предполагается, что искомое распределение близко к нормальному стандартному) в виде зависимости от малого параметра [10]

$$\begin{aligned} f(x, \varepsilon) &= -\frac{x^2}{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \\ &+ \varepsilon \left(-\tilde{\alpha} - \tilde{b}_1 + x(\tilde{a}_1 + x\tilde{b}_1) + \frac{\tilde{\alpha}}{b_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2b_2^2} + \frac{x^2}{x}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если параметры a_2, b_2 в формуле (4) известны, то семейство плотностей $f(x, \varepsilon)$ принадлежит экспоненциальному семейству распределений (3). Известно, что для параметров такого семейства достаточно легко строятся эффективные оценки.

Другой специальный вид двучленной аппроксимационной суммы получается, если положить $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$. Искомые параметры a_2, b_2, α_2 уже находятся численно намного проще, например, дифференцированием по малому параметру или методом моментов, и систему можно решить алгебраически

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\pi}b_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2b_2^2}}.$$

4. Заключение. Нахождение параметров двучленных аппроксимационных сумм представляет определенный интерес, так как такие распределения часто встречаются в различных областях науки. В работе показано, когда такие суммы будут являться бимодальным распределением, а когда нет. Также дано разложение по малому параметру двучленной суммы, которое при определенных условиях принадлежит экспоненциальному семейству распределений, а значит позволяет найти эффективные оценки параметров.

Литература

1. Кендалл М., Стюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.
2. Вероятностные разделы математики. Учебник для технических направлений / Под ред. Максимова Ю. Д. СПб.: Иван Федоров, 2001. 592 с.
3. Деврой Л., Дьёрфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. L_1 подход / Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 408 с.
4. Зубов В. И. Проблема обращения центральной предельной теоремы А. М. Ляпунова // Докл. РАН, 1995. Т. 342. № 1. С. 15–16.
5. Шмыров А. С., Шмыров В. А. Теория вероятностей. Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. 187 с.

6. Тукачев П. А., Шмыров А. С. Аппроксимационные суммы Зубова и их применение // Процессы управления и устойчивость: Труды 36-й научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, В. Н. Старкова. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. С. 975–978.
7. Коваленко Ю. А., Королев Д. С. Алгоритм определения параметров бимодального распределения.
<http://jurnal.org/articles/2010/izmer2.html>
8. Боровков А. А. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2007. 704 с.
9. Дынкин Е. Б. Необходимые и достаточные статистики // УМН, 1951. Т. VI, Вып. 1. С. 68–90.
10. Барабанова А. С., Шмыров С. А. К задаче оценивания параметров аппроксимационной суммы Зубова // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 267–272.

Буре А. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Сравнительный анализ эффективности объектов на основе статистической информации ¹

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

Предположим, что имеется m различных объектов (лекарств, сортов культур, технических устройств), эффективность функционирования которых требуется оценить по результатам n испытаний, проведенных в различных условиях. В каждом испытании участвовали все m объектов, находившихся в одинаковых условиях. Результат функционирования объекта с номером j , где $j = 1, \dots, m$, в испытании с номером i , где $i = 1, \dots, n$, оценивается положительным числом $y_{ij} > 0$. Таким образом, матрица $\{y_{ij}\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, представляет собой результаты испытаний. Будем предполагать, что большие по величине значения y_{ij} соответствуют большей эффективности объекта j в испытании i . Требуется по матрице данных $\{y_{ij}\}$ построить индексы эффективности работы каждого из объектов по отношению к средней эффективности функционирования всех устройств. Средняя эффективность изучаемых объектов в испытании с номером i определяется выражением $x_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_{ij}$. Тогда по величине индекса можно будет объективно выбрать объекты с более высокой эффективностью функционирования. Пусть β_j представляет собой индекс эффективности объекта с номером j по отношению к средней эффективности всех объектов. Можно предложить несколько способов определения коэффициентов $\beta_j, j = 1, \dots, m$.

1-ый способ:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |y_{ij} - \beta_j x_i| \rightarrow \min_{\beta_1, \dots, \beta_m}. \quad (1)$$

Решение задачи (1) позволяет построить коэффициенты $\widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_m$, которые устанавливают соответствие между эффективностью функционирования устройств по отношению к средней эффективности,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752.

показанной в испытаниях. Найденные решения позволяют упорядочить объекты по степени предпочтительности.

2-ой способ:

$$\widehat{\beta}_j = \arg \min_{\beta_j \in R} \max_{i=1, \dots, n} |y_{ij} - \beta_j x_i|, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Решение задачи (2) дает другой способ установления соответствия между эффективностью объекта в проведенных испытаниях и средней эффективностью по всем проведенным испытаниям. Найденные решения задачи (2) также позволяют упорядочить объекты по степени предпочтительности.

В обеих задачах большее значение индекса $\widehat{\beta}_j$ означает более высокую степень предпочтительности объекта по результатам проведенных тестовых испытаний. Близкие подходы, основанные на более простых оптимизационных задачах для выбора наилучших сортов сельскохозяйственных культур были рассмотрена в работах [1, 2].

Решение задачи (1). Введем функции

$$\Phi_j(\beta_j) = \sum_{i=1}^n |y_{ij} - \beta_j x_i| = \sum_{i=1}^n x_i \left| \frac{y_{ij}}{x_i} - \beta_j \right| = \sum_{i=1}^n x_i |a_{i,j} - \beta_j|,$$

где $a_{1j} = \frac{y_{1j}}{x_1}, \dots, a_{nj} = \frac{y_{nj}}{x_n}$. Упорядочим по возрастанию введенные величины:

$$a_{(1)j} < \dots < a_{(n)j}.$$

Введем обозначения $a_{(0)j} = -\infty$, $a_{(n+1)j} = +\infty$. Тогда

$$a_{(0)j} < \dots < a_{(n)j} < a_{(n+1)j}.$$

Теорема 1. *Минимум функции $\Phi_j(\beta_j)$ достигается в точках множества $\{a_{1j}, \dots, a_{nj}\}$.*

Доказательство. Очевидно, что минимум функции $\Phi_j(\beta_j)$ достигается внутри отрезка $[a_{(1)j}, a_{(n)j}]$. Пусть $\beta_j \in [a_{(k)j}, a_{(k+1)j}]$, $k = 1, \dots, n$. Тогда все модули раскрываются и функция $\Phi_j(\beta_j)$ линейно зависит от β_j . Это означает, что минимум должен достигаться на границе отрезка $[a_{(k)j}, a_{(k+1)j}]$, если на концах отрезка Φ_j принимает одинаковые значения, то на этом отрезке нет зависимости от β_j и во всех точках отрезка функция принимает одно и тоже значение.

Следовательно, достаточно вычислить все значения $\Phi_j(a_{kj})$, $k = \overline{1, I}$, и выбрать минимальное.

Теорема доказана.

Аналогично рассматриваются все остальные функции $\Phi_k(\beta_k)$. Решение задачи (1) сводится к минимизации функций $\Phi_j(\beta_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Решение задачи (2). Введем функции

$$\varphi_1(\beta_1) = \max_{i=1, \dots, n} \varphi_1^{(i)}(\beta_1), \dots, \varphi_m(\beta_m) = \max_{i=1, \dots, n} \varphi_m^{(i)}(\beta_m),$$

где

$$\varphi_k^i(\beta_k) = |y_{ik} - \beta_k x_i|, \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m.$$

Будем рассматривать функцию $\varphi_1(\beta_1)$, остальные функции рассматриваются аналогично. Обозначим $z_1 = \frac{y_{11}}{x_1}, \dots, z_n = \frac{y_{n1}}{x_n}$ — корни функций $\varphi_1^{(1)}(\beta_1), \dots, \varphi_1^{(n)}(\beta_1)$.

Упорядочим корни по возрастанию

$$z_{(1)} \leq \dots \leq z_{(n)}.$$

Будем решать задачу минимизации функции $\varphi_1(\beta_1)$. Оптимальное

$$\beta_1^* = \arg \min_{\beta_1} \varphi_1(\beta_1)$$

принадлежит промежутку $[z_{(1)}, z_{(2)}]$, так как вне этого промежутка функция $\varphi_1(\beta_1)$ ведет себя монотонно, но при этом слева на $(-\infty, z_{(1)})$ она убывает, а справа на $(z_{(n)}, \infty)$ неограниченно возрастает.

Теорема 2. *Функция $\varphi_1(\beta_1)$ — выпукла.*

Доказательство. Пусть $t_1 < t_2$ — любые вещественные числа, $\alpha \in (0, 1)$, тогда

$$\varphi_1^{(i)}(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha \varphi_1^{(i)}(t_1) + (1 - \alpha) \varphi_1^{(i)}(t_2).$$

Это неравенство верно при любом $i = 1, \dots, n$, так как все функции $\varphi_1^{(i)}(\beta_1)$ выпуклые. Но тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) &= \max_{i=1, \dots, n} \varphi_1^{(i)}(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} (\alpha \varphi_1^{(i)}(t_1) + (1 - \alpha) \varphi_1^{(i)}(t_2)) \leq \\ &\leq \alpha \max_{i=1, \dots, n} \varphi_1^{(i)}(t_1) + (1 - \alpha) \max_{i=1, \dots, n} \varphi_1^{(i)}(t_2) = \alpha \varphi_1(t_1) + (1 - \alpha) \varphi_1(t_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Алгоритм нахождения β_1^*

1. Случайным образом выбираем конечную совокупность точек $t_2, \dots, t_{r-1} \in [z_{(1)}, z_{(n)}]$, при этом после упорядочения $t_{(1)} = z_{(1)} < \dots < t_{(r-1)} < t_{(r)} = z_{(n)}$. Вычисляем значение функции $\varphi_1(\beta_1)$ во всех точках $t_{(1)}, \dots, t_{(r)}$.

2. Выбираем три наиболее близкие друг к другу точки $t_i < t_j < t_k$ так, что

$$\varphi_1(t_{(i)}) > \varphi_1(t_{(j)}) < \varphi_1(t_{(k)}).$$

Так как функция φ_1 — выпукла, точка минимума находится в промежутке $(t_{(i)}, t_{(k)})$.

3. Если $|t_{(i)} - t_{(k)}| > \varepsilon$, то переходим к пункту 1, выбирая теперь случайным образом точку из найденного промежутка $[t_{(i)}, t_{(k)}]$.

Если $|t_{(i)} - t_{(k)}| \leq \varepsilon$, то полагаем $\beta_1^* = \frac{t_{(i)} + t_{(k)}}{2}$.

В среде MATLAB написана программа, реализующая указанный алгоритм.

Литература

1. Якушев В. П., Буре А. В., Якушев В. В. Математические подходы к анализу данных в сортоиспытаниях // Доклады РАСХН, 2012. № 2. С. 22–24.
2. Pereira D. G., Mexia J. T. Selection proposal of cultivars of spring barley in the years from 2001 to 2004 using joint regression analysis // Plant Breeding, 2008. No 127. P. 452–458.

Гордеев Д. Ф.

Санкт-Петербургский государственный университет

Метод расчета дозного распределения в тканезквивалентной среде¹

Рекомендовано к публикации профессором Овсянниковым Д. А.

1. Введение. Лучевая терапия представляет собой клинический процесс, в котором для лечения злокачественных опухолей используется ионизирующее излучение. Целью лучевой терапии является подведение очень точной дозы радиации к четко заданному объему мишени при минимизации вреда, наносимого окружающим опухоль здоровым тканям, приводящее к разрушению опухоли [1–3]. Для минимизации вреда в современных технологиях лучевой терапии, таких как конформная радиотерапия и интенсивно-модулированная радиотерапия (ИМРТ), используется многолепестковый коллиматор (МЛК) [4]. МЛК состоит из подвижных лепестков-экранов, посредством перемещения которых блокируется часть пучка, это позволяет сформировать поле произвольной формы. Форма поля и положение лепестков определяются по проекции мишени на плоскость, перпендикулярную центральной оси пучка.

Планирование лучевой терапии — это важнейшая составляющая процесса радиотерапии. При планировании лучевой терапии необходимо выбрать оптимальные геометрические и радиологические параметры облучения и рассчитать дозное распределение в соответствии с выбранными параметрами. В данной статье рассматривается метод расчета дозного распределения в тканезквивалентной среде, применимый, в том числе и для расчета полей, сформированных МЛК.

2. Метод расчета дозных полей. Рассмотрим метод расчета дозных полей, основанный на модели карандашного пучка [5–9]. Введем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$. При этом ось z совпадает с осью пучка, а плоскость Oxy касается поверхности облучаемой среды. Область облучения в горизонтальной плоскости, касающейся поверхности среды, разбивается на конечное число прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. Дозу излучения, создаваемого в точке M с координатами

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, НИР 9.38.673.2013

(x, y, z) i -ым карандашным пучком, обозначим через $\tilde{D}_i(x, y, z)$. Если центральная ось карандашного пучка перпендикулярна плоскости Oxy , то $\tilde{D}_i(x, y, z)$ вычисляется по формуле [5]:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i(x, y, z) = & K_1(z)K_2(x, y) \left\{ \frac{D_0(z)}{4} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{A\delta(z) + x}{\sqrt{R_0^2(z)}} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{erf} \left(\frac{A\delta(z) - x}{\sqrt{R_0^2(z)}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erf} \left(\frac{B\delta(z) + y}{\sqrt{R_0^2(z)}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{B\delta(z) - y}{\sqrt{R_0^2(z)}} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{100 - D_0(z)}{4} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{A\delta(z) + x}{\sqrt{R_p^2(z)}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{A\delta(z) - x}{\sqrt{R_p^2(z)}} \right) \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[\operatorname{erf} \left(\frac{B\delta(z) + y}{\sqrt{R_p^2(z)}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{B\delta(z) - y}{\sqrt{R_p^2(z)}} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $\delta(z) = 1 + \frac{z}{h}$, $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, $h = \text{const}$, а $K_1(z)$, $K_2(x, y)$, $D_0(z)$, $R_0(z)$, $R_p(z)$ — неизвестные функции, определение которых изложено ниже, при описании процесса инициализации дозиметрических данных.

Однако, в общем случае центральная ось карандашного пучка пересекает плоскость Oxy под некоторым углом. Пусть i -ый карандашный пучок пересекает плоскость Oxy в точке с координатами $(x_i^*, y_i^*, 0)$. Положим

$$\alpha_i = \operatorname{arctg} \frac{x_i^*}{R}, \quad \beta_i = \operatorname{arctg} \frac{y_i^*}{R}, \quad c = \sqrt{x_i^{*2} + y_i^{*2} + R^2},$$

где R — расстояние источник-поверхность.

Тогда координаты точки M в системе, связанной с i -ым карандашным пучком, определяются по формулам

$$x' = (x - x_i^*) \cos \alpha - z \sin \alpha, \quad y' = (y - y_i^*) \cos \beta - z \sin \beta, \quad (1)$$

$$z' = \frac{1}{c}(xx_i^* + yy_i^* + R(z + R)). \quad (2)$$

Кроме того, исходный прямоугольник со сторонами, равными A и B , при проецировании на плоскость, ортогональную центральной оси i -го карандашного пучка, переходит в параллелограмм со сторонами, равными A'_i и B'_i , где

$$A'_i = A \cos \alpha \frac{c + z'}{c + \frac{x_i^* A}{c}}, \quad B'_i = B \cos \alpha \frac{c + z'}{c + \frac{y_i^* B}{c}}. \quad (3)$$

Таким образом, в общем случае $\tilde{D}_i(x, y, z)$ необходимо вычислять с учетом соотношений (1)–(3).

Полная доза в точке (x, y, z) будет

$$\tilde{D}(x, y, z) = \sum_{i=1}^m \tilde{D}_i(x, y, z), \quad (4)$$

где m — количество карандашных пучков.

Для того чтобы получить распределение дозы в области облучения, необходимо построить сетку, состоящую из прямоугольных параллелепипедов одинакового размера. При этом грани этих параллелепипедов параллельны соответствующим координатным плоскостям системы координат $Oxyz$.

В каждой из вершин построенных параллелепипедов значение дозы определяется по формуле (4). Если теперь нужно вычислить значение дозы в точке M , несовпадающей ни с одной из этих вершин параллелепипедов, то находим параллелепипед, содержащий эту точку, и определяем расстояние от точки до вершин данного параллелепипеда.

Обозначим через r_s эти расстояния, а через \tilde{D}_s — значение дозы в вершинах $s = 1, \dots, 8$. Пусть

$$\xi = 1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_3} + \dots + \frac{r_1}{r_8}.$$

Тогда доза в точке M будет вычисляться по формуле

$$\tilde{D}(M) = \frac{1}{\xi} \sum_{s=1}^8 \frac{r_1}{r_s} \tilde{D}_s.$$

Данный метод расчета дозного распределения может быть использован и в случае поля, сформированного при помощи МЛК. Для

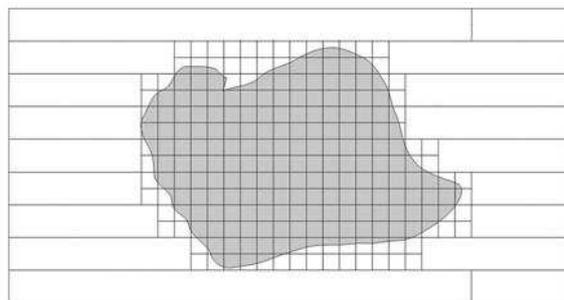


Рис. 1. Проекция лепестков коллиматора на плоскость Oxy

этого необходимо спроецировать лепестки на плоскость Oxy , касательную поверхности облучаемой среды (рис. 1). Далее производится расчет полной дозы в некоторой точке как сумма доз в этой точке, созданных карандашными пучками, не пересекающих проекции лепестков МЛК. На рис. 2 представлен профиль дозного распределения, полученный в результате расчета, для поля, сформированного при помощи МЛК.

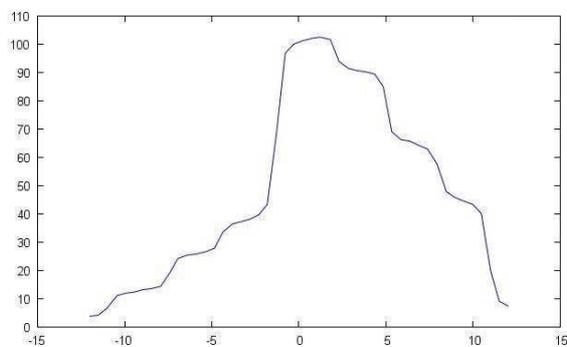


Рис. 2. Дозное распределение вдоль оси Ox на глубине 5 см

3. Инициализация дозиметрических данных. Дозиметрические данные получают путем проведения измерений поглощенной дозы внутри облучаемого объема. Измерения дозы осуществляют-

ся для полей разного размера на некоторой объемной сетке с фиксированным расстоянием между узлами сетки. Значение поглощенной дозы в некоторой точке (x, y, z) обозначим через $D(x, y, z)$, тогда функция $D(x, y, z)$ будет задана таблицей значений:

$$D(x_i, y_j, z_k) = D_{i,j,k},$$

где (x_i, y_j, z_k) — узел объемной сетки, $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$, $k = 0, \dots, L$. Таким образом, неизвестные функции $K_1(z)$, $K_2(x, y)$, $D_0(z)$, $R_0(z)$, $R_p(z)$ будем определять из условия минимума функционала [10]

$$S(K_1, K_2, D_0, R_0, R_p) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^L \left(\tilde{D}(x_i, y_j, z_k) - D_{i,j,k} \right)^2.$$

Для решения данной задачи многомерной минимизации можно использовать метод циклического покоординатного спуска.

4. Заключение. Отличительной особенностью предложенного в данной статье метода расчета дозного распределения является представление терапевтического пучка в виде набора карандашных пучков. Такое представление позволяет производить расчет дозного распределения для радиационного поля произвольной формы.

Литература

1. Елизарова М. В., Овсянников Д. А., Чересмин В. М. Физико-технические аспекты лучевой терапии. Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. 184 с.
2. Овсянников Д. А., Сергеев С. Л., Стученков А. Б., Шишов В. А. Сканиплан: система дозиметрического планирования для медицинских ускорителей // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2009. Вып. 4. С. 34–37.
3. Шишов В. А., Овсянников Д. А., Кабанов В. В., Жабко А. П., Ворогушин М. Ф., Зарецкий Д. В. Топометрическая система с функцией томографии. Патент № 2325117. 2008.
4. Канаев С. В., Шишов В. А. Современные технологии в радиационной онкологии // Практическая онкология, 2005. Т. 6, № 1. С. 18–25.

5. Bourland J. D., Chaney E. L. A finite-size pencil beam model for photon dose calculation in three dimensions // *Med. Phys.*, 1992. Vol. 19. P. 1401–1413.
6. Jelen U., Sohn M., Alber M. A finite size pencil beam for IMRT dose optimization // *Phys. Med. Biol.*, 2005. Vol. 50. P. 1747–1766.
7. Knoos T., Ceberg C., Weber L., Nilsson P. The dosimetric verification of a pencil beam based treatment planning system // *Phys. Med. Biol.*, 1994. Vol. 39. P. 1609–1628.
8. Lin H., Wu Y. C., Chen Y. X. A finite size pencil beam for IMRT dose optimization – a simpler analytical function for the finite size pencil beam kernel // *Phys. Med. Biol.*, 2006. Vol. 51. P. L13–L15.
9. Ostapiak O. Z., Zhu Y., Van Dyk J. Refinements of the finite-size pencil beam model of three-dimensional photon dose calculation // *Med. Phys.*, 1997. Vol. 24. P. 743–750.
10. Гордеев Д. Ф. Обработка дозиметрической информации для инициализации системы планирования лучевой терапии СКАН-ПЛАН // *Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Еремина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербург. гос. ун-та, 2012. С. 277–282.*

Козлов К. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование матрицы коллиматорной размытости в ОФЭКТ

Рекомендовано к публикации доцентом Плоских В. А.

Введение. В ядерной медицине широко используется метод однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ). Пациенту вводится радиофармацевтический препарат, излучение радионуклидов которого фиксируется сцинтилляционной камерой с разных углов для формирования проекций источников излучения в организме.

Современным классом методов восстановления пространственного распределения радиофармацевтического препарата по проекциям являются итерационные методы реконструкции, при использовании которых могут быть учтены физические факторы.

В данной статье рассматривается моделирование матрицы коллиматорной размытости, которая является одной из главных физических свойств, влияющих на качество реконструкции.

Постановка задачи. Итерационные методы — это методы решения обратной задачи однофотонной эмиссионной компьютерной томографии. Для решения обратной задачи необходимо сформулировать прямую задачу.

Прямая задача состоит в нахождении проекций P по известной функции распределения f :

$$P = Hf.$$

Для решения прямой задачи требуется определить матрицу наблюдений H . Элементами матрицы являются вероятности фиксирования события произошедшего в i -м пикселе j -ой проекционной ячейкой. Когда эта матрица построена, прямая задача считается смоделированной.

Методы реализации. Рассматривается двумерный случай. Вероятность фиксирования события произошедшего в i -м пикселе

j -ой проекционной ячейкой будет зависеть от телесного угла, стягивающего видимую часть проекционной ячейкой:

$$H_{ij} = \frac{\varphi_{ij}}{2\pi}.$$

Для нахождения телесного угла φ_{ij} введем систему координат. Центр координат соответствует центру вращения сцинтилляционной камеры. Обозначим расстояние от центра вращения до камеры через l . Зная размеры снимаемого объекта и размеры камеры, несложно вычислить координаты центров пикселей (x, y) и проекционной ячейки (l, Y) .

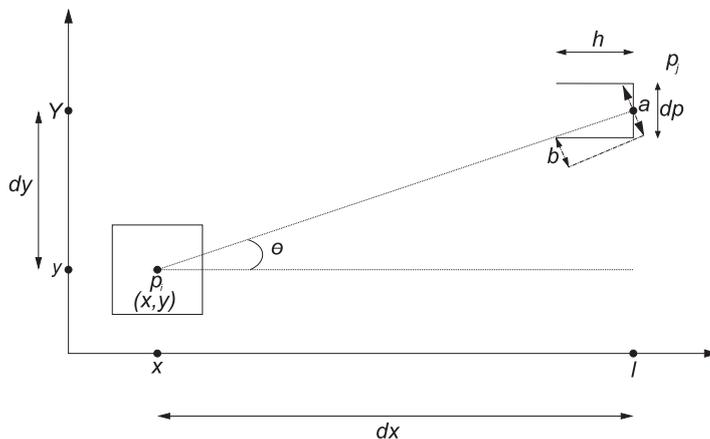


Рис. 1. Схема видимости пикселя из проекционной ячейки

Телесный угол φ_{ij} вычисляется приближенно. Как видно из рис. 1,

$$\begin{aligned} dx &= l - x, \\ dy &= |y - Y|. \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить расстояние от центра пикселя до центра проекционной ячейки

$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Далее, для угла θ имеем:

$$\cos \theta = \frac{dx}{d}, \quad \sin \theta = \frac{dy}{d}.$$

Ширина проекционной ячейки обозначена dp , высота коллиматора — h . Зная угол θ , легко найти проекции этих величин на направление, соединяющее центры проекционной ячейки и пикселя.

Проекция dp :

$$a = dp \cos \theta = dp \frac{dx}{d}.$$

Проекция h :

$$b = h \sin \theta = h \frac{dy}{d}.$$

Отсюда

$$\varphi_{ij} \approx \frac{(a - kb)dp}{d^2},$$

где k — число отверстий коллиматора над проекционной ячейкой. Однако φ_{ij} может принимать и отрицательные значения, в таком случае полагаем, что $\varphi_{ij} = 0$.

Повторяя эту процедуру для $i = 1, \dots, N$ и $j = 1, \dots, P$ вычисляются все элементы матрицы наблюдений H .

Для разных углов съемки алгоритм нахождения матрицы наблюдений остается тем же, так как возможно вращать не камеру, а сам объект. Несложно найти координаты центров пикселей после поворота на угол θ . Вычисленная матрица наблюдений с координатами пикселей, вычисленных после поворота, соответствует матрице, вычисленной для съемки под углом θ .

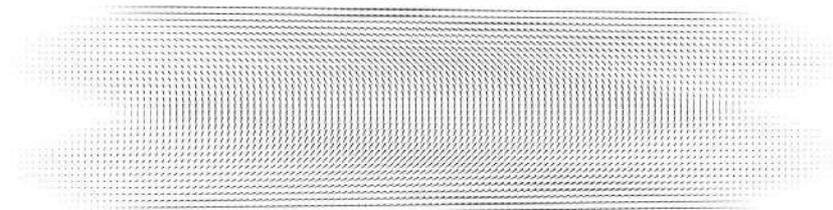


Рис. 2. Нормализованный вид проекционной матрицы

Заключение. В статье рассмотрен метод построения матрицы наблюдений H , используемой в алгоритмах однофотонной эмиссионной компьютерной томографии. Разработан модуль программы,

вычисляющий матрицу H , написанный на языке $C\#$. Получены результаты работы модуля для приближенной к реальной задаче.

Начальные данные задачи: разрешение объекта 128×128 пикселей, длина объекта 30 см, количество проекционных ячеек 128, длина всех проекционных ячеек 43 см, высота коллиматора 2 см, зазор между коллиматорами 1 мм, расстояние от камеры до центра вращения 35 см. На рис. 2 представлены графически результаты моделирования.

Литература

1. Seppanen Aku O. Correction of collimator blurring and attenuation in single photon emission computed tomography.
<http://venda.uef.fi/~aoseppan/SPECTthesis.pdf>
2. Арлычев М. А., Новиков В. Л., Сидоров А. В., Фиалковский А. М., и др. Двухдетекторный однофотонный эмиссионный гамма-томограф «ЭФАТОМ» // Журнал технической физики, 2009. Вып. 10, № 79. С. 138–146.
3. Котина Е. Д., Джаксумбаев А. И., Дежурнюк Д. В., Плоских В. А. Автоматизированная информационная система для радионуклидной диагностики // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2006. С. 110–115.
4. Beaman J. J. A 3D model of non-uniform attenuation and detector response for efficient iterative reconstruction in SPECT // Physics in Medicine and Biology, 1994. Vol. 39, No 3 P. 547–561.
5. Zeng G. L., Gullberg G. T. Iterative and analytical reconstruction algorithms for varying-focal-length cone-beam projections // Physics in Medicine and Biology, 1998. Vol. 43, No 4 P. 811–821.

Кузнецов С. Р.

Санкт-Петербургский государственный университет

**Математическая модель активации,
пролиферации и дифференцировки Т- и
В-лимфоцитов при их взаимодействии в
лимфоузле с описанием переключения синтеза
изотипов иммуноглобулинов IgM и IgG**

Рекомендовано к публикации профессором Шишкиным В. И.

Введение. На протяжении всего развития иммунологии пролиферация и дифференцировка лимфоцитов в лимфоузле обращали на себя повышенное внимание, т. к. от протекающих здесь процессов напрямую зависит весь дальнейший ход иммунного ответа. Однако, несмотря на интенсивные исследования, данные процессы до сих пор не до конца ясны, т. к. довольно подробно исследованные молекулярные аспекты этих процессов еще не дают понимание глобальной динамики иммунной системы, и создание математических моделей обладает большим потенциалом в решении этой проблемы. На настоящий момент имеется большое число разнообразных математических моделей иммунного ответа, частичный обзор которых сделан в [1]. Слабой стороной этих моделей является то, что процессы дифференцировки в них либо вовсе не рассматриваются, либо рассматриваются на упрощенном уровне, причиной чему является недостаточная изученность, высокая сложность процессов и отсутствие достаточных экспериментальных данных, имевшие место до недавнего времени. За последнее десятилетие ситуация значительно улучшилась, и появилась возможность построить модели, более адекватно отражающие внутренние механизмы процессов пролиферации и дифференцировки. Данная работа ставит целью построение подробной модели взаимодействия Th2 и В-лимфоцитов в лимфоузле и описание переключения синтеза изотипов антител классов IgM и IgG в В-лимфоцитах.

Схема процесса. Согласно [2] динамика взаимодействия между Th2 и В-лимфоцитами в лимфоузле может быть разделена на четыре стадии: I — премирование В-клеток, переводящее их в состояние антиген-презентирующей клетки (АПК); II — активация Т-клеток

в результате встречи с АПК; III — активация В-клеток через взаимодействие с активированными Т-клетками; IV — пролиферация и дифференцировка Т- и В-клеток; V — выход дифференцировавшихся лимфоцитов из лимфоузла и синтез антител В-клетками. Все стадии отображены на рис. 1.

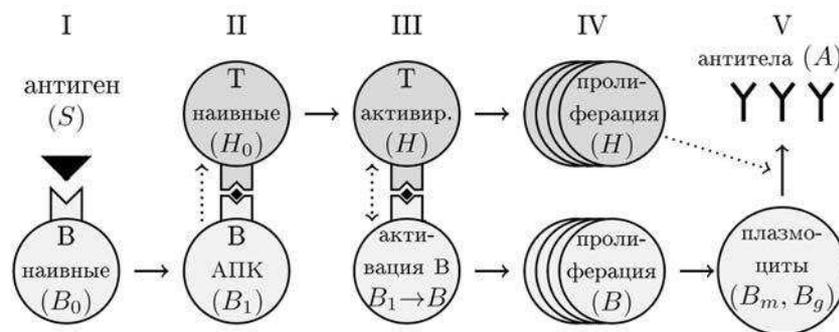


Рис. 1. Схема активации и дифференцировки Т-хелперов и В-лимфоцитов

Описание модели. Большинство уравнений модели основаны на традиционном для математической биологии и биофизики подходе, когда динамика взаимодействия популяций описывается с помощью нелинейных ОДУ, аналогичных уравнениям ферментативной кинетики или уравнениям хищник-жертва Лотки — Волтерры. Но для моделирования пролиферации была использована оригинальная идея, позволившая описать сложный процесс пролиферации и дифференцировки клеток одним единственным уравнением в частных производных. Идея заключается в том, что пролиферация рассматривалась не как процесс увеличения числа клеток, а как процесс описания внутренних изменений клетки-предшественника во времени, т. е. делая обычное в математическом моделировании допущение, что при делении одной клетки возникают две *идентичные* клетки, модель продолжает рассматривать их как одну единственную клетку, начавшую новый клеточный цикл. Узнать затем число получившихся в результате деления клеток не сложно, если знать, сколько полных циклов деления прошла клетка-предшественник. Если число клеток предшественников равно P_0 , а число делений x , то число получившихся клеток будет $2^x P_0$. В результате пролифера-

ция клеток была описана с помощью уравнения движения клетки-предшественника через череду клеточных циклов (см. ниже уравнения (5) и (6) для Т- и В-клеток, соответственно). В то же время согласно экспериментальным исследованиям динамики дифференцировки Т-клеток, этот процесс жестко связан с числом пройденных циклов деления [3]. Следовательно, уравнения (5) и (6) также можно использовать для описания дифференцировки.

Вся модель выглядит следующим образом:

$$\frac{dS}{dt} = -k_a AS - w_s S, \quad (1)$$

$$\frac{dB_0}{dt} = \sigma_b - \alpha_s SB_0 - w_b B_0, \quad (2)$$

$$\frac{dH_0}{dt} = \sigma_h - \alpha_b (B_1 + B_\sigma) H_0 - w_h H_0, \quad (3)$$

$$\frac{dB_1}{dt} = \alpha_s SB_0 - \alpha_h B_1 \int_0^l 2^\chi H(t, \chi) d\chi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = p_h(x) \frac{\partial H}{\partial x} - w_h(x) H, \quad (5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = p_b(x) \frac{\partial B}{\partial x} - w_b(x) B, \quad (6)$$

$$\frac{dB_m}{dt} = 2^l p_b(l) \frac{\partial B}{\partial x}(l, t) \left(1 - \frac{H_\sigma}{H^* + H_\sigma}\right) - w_m B_m, \quad (7)$$

$$\frac{dB_g}{dt} = 2^l p_b(l) \frac{\partial B}{\partial x}(l, t) \frac{H_\sigma}{H^* + H_\sigma} - w_g B_g, \quad (8)$$

$$\frac{dA}{dt} = \rho (B_m + n_g B_g) - k_a AS - w_a A, \quad (9)$$

$$\text{где } B_\sigma = \int_0^{l-c} 2^\chi B(t, \chi) d\chi, \quad H_\sigma = \int_d^l 2^\chi H(t, \chi) d\chi.$$

Начальные условия были описаны следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= S^*, & B_0 &= B_0^*, & H_0 &= H_0^*, & A &= A^*, \\ B_1 &\equiv 0, & H &\equiv 0, & B &\equiv 0, & B_m &\equiv 0, & B_g &\equiv 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для уравнений (5) и (6):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Левая граница} & \text{Правая граница} \\
 \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_b (B_1 + B_\sigma) H_0, & \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=l} = p_h(l) \frac{\partial H}{\partial x} (l, t), \\
 \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_h B_1 \int_0^l 2^\chi H(t, \chi) d\chi, & \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=l} = p_b(l) \frac{\partial B}{\partial x} (l, t).
 \end{array}$$

Каждое уравнение описывает динамику изменения концентраций участников процесса. Уравнение (1) описывает концентрацию антигена: первое слагаемое правой части — убыль за счет элиминации антителами, второе — убыль за счет естественных факторов. Уравнение (2) описывает наивные В-лимфоциты: первое и последнее слагаемые описывают гомеостаз клеток, второе — переход в состояние АПК в результате встречи с патогеном (*стадия I*). Уравнение (3) описывает наивные Т-хелперные клетки: первое и последнее слагаемые описывают гомеостаз клеток, второе — переход в активированное состояние в результате встречи с АПК и активированными В-клетками (*стадия II*). Уравнение (4) описывает В-клетки в состоянии АПК, ждущие сигнала от Т-хелперов: последнее слагаемое — переход в состояние пролиферации в результате встречи с активированными Т-хелперами (*стадия III*). Уравнение (5) — пролиферация и дифференцировка Т-клеток, описанные как движение клеток-предшественников через череду клеточных циклов: $H(t, x)$ — концентрация клеток-предшественников, на момент времени t прошедших x циклов пролиферации (один полный цикл соответствует единице), $p(x)$ — скорость деления клеток, $w(x)$ — скорость гибели (*стадия IV*). Уравнение (6) описывает пролиферацию и дифференцировку В-клеток аналогично уравнению (5) (*стадия IV*). Уравнение (7) описывает динамику созревших В-клеток (плазмоцитов), синтезирующих антитела класса IgM: множитель в больших скобках характеризует, насколько слабый поступает сигнал от дифференцировавшихся Т-лимфоцитов, влияющий на переключение изотипа синтезируемых антител с IgM на IgG, второе слагаемое описывает естественную убыль В-клеток (*стадия V*). Уравнение (8) описывает В-клетки, синтезирующие антитела класса IgG: множитель в больших скобках характеризует влияние дифференцировавшихся Т-лимфоцитов на переключение изотипа синтезируемых антител с

IgM на IgG (*стадия V*). Уравнение (9) описывает синтез, расход и естественный распад антител. B_σ — концентрация центробластов, в нашем случае фракция пролиферирующих В-лимфоцитов, способных влиять на активацию наивных Т-хелперов, H_σ — фракция дифференцировавшихся Т-клеток, выделяющая цитокины, необходимые для переключения изотипа синтезируемых антител с IgM на IgG. Вид функций $p_{h,b}(x)$ и $w_{h,b}(x)$ определялся эмпирически на основании исследований по анализу данных проточной цитометрии [4], где примерно тот же смысл имеет функция вероятности деления и гибели, зависящая от интенсивности красителя CFSE, которая, в свою очередь, зависит от числа пройденных делений.

Результаты. Для определения значений коэффициентов модели были использованы данные [2–8]. Модель исследовалась численно. Для решения ОДУ использовался метод Эйлера — Коши (Эйлера с пересчетом); для ДУвЧП — метод Лакса — Вендроффа с элементами метода коррекции потоков [9]; интегрирование проводилось с помощью метода трапеций (все методы второго порядка точности). Методы были реализованы на языке Python с использованием пакетов NumPy и Matplotlib.

Модель показывает зависимость типа гуморального иммунного ответа от начальной дозы антигена. При достаточно низких дозах происходит синтез только IgM-антител, концентрация которых сразу после элиминации антигена быстро падает, что связано с кратковременностью жизни IgM-синтезирующих плазмоцитов. При больших дозах антигена с начала второй недели после заражения благодаря дифференцировки Th2-лимфоцитов происходит постепенное переключение плазмоцитов на синтез IgG-антител (пик на третьей неделе). После элиминации антигена концентрация IgG-антител длительное время поддерживается на высоком уровне (сохраняется иммунитет).

Выводы. Модель адекватно описывает процессы реализации гуморального иммунного ответа на инвазию разных доз антигена, включая переключение синтеза изотипов антител с класса IgM на более эффективный класс IgG.

Литература

1. Кузнецов С. Р., Шишкин В. И. Математическое моделирование как инструмент теоретических исследований в иммунологии — достижения и перспективы // Цитокины и воспаление, 2012. Т. 11, № 2. С. 5–13.
2. Хаитов Р. М., Пинегин Б. В., Ярилин А. А. Иммунология. Атлас. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2011. 624 с.
3. Grogan J. L., Mohrs M., Harmon B. et al. Early transcription and silencing of cytokine genes underlie polarization of T helper cell subsets // *Immunity*, 2001. Vol. 14, No 3. P. 205–215.
4. Banks H. T., Sutton K. L., Thompson W. C. et al. A new model for the estimation of cell proliferation dynamics using CFSE data // *J. Immunol. Methods*, 2011. Vol. 373, No 1–2. P. 143–160.
5. Iber D., Maini P. K. A mathematical model for germinal centre kinetics and affinity maturation // *J. Theor. Biol.*, 2002. Vol. 219, No 2. P. 153–175.
6. Borghans J. A. M., de Boer R. J. Quantification of T-cell dynamics: from telomeres to DNA labeling // *Immunol. Rev.*, 2007. Vol. 216. P. 35–47.
7. Wittenbrink N., Weber T. S., Klein A. et al. Broad volume distributions indicate nonsynchronized growth and suggest sudden collapses of germinal center B cell populations // *J. Immunol.*, 2010. Vol. 184, No 3. P. 1339–1347.
8. Романюха А. А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 293 с.
9. Французов М. С., Кузенов В. В. Модификация метода коррекции потоков для задач газовой динамики // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2008. Т. 7. <http://www.chemphys.edu.ru/media/files/2008-09-01-041.pdf>

Манушкина Т. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Статистический анализ базы данных по инфаркту миокарда методом таблиц сопряженности

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. Во многих практических задачах исследуются объекты, обладающие несколькими (двумя или более) признаками, и необходимо выяснить, насколько эти признаки связаны между собой. Вопрос состоит в том, можно ли по степени выраженности одного признака судить о выраженности другого, либо же эти признаки следует считать проявляющимися независимо (в вероятностном смысле). Методы определения связи признаков заметно отличаются в зависимости от вида шкалы измерений этих признаков:

- для изучения связи признаков, измеренных в номинальной шкале (признаков вида «да или нет»), применяются таблицы сопряженности, статистика Фишера — Пирсона χ^2 , различные меры связи признаков (коэффициенты Юла, Крамера, Чупрова и др.) и логарифмически линейные модели;
- для признаков, измеренных в порядковой шкале (данных типа «лучше — хуже», тестовых баллов и т. д.), применяются ранжирование и коэффициенты корреляции Спирмена и Кендэла;
- для данных, измеренных в количественных шкалах, применяются коэффициент корреляции Пирсона и модель простой линейной регрессии.

В статье рассмотрен анализ медицинских данных, содержащих информацию о пациентах, больных инфарктом миокарда, с использованием таблиц сопряженности, статистического критерия хи-квадрат [1, 2] и точного теста Фишера [2].

2. Постановка задачи. Исходные данные. Имеется база медицинских данных из 1040 наблюдений по 267 признакам, которые обозначают различные характеристики пациентов, больных инфарктом миокарда. Эти характеристики включают в себя особенности клинического течения болезни и осложнений, сопутствующих заболеваний, факторы риска, качество ведения больных в группах. Из

всех признаков медицинскими экспертами были отобраны 88 характеристик, представляющих собой интерес для анализа. Было принято решение исключить из рассмотрения всех женщин, а также мужчин возрастом менее 19 лет и более 56 лет. Таким образом была сформирована выборка, состоящая из 430 наблюдений по 86 признакам, которая соответствует всем требованиям.

Необходимо сравнить группы пациентов по наличию ответа на вопрос № 75 базы данных, где ответ «1» — группа больных инфарктом миокарда без гипертонической болезни, ответы «2»–«6» — группы больных гипертонической болезнью, у которых развился инфаркт миокарда. В результате анализа хотелось бы получить ответ на вопрос о том, есть ли зависимость между признаками, по которым были получены наблюдения о состоянии больных, и произведенным разбиением пациентов на группы, или, иначе говоря, оказывают ли влияние определенные признаки на наличие гипертонической болезни у пациентов.

3. Этапы анализа. Применимо к поставленной задаче независимость признаков означает однородность распределения наблюдений по каждому из указанных признаков в группах «1» и «не 1» (т. е. «2»–«6»). Наличие зависимости означает отсутствие однородности распределения наблюдений по этим признакам в группах «1» и «не 1».

Таким образом, при построении таблиц сопряженности в качестве признака *A* рассматривались поочередно 85 характеристик, предложенных специалистами для анализа, а в качестве признака *B* — признак № 75, характеризующий наличие или отсутствие у пациента гипертонической болезни, или принадлежность пациента к группе «1» или «не 1» в условиях постановки задачи.

Например, для признака № 6 «ХарТруда» таблица сопряженности имеет следующий вид:

Таблица 1. Таблица сопряженности для признака № 6 «ХарТруда»

Значение признака	Группа 1	Группа не 1	Всего
1	22	74	96
2	19	33	52
3	12	20	32
4	4	6	10
5	40	37	77
6	53	110	163
Всего	150	280	430

Для каждой из построенных 85 таблиц сопряженности выдвигалась гипотеза H_0 об однородности распределения частот в таблице на 5%-ом уровне значимости. Альтернативная гипотеза H_1 утверждает о неоднородности распределения частот на 5%-ом уровне значимости.

Для проверки выдвинутой гипотезы применялся критерий хи-квадрат или точный критерий Фишера.

Критерий хи-квадрат применяется для таблиц, значения элементов которых не меньше трёх, но в работе встречались такие данные, что таблицы сопряженности, построенные на их основе, имели своими элементами числа, меньшие трёх. Чтобы применить в таких случаях критерий хи-квадрат, таблицы были преобразованы при помощи «склеивания» строк. Строки каждой таблицы, содержащие малые частоты, складывались с другими строками таблицы таким образом, чтобы значения элементов таблиц были не меньше трех. Эта процедура позволила остаться в пределах применения критерия.

В рамках критерия хи-квадрат вычислялось наблюдаемое значение статистики X^2 для каждой таблицы сопряженности, которое сравнивалось с соответствующим критическим значением распределения хи-квадрат, взятым из таблиц [3]. Наблюдаемое значение статистики X^2 вычислялось по формуле

$$X^2 = n \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}} - 1 \right],$$

где n — объем выборки, n_{ij} — наблюдаемая частота ячейки таблицы сопряженности, находящаяся на пересечении i -ой строки и j -го столбца, r — число градаций признака A : A_1, \dots, A_r , s — число градаций признака B : B_1, \dots, B_s , $n_{i.} = \sum_{j=1}^s n_{ij}$ — частота появления градации A_i , $n_{.j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}$ — частота появления градации B_j .

Например, для того же признака № 6 «ХарТруда» наблюдаемое значение статистики $X^2 = 16,60025$, а критическое значение распределения хи-квадрат $X_{\text{крит}}^2 = 11,0705$. Уровень значимости, или

вероятность ошибки первого рода (вероятность отвергнуть гипотезу H_0 , хотя на самом деле она верна), составляет 0,05, число степеней свободы $(r - 1)(s - 1) = (6 - 1)(2 - 1) = 5$.

Не все таблицы преобразовывались после «склеивания» так, чтобы к ним можно было применить критерий хи-квадрат. Некоторые из них, будучи таблицами размерности 2×2 , после преобразования превращались в строку. В данном случае был использован точный тест Фишера для таблиц размерности 2×2 .

Построение таблиц сопряженности и вычисление значения статистики X^2 для каждой таблицы производились в пакете программ Microsoft Excel ввиду удобства и наглядности его использования для данной задачи. Расчеты по точному тесту Фишера производились в программе «Точный критерий Фишера 2.0» [4].

4. Результаты анализа. В результате анализа удалось выделить две группы признаков. Для одной группы установлено наличие независимости между разбиением пациентов на группы и признаками, по которым велись наблюдения, а для другой, соответственно, установлено наличие зависимости.

Стоит отметить признак № 100 (заболевание ШЖ), так как для него нельзя сделать однозначных выводов без дополнительной информации. В зависимости от способа «склеивания» результаты таковы:

- если сложить элементы двух последних строк таблицы сопряженности, то по критерию хи-квадрат на 5%-ом уровне значимости установлена зависимость между признаком и группами пациентов;
- если сложить элементы двух первых строк таблицы сопряженности, то по критерию хи-квадрат на 5%-ом уровне значимости установлена независимость между признаком и группами пациентов.

Для проверки выводов, сделанных на основе применения критерия хи-квадрат, точный тест Фишера был также применен ко всем

таблицам сопряженности размерности 2×2 . Результаты для признака № 152 оказались спорными: по критерию хи-квадрат установлена зависимость между данным признаком и группами пациентов на 5%-ом уровне значимости, а по тесту Фишера на том же уровне значимости зависимости не обнаружено. Чтобы сделать однозначный вывод, в этом случае имеет смысл рассмотреть дополнительно меры связи, упомянутые в первом разделе статьи.

Литература

1. Тюрин Ю. Н., Макаров А. А. Анализ данных на компьютере. Изд. 3-е, перераб. и доп. / Под ред. В. Э. Фигурнова М.: ИНФРА-М, 2002. 528 с.
2. Аптон Г. Анализ таблиц сопряженности. М.: Финансы и статистика, 1982. 144 с.
3. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.
4. Точный критерий Фишера 2.0.
<http://getsoft.ru/programs/6662/>

Носов С. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Об устойчивости решений разностных систем в критических случаях¹

Рекомендовано к публикации профессором Александровым А. Ю.

Введение. Исследование устойчивости нелинейных дискретных динамических систем в сомнительных случаях, когда у матрицы линейного приближения системы одно или несколько собственных чисел равны единице, имеет свои особенности, отличающие данную задачу от аналогичной задачи для дифференциальных систем, и требует отдельного рассмотрения. В данной статье разобраны вопросы устойчивости такой критической дискретной системы и выявлены условия, при которых нулевое решение системы является асимптотически устойчивым, а также получены оценки скорости стремления решений системы к асимптотически устойчивому нулевому положению.

Пусть дана система

$$y(k+1) = Py(k) + g(y(k)). \quad (1)$$

Здесь y — n -мерный вектор с компонентами y_1, \dots, y_n , P — постоянная $(n \times n)$ -матрица, элементы вектор-функции $g(y)$ разлагаются в ряды по степеням y_1, \dots, y_n , сходящиеся в некоторой окрестности точки $y = 0$ и начинающиеся членами не ниже второго порядка.

Известно [1], что если все собственные числа матрицы P по модулю меньше единицы, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, а если у матрицы P существует хотя бы одно собственное число, модуль которого больше единицы, то нулевое решение неустойчиво. В критическом случае, когда все собственные числа матрицы P не выходят за пределы единичного круга с центром в начале координат, но среди них есть собственные числа, лежащие на границе единичного круга, т. е. модуль которых равен единице, для решения вопроса об устойчивости необходимо исследование нелинейных членов системы.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, НИР № 9.38.674.2013

Постановка задачи и предварительные преобразования.

Будем считать, что матрица P имеет k собственных чисел равных единице и $n-k$ собственных чисел по модулю меньших 1, причем единичным собственным числам соответствуют простые элементарные делители. Решение поставленной задачи будем проводить по аналогичной схеме, применявшейся Ляпуновым для исследования устойчивости дифференциальных систем в критических случаях нулевых корней [2].

Сначала неособым преобразованием $y = Bz$ с постоянной матрицей B приводим систему (1) к виду

$$\begin{cases} z_1(k+1) = z_1(k) + r_1(z(k)), \\ z_2(k+1) = \tilde{P}z_2(k) + r_2(z(k)). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $z_1 \in \mathbb{E}^k$, $z_2 \in \mathbb{E}^{n-k}$, $z = (z_1^T, z_2^T)^T$, $\tilde{P} - ((n-k) \times (n-k))$ -матрица с постоянными коэффициентами, все собственные числа которой по модулю меньше единицы. Элементы векторов $r_1(z)$ и $r_2(z)$ разлагаются в окрестности точки $z = 0$ в сходящиеся ряды по степеням компонент вектора z , и данные разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Систему уравнений (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \Delta z_1 = r_1(z(k)), \\ \Delta z_2 = (\tilde{P} - E)z_2(k) + r_2(z(k)), \end{cases} \quad (2')$$

где $\Delta z_i = z_i(k+1) - z_i(k)$, $i = 1, 2$.

Далее рассмотрим систему уравнений

$$(\tilde{P} - E)z_2 + r_2(z) = 0. \quad (3)$$

Так как $(\tilde{P} - E)$ — неособая матрица, то по теореме о неявной функции [3] существует число $\delta > 0$ такое, что при $\|z\| < \delta$ система уравнений (3) однозначным образом определяет неявную векторную функцию $z_2 = u(z_1)$, которая является аналитической в достаточно малой окрестности точки $z_1 = 0$. Поскольку в разложении $r_2(z)$ нет членов нулевого и первого порядков, то должно выполняться $\frac{\partial u(0)}{\partial z_1} = 0$, $u(0) = 0$.

Произведем замену переменных $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2 - u(z_1)$, тогда

система (2) переписывается как

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + q_1(x(k)), \\ x_2(k+1) = \tilde{P}x_2(k) + q_2(x(k)). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $x = (x_1^T, x_2^T)^T$, $q_1(x)$ и $q_2(x)$ — аналитические функции, определенные в области $\|x\| < H$ (H — положительная постоянная) и раскладывающиеся в ряды по степеням компонент вектора x , начиная с членов второго порядка, причем

$$q_1(x_1, 0) = r_1(x_1, u(x_1)), \quad q_2(x_1, 0) = u(x_1) - u(x_1 + r_1(x_1, u(x_1))).$$

В силу того, что использованные преобразования эквивалентны в смысле устойчивости нулевого решения, нулевое решение системы (1) будет устойчивым (асимптотически устойчивым, неустойчивым) тогда и только тогда, когда тем же самым свойством обладает нулевое решение системы (4).

Пусть μ — наименьшая степень форм, с которых начинается разложение вектор-функции $q_1(x_1, 0)$. Получим $q_1(x_1, 0) = f_1(x_1) + d(x_1)$, где элементы вектора $f_1(x_1)$ — однородные формы порядка $\mu > 1$, а разложения вектор-функции $d(x_1)$ в ряды по степеням компонент вектора x_1 начинаются с членов, порядок которых больше μ .

Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + f_1(x_1(k)) + \tilde{q}_1(x(k)), \\ x_2(k+1) = \tilde{P}x_2(k) + q_2(x(k)). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\tilde{q}_1(x) = q_1(x) - f_1(x_1)$. Векторные функции $\tilde{q}_1(x)$ и $q_2(x)$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}_1(x)\| &\leq a_1(\|x_1\|^{\mu+1} + \|x_1\|\|x_2\| + \|x_2\|^2), \\ \|q_2(x)\| &\leq a_2(\|x_1\|^{\mu+1} + \|x_1\|\|x_2\| + \|x_2\|^2), \end{aligned}$$

где a_1, a_2 — положительные постоянные.

Теорема об асимптотической устойчивости разностных систем в критических случаях. Систему (5) можно рассматривать как сложную систему. В нашем случае динамика изолированных подсистем описывается уравнениями

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + f_1(x_1(k)), \\ x_2(k+1) = \tilde{P}x_2(k), \end{cases} \quad (6)$$

а функции $\tilde{q}_1(x)$ и $q_2(x)$ определяют взаимодействие между подсистемами.

Нулевое решение подсистемы $x_2(k+1) = \tilde{P}x_2(k)$ асимптотически устойчиво. Будем считать, что нулевое решение дифференциальной системы $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ асимптотически устойчиво, тогда нулевое решение разностной системы $x_1(k+1) = x_1(k) + f_1(x_1)$ также будет являться асимптотически устойчивым [1]. Из сделанных предположений следует, что существуют функции Ляпунова $V_1(x_1)$ и $V_2(x_2)$, обладающие следующими свойствами: $V_1(x_1)$ — дважды непрерывно дифференцируемая положительно-определенная однородная функция порядка $\gamma - \mu + 1$, $V_2(x_2)$ — положительно-определенная квадратичная форма. Для данных функций Ляпунова справедливы неравенства

$$\begin{aligned} c_{11}\|x_1\|^{\gamma-\mu+1} &\leq V_1(x_1) \leq c_{12}\|x_1\|^{\gamma-\mu+1}, \\ c_{21}\|x_1\|^2 &\leq V_2(x_2) \leq c_{22}\|x_2\|^2, \\ \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} f_1(x_1) &\leq -b_1\|x_1\|^\gamma, \\ x_2^T(\tilde{P}^T A \tilde{P} - A)x_2 &\leq -b_3\|x_2\|^2, \end{aligned}$$

где A — матрица квадратичной формы $V_2(x_2)$, c_{11} , c_{12} , c_{21} , c_{22} , b_1 , b_2 , b_3 — положительные постоянные, в качестве γ можно выбрать любое натуральное число, большее либо равное $\mu + 1$.

Функцию Ляпунова для связанной системы (5) будем строить в виде $V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$. Если параметр γ удовлетворяет условию

$$2\mu - 2 < \gamma < 2\mu + 2,$$

то в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ имеет место соотношение

$$\Delta V \leq -bV^{1+\frac{\mu-1}{\gamma-\mu+1}}, \quad b = \text{const} > 0.$$

Значит, нулевое решение системы (5) является асимптотически устойчивым, а так как использовались преобразования, не влияющие на устойчивость, то нулевое решение системы (1) также асимптотически устойчиво.

Таким образом справедлива следующая теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения разностной системы (1).

Теорема. Пусть нулевое решение системы

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1)$$

асимптотически устойчиво, тогда нулевое решение разностной системы (1) является асимптотически устойчивым.

Как следствие из доказательства теоремы можно получить оценки скорости стремления решений системы (1) к асимптотически устойчивому нулевому решению. Аналогичным образом можно исследовать нулевое решение на неустойчивость.

Оценки решений разностных систем. Оценим скорость стремления решений разностной системы (5) к началу координат в случае, когда для нее выполняются условия доказанной теоремы.

Функция Ляпунова V для системы (5) удовлетворяет условию

$$V(x(k+1)) \leq V(x(k)) - bV(x(k))^{1+\frac{\mu-1}{\gamma-\mu+1}}, \quad b = \text{const} > 0.$$

Для членов последовательности $V(x(k))$ выполняются условия леммы 2 из работы [1], следовательно, справедлива оценка

$$V(x(k)) \leq V(x(0)) \left(1 + b \frac{\mu-1}{\gamma-\mu+1} V(x(0))^{\frac{\mu-1}{\gamma-\mu+1}} k \right)^{-\frac{\gamma-\mu+1}{\mu-1}}.$$

Используя соотношение

$$c_{11}\|x_1(k)\|^{\gamma-\mu+1} + c_{21}\|x_2(k)\|^2 \leq V(x(k)) \leq c_{12}\|x_1(k)\|^{\gamma-\mu+1} + c_{22}\|x_2(k)\|^2,$$

получим оценку скорости стремления к началу координат решения, проходящего через точку $x(0)$

$$\begin{aligned} c_{11}\|x_1(k)\|^{\gamma-\mu+1} + c_{21}\|x_2(k)\|^2 &\leq V(x(0)) \times \\ &\times \left(1 + b \frac{\mu-1}{\gamma-\mu+1} V(x(0))^{\frac{\mu-1}{\gamma-\mu+1}} k \right)^{-\frac{\gamma-\mu+1}{\mu-1}}. \end{aligned}$$

Литература

1. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2008. 94 с.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 386 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1. М.: Наука, 1968. 440 с.

Олемской И. В., Фирюлина О. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Решение задачи о поиске максимальной общей подструктуры в молекулярных графах

1. Введение. В работе рассматривается алгоритм поиска максимальной общей подструктуры (Maximum Common Substructure) химических соединений. Задачу определения MCS можно свести к одной из важнейших задач экстремальной теории графов — нахождению наибольшего независимого множества в неориентированном графе. В настоящее время наилучшим среди существующих алгоритмов для ее решения считается алгоритм Робсона [1], теоретическая оценка сложности которого $O(2^{0.276n})$, где n — число вершин в графе. В статье представлен новый точный метод MaxIS для вычисления наибольшего независимого множества. Несмотря на отсутствие теоретической оценки временной сложности предложенного алгоритма, для графов с высоким значением плотности MaxIS показывает лучшие экспериментальные временные результаты, чем алгоритм Робсона.

2. Основные определения. Здесь и далее множество неупорядоченных пар различных элементов некоторого множества B будем обозначать

$$B^{[2]} = \{(x, y) \mid x, y \in B \ \& \ x < y\}.$$

Обыкновенным графом $G = (V, E)$ называется упорядоченная пара множеств: конечного непустого V , элементы которого называются *вершинами* графа G , и подмножества $E \subseteq V^{[2]}$, представляющего собой множество неупорядоченных пар различных вершин, элементы которого называются *ребрами* этого графа.

Отметим два крайних случая обыкновенных n -вершинных графов: *безреберный* граф $H_n = (U, \emptyset)$, $n = |U|$, и *полный* граф $F_n = (U, U^{[2]})$, $n = |U|$.

Если в неориентированном графе между двумя вершинами x и y есть ребро, тогда эти вершины *смежны*, в противном случае — *несмежны*. Ребро, соединяющее вершины x и y , *инцидентно* каждой из них (и наоборот, они обе инцидентны данному ребру).

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' = \{(x, y) \in E \mid x, y \in V'\}$.

Множество вершин графа G , индуцирующее его безреберный подграф, называется *независимым*. Будем называть такое множество *максимальным независимым*, если оно не содержится ни в каком другом независимом множестве. Максимальное независимое множество наибольшей мощности называется наибольшим независимым множеством (ННМ). Множество всех максимальных независимых множеств графа G будем обозначать $M(G)$.

Пусть n -вершинный граф $G = (V, E)$ задан матрицей смежностей $A = \|a_{i,j}\|_{n,n}$ с элементами

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E, \\ 0, & (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Граф G можно представить в виде $G = (V, S_{V,A})$, где $V = \{1, \dots, n\}$, $S_{V,A} = \{(p, q) \mid (p, q) \in V^{[2]} \& a_{p,q} = 0; p, q \in V\}$ — множество всех несмежных пар различных вершин графа G .

Любую пару несмежных вершин $(\beta, \gamma) \in S_{V,A}$ будем называть *узлом* и обозначать $\alpha = (\beta, \gamma)$.

Базовым множеством для некоторого узла $\alpha = (\beta, \gamma) \in S_{V,A}$ графа G назовем множество

$$D_G[\alpha] = \{d \in V \mid a_{d,\beta} = 0 \& a_{d,\gamma} = 0\}.$$

Опорным множеством для некоторого узла $\alpha = (\beta, \gamma) \in S_{V,A}$ графа G будем называть множество

$$\omega_G[\alpha] = D_G[\alpha] \setminus \{\beta, \gamma\}.$$

Обозначим $Q_G[\alpha]$ — максимальное независимое множество в графе G , в котором содержатся две вершины β и γ , Δ_G — множество всех вершин, имеющих ребро с каждой вершиной рассматриваемого графа.

3. Алгоритм MaxIS решения задачи о наибольшем независимом множестве. Алгоритм вычисления наибольшего независимого множества базируется на способе выделения структурных особенностей (0,1)-матриц [3, 4] и по сути является его модификацией.

Решение задачи можно представить в виде дерева поиска, в котором каждый k -й уровень отвечает рассмотрению некоторого подграфа $G^k \subset G^{k-1} \subset \dots \subset G^0 \equiv G$. Здесь $\alpha^k = (\beta^k, \gamma^k)$ — некоторый узел в соответствующем графе G^k , индуцированном множеством $\omega_{G^{k-1}}[\alpha^{k-1}]$. Узлы α^k и α^{k-1} связаны следующим образом: $\alpha^k \in S_{\omega_{G^{k-1}}[\alpha^{k-1}], A}$. Для компактности записи можно опустить индекс G^k у множества $\omega_{G^k}[\alpha^k]$, так как по индексу узла α^k однозначно можно определить, из вершин какого графа формируется опорное множество $\omega[\alpha^k]$.

Учитывая тот факт, что любой подграф G^k, G^{k-1}, \dots, G^0 является подграфом G , а множества несмежных пар в них определяются: $S_{\omega[\alpha^{k-1}], A}, S_{\omega[\alpha^{k-2}], A}, S_{\omega[\alpha^0], A}$ соответственно, то индекс A у множества S также можно опустить, понимая, что все несмежные пары вершин в указанных подграфах несмежны и в исходном графе с матрицей смежностей A . Множество $S_{\omega[\alpha^k], A}$ будем записывать в виде $S[\alpha^k]$.

Подграф $G^{k+1} \subset G^k$ будем задавать в следующем виде:

$$G^{k+1} = (\omega[\alpha_*^{k+1}], S[\alpha_*^{k+1}]), \quad \alpha_*^{k+1} \in S[\alpha_*^k].$$

Для компактной формализации алгоритма введем узел отрицательного уровня с вершинами, не имеющими ребра ни с одной вершиной графа G , и обозначим его $\alpha_*^{-1} = (\beta_*^{-1}, \gamma_*^{-1}) = (\bar{0}, \underline{0})$:

$$\omega[\alpha_*^{-1}] \equiv V, \quad S[\alpha_*^{-1}] \equiv S_{V, A}.$$

Базовое множество $D[\alpha_*^{k+1}]$ для узла $\alpha_*^{k+1} = (\beta_*^{k+1}, \gamma_*^{k+1}) \in S[\alpha_*^k]$ графа G^{k+1} представим как

$$D[\alpha_*^{k+1}] = \{d \in \omega[\alpha_*^k] \mid (d, \beta_*^{k+1}) \in S[\alpha_*^k] \& \\ \& (d, \gamma_*^{k+1}) \in S[\alpha_*^k]\} \cup \{\beta_*^{k+1}, \gamma_*^{k+1}\}.$$

Опорное множество $\omega[\alpha_*^{k+1}]$ для узла $\alpha_*^{k+1} = (\beta_*^{k+1}, \gamma_*^{k+1}) \in S[\alpha_*^k]$ графа G^{k+1} определяем по правилу

$$\omega[\alpha_*^{k+1}] = D[\alpha_*^{k+1}] \setminus \{\beta_*^{k+1}, \gamma_*^{k+1}\}.$$

Множество $S[\alpha_*^{k+1}]$ несмежных пар в графе, индуцированном множеством вершин $\omega[\alpha_*^{k+1}]$:

$$S[\alpha_*^{k+1}] = \{(p, q) \mid (p, q) \in \omega[\alpha_*^{k+1}]^{[2]} \& a_{p, q} = 0, p, q \in \omega[\alpha_*^{k+1}]\}.$$

Находим множество $\Delta[\alpha_*^{k+1}]$ по правилу

$$\Delta[\alpha_*^{k+1}] = \omega[\alpha_*^{k+1}] \setminus \cup_{(p,q) \in S[\alpha_*^{k+1}]} \{p, q\}.$$

Множество $P[\alpha_*^{k+1}]$, сформированное согласно правилу

$$P[\alpha_*^{k+1}] = \{Q[\alpha_*^k] \in P[\alpha_*^k] \mid \{\beta_*^{k+1}, \gamma_*^{k+1}\} \subseteq Q[\alpha_*^k]\}, P[\alpha_*^{-1}] = \emptyset,$$

будем называть *окрестностью* узла α_*^{k+1} .

Приведем реализацию алгоритма MaxIS в псевдокодах.

Основная функция MaxIS:

procedure MaxIS ($G := (V, S_{V,A})$)

begin

$k := 0$ //номер уровня дерева перебора

$Q_{max} := \emptyset$ //текущее наибольшее независимое множество

$M(G) := \emptyset$ //множество всех МНМ графа

$\alpha_*^{k-1} := (\bar{0}, \underline{0})$, $P[\alpha_*^{k-1}] := \emptyset$

$\omega[\alpha_*^{k-1}] := V$ //опорное множество

$S[\alpha_*^{k-1}] := S_{V,A}$ // множество несмежных пар в графе G

construct $D[\alpha_*^k]$, $\alpha_*^k = (\beta_*^k, \gamma_*^k)$, $\{\beta_*^k, \gamma_*^k\} \in V$, $\alpha_*^k \in S_{V,A}$

$continue := true$

while $continue=true$ **do**

if $S[\alpha_*^{k-1}] = \emptyset$ **then**

while $\omega[\alpha_*^{k-1}] \neq \emptyset$ **do** $\forall \delta_* \in \omega[\alpha_*^{k-1}]$

$Q := \{\beta_*^0, \gamma_*^0, \dots, \beta_*^{k-1}, \gamma_*^{k-1}, \delta_*\}$

if $Q \notin P[\alpha_*^{k-1}]$ **then** $M(G) := M(G) \cup \{Q\}$

for $\xi := -1 \dots k-1$ **do** $P[\alpha_*^\xi] := P[\alpha_*^\xi] \cup \{Q\}$ **end do**

if $2k+1 > |Q_{max}|$ **then** $Q_{max} := Q$ **end if**

end if

$\omega[\alpha_*^{k-1}] := \omega[\alpha_*^{k-1}] \setminus \{\delta_*\}$

end do

if $k = 0$ **then** $continue:=false$ **end if**

if $k \geq 1$ **then** $k := k-1$

ELIMINATION($S[\alpha_*^{k-1}], \alpha_*^k$): **return** $S[\alpha_*^{k-1}]$

end if

else choose $\alpha_*^k = (\beta_*^k, \gamma_*^k) \in S[\alpha_*^{k-1}]$:

$|D[\alpha_*^k]| = \max_{\alpha_*^k \in S[\alpha_*^{k-1}]} |D[\alpha_*^k]|$

if $|D[\alpha_*^k]| + 2k \leq |Q_{max}|$ **then**

if $k = 0$ **then** $continue:=false$ **end if**

```

if  $k \geq 1$  then  $k := k - 1$ 
  ELIMINATION( $S[\alpha_*^{k-1}], \alpha_*^k$ ): return  $S[\alpha_*^{k-1}]$ 
end if
else construct  $P[\alpha_*^k]$ 
if  $\exists Q \in P[\alpha_*^k] : Q \equiv D[\alpha_*^k] \cup (\cup_{j=0}^{k-1} \{\beta_*^j, \gamma_*^j\})$  then
  ELIMINATION( $S[\alpha_*^k], \alpha_*^k$ )
else construct  $\omega[\alpha_*^k]$ 
  if  $\omega[\alpha_*^k] = \emptyset$  then  $Q := \{\beta_*^0, \gamma_*^0, \dots, \beta_*^k, \gamma_*^k\}$ 
   $M(G) := M(G) \cup Q, Q_{max} := Q$ 
  end if
  if  $\omega[\alpha_*^k] = \delta$  then  $Q := \{\beta_*^0, \gamma_*^0, \dots, \beta_*^k, \gamma_*^k, \delta\}$ 
   $M(G) := M(G) \cup J_t, Q_{max} := J_t$ 
  end if
  if  $|\omega[\alpha_*^k]| > 1$  then  $k := k + 1$  construct  $S^k$ 
    if  $S^k \neq \emptyset$  then
      for all  $\alpha \in S^k$  construct  $D_{G^k}[\alpha]$  end do
    end if
  else
    for  $\xi := 0 \dots k - 1$  do  $P_{G^\xi}[\alpha_*^\xi] := P_{G^\xi}[\alpha_*^\xi] \cup \{J_t\}$  end do
    ELIMINATION( $S^k, \alpha_*^k$ )
  end if
end if
end if
end do
return  $Q_{max}$ 
end {of MaxIS}

```

Вспомогательная функция ELIMINATION:

```

procedure ELIMINATION ( $S^k, \alpha_*^k$ )
global  $Q_{max}, D_{G^k}[\alpha]$  for all  $\alpha \in S^k$ 
begin  $R := \emptyset, S^k := S^k \setminus \alpha_*^k$ 
for  $\forall \alpha \in S^k$  do
if  $|D_{G^k}[\alpha]| + 2k > |Q_{max}|$  then
  if  $D_{G^k}[\alpha] \subset D_{G^k}[\alpha_*^k]$  then  $R := R \cup \{\alpha\}$  end if
end if
end do
 $S^k := S^k \setminus R$ 
return  $S^k$ 
end {of ELIMINATION }

```

4. Заключение. Предложенный в статье алгоритм MaxIS сравнивался при тестировании с методом Робсона [1]. Согласно теоретической оценке сложности алгоритм Робсона является наиболее эффективным для решения задачи о наибольшем независимом множестве, именно этот факт объясняет выбор его в качестве оппонента для алгоритма MaxIS. Тестирование проводилось на графах с различными значениями плотности. Получена зависимость времени поиска решения от размерности графа при фиксированной плотности. Следует отметить, что при значении плотности меньше 60% экспериментальное время работы алгоритма MaxIS больше времени работы алгоритма Робсона, однако при большей плотности алгоритм MaxIS показывает лучший результат.

Литература

1. Robson J. M. Algorithms for maximum independent set // Journal of Algorithms, 1986. Vol. 7. P. 425–440.
2. Moon J. W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math., 1965. Vol. 3. P. 23–28.
3. Олемской И. В. Алгоритм выделения структурных особенностей // Николай Ефимович Кирин / Под ред. В. В. Жука, В. Ф. Кужютина. СПб.: АССПИН, 2003. С. 224–251.
4. Олемской И. В. Методы интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. 180 с.

Рубша А. И.

Санкт-Петербургский государственный университет

Анализ выживаемости по медицинской базе данных больных раком предстательной железы

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. В настоящее время активно развивается медицина, применяются новые методы лечения, эффективность которых надо проверять. Наиболее часто используемым методом для выполнения такой задачи является анализ выживаемости, позволяющий не только дать ответ на вопрос «эффективно ли лечение?», но и дать прогноз относительно продолжительности жизни пациентов после лечения. В статье выполнен анализ выживаемости пациентов, больных раком предстательной железы (РПЖ). Целью данного исследования является проверка эффективности предложенного им лечения и прогнозирование выживаемости.

2. Анализ выживаемости. *Анализ выживаемости* — это совокупность методов, позволяющих оценить вероятность пережить любой из моментов времени после некоторого начального события (например, начала лечения) без наступления некоторого определенного события (к примеру, это может быть смерть, рецидив болезни либо ухудшение состояния). Такая вероятность называется *вероятностью выживаемости*. Основными составляющими для проведения анализа выживаемости пациентов являются время начала их исследования (дата установления диагноза либо дата поступления пациента в больницу), конец исследования и цензурирующая переменная, указывающая на полноту данных [1].

3. Постановка задачи. Имеется медицинская база данных, содержащая информацию о 174 пациентах с РПЖ: дата установления диагноза, дата окончания исследования, переменная, показывающая, цензурирован ли пациент или нет, и переменная времени удвоения опухоли. Задача состоит в проведении анализа выживаемости пациентов, который в свою очередь дал бы представление об эффективности лечения данного заболевания. Также необходимо провести сравнение кривых выживаемости, построенных по классификационной переменной времени удвоения опухоли.

4. Подбор параметрического семейства, наиболее полно описывающего данные. Пакет STATISTICA 7.0 [2] позволяет найти параметрическое семейство, наиболее полно и точно описывающее медицинские данные. Программа предлагает три распределения [3–5]:

- экспоненциальное: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$,
- распределение Вейбулла: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\gamma}$,
- распределение Гомпертца: $G(t) = e^{-e^{-\beta t}}$, $t = \frac{x-p}{s}$, $\beta = -\ln \ln 2$.

В результате анализа было получено, что наиболее близким распределением является распределение Вейбулла с весом Weight 3 (см. таблицу 1). Такой вывод можно сделать, исходя из значений статистики хи-квадрат.

Таблица 1. Параметры распределения

Вес	Lambda	Gamma	VarLambda	VarGamma	ChiSqr
Weight1	0,000209	1,174463	0,0000000566	0,022599	12,79345
Weight2	0,000300	1,141133	0,00000000313	0,006094	11,11339
Weight3	0,000347	1,115101	0,0000000458	0,006638	10,53795

Все остальные параметры — нули. Таким образом, функция выживаемости имеет следующий вид:

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-0,000347t^{1,115101}}.$$

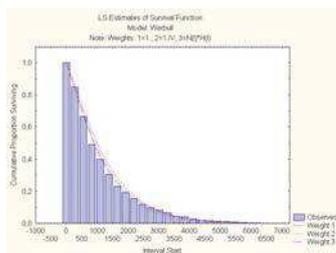


Рис. 1. Кривые, оценивающие функцию выживаемости

На рис. 1 представлены три кривые, оценивающие функцию выживаемости. Каждой из них соответствует найденный выше вес: для первой кривой оценивание коэффициентов проводится обычным методом оценивания (методом наименьших квадратов), для двух других — методом взвешенных наименьших квадратов.

5. Множественные оценки Каплана — Мейера. В пакете STATISTICA 7.0 реализована процедура построения кривых выживаемости с помощью метода Каплана — Мейера [1].

Имеется n пациентов. Пусть d_{t_i} — число умерших к моменту времени t_i , а n_{t_i} — число наблюдавшихся к моменту t_i , где i — число точек перехода. Следующая функция даёт кривую выживаемости:

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_i \in [0, t]} \left(1 - \frac{d_{t_i}}{n_{t_i}} \right).$$

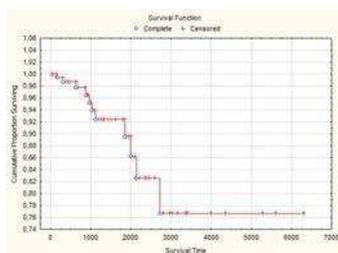


Рис. 2. Кривая выживаемости для исходных данных

На рис. 2 плюсами обозначены цензурированные пациенты, т. е. те пациенты, которые выбыли из исследования, кругами обозначены те пациенты, которые умерли. Снижение кривой выживаемости происходит лишь до значения 0,76, что в свою очередь означает высокую выживаемость пациентов.

6. Сравнение кривых выживаемости. Важную роль играет группирующая переменная. В данном исследовании ею является время удвоения опухоли (ВУО), которое можно разбить на группы по-разному. В данной статье рассматриваются три разбиения:

1. ВУО до года и больше года;
2. ВУО до года, от года до трёх лет и больше трёх лет;
3. ВУО до двух лет, от двух до семи лет и больше семи лет.

Другие разбиения не отличаются по результатам от предложенных, поэтому рассматриваются лишь эти три. Сравнение проведено в каждом разбиении попарно для получившихся групп. В силу схожести полученных результатов будут приведены вычисления только для одного разбиения, а именно, для *ВУО до двух лет, от двух до семи лет и больше семи лет*.

В первой группе наблюдаются 107 человек, во второй — 35 и в третьей — 21, цензурированных пациентов в них будет соответственно 9, 1 и 1. Получен следующий вид кривых (см. рис. 3).

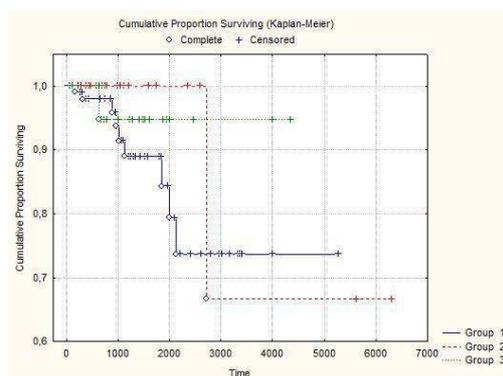


Рис. 3. Кривые выживаемости для трех групп

Сравнение кривых выживаемости осуществляется попарно с помощью пяти тестов [2]:

- тест Гехана;
- лог-ранговый тест;
- тест Пето — Вилкоксона;
- тест Кокса — Мантела;
- F-тест Кокса.

В каждом тесте формулируется нулевая гипотеза «Кривые выживаемости однородны». Соответственно альтернативной гипотезой является выражение «Кривые выживаемости неоднородны».

С помощью статистического пакета STATISTICA 7.0 были получены следующие результаты:

1. Для групп *до двух лет* и *от двух до семи* были получены *p*-значения, которые приведены в таблице 2.

Таблица 2. Группы до двух лет и от двух до семи

Тест	<i>p</i> -значение
тест Гехана	0,12637
лог-ранговый тест	0,18083
тест Пето — Вилкоксона	0,15307
тест Кокса — Мантела	0,20869
F-тест Кокса	0,08031

Это означает, что на уровне значимости 5% гипотеза об однородности кривых принимается.

2. Для групп *от двух лет до семи* и *больше семи лет* были получены *p*-значения, которые приведены в таблице 3.

Таблица 3. Группы от двух лет до семи и больше семи лет

Тест	<i>p</i> -значение
тест Гехана	0,31562
лог-ранговый тест	0,82097
тест Пето — Вилкоксона	0,80762
тест Кокса — Мантела	0,83260
F-тест Кокса	Нет результатов

Все тесты на уровне значимости 5% принимают гипотезу об однородности кривых. F-тест Кокса в данном случае неприменим.

3. Для групп *от двух лет* и *больше семи лет* были получены *p*-значения, которые приведены в таблице 4.

Таблица 4. Группы от двух лет и больше семи лет

Тест	<i>p</i> -значение
тест Гехана	0,56664
лог-ранговый тест	0,33633
тест Пето — Вилкоксона	0,35785
тест Кокса — Мантела	0,39049
F-тест Кокса	0,20827

Аналогично предыдущим случаям гипотеза об однородности принимается.

7. Выводы. В работе построены кривые выживаемости и проведено их сравнение по важному признаку времени удвоения опухоли, которые в совокупности говорят о том, что лечение, предложенное больным, удачное, потому как выживаемость пациентов высокая.

В дополнение можно сказать, что ВУО не оказывает существенного влияния на выживаемость пациентов. Данный вывод сделан, исходя из результатов, полученных при помощи тестов Гехана, лог-рангового, Пето — Вилкоксона, Кокса — Мантела и F-теста Кокса.

Также проведён подбор параметрического семейства, наиболее полно описывающего поведение кривой выживаемости, найдены веса распределений. Это, в свою очередь, может помочь спрогнозировать поведение кривой выживаемости за последней точкой изменения.

Литература

1. Гланц С. Медико-биологическая статистика / Пер. с англ. М.: Практика, 1998. 459 с.
2. StatSoft Russia. STATISTICA. Официальное руководство. Том 3. 2007. 783 с.
3. Орлов А. И. Математика случая. Вероятность и статистика – основные факты. Учебное пособие. М.: МЗ-Пресс, 2004. 110 с.
4. Weibull distribution on Wikibooks.
http://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution
5. Жарков А. В. Статистические свойства функции Гомпертца // Обзорение прикладной и промышленной математики. Москва, 2010. Т. 17. Вып. 3. С. 405–406.

Сударев О. И.

Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование процесса сбора данных для ПЭТ с использованием методов Монте-Карло¹

Рекомендовано к публикации профессором Котиной Е. Д.

1. Введение. Позитронная эмиссионная томография (ПЭТ) — радионуклидный томографический метод исследования внутренних органов человека или животного. Пациенту перед началом исследования вводится радиофармпрепарат, содержащий радионуклиды, излучающие позитроны. Радиоактивный распад изотопа сопровождается выделением позитрона, пробег которого заканчивается столкновением с электроном и их аннигиляцией. При этом происходит выделение двух фотонов с энергией 511 кэВ, которые разлетаются под углом 180 градусов, и могут быть зарегистрированы детектирующей аппаратурой. Если за определенный промежуток времени (до 10 нс) аппаратура зарегистрировала пару фотонов, то считается, что их породило одно и то же событие аннигиляции. После сбора достаточного количества информации о событиях аннигиляции строится картина распределения радиофармпрепарата в организме пациента [1, 2].

Методами Монте-Карло является группа численных методов, основанных на получении большого числа реализаций некоторого случайного процесса [3]. Методы Монте-Карло применяются для моделирования излучения радиоактивных веществ, коррекции рассеивания фотонов, коррекции ослабления излучения и в дозиметрии. Однако данные методы являются трудоёмкими и требуют значительного числа вычислительных ресурсов. В настоящее время появление мощных многопроцессорных систем и развитие параллельных вычислений позволяют существенно сократить время расчетов.

В данной статье предложен метод моделирования движения фотонов в веществе, который может быть применим в ПЭТ. Также представлена практическая реализация данного метода.

2. Моделирование движения фотона в веществе. Рассмотрим ограниченную область G_0 , которую можно рассматривать в ка-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, грант № 9.39.1065.2012

честве медицинского фантома. Будем считать, что известны коэффициенты рассеяния (μ_s) и поглощения (μ_e) в этой области. В точке $r_0 \in G_0$ расположен источник фотонов с энергией $E_0 = 511$ кэВ и с равновероятными направлениями начальной скорости. Необходимо смоделировать движение фотонов и определить, покинут ли они область G_0 или поглотятся в ней. Предположим также, что энергия фотонов E_0 не изменяется при рассеивании.

Рассмотрим какой-нибудь фотон, порожденный источником. Выберем случайное направление его скорости ω_0 . Затем разыграем для него случайную длину ξ_0 свободного пробега. Получим точку $r_1 = r_0 + \xi_0\omega_0$, являющейся точкой взаимодействия фотона с веществом. Если $r_1 \notin G_0$, то считаем, что история фотона закончилась вылетом из области G_0 , и он был зафиксирован детектором.

При $r_1 \in G_0$ разыгрываем судьбу фотона. Если фотон поглотился, то его история заканчивается. Если же нейтрон рассеялся, то разыгрываем новое направление скорости ω_1 , затем новую длину свободного пробега ξ_1 и вычисляем следующую точку столкновения $r_2 = r_1 + \xi_1\omega_1$.

Расчет траектории продолжается до вылета нейтрона из области G_0 или до его поглощения.

3. Выбор направления движения фотона. Направление условимся характеризовать единичным вектором $\omega = i\omega_i + j\omega_j + k\omega_k$, где $\omega_i^2 + \omega_j^2 + \omega_k^2 = 1$. Будем искать такой случайный вектор ω , что для любого телесного угла Ω вероятность P нахождения вектора ω в данном телесном угле равна

$$P\{\omega \in \Omega\} = \Omega/4\pi.$$

Пусть Q — некоторая случайная точка, равномерно распределенная в шаре. Если Ω_1 и Ω_2 — два равных телесных угла, то объемы соответствующих им шаровых секторов равны и вероятность того, что точка Q попадет в каждый из них, одинакова. Поэтому по известным формулам нахождения координат случайной точки Q [4] получаем формулы для выбора случайного направления в сферических координатах:

$$\cos \theta = 2\gamma_1 - 1, \quad \phi = 2\pi\gamma_2,$$

где γ_1, γ_2 — случайные числа, $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$.

Декартовы координаты вектора ω вычисляются по обычным формулам:

$$\omega_i = \cos \phi \sqrt{1 - \cos^2 \theta}, \quad \omega_j = \sin \phi \sqrt{1 - \cos^2 \theta}, \quad \omega_k = \cos \theta.$$

4. Моделирование длины свободного пробега фотона.

Предположим, что фотон движется вдоль оси Ox . Будем исходить из предположения, что вероятность того, что частица, долетевшая до точки x , испытает столкновение в интервале $(x, x + \Delta x)$, равна

$$\mu \Delta x + o(\Delta x). \quad (1)$$

В формуле (1) μ — полный линейный коэффициент ослабления, равный $\mu = \mu_s + \mu_e$.

Рассмотрим фотон, вылетевший вдоль оси Ox из точки $x = 0$. Обозначим через ξ случайную длину свободного пробега фотона, а через $F(x)$ — функцию распределения ξ , так что $F(x) = P\xi < x$. Вероятность того, что фотон испытает первое столкновение в интервале $(x, x + \Delta x)$, равна

$$F(x + \Delta x) - F(x) = [1 - F(x)][\mu(x)\Delta x + o(\Delta x)].$$

Разделив это соотношение на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение

$$dF/dx = [1 - F(x)]\mu(x).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $F(0) = 0$, имеет вид

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu(s) ds}. \quad (2)$$

Данная функция — искомое распределение длины свободного пробега ξ .

Так как во время пробега энергия фотона не меняется, то полный линейный коэффициент ослабления постоянен. Из уравнения (2) следует

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad (3)$$

и метод обратных функций позволяет записать явную формулу расчета ξ

$$\xi = -(1/\mu) \ln \gamma, \quad (4)$$

где γ — случайное число, $\gamma \in [0, 1]$.

Для моделирования свободного пробега в произвольной среде (не являющейся однородной или кусочно-однородной) будем использовать метод, предложенный Кандлером и Гастом [5].

Выберем произвольную постоянную $\alpha = \sup \mu(x)$ и обозначим $\mu_f(x) = \alpha - \mu(x)$. Будем считать, что при столкновении фотона с частицами среды кроме рассеивания и поглощения возможна еще одна реакция — фиктивное столкновение, при котором ни энергия, ни направление движения фотона не меняются. Величина μ_f — коэффициент фиктивного столкновения. Если $\mu = \mu_e + \mu_s$, то вероятности соответствующих реакций равны μ_e/α , μ_s/α , а вероятность фиктивного столкновения равна μ_f/α . Пробеги в данной задаче вычисляются по формуле (4)

$$\xi = -(1/\alpha) \ln \gamma, \quad (5)$$

а тип столкновения разыгрывается с учётом всех трёх возможностей.

5. Моделирование «судьбы» фотона. В рассматриваемой задаче при столкновении фотона с частицами вещества возможны три вида взаимодействия, упомянутые в предыдущем пункте: рассеяние, поглощение, фиктивное столкновение. В данном случае α является полным сечением взаимодействия фотона с веществом. Вероятности трех возможных событий равны соответственно μ_s/α , μ_e/α и μ_f/α . Чтобы разыграть «судьбу» фотона при столкновении, выберем случайное число $\gamma \in [0, 1]$. Если $\gamma < \mu_s/\alpha$, то считаем, что фотон рассеялся; если $\mu_s/\alpha \leq \gamma < \mu_s/\alpha + \mu_e/\alpha$, то фотон поглотился; если $\mu_s/\alpha + \mu_e/\alpha \leq \gamma$, то произошло фиктивное столкновение, и фотон не потерял энергию и не изменил направление своего движения.

6. Практическая реализация. В ходе данной работы написан программный модуль на языке С# для моделирования процесса сбора данных ПЭТ-сканером. Входными данными модуля являются конфигурация детекторов сканера, карта распределения радиофармпрепарата в фантоме, карта распределения коэффициента поглощения излучения в фантоме, положение фантома внутри сканера (пространственная привязка). Программный модуль генерирует поток событий регистрации на основании входных данных. Выходными данными модуля является набор проекционных данных, по которым в дальнейшем может быть восстановлено изображение.

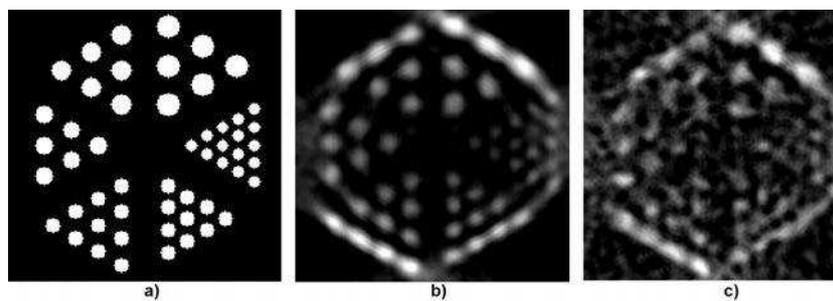


Рис. 1. а) фантом Дерензо, б) результаты моделирования без учета рассеяния, в) результаты моделирования с учетом рассеяния

В качестве фантома использовался фантом Дерензо (рис.1а), представляющий собой совокупность упорядоченно расположенных источников, имеющих форму стержней и обладающих определенной интенсивностью [6]. Размер фантома составлял $192 \times 192 \times 192$ мм. Для тестирования рассматривались коэффициенты ослабления: $\mu_1 = 0,172 \text{ см}^{-1}$, $\mu_2 = 0,096 \text{ см}^{-1}$.

В ходе исследования моделировалась работа ПЭТ-сканера со следующими характеристиками: число колец — 16, число детекторов в кольце — 512, радиус кольца — 510 мм, ширина кольца — 6,75 мм.

Реконструкция изображения производилась методом фильтрованной обратной проекции. На рис. 1 представлены реконструированные срезы без учета рассеяния (б) и с учетом рассеяния (в).

Для увеличения производительности работы модуля задача моделирования событий аннигиляции была распараллелена стандартными средствами платформы Microsoft .NET. На рис. 2 представлен график зависимости времени вычислений от количества используемых ядер процессора.

7. Заключение. В данной статье смоделирована работа ПЭТ-сканера, получены реконструированные изображения фантома Дерензо без учета и с учетом рассеяния фотонов. В результате распараллеливания метода Монте-Карло удалось достичь значительного увеличения скорости вычислений.

Предложенный в статье метод моделирования движения фотонов

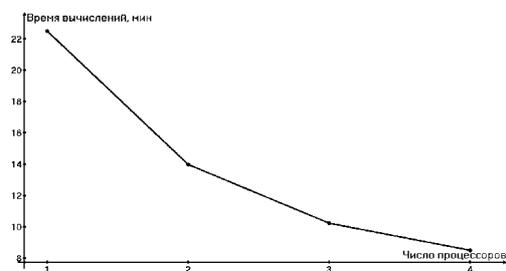


Рис. 2. Зависимость времени вычислений от количества используемых ядер процессора

в веществе может быть использован для настройки детектирующего оборудования, моделирования работы сканера и коррекции реконструированных изображений.

Литература

1. Гребенщиков В. В., Котина Е. Д. Физико-технические основы ядерной медицины. СПб.: СПбГУ, 2007. 172 с.
2. Котина Е. Д. Обработка данных радионуклидных исследований // Вопросы атомной науки и техники. Серия: ядерно-физические исследования, 2012. № 3(79). С. 195–198.
3. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo method // Journal of the American Statistical Association, 1949. Vol. 44, No 247. P. 335–341.
4. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.
5. Спанье Дж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972. 271 с.
6. Budinger T., Derenzo S., Gullberg G., Greenberg W. Emission computer assisted tomography with single-photon and positron annihilation photon emitters // Journal of Computer Assisted Tomography, 1977. Vol. 1, No 1. P. 131–145.

Унаров Д. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Фильтрация пуассоновского шума методом минимизации полной вариации

Рекомендовано к публикации доцентом Плоских В. А.

1. Введение. В задачах радиоизотопной диагностики в исследуемое тело вводится радиоактивное вещество. Излучение вещества фиксируется сцинтилляционной камерой. При этом количество регистрируемых фотонных взаимодействий значительно меньше, чем в оптических приборах. В связи с этим пуассоновский шум вносит существенный вклад в искажение получаемого изображения. Фильтрация шума значительно улучшит качество диагностики.

2. Постановка задачи. В данной статье рассматривается фильтрация одномерного сигнала. Рассмотрим дискретную функцию f_i , $i \in \overline{1, N}$, которая является результатом наблюдения пуассоновско распределенной случайной величины. Будем искать решение задачи фильтрации в виде функции доставляющей минимум функционалу

$$F(u) = \sum_{i=1}^{N-1} a \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2 + b (u_i - f_i)^2 \rightarrow \min .$$

Первый член функционала вводит ограничение на изменение производной.

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2 \rightarrow \min .$$

Второй член функционала сводит к минимуму разность u_i и f_i .

$$\sum_{i=1}^{N-1} (u_i - f_i)^2 \rightarrow \min .$$

Коэффициенты a и b регулируют вклад слагаемых в функционал.

3. Методы реализации. Для нахождения минимума функционала $F(u)$ приравняем к нулю все частные производные нулю.

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u_i} = 0, \quad i \in \overline{1, N}.$$

При этом получится система из N линейных уравнений с N неизвестными.

$$\begin{cases} \frac{\partial F(u)}{\partial u_1} = 2a \frac{u_1 - u_2}{h} + 2b(u_1 - f_1) = 0, \\ \frac{\partial F(u)}{\partial u_i} = 2a \frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h} + 2b(u_i - f_i) = 0, \quad i \in \overline{2, N-1}, \\ \frac{\partial F(u)}{\partial u_N} = 2a \frac{u_N - u_{N-1}}{h} + 2b(u_N - f_N) = 0. \end{cases}$$

В матричном виде $Au = c$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{bh}{a} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 + \frac{bh}{a} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 + \frac{bh}{a} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 + \frac{bh}{a} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 + \frac{bh}{a} \end{pmatrix},$$

$$u = (u_1, \dots, u_N)^T, \quad c = \left(\frac{bh}{a} f_1, \dots, \frac{bh}{a} f_N \right)^T.$$

Видно, что матрица коэффициентов имеет трехдиагональный вид. Применим метод прогонки для нахождения узлов u_i . Так как a, b и h — положительные величины, то выполняется условие диагонального преобладания, следовательно, метод устойчив. Дальнейшая интерполяция позволит получить функцию $u(x)$.

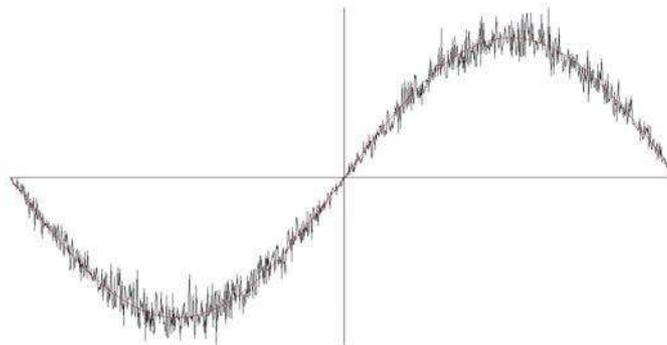


Рис. 1. Оригинальный и зашумленный сигналы

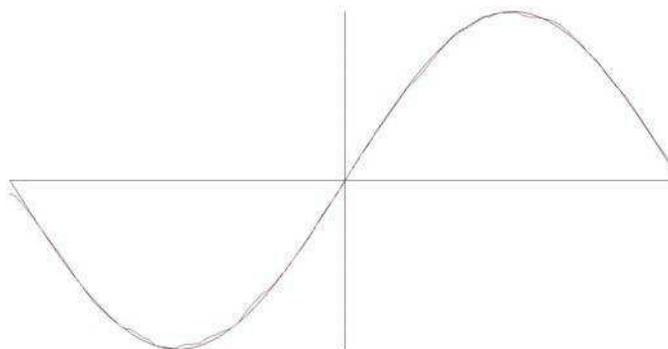


Рис. 2. Оригинальный и отфильтрованный сигналы

4. Заключение. В данной статье был рассмотрен метод фильтрации пуассоновского шума. Разработан модуль программы, реализующий фильтрацию, написанный на платформе .NET. Полученные в ходе работы программы результаты фильтрации для функции $100 \sin(x)$ $x \in (-\pi; \pi)$ представлены на рис. 1, 2. В дальнейшем планируется расширить метод для решения двумерных задач.

Литература

1. Triet L. L., Rick C. C., Thomas J. A. A variational approach to reconstructing images corrupted by poisson noise // Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007. Vol. 27, No 3. P. 257–263.
2. Rudin L. I., Osher S. J., Fatemi E. E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // Physica D, 1992. Vol. 60, No 1. P. 259–268.
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. Изд. 2-е, стереотип. М.: Высшая школа, 2000. 480 с.
4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 532 с.

Хамматова Г. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

**Метод главных компонент в задаче
классификации районов Ленинградской области
по показателям смертности**

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. В настоящее время проблема демографии в России стоит особо остро. В связи с этим становятся актуальными вопросы изучения смертности. На основе демографических исследований и прогнозов определяются цели и меры демографической и социальной политики, направленные на ее снижение.

Под *смертностью* понимается демографический показатель, характеризующий количество смертей на 1 тыс. населения за 1 год [1]. Для исследования смертности применяются как математические, так и статистические методы, одним из которых является метод главных компонент [2].

2. Постановка задачи. Имеется база, содержащая в себе данные о смертности в 18-ти районах Ленинградской области за 38-летний период (с 1974 по 2011 годы). Единицей измерения является количество умерших людей на 1000 человек населения. Основной задачей является проведение классификации районов Ленинградской области по показателям смертности, а также измерение масштаба региональной дифференциации смертности по районам Ленинградской области.

3. Метод главных компонент. Метод главных компонент заключается в получении нескольких новых показателей — главных компонент, являющихся линейными комбинациями исходных показателей, полученных в результате эксперимента. Главные компоненты упорядочиваются в порядке убывания той дисперсии, которую они объясняют. Первая главная компонента объясняет большую часть дисперсии, чем вторая, вторая — большую, чем третья и т. д. Преимущество метода главных компонент заключается в том, что зачастую первые несколько главных компонент (одна, две, три) объясняют большую часть изменений большого числа показателей. Кроме того, может оказаться, что в первые несколько главных компонент

входят не все исходные параметры. Тогда можно сделать вывод о том, какие параметры являются существенными, и на них следует обратить внимание в первую очередь. Метод главных компонент обеспечивает максимальную информативность и минимальное искажение геометрической структуры исходных данных. При этом удается избежать субъективизма при анализе информации.

4. Применение метода главных компонент к базе данных. Каждый район рассматривается как точка в 38-мерном пространстве, характеризующаяся 38 значениями признака. Выделяются первые три главные компоненты. Точки (районы) проектируются на плоскости 1-ой и 2-ой главных координат, 1-ой и 3-ей главных координат, 2-ой и 3-ей главных координат.

На рис. 1, 2 можно выделить в отдельный кластер следующие районы — Подпорожский, Бокситогорский, Сланцевский, Волховский, Лодейнопольский, Лужский. Все остальные районы, кроме города Сосновый Бор, логично отнести ко второму кластеру.

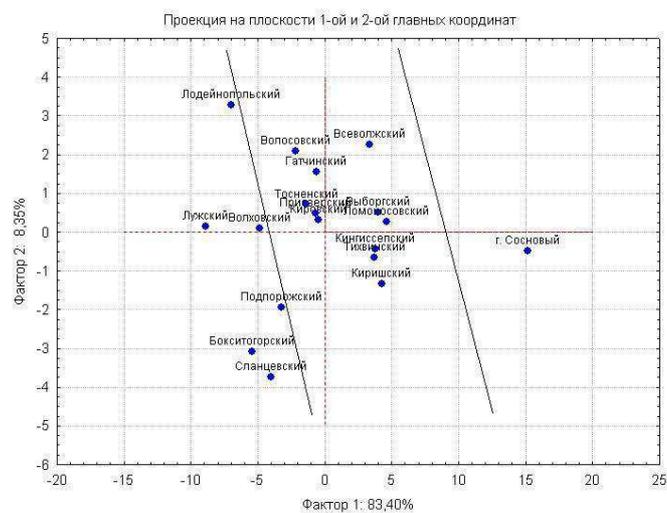


Рис. 1. Проекция на плоскости 1-ой и 2-ой главных координат

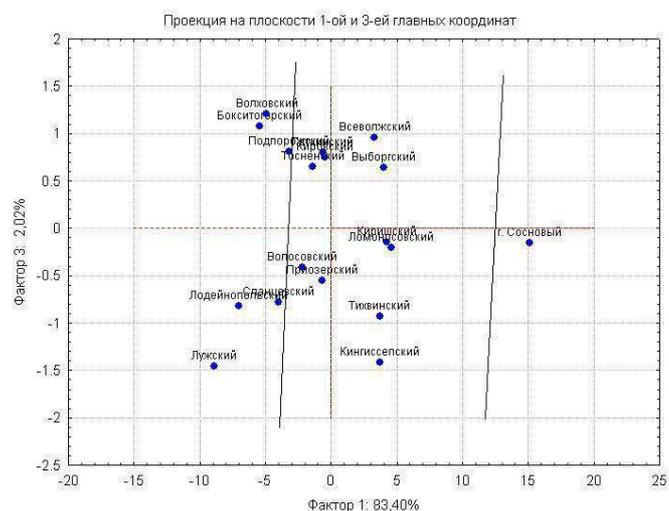


Рис. 2. Проекция на плоскости 1-ой и 3-ей главных координат



Рис. 3. Графики средней динамики смертности по первому, второму и третьему кластеру

смертности за последние 38 лет. Были выделены три группы районов, а также была обнаружена сильная неоднородность по показателям смертности. В первую группу можно отнести районы с очень высокой смертностью (Бокситогорский, Подпорожский, Сланцевский, Лужский, Волховский, Лодейнопольский). Во вторую группу были включены районы, имеющие средний уровень смертности (Волоховский, Всеволожский, Гатчинский, Тосненский, Приозерский, Ки-

На рис. 3 представлены графики средней динамики смертности по первому, второму и третьему кластеру.

5. Выводы. На основе проведенного анализа была получена предварительная кластеризация районов Ленинградской области по уровню

ровский, Выборгский, Ломоносовский, Кингисеппский, Тихвинский, Киришский). В отдельную группу можно отнести город Сосновый Бор, имеющий самые низкие показатели смертности. Фактически при таком разбиении превалирует значение первого главного фактора. Таким образом, обнаружено некоторое очевидное различие, которое нуждается в углубленном объяснении руководством здравоохранения. Можно надеяться, что более подробное исследование смертности позволит объяснить столь сильную неоднородность по данным районам [3].

Литература

1. Желтиков В. П. География населения мира. Экономическая география. Ростов: Феникс, 2001. 382 с.
2. Борисов В. А. Демография. М.: Издательский дом NOTABENE, 2001. 272 с.
3. Милле Ф., Школьников В., Эртриш В., Валлен Ж. Современные тенденции смертности по причинам смерти в России 1965–1994. Paris, INED, 1996. 140 с.

Широколов А. Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет

Программные модули коррекции движения при радионуклидных исследованиях¹

Рекомендовано к публикации профессором Овсянниковым Д. А.

1. Введение. Радионуклидная диагностика — один из современных методов лучевой диагностики для оценки функционального состояния различных органов и систем организма с помощью диагностических радиофармпрепаратов, меченных радионуклидами.

Сбор диагностических данных может занимать до часа. Для получения изображений наилучшего качества необходимо, чтобы пациент во время сбора данных был неподвижен, иначе это может привести к искажению изображения или появлению «артефактов» [1, 2].

В данной статье рассматриваются задачи определения и коррекции движения для томографического сканирования и планарного динамического сканирования.

Коррекция движения важна для последующей реконструкции проекционных данных. Данной тематике посвящено большое количество статей [1–7]. Для количественного определения движения требуется использовать автоматизированные методы при минимальном участии человека.

В данной работе для обнаружения и последующей коррекции движения рассматривается метод взаимной корреляции.

2. Коррекция движения при томографическом сканировании. При сборе данных при однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ) камера вращается вокруг пациента, что нельзя не учитывать при коррекции движения. Это учитывает математическая постановка задачи, представленная в статье [3]. Примем данную постановку. Отметим лишь, что в отличие от постановки в [3], в данной статье дополнительно предлагается перед началом определения движения для всех кадров устанавливать область интереса — область, для которой определяется движение (например, сердце), для того чтобы увеличить отношение сигнал-шум.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ: тема 9.39.1065.2012, тема 9.38.673.2013

Также необходимо отметить, что итоговое значение смещения для кадра будем определять с помощью параболической аппроксимации функции взаимной корреляции в точке, где она достигает своего максимума и двух соседних.

Данная задача реализована в виде модуля к программному комплексу «Диагностика» для обработки радионуклидных исследований [8–10], написанного на языке C#.

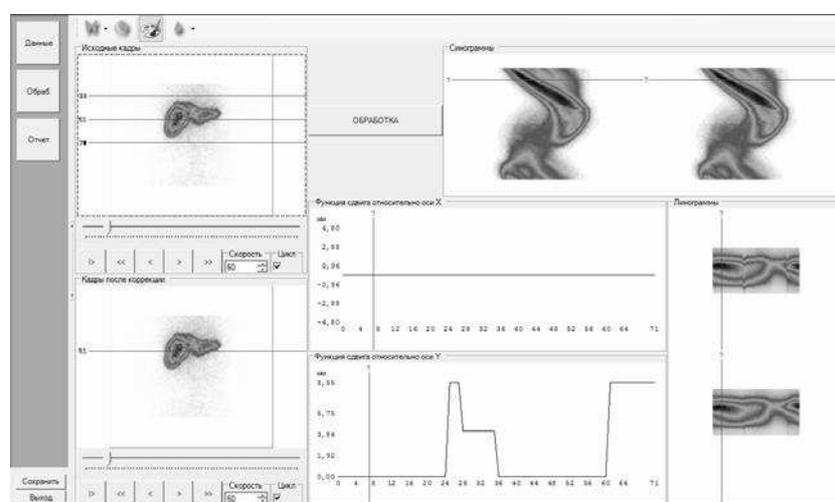


Рис. 1. Окно программного модуля

Окно модуля имеет исходную группу кадров и кадры после коррекции, представленные в режиме анимации, синограммы, линограммы, функции зависимости значения сдвига от кадра относительно осей x и y (см. рис. 1).

Области интереса соответствует область между верхним и нижним ползунками на рис. 2.

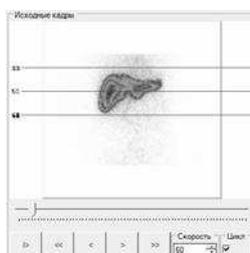


Рис. 2. Окно с исходными кадрами, представленными в виде анимации

Для визуального обнаружения сдвигов вдоль осей x и y строятся соответственно синограммы и линограммы (см. рис. 3). Уровень, для которого строится синограмма, определяется центральным ползунком на рис. 2.

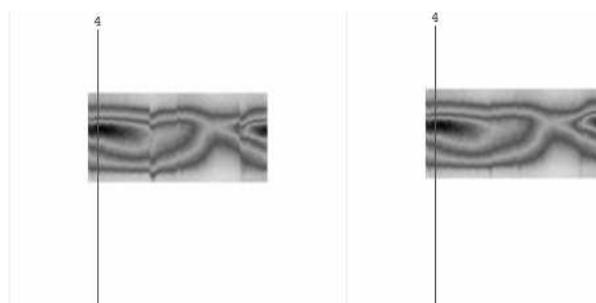


Рис. 3. Линограммы до (слева) и после (справа) коррекции

За эталонный кадр (кадр, относительно которого рассматривается движение) берется первый кадр, сделанный детектором. Рассматривается движение для каждой из двух групп кадров от двух детекторов отдельно. На рис. 4 представлен пример графика функции зависимости значений сдвигов (в мм) вдоль оси y от номера кадра.

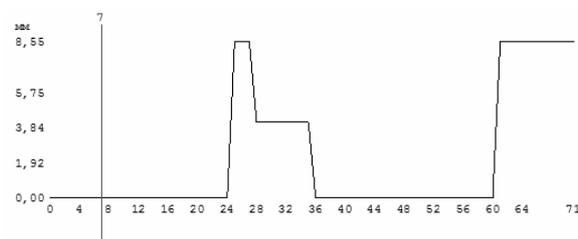


Рис. 4. Зависимость значений сдвигов (в мм) вдоль оси y от номера кадра

Все представленные здесь рисунки относятся к одному исследованию. Соответствие линограммы до коррекции и графика функции, представленного на рис. 4, а также линограмма после коррекции демонстрируют обнаружение и последующую компенсацию движения.

3. Планарное динамическое сканирование. При сборе данных в режиме планарного динамического сканирования детектор неподвижен во время всего исследования. Можно наблюдать динамическое распределение радиофармпрепарата в органе.

Задача коррекции движения в данном случае рассматривается как задача определения вектора перемещения контура, ограничивающего область интереса, которая также реализована в виде программного модуля на языке *C#*.

При планарном динамическом сканировании за эталонный кадр берется тот, на котором был нарисован контур.

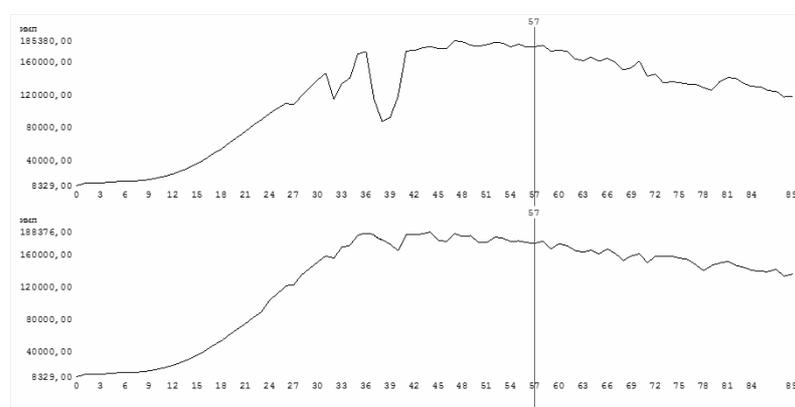


Рис. 5. Функции зависимости суммарного импульса внутри выделенной зоны интереса от номера кадра до (сверху) и после (снизу) коррекции

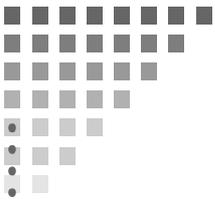
Необходимо отметить, что после первого этапа коррекции методом функции взаимной корреляции, следует второй этап коррекции положения контура, который основан на нахождении центра тяжести соответствующей плоской фигуры. Также перед началом определения движения устанавливается время визуализации — номер кадра, на котором визуализируется объект. Движение определяется, начиная с данного кадра. Так как после сбора данных получается большое количество изображений, то для наглядности были построены графики функции зависимости суммарного импульса внутри выделенной зоны интереса от номера кадра. Для визуального обнаружения сдвигов вдоль осей x и y были построены соответствующие линограммы. Пример графиков функции зависимости суммарного импульса внутри выделенной зоны интереса от номера кадра до и после коррекции движения представлены на рис. 5.

4. Заключение. В данной работе разработан и реализован алгоритм коррекции движения на основе метода функции взаимной

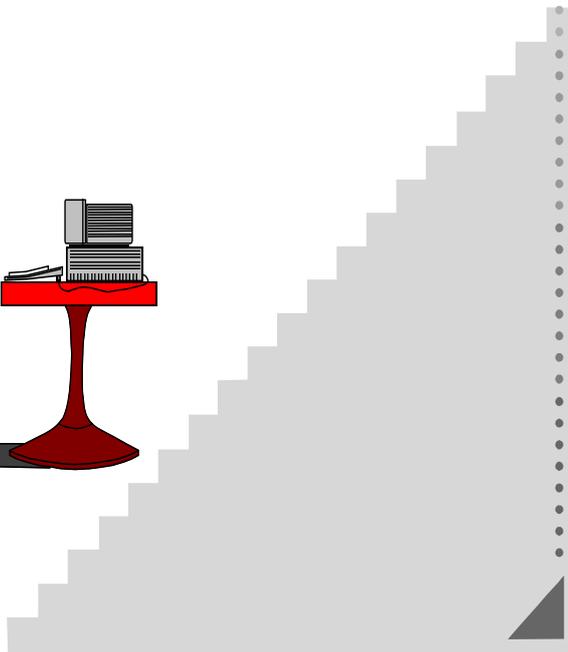
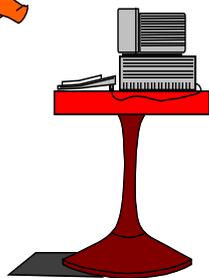
корреляции. Полученные результаты показали, что данный метод может быть использован для коррекции движения при радионуклидных исследованиях.

Литература

1. Cooper J. A., Neumann P. H., McCandless B. K. Detection of patient motion during tomographic myocardial perfusion imaging // *Journal of Nuclear Medicine*, 1993. Vol. 34. P. 1341–1348.
2. Geckle W. J., Frank T. L., Links J. M. Correction for patient and organ movement in SPECT: Application to exercise Thallium-201 cardiac imaging // *Journal of Nuclear Medicine*, 1988. Vol. 29, No. 4. P. 441–450.
3. Котина Е. Д., Максимов К. М. Коррекция движения при томографических и планарных радионуклидных исследованиях // *Вестник СПбГУ. Сер. 10*, 2011. Вып. 1. С. 29–36.
4. Eisner R., Churchwell A., Noever L., Nowak D., Cloninger K. Quantitative Analysis of the Tomographic Thallium-201 Myocardial Bullseye Display: Critical Role of Correcting for Patient Motion // *Journal of Nuclear Medicine*, 1989. Vol. 29. P. 91–97.
5. Eisner R. L., Noever T., Nowak D., Carlson W. et al. Use of cross-correlation function to detect patient motion during SPECT imaging // *Journal of Nuclear Medicine*, 1987. Vol. 28. P. 97–101.
6. Matsumoto N., Berman D. S., Kavanagh P. B. et al. Quantitative assessment of motion artifacts and validation of a new motion-correction program for myocardial perfusion SPECT // *Journal of Nuclear Medicine*, 2001. Vol. 42, No. 5. P. 687–694.
7. Mommenezhad M., Zakavi S. R., Sadeghi R., Kakhki V. Review of the linogram and sinogram: an easy way to detect off-peak artifacts in myocardial perfusion SPECT // *J. Nucl. Med. Technol.*, 2009. Vol. 37, No. 3. P. 188–190.
8. Котина Е. Д. Обработка данных радионуклидных исследований // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. ядерно-физические исследования*, 2012. Вып. 3(79). С. 195–198.
9. Kotina E. D., Ploskikh V. A. Data Processing and Quantitation in Nuclear Medicine // *Proceedings of RuPAC-2012*, 2012. P. 526–528.
10. Котина Е. Д. Программный комплекс «Диагностика» для обработки радионуклидных исследований // *Вестник СПбГУ. Сер. 10*, 2010. Вып. 2. С. 100–113.



*4. Информационные
и компьютерные
технологии*



Арикайнен А. И., Забровский А. Л.
Петрозаводский государственный университет

Оценка качества мультимедийных потоков, передаваемых в реальном режиме времени¹

Рекомендовано к публикации профессором Роговым А. А.

На сегодняшний день онлайн трансляции в реальном режиме времени широко используются в сети Интернет. Трансляции мультимедийных потоков становятся особенно популярными в образовательных системах и сервисах. Программно-аппаратные комплексы, с помощью которых организуются Интернет-трансляции, как правило, состоят из трех основных компонентов: видеокодера, медиа сервера и видео плеера пользователя. Видеокодер формирует мультимедийный поток с камеры или другого устройства захвата сигнала и отправляет его на медиа сервер. Далее удаленные клиенты подключаются к медиа серверу и получают запрашиваемую трансляцию по средствам сетевых протоколов. Например, образовательные консультации, конференции и семинары можно смотреть в онлайн режиме на веб сайте университета с помощью плеера.

Во время передачи мультимедийных потоков через сеть Интернет, преимущественно при взаимодействии медиа сервера с клиентами, на качество мультимедийных потоков оказывают влияние различные сетевые помехи, поэтому качество изображения и звука на стороне клиента в некоторых случаях недостаточно хорошее. В свою очередь, чем лучше качество изображения и звука на стороне конечного пользователя, тем привлекательнее сервис для клиента. Поэтому очень важно заранее оценить возможности пользователей получать тот или иной мультимедийный поток в заданное время в определенном месте, чтобы при необходимости можно было заблаговременно исправить проблемы, вызывающие ухудшения качества мультимедийного потока.

В сложившейся ситуации задача повышения и анализа качества передаваемых мультимедийных потоков является достаточно актуальной. Ее решение требует изучения влияния различных сетевых параметров на качество передаваемых потоков.

¹Работа выполняется при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности

В данный момент тестирование способности удаленных клиентов получить тот или иной мультимедийный поток, как правило, не проводится, так как не существует удобных специализированных систем. В некоторых случаях администраторы сервисов предоставляют пользователям ссылку на web-страницу, где осуществляется тестовая трансляция мультимедийного потока с каким-то одним битрейтом. Пользователи могут запустить плеер, посмотреть изображение и сделать самостоятельно вывод о качестве принимаемого потока, чего явно недостаточно. Существующие технологии динамического переключения битрейтов мультимедийных потоков также не могут гарантировать достаточного уровня качества воспроизведения. Недостатком данного метода является то, что администратор должен создавать множество потоков с разными битовыми скоростями, при этом в некоторых случаях мультимедийные потоки с малыми битовыми скоростями могут быть неприемлемы для трансляции определенных мероприятий [1]. Например, неразборчивые буквы и символы в показываемой лектором онлайн презентации недопустимы.

Для получения критерия оценки качества мультимедийных потоков была создана система имитационного моделирования (см. рис. 1), которая состоит из следующих элементов:

- веб интерфейс управления (Management);
- база данных (Database) и веб сервер (Web Server);
- медиа сервер и видеокодер (Streaming Server и WireCast соответственно);
- сетевой эмулятор (WANem);
- flash медиа плеер и компьютер клиента (Player).

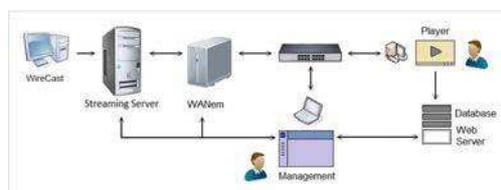


Рис. 1. Система имитационного моделирования

Для установки и использования системы достаточно одного рабочего стола. Размеры стола напрямую зависят от размеров, используемых для экспериментов компьютеров. Полученный в ходе экспериментов критерий оценки качества видеопотока как раз предназначен для решения задачи определения величины битового потока, удовлетворяющего конечных пользователей. Между медиа сервером и клиентами для передачи мультимедийных данных используется протокол потоковой передачи данных RTMP (Real Time Messaging Protocol) [2]. На основе полученных значений состояния мультимедийных потоков, воспроизводимых плеером, были выбраны четыре характеристики $Tstart$, $Fmin$, $Fdrop$, $Bmin$, которые представлены ниже.

- $Tstart$ — время начала воспроизведения или показа видеопотока. Время, при котором первое значение количества воспроизводимых видео кадров в секунду больше 24. Время начала воспроизведения отличается от времени нажатия кнопки проигрывания плеера;
- $Fmin$ — минимальное количество кадров в секунду, которое было зафиксировано в течение воспроизведения мультимедиа потока. Стандартное значение количества кадров в секунду FPS равняется 25 кадрам в секунду для оригинального потока, но в некоторых случаях оно может уменьшаться, например, если процессор компьютера загружен и не успевает отображать все кадры, соответственно, происходит потеря кадров;
- $Fdrop$ — максимальный скачок потери кадров, который был зафиксирован в течение воспроизведения мультимедийного потока;
- $Bmin$ — минимальный размер буфера в секундах, который был зафиксирован в течение всего воспроизведения мультимедийного потока.

На основе проведенных экспериментов были сформированы две выборки: обучающая и контрольная. Все эксперименты проводились для пяти потоков с разными битовыми скоростями. Функция подбиралась исходя из физических соображений исследуемого процесса. На основе обучающей выборки было обнаружено, что дискриминантная функция вида

$$y = \left(\frac{F_{min} B_{min}}{T_{start} F_{drop} + T_{start} + 2^{(25 - F_{min})}} - 5 \right) \quad (1)$$

обладает требуемым качеством. Из 195 экспериментов в 194 сравнение показало совпадение результатов обоих используемых подходов оценки качества [3].

На данный момент полученный критерий оценки качества используется в разработанной системе моделирования сетевых помех мультимедийных потоков, которая применяется для эмулирования сетевых параметров и оценки качества образовательных мультимедийных потоков, передаваемых в режиме реального времени в сети Петрозаводского государственного университета. Созданная система может использоваться для проведения тестирования новых мультимедийных сервисов, приложений и систем, выявления сетевых проблем и проверки создаваемых критериев оценки качества мультимедийных потоков. Система уже была успешно апробирована при решении проблем, возникших в реальных условиях.

В дальнейшем предполагается доработка системы для проведения экспериментов по оценке качества мультимедийных потоков, транслируемых на мобильные устройства по беспроводной Wi-Fi сети. Планируется создание критериев оценки качества для разных протоколов вещания мультимедийных потоков. На основе полученных результатов будет создан и развернут онлайн сервис для оценки качества мультимедийных потоков, передаваемых между заданными точками сети Интернет или локальной сети.

Литература

1. Jan L. Ozer. Video compression for flash, Apple devices and HTML5. Doceo Publishing, Inc. 2011. 272 p.
2. Real-time messaging protocol (RTMP) specification. <http://www.adobe.com/devnet/rtmp.html>
3. Забровский А. Л. Критерий оценки качества образовательных мультимедийных потоков, транслируемых в реальном режиме времени // Труды Карельского научного центра РАН, 2013. Вып. 1. С. 26–32.

Артемов А. Г.

Санкт-Петербургский государственный университет

Распознавание и отслеживание заданных объектов в задаче видео-наблюдения

Рекомендовано к публикации доцентом Макеевым И. В.

1. Введение. Задача видео-наблюдения в наши дни находит широкое применение во множестве приложений. Системы контроля доступа, системы безопасности, концепция «умного дома», — во всех этих направлениях видео-наблюдение играет ключевую роль.

Большинство подобных систем умеют обнаруживать движение, однако задача одновременной классификации движущихся объектов рассматривается редко.

В данной статье предложен комбинированный подход, объединяющий задачи определения движения и классификации на основе методов машинного обучения. Такое решение позволяет обнаруживать объекты известного вида, что предоставляет широкие возможности при интегрировании в систему «умного дома».

2. Постановка задачи. Пусть имеется видео-поток известного разрешения, полученный со статичной камеры. Под *объектом* будем понимать область кадра, которая обладает некоторыми специфическими свойствами (форма, размеры, текстура и т. п.).

Поставим задачу: отследить положение интересующего нас объекта в видео-потоке. Под *отслеживанием* будем понимать следующее: если известно положение некоторых двух объектов в кадрах n и $n + 1$, то необходимо определить, являются ли они на самом деле одним объектом.

3. Формализация задачи. Пусть $f_i(x, y)$ — упорядоченная последовательность дискретных функций двух переменных, $i = 1, 2, \dots$, $x \in [0, W_0]$ и $y \in [0, H_0]$, где W_0 и H_0 — ширина и высота кадра соответственно. Будем называть каждую функцию в этой последовательности кадром или изображением, а саму последовательность — видео-поток.

Для решения задачи необходимо решить две подзадачи: 1) выделить в последовательности участки области определения, на которых с изменением номера i существенно меняются функции и 2)

локализовать подмножество M области определения кадра, исходя из наших интересов.

Первая задача в компьютерном зрении известна как разделение переднего и заднего планов, вторая — задача поиска объекта.

4. Алгоритм решения. Приведем подробное описание каждого шага алгоритма.

4.1. Разделение переднего и заднего планов. Основным подходом к решению этой задачи является вычитание фона.

Вычитание фона предполагает наличие некоторого изображения (фоновое), к разности которого с текущим кадром применяется операция обрезки по уровню. Самым простым способом вычисления фона является усреднение по времени нескольких изображений:

$$BG_i(x, y) = \sum_{p=i-k}^i \frac{I_p(x, y)}{k}.$$

Данный способ прост в реализации, но обладает нежелательной особенностью: объекты с малой скоростью могут сливаться с фоном.

В данной работе рассмотрен другой алгоритм, основанный на использовании смеси нормальных распределений (mixture of Gaussians), описанный в [4].

Пусть $I_t(x, y)$ — t -й кадр видео-потока, $I_t(x_0, y_0)$ — значение конкретного пиксела с координатами (x_0, y_0) в момент времени t , $\{X_1, \dots, X_t\} = \{I_t(x_0, y_0), 1 \leq i \leq t\}$ — история пиксела с координатами (x_0, y_0) во времени.

Вероятность того, что наблюдаемое значение пиксела равно X_t можно записать так:

$$P(X_t) = \sum_{i=1}^K \omega_{i,t} * \eta(X_t, \mu_{i,t}, \sigma_{i,t}),$$

где $\omega_{i,t}$ — вес i -го нормального распределения в момент времени t , $\mu_{i,t}$ — математическое ожидание i -го нормального распределения в момент времени t , $\sigma_{i,t}$ — его среднеквадратичное отклонение, $\eta(X_t, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ — плотность распределения. Количество K нормальных распределений выбирается, исходя из имеющихся вычислительных мощностей.

Для подбора параметров смеси распределений используется модификация метода k -means: каждый новый пиксель X_t проверяется

на соответствие одному из K нормальных распределений (находится ли на расстоянии $\leq 2,5$ среднеквадратичных отклонений от математического ожидания). Если пиксель не соответствует ни одному из распределений, то наименее вероятное распределение заменяется на новое, с $\mu_i = X_t$, относительно большим среднеквадратичным отклонением и низким весом.

Обновление параметров и весов распределений происходит по следующему правилу:

$$\omega_{k,t} = (1 - \alpha)\omega_{k,t-1} + \alpha(M_{k,t}),$$

где α — коэффициент обучения, $M_{k,t} = 1$ для выделенного распределения (куда «попал» новый пиксель), и $M_{k,t} = 0$ для всех остальных. Для выделенного распределения обновление происходит по правилам:

$$\begin{aligned}\mu_t &= (1 - \rho)\mu_{t-1} + \rho X_t, \\ \sigma_t^2 &= (1 - \rho)\sigma_{t-1}^2 + \rho(X_t - \mu_t)^2, \\ \rho &= \alpha\eta(X_t | \mu_k, \sigma_k).\end{aligned}$$

Для остальных распределений параметры μ и σ не меняются.

Отобрать распределения, отвечающие за задний план можно по правилу из [4]: отсортируем их по возрастанию значения величины $\frac{\omega}{\sigma}$ и выберем первые B распределений: $B = \arg \min_b \left(\sum_{k=1}^b \omega_k > T \right)$, где T — параметр, обозначающий минимальное количество информации, которую включает в себя задний план.

5. Обработка промежуточной информации. Видео-поток, полученный на выходе алгоритма, практически всегда требует для дальнейшего использования некоторых преобразований для удаления шумов и получения связных областей.

5.1. Устранение шумов. Для устранения шума применим к изображению бокс-фильтр:

$$I(x_0, y_0) = \frac{1}{size_1 \times size_2} \sum_{i=1}^{size_1} \sum_{j=1}^{size_2} I(x_0 + i - a_x, y_0 + j - a_y) K(i, j),$$

где (a_x, a_y) — точка привязки (обычно центр ядра), $K(i, j)$ — ядро (матрица из единиц размера $size_1 \times size_2$).

5.2. Морфология. После устранения шума предыдущей операцией движущиеся области зачастую получают несвязными. Для получения связных областей применим к изображению морфологическую операцию расширения (dilation) [2] следующим образом:

$$I_{dilated}(x_0, y_0) = \max_{(x', y') \in K} I(x_0 + x', y_0 + y'),$$

где K — ядро операции, в нашем случае — эллипс, вписанный в прямоугольник размером 5×10 пикселей. Данный размер подобран экспериментально и зависит от разрешения видео-потока и относительных размеров объектов в нем.

5.3. Пороговое преобразование. Последней операцией, необходимой для получения бинарного изображения, пригодного для применения алгоритма маркировки связных областей, является операция отсечения по уровню (threshold) [2]:

$$I(x_0, y_0) = \begin{cases} 255, & \text{если } I(x_0, y_0) > thresh, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $thresh$ — пороговое значение, устанавливаемое экспериментально.

Далее связные области со значением каждого пиксела, равным 255, будем называть *блобами* (от англ. binary large object).

5.4. Обработка блобов. Для слежения за интересующим нас объектом необходим алгоритм пересчета и маркировки связных областей (блобов). Применим широко известный рекурсивный алгоритм, описанный в [1].

6. Поиск объекта. Эта подзадача решается независимо от предыдущей, затем их результаты объединяются с помощью системы трекинга.

Для решения был использован каскадный классификатор, описанный в статье [5]. Суть его работы состоит в следующем.

1. Изображение представляется в интегральном виде:

$$I_I(x, y) = \sum_{x' < x, y' < y} I(x', y').$$

2. Вычисляются признаки Хаара — численные характеристики изображения.

3. На размеченном наборе входных данных обучаются простые классификаторы, каждый из которых использует всего один признак Хаара, которые затем объединяются в линейную комбинацию (сильный классификатор) методом AdaBoost [3].

4. Полученные с помощью AdaBoost классификаторы соединяются в каскад следующим образом: первый классификатор отсекает большое количество негативных участков изображения. Каждый следующий уровень каскада отсекает меньшее их количество, но требует больше вычислений.

Обучение классификатора проводилось с помощью утилиты `haar-training` библиотеки OpenCV [6]. Размеры обучающей выборки составили 1200 положительных примеров и 800 отрицательных.

Из-за высокой ресурсоемкости каскадного классификатора была использована его реализация на GPGPU с использованием технологии nVidia CUDA [7]. На адаптере nVidia GeForce 540m была достигнута приемлемая производительность в 25 кадров в секунду.

7. Трекинг. Алгоритм трекинга непосредственно решает задачу отслеживания объекта в видео-потоке за счет объединения информации, полученной на этапе определения движения, и результатов работы классификатора. Исходя из базового предположения о небольшой скорости движения объектов в сцене, близко расположенные в соседней паре кадровbloбы объединяются в общий буфер истории движения объекта. При этом, объекты, имеющие в своей истории движения пересечение с областями, вызвавшими существенную реакцию каскадного классификатора, получают соответствующую метку.

8. Результаты. Ниже приведены результаты промежуточных шагов решения задачи.

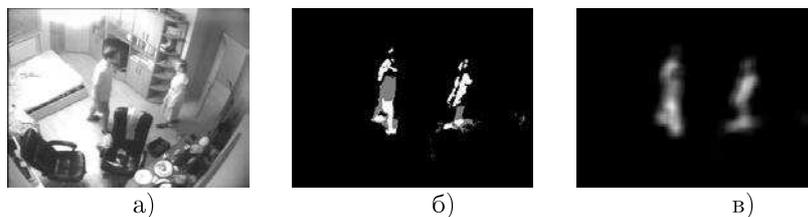


Рис. 1. Обработка кадра: а) оригинальный кадр, б) отделенный передний план, в) устранение шумов

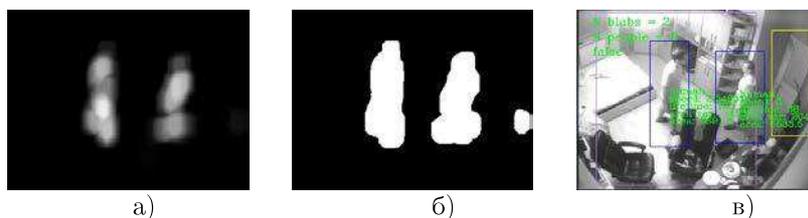


Рис. 2. Обработка кадра: а) морфология, б) пороговое преобразование, в) результат работы программы

Литература

1. Шапиро Л., Стокман Дж. Компьютерное зрение. М.: Бином, 2006. 761 с.
2. Bradski G., Kaehler A. Learning OpenCV. First edition. O'Reilly, Sebastopol, 2008. 556 p.
3. Freund Y., Schapire R.E. A short introduction to boosting // Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence, 1999. Vol. 14(5). P. 771–780.
4. Stauffer C., Grimson W. E. L. Adaptive background mixture models for real-time tracking // Computer Vision and Pattern Recognition, 1999. Vol. 2. P. 252–258.
5. Viola P., Jones M. Rapid object detection using a boosted cascade of simple features // Computer Vision and Pattern Recognition, 2001. Vol. 1. P. 511–518.
6. Open Computer Vision Library. <http://docs.opencv.org/>
7. CUDA Parallel Computing Platform. http://www.nvidia.com/object/cuda_home_new.html

Арцыбашева Л.Н., Иванова О.А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Подход к решению проблемы извлечения данных из пространственно-временных баз данных

Рассмотрим некоторую базу данных, которая хранит информацию о движущихся объектах. Её статическое представление малоинтересно, поскольку основной интерес представляет именно изменение местоположения наблюдаемых объектов с течением времени. В подобных системах невозможно игнорировать временную (temporal) составляющую, отсюда возникло понятие *пространственно-временной базы данных*.

Определение. *Пространственно-временная* (англ. spatial-temporal database) база данных — база данных, в которой одновременно поддерживается одно или более измерений в аспектах как пространства, так и времени [1, 2].

Примером пространственно-временной базы данных может служить информация о перемещениях и местонахождении, например, автомобилей, получаемая с помощью GPS-систем или датчиков на дорогах.

Данные пространственно-временной базы данных (ПВБД) за некоторый промежуток времени формируют пространственные фигуры (см. рис. 1) [1].

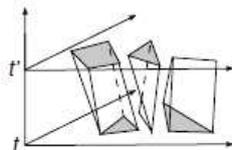


Рис. 1. Пространственные фигуры

В заданный момент времени t из базы данных необходимо извлечь данные. Полученные значения формируют некие области на плоскости. Совокупность таких областей должна удовлетворять определению сложной области.

Определение. *Сложная область* — совокупность непересекающихся замкнутых областей.

Однако на плоскости некоторые данные могут представлять собой отрезки или последовательность отрезков, что и вызывает определенные трудности при определении сложной области. Такую совокупность отрезков будем называть *отклонением*. Поскольку сложная область, полученная в определенный момент времени t , может содержать отрезок или последовательность отрезков, то дальнейшие операции над ней будут выполнены некорректно. Данное утверждение объясняется тем, что область должна сохранять свойства замкнутости.

Необходимо выбрать алгоритм, позволяющий различить действительные и недействительные части полученной сложной области.

Определение. *Действительной частью* сложной области будем называть совокупность непересекающихся замкнутых областей. Под *недействительной* — все остальные случаи.

В результате такой обработки должна получиться допустимая область, т. е. область, удовлетворяющая определению сложной области.

Построение допустимой области в определённый момент времени является основной проблемой при работе с пространственно-временной базой данных в заданный момент времени. В иностранных публикациях её называют *region extraction and verification problem* (REVP).

Сформулируем проблему, выделенную выше, следующим образом: на плоскости дан ряд областей S , сформированных некоторым подмножеством отрезков $R \in S$. Эти области должны удовлетворять определению сложных областей. Для решения обозначенной проблемы будем использовать алгоритм нахождения пересекающихся отрезков [3, 4]. Первая версия этого алгоритма представлена американским ученым Шеймосом в 1976 году, а его модифицированная версия представлена Бентли и Оттманом в 1979 году.

Этот алгоритм позволяет по множеству отрезков на плоскости получить множество точек, в которых эти отрезки пересекаются. В основу алгоритма положен метод вертикальной сканирующей линии (англ. *sweeping line*), которая перемещается слева направо по так называемым точкам-событиям [3, 4].

Пусть для модели данных входные данные представляют собой последовательность отрезков, которые формируют некие области.

Выделим особые случаи, которые возможны при анализе сложной области. Первый случай — смежные области (когда две области пересекаются). Второй случай — отрезки не формируют замкнутую область. На рис. 2 представлены примеры этих случаев [1].

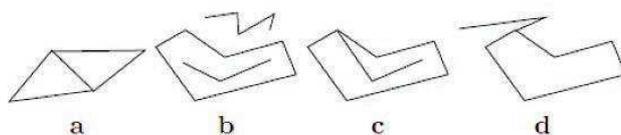


Рис. 2. Особые случаи

Рассмотрим этапы алгоритма обработки и идентификации областей. На рис. 3а представлена исходная область для обработки. Отрезки рассматриваются слева направо, по часовой стрелке, и таким образом определяется, образуют ли они замкнутую область. Если образуют, то считаем такую область действительной. Переходим к рассмотрению следующих отрезков и т. д. Если отрезки не образуют замкнутую область (см. рис. 3б), то их не рассматриваем. Таким образом, у любых смежных областей некоторые из их формирующих отрезков будут удалены (см. рис. 3) [1]. Алгоритм завершается, когда рассмотрены все отрезки. Результат алгоритма — допустимая область (см. рис. 3с).

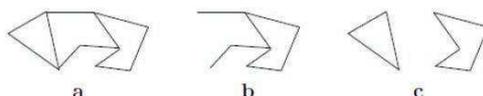


Рис. 3. Этапы работы алгоритма

Данный алгоритм реализован в среде MATLAB.

Входными данными являются координаты отрезков. На рис. 4а изображена область для обработки (частный случай). На рис. 4б результат работы программы — замкнутая область. Как видим, отрезки, не формирующие замкнутую область, удаляются из рассмотрения.

Рассмотренный алгоритм может быть использован геоинформационными системами (ГИС), например, в картографии для состав-

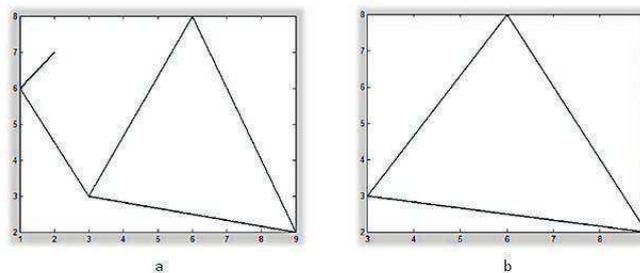


Рис. 4. Результат работы программы

ления карт территориального зонирования, цифровой модели местности, в методах дистанционного зондирования Земли, а также в работе спутниковых систем навигации.

Литература

1. McKenney M. Region extraction and verification for spatial and spatio-temporal database, 2009, 9 с.
<http://www.cs.siu.edu/~marmcke/research/>
2. Костенко Б. Б., Кузнецов С. Д. История и актуальные проблемы темпоральных баз данных, 2007.
<http://citforum.ru/database/articles/temporal/3.shtml>
3. Алгоритм Бенгли — Отмана. <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
4. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение // Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 478 с.
5. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е издание // Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1296 с.

Балабанов М. Ю., Якушкин О. О.
Санкт-Петербургский государственный университет

Коммуникации в одной неоднородной распределенной гетерогенной системе

1. Введение. Современные распределенные вычислительные системы состоят из множества разнородных компонентов распределенных по вычислительному комплексу. Компоненты разрабатываются на различных языках программирования и объединяются коммуникационной прослойкой. Коммуникации представляют собой транспортный протокол передачи данных. Существуют различные платформы передачи данных в таких средах:

- связующее программное обеспечение, ориентированное на обработку сообщений — брокер, позволяющий централизованно хранить и пересылать сообщения (RabbitMQ [1], ActiveMQ [2]);
- безброкерные системы взаимодействия, осуществляющие передачу сообщений между процессами напрямую и формирующие пиринговую сеть (ZeroMQ [3]).

Передаваемые сообщения представляют собой сериализованные данные в различных форматах: бинарном (Protocol Buffers [4], BSON) или текстовом (XML, JSON). Создание и настройка коммуникационной прослойки является фундаментальным этапом развертывания любой распределенной системы.

2. Основные требования к системе. Основными требованиями к коммуникационной прослойке являются своевременная гарантированная эффективная доставка сообщений в сочетании с простой использованием.

В канал данных необходимо отправлять множество коротких сообщений двух видов:

- события — факты о состоянии систем;
- операции — сообщения между элементами системы, требующие ответа.

От механизмов сериализации данных ожидается поддержка:

- быстрой упаковки и декодирования сообщений;

- сложных структур данных (вложенных объектов, наследования).

Поскольку требования системы невозможно поддерживать в рамках безброкерной пиринговой сети из-за сложности реализации и контроля межсерверного общения, используется наиболее известная брокерная система RabbitMQ от VMware [5]. Она обладает важными преимуществами: возможностью тематической рассылки сообщений (паттерн «Publish-Subscribe») и расширяемостью (увеличением пропускной способности единого брокера за счет добавления новых узлов).

Сериализация сложных объектов в текстовые форматы требует передачи по сети огромных объемов данных, влияет на пропускную способность канала передачи данных и замедляет работу системы в целом. В связи с этим, важен фактор оптимального выбора механизма сериализации.

Одним из наиболее эффективных форматов бинарного представления данных является Protocol Buffers от Google, который помимо высокой производительности обладает сериализацией в .NET и поддерживает наследование (библиотека Protobuf.NET [6]). Учитывая, что поддержка иерархического представления данных крайне важна в сложной распределенной системе как для реализации ее функциональной части, так и для ее дальнейшей поддержки и развития, такой набор параметров признан оптимальным для выбора языка описания данных, хранения и передачи информации в системе.

3. Основной результат. Была разработана распределенная система, работающая в гетерогенной среде, модули которой написаны на языках программирования C# и C++ с использованием технологий RabbitMQ и Protocol Buffers. Затруднения, возникшие при создании системы, выявили целый ряд прикладных проблем, от решения которых во многом зависит продуктивность разработки.

Несмотря на то, что в основу системы закладывались проверенные временем решения, возникла проблема производительности передачи данных (отправки и приема сообщений как библиотек на C# [7] так и на C++) с использованием RabbitMQ. Было определено, что данная проблема лежит в скорости упаковки сообщения в пакет внутреннего протокола системы передачи сообщений (AMQP [8]), а также в неоптимальной реализации библиотеками сокетной системы взаимодействия с брокером. Канал передачи данных в рассматри-

ваемой системе также работал крайне неэффективно: небольшие по объему сообщения между элементами сети передавались в большом количестве. На 30 байт полезной информации управляющего сообщения приходилось 200 байт обрамляющего сообщения контейнера.

Для эффективного взаимодействия компонентов системы брокер должен поддерживать маршрутизацию сообщений. Отсутствие подобного механизма оказалось основным недостатком RabbitMQ. Реализация концепции операций (паттерн «Surveyor-Respondent») с помощью тематической рассылки неудобна и неэффективна, в то же время внедрение в систему какой-либо дополнительной коммуникационной компоненты приведет к заметному усложнению в разработке и поддержке системы. На стороне высокопроизводительных (реализованных на C++) сервисов из широкого набора испробованных библиотек для общения через RabbitMQ адекватной показала себя лишь `librabbitmq` [9], написанная в стилистике языка Си.

Не менее значимой, на наш взгляд, является следующая проблема: в языке описания данных, в реализации `Protobuf C++` от Google, функционал поддержания наследования (включая множественное) не реализован, а в `Protobuf.NET`, отвечающей за работу с форматом на языке C#, наследование поддерживается [10]. Это приводит к расхождению уровней абстракции C++ и C# программистами. Представляется, что решение этой фундаментальной проблемы `Protocol Buffers` лежит в автоматизации формирования древа наследования по полученному описанию из C# в C++, что позволит смягчить расхождения в видении и использовании структур данных.

Эффективность канала данных находит решение лишь в создании собственных абстракций сетевого взаимодействия, которые долго нельзя будет назвать проверенными временем.

Всего в процессе создания системы с использованием библиотеки `Protobuf.NET` в ней было обнаружено более 17 багов, включая несовместимость системы сериализации в `Protobuf.NET` и оригинальной реализации от Google для C++.

В результате переписки с группой авторов `Protobuf.NET` большинство багов было исправлено, включая несовместимость сериализаторов и десериализаторов [11], и некорректность формирования файлов, описывающих сообщения [12].

Была создана система генерации кода, позволяющая по `.NET` сборке сгенерировать C++ обертку, использующую `Boost` и `Protocol Buffers` и отражающую иерархию `.NET` классов.

4. Заключение. В работе показано, что для эффективной работы описанной коммуникационной платформы распределенной вычислительной системы требуется создание собственного брокера, предоставляющего такие паттерны передачи сообщений, как «Surveyor-Respondent» и «Publish-Subscribe», а также разработка программных компонент, предоставляющих единый интерфейс работы с данными.

Литература

1. What is RabbitMQ? <http://www.rabbitmq.com/>
2. Apache ActiveMQ. <http://activemq.apache.org/>
3. ZeroMQ The Intelligent Transport Layer.
<http://www.zeromq.org/>
4. Protocol Buffers on Google Code.
<http://protobuf.googlecode.com>
5. Videla A., Williams J. RabbitMQ in Action // Distributed messaging for everyone / Manning Publications Co., 2012. 288 p.
6. protobuf-net on Google code.
<https://code.google.com/p/protobuf-net/>
7. .NET/C# AMQP client library.
<https://www.rabbitmq.com/dotnet.html>
8. Advanced Message Queuing Protocol. <http://www.amqp.org/>
9. RabbitMQ C AMQP client library.
<https://github.com/alanxz/rabbitmq-c>
10. Capabilities of protobuf-net.
<https://code.google.com/p/protobuf-net/wiki/Capabilities>
11. Fix: re-implementation out-of-order inheritance support at protobuf-net svn. <https://code.google.com/p/protobuf-net/source/detail?r=616>
12. Fix: GetSchema should navigate to final base-type name; not just one level at protobuf-net svn. <https://code.google.com/p/protobuf-net/source/detail?r=618>

Блеканов И. С., Максимов А. Ю.
Санкт-Петербургский государственный университет

Вебометрические исследования сегмента университетского Веба с помощью поискового робота

1. Введение. За последние годы все больше российских ВУЗов следят за позициями своих веб-сайтов в вебометрическом рейтинге испанской группы Cybermetrics Lab [1], который входит в пятерку мировых рейтингов наряду с такими рейтингами, как Times, QS, шанхайский и т. п. Этот рейтинг оценивает лишь качество сайта университета, но качество веб-сайта оказывает большое влияние на «видимость» университета в целом. Ведь по публикациям ученых видны только они, но не виден университет.

Для повышения рейтинга университетского сайта необходимо работать в таких направлениях, как увеличение объема, улучшение качества контента, увеличение количества гиперссылок на сайт с авторитетных веб-сайтов, а также оптимизация внутренней гиперссылочной структуры сайта. Исследованиям в этой области посвящены работы [2–8]. Мы же решили сосредоточиться на вопросах внутренней гиперссылочной структуры как целого Веб-пространства университета, так и отдельных сегментов, из которых оно состоит. Правильно организованная веб-структура может значительно увеличить коммуникабельность сайта и повысить его показатель цитируемости в поисковых системах, увеличить количество внешних ссылок, улучшить позиции университетского веб-сайта в вебометрическом рейтинге.

2. Эксперимент. В эксперименте ставилась задача анализа и выявления гиперссылочной структуры одного из сегментов, составляющих Веб-пространство СПбГУ, — веб-сайт факультета ПМ–ПУ, а также получения рекомендаций по улучшению этой структуры.

В качестве инструмента для достижения поставленной в эксперименте цели использовалась аналитическая система на основе специализированного поискового робота, которая была успешно апробирована на исследованиях зарубежного и российского сегментов Веба [6–9].

Специализация используемого поискового робота была сконфигурирована таким образом, чтобы робот собирал и обрабатывал только

страницы в рамках сегмента Веба, содержащего веб-сайт факультета ПМ–ПУ СПбГУ, и гиперссылки с этого сайта на внешние источники информации (рис. 1).



Рис. 1. Веб-пространство СПбГУ и включенный в него исследуемый сегмент Веба

С помощью аналитической системы на основе специализированного поискового робота, запущенной с начальным URL-адресом <http://www.armath.spbu.ru/>, требовалось выявить гиперссылочную структуру сайта ПМ–ПУ в виде матрицы смежности и определить значения параметров, приведенных в таблице 1.

Таблица 1. Исследуемые параметры

ID параметра	Параметр
1	Общее количество уникальных внутренних страниц сайта ПМ–ПУ
2	Количество страниц, связанных с «Главной страницей» сайта ПМ–ПУ
3	Количество страниц, не связанных с «Главной страницей» сайта ПМ–ПУ
4	Количество тупиковых веб-страниц
5	Количество уникальных гиперссылок сайта ПМ–ПУ
6	Количество неработающих гиперссылок
7	Количество гиперссылок на внешние веб-ресурсы
8	Количество внутренних гиперссылок на документы форматов *.doc (*.docx), *.pdf, *excel, *.ppt
9	Количество гиперссылок с переадресацией

3. Результаты эксперимента. В ходе эксперимента поисковым роботом на веб-сайте факультета ПМ-ПУ была обработана и проанализирована 2 258 521 гиперссылка. Из них 2 026 285 гиперссылок на внутренние веб-страницы сайта ПМ-ПУ, 119 931 ссылка на страницы из Веб-пространства СПбГУ и 112 305 ссылок на внешние источники информации. Кроме того, с помощью построенной матрицы смежности и ее транспонированной формы для параметров из таблицы 1 были получены числовые значения в виде гистограмм и круговых диаграмм (рис. 2, 3).

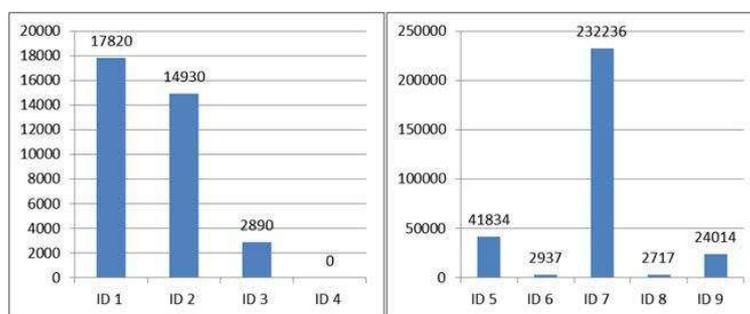


Рис. 2. Гистограммы значений показателей таблицы 1

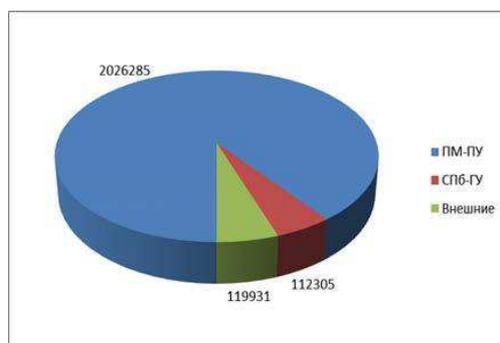


Рис. 3. Круговая диаграмма внешних и внутренних ссылок

4. Общие выводы. По результатам эксперимента видно, что тупиковые страницы (не имеющие никаких других ссылок), не явля-

ющиеся медиа-контентом, отсутствуют. В свою очередь, 16,2% страниц не связаны с главной веб-страницей главного сайта. Однако если отбросить страницы с документами, то это отношение составит всего около 1%.

Несмотря на относительно неплохую связность страниц сайта и отсутствие тупиковых страниц, ситуацию ухудшает огромное число гиперссылок, переадресующих пользователя в основном на главную страницу сайта или ее иностранные аналоги. Кроме того, не все гиперссылки приводятся к единой нормальной форме на стороне сервера. Большое количество таких гиперссылок влекут вероятность некорректного цитирования информационных ресурсов веб-сайта ПМ–ПУ в поисковых системах, а также оказывают негативное влияние на вебметрический рейтинг университета в целом.

Стоит отметить и большое количество веб-страниц, при переходе на которые возникает ошибка, вызванная отсутствием предполагаемых данных в указанном месте сервера или неверной обработкой адреса. Наличие таких страниц снижает доверие пользователей к ресурсам сайта факультета.

Таким образом, для улучшения присутствия веб-сайта факультета ПМ–ПУ в Вебе и улучшения его показателя цитируемости в поисковых системах необходимо разрешить выявленные в эксперименте проблемы на практике.

Литература

1. Ranking Web of Universities. <http://www.webometrics.info>
2. Holmberg K., Thelwall M. Local government web sites in Finland: A geographic and webometric analysis // *Scientometrics*, 2009. 79(1). P. 157–169.
3. Печников А. А. Вебметрические исследования Web-сайтов университетов России // *Информационные технологии*, 2008. № 11. С. 74–78.
4. Печников А. А. Модель университетского Веба // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2010. № 6. С. 208–214.

5. Печников А. А., Чирков А. В., Чуйко Ю. В. Исследование связности научно-образовательного Веба // Учёные записки Петрозаводского государственного университета. Естественные и технические науки, 2011. № 8(121). С. 111–113.
6. Блеканов И. С., Сергеев С. Л., Печников А. А. Повышение рейтингов университетов методами вебометрики // Труды XIX Всероссийской научно-методической конференции 'Телематика'2012. СПб.: СПГУ ИТМО, 2012. Т. 2. С. 250–251.
7. Блеканов И. С., Сергеев С. Л., Максимов А. Ю. Веб-краулер как инструмент для вебометрических исследований на примере анализа Веб-пространства СПбГУ // Materialy IX mezinardni vedecko-prakticka konference "Moderni vymozenosti vedy – 2013". Praha, Czech Republic: Publishing House "Education and Science" s.r.o, 2013. Vol. 71. P. 66–69.
8. Блеканов И. С., Сергеев С. Л. Разработка инструментария для сравнительного исследования университетских сайтов // Материали за IX международна научна практична конференция "Настоящи изследвания и развитие – 2013". София, Република България: "Бял ГРАД-БГ" ООД., 2013. Vol. 27: Математика. Физика. Съвременни технологии на информации. С. 77–81.
9. Блеканов И. С., Сергеев С. Л., Мартыненко И.А. Построение тематико-ориентированных веб-краулеров с использованием обобщенного ядра // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Изд-во СПбПУ, 2012. № 5(157). С. 9–15.

Борисов Е. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

**Кластерный анализ обеспеченности жилой зоны
Петродворцового района г. Санкт-Петербурга
сетью объектов розничной торговли**

Рекомендовано к публикации профессором Захаровым В. В.

Постановка задачи. В работе рассматривается одна из подзадач, входящих в исследование потребительской сети Петродворцового района Санкт-Петербурга («Научно-обоснованный подход определения депрессивных территорий Петродворцового района Санкт-Петербурга с целью размещения объектов потребительского рынка для обеспечения населения товарами и услугами»), проводящееся по заказу администрации этого района.

В комплексной оценке существующей потребительской сети района первым шагом является определение уровня физической доступности объектов потребительской сети для проживающего населения и выделение зон, превышающих нормативные показатели, что и было реализовано в ходе работы. Удобной средой для выполнения подобных задач, предполагающих анализ пространственно-распределённой информации, являются Геоинформационные Системы (ГИС). В качестве основы для проекта была взята ArcGIS 10.1.

Правовая основа. Согласно действующему постановлению Правительства Санкт-Петербурга № 1430 от 28 ноября 2006 года «О размещении магазинов пешеходной доступности на отдельных территориях Санкт-Петербурга», размещённая на территории г. Санкт-Петербурга сеть потребительских магазинов должна удовлетворять перечню требований к магазину пешеходной доступности. В последней редакции документа не приводится каких-либо критериев измерения «пешеходной доступности», поэтому в качестве критерия использовались аналогичные нормативы градостроительного проектирования Москвы, приведённые в разделе VI постановления правительства Московской области №24/54 от 16 января 2012 года «Об утверждении нормативов градостроительного проектирования Московской области». Согласно этому документу, объекты торговли и общественного питания должны располагаться не далее, чем 500 м

в зоне многоквартирной застройки и 800 м в зоне индивидуальной застройки.

Исходя из этих значений, был произведён пространственный анализ распределения существующей сети продовольственных магазинов Петродворцового района на всей территории жилой застройки муниципального образования г. Петергоф. Была создана база геоданных со слоями, характеризующими жилую застройку и торговые предприятия, и применён алгоритм кластерного анализа для выделения сегментов зоны жилой застройки с одинаковыми показателями удалённости от объектов розничной торговли.

Источники данных и выбор системы координат. За основу исследования взяты готовые наборы геоданных в формате .shp для г. Санкт-Петербурга из проекта Open Street Map, доступные для свободного использования. Для создания информационного слоя объектов потребительской сети администрация Петродворцового района предоставила реестр торговых предприятий. Из слоя полигонов зданий выделены участки жилой застройки в г. Петергоф и на основе этого выделения создан новый слой. Для проекта выбрана единая географическая система координат GCS Pulkovo 1942 и использована коническая проекция Albers-Euclore, наиболее подходящая для Европейской части России, с расстояниями в метрической системе.

Описательная модель данных. Из исходного набора данных OSM в основе проекта используются три слоя: дорожная карта (*highway-line*), железнодорожные пути (*railway-line*), полигоны строений (*building-polygon*). Слой объектов жилой застройки (*Residential_area*) экспортирован из общего слоя строений путём ручной выборки объектов. Затем в приложении ArcCatalog создана база геоданных, состоящая из двух таблиц *Residential_area* и *Stores*. Общая структура базы геоданных представлена на рис. 1.

Два вспомогательных атрибута, появившихся в окончательной таблице, *Nearest_store_distance* и *Nearest_store_id* получены с помощью присоединения к таблице *Residential_area* поля с результатом исполнения встроенной функции *Generate_Near_Table* [1], возвращающей расстояние до ближайшего объекта из слоя интереса для каждого объекта входного слоя. Таким образом, построен массив расстояний от каждого жилого здания до ближайшего торгового предприятия, вычисленных по обычной евклидовой метрике. Фрагменты кода на языке программирования Python, выполняющие эти операции в среде ArcGIS:

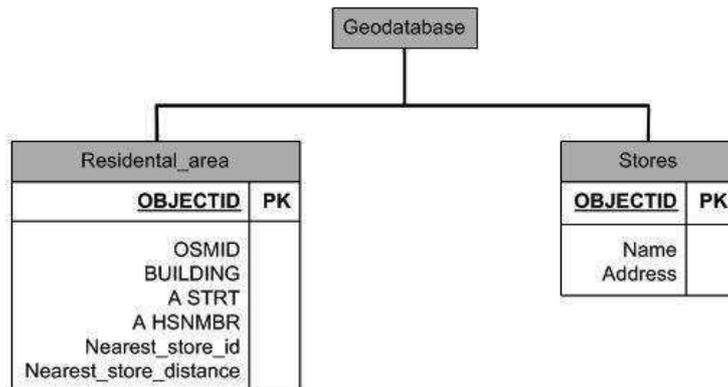


Рис. 1. Структурная схема базы геоданных

```

import arcpy
from arcpy import env
env.workspace = "D:/peterhof_proj/Peterhof_geodatabase.gdb"
inFeatures = "Residential_area"
nearFeatures = "Stores"
outTable = "Residential_area_Generate_near"
arcpy.GenerateNearTable_analysis(inFeatures,
nearFeatures, outTable)

import arcpy
from arcpy import env
env.workspace = "D:/peterhof_proj/Peterhof_geodatabase.gdb"
inFeatures = "Residential_area_Generate_near"
joinField = "OBJECTID"
outTable = "Residential_area"
fieldList = ["NEAR_FID", "NEAR_DIST"]
arcpy.JoinField_management (inFeatures,
joinField, joinTable, joinField, fieldList)

```

Кластерный анализ насыщения жилой зоны объектами розничной торговой сети на основе вычисления локальной пространственной статистики Морана. Локальный критерий Морана позволяет оценить пространственную корреляцию между наблюдаемыми значениями некоторой величины на основе задания матрицы весов, характеризующих пространственное отношение между различными значениями в выборке [2].

Для выборки значений x_1, \dots, x_n величина $w_{i,j}$ характеризует пространственное отношение между значениями x_i и x_j , метод вычисления $w_{i,j}$ подбирается исходя из задачи. Для вычисления статистики Морана для расстояний между объектами в плотной городской застройке использовалась степенная функция вида $w_{i,j} = d_{i,j}^k$, где $d_{i,j}$ — расстояние между объектами i и j [3]. Таким образом, формируется матрица пространственных весов, описывающих взаимное положение элементов выборки:

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}.$$

Локальная статистика I_i Морана вычисляется для каждого элемента следующим образом:

$$I_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_i^2} \sum_{j=1}^n w_{i,j} (x_j - \bar{x}), \quad S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{n-1} - \bar{x}^2.$$

Для гипотезы о случайном распределении ожидаемым значением является $E(I_i) = -\frac{\sum_{j=1}^n w_{i,j}}{n-1}$.

Стандартные отклонения для оценки значимости полученных результатов вычисляются как $Z_{I_i} = \frac{I_i - E(I_i)}{\sqrt{E(I_i^2) - E(I_i)^2}}$.

Положительное значение I -статистики указывает на наличие у объекта соседних со схожими высокими или низкими значениями исследуемого показателя. Отрицательное значение — на наличие существенной разницы между соседними значениями [1]. Вычисленные значения статистики и отклонений для каждого объекта из слоя жилых строений хранятся в отдельной таблице в базе данных проекта. Визуализация результатов кластеризации представлена на рис. 2.

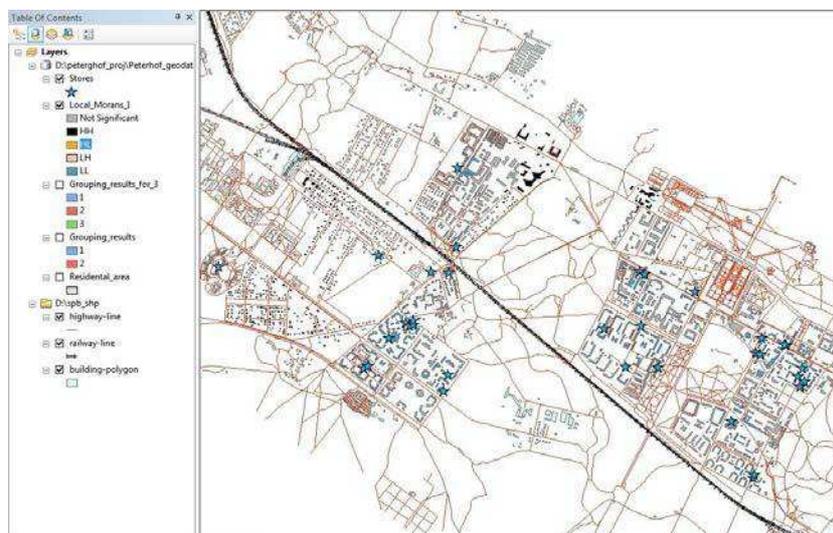


Рис. 2. Отображение итоговых результатов кластеризации на карте

Заключение. По итогам расчета статистики были выделены две значимые группы среди исследуемых объектов: 1) участки жилой застройки с небольшим расстоянием до торговой точки, имеющие высокие значения индекса Морана (группа *LL*); 2) участки жилой застройки, наиболее удалённые от торговых точек, имеющие высокие значения индекса Морана (группа *HH*). Последняя группа представляет собой искомые зоны сгруппированных жилых строений, удалённых от существующих торговых точек на расстояние выше принятого норматива. Данный результат является прямой оценкой физического доступа населения к объектам потребительского рынка.

Литература

1. ArcGIS Help 10.1 – ArcGIS Tutorials.
<http://resources.arcgis.com/en/help/main/10.1>
2. Anselin L. Local indicators of spatial association – LISA // Geographical Analysis, 2005. Vol. 27. P. 93–115.
3. Bavaud F. Models for spatial weights: a systematic look// Geographical Analysis, 1998. Vol. 30. P. 153–171.

Бусько И. В., Дегтярев А. Б.

Санкт-Петербургский государственный университет

Идентификация параметров волнения в бортовой интеллектуальной системе. Линейный случай

1. Введение. При управлении судном в море требуется знание характера внешнего воздействия. Это знание дает возможность правильно и эффективно управлять динамическим объектом. В последние десятилетия появился интерес к решению такой задачи. Существуют различные предложения по решению: на основе волнового радара, с использованием спутников, нахождение спектра волнения на основе анализа реакции судна на воздействие со стороны моря и т. п. Во всех решениях есть свои проблемные места и окончательного решения задачи пока не предложено.

Мы разрабатываем решение, которое основано на взаимодействии судна и волнения, или, другими словами, на анализе реакции судна на воздействие моря. На данный момент в этом направлении сделано достаточно много исследований в последнее десятилетие, но решения в общем случае предложено не было. В этих работах при решении использовались различные ограничения на данные и предположения. Наше предложение отличается от существующих тем, что мы предлагаем общий подход в решении.

Определение внешнего воздействия является обратной задачей. Решение таких задач не является корректным, и поэтому привлечение как можно большего количества дополнительной информации дает возможность получить более надежное решение. При этом все вычисления надо производить в режиме реального времени и за определенный промежуток времени. Чтобы достичь решения за заданное время, возникает необходимость применения параллельной архитектуры. При этом использование дополнительной информации для повышения эффективности прогнозирования хорошо согласуется с принципами естественной парадигмы распараллеливания.

2. Постановка задачи и её решение. При оценке параметров волнения в условиях эксплуатации морских динамических объектов (ДО) одной из сложных проблем является восстановление спектра возмущений. Эта задача решается на основе косвенных динамиче-

ских измерений процесса колебательного движения ДО на волнении. При адаптивном управлении в процессе функционирования ДО возникает задача идентификации типа «черный ящик» и задача «распознавания образов». При этом структура и параметры возмущения неизвестны и необходимо восстановить необходимые характеристики в режиме реального времени. Ниже рассмотрена проблема параметрической идентификации на основе адаптивной модели, реализация которой может быть осуществлена в бортовой интеллектуальной системе (ИС) [1, 2]. Решение задачи мы основываем на использовании параллельно нескольких алгоритмов решений. Это позволит в текущих условиях выбрать наиболее эффективную технологию и рассматривать решение как «пересечение решений» различных алгоритмов.

Волновое воздействие $\zeta(t)$ имеет характеристики: функцию распределения, спектральную плотность, дисперсию. Математически волновое воздействие на судно выражается в виде $\exists f : f(\zeta) \rightarrow Y(t)$ — существует оператор f , который переводит воздействие в вектор параметров судна $Y(t)$. Изменения параметров судна показывают датчики. Данный оператор может быть как линейным, так и нелинейным. Волновое воздействие также может быть как линейной функцией, так и нелинейной. Отсюда следует, что функция $Y(t)$ либо линейная, либо нелинейная. Имеем три следующих случая:

1. $\zeta(t)$ — линейная функция, f — линейный оператор, тогда Y — линейная функция.
2. $\zeta(t)$ — линейная функция, f — нелинейный оператор, тогда Y — нелинейная функция.
3. $\zeta(t)$ — нелинейная функция, f — любой, тогда Y — нелинейная функция.

Стандартный подход, использованный многими исследователями, заключается, в первую очередь, в предположении о возможности представления судна линейной системой. В этой работе представлен линейный случай системы. Уравнение движения под воздействием волнения имеет вид

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = \zeta(t), \quad (1)$$

где величина a характеризует трение, b — частоту собственных колебаний, $\zeta(t)$ описывает возмущение.

2.1. Первый алгоритм решения. Линейность дает принципиальную возможность воспользоваться для восстановления параметров волнения известным в этом случае соотношением между входной и выходной спектральными плотностями.

$$S_y(\sigma) = |F_{xy}(\sigma)|^2 S_x(\sigma), \quad (2)$$

где $S_x(\sigma)$ — спектральная плотность входного процесса, которая может быть связана с процессом возмущения — морским волнением; $S_y(\sigma)$ — спектральная плотность выходного процесса — зарегистрированный процесс колебаний судна, вызванный действием волн; $F_{xy}(\sigma)$ — передаточная функция линейной системы. Для построения передаточной функции нужен алгоритм настройки параметров судна a и b , или, другими словами, надо решить задачу идентификации типа «черный ящик». После нахождения спектральной плотности $S_x(\sigma)$ требуется распознать ее среди возможных спектров или решить задачу «распознавание образа».

Проблемы, возникающие при такой схеме восстановления обсуждались в [1], решению которых в рамках классической теории управления и нейронечетких систем посвящены [2–4]. Анализ этих исследований позволяет сформулировать следующие основные проблемы:

1. Зашумленность регистрируемого сигнала или сложность выделить полезный сигнал на фоне процессов, обусловленных другими физическими причинами. Как следствие, получение малоинформативных сигналов.
2. Использование для облегчения восстановления параметров ветрового волнения известных аппроксимаций спектральной плотности (см., например, [5]).
3. Нарушение предположения о линейности системы при регистрации нелинейных колебаний. Такая ситуация особенно актуальна при интенсивных внешних воздействиях.

В качестве принципиального пути решения этих проблем возможно привлечение дополнительной информации с целью взаимной перепроверки результатов, получаемых разными путями. Так с целью использования наиболее информативного сигнала возможно использование сразу двух процессов колебаний ДО — килевой и бортовой

качки. Результаты, получаемые для восстановления параметров волнения по каждому из этих процессов, будут отличаться. В то же время, на основании совместного рассмотрения различных источников данных при известных условиях проведения эксперимента возможно более надежное выделение информативных составляющих и повышение точности идентификации параметров волнения.

Другая проблема, связанная с применением известных аппроксимаций спектральной плотности, может быть решена на базе концепции «климатического спектра» [6, 7]. Эта концепция позволяет конкретизировать тип спектральной плотности волнения, чередование характерных состояний волновой погоды для заданного района плавания и сезона. Знание района эксплуатации, сезона и погодной предыстории позволяет, используя эту концепцию, заложить в процедуру восстановления параметров волнения характерную для текущих условий форму аппроксимации спектральной плотности.

2.2. Второй алгоритм решения. Мы тоже для начала решим линейный случай и только затем перейдем к решению нелинейного случая. Наш алгоритм основан на сравнении предполагаемого вектора судна $Y^*(t)$ с реальным вектором $Y(t)$, который вычислен с помощью датчиков. $Y^*(t)$ получен как результат решения уравнения движения (1), когда в правую часть подставлена функция возмущения одного из возможных волновых спектров для данного района в данное время года.

Проблема реализации концепции «климатического спектра» предусматривает для заданного набора внешних возмущений проведение предварительного систематического моделирования качки ДО в различных условиях эксплуатации. Эти данные отражают качественную картину изменения характера отклика ДО на заданные внешние воздействия, хранятся в базе знаний бортовой ИС и используются в процессе идентификации параметров волнения на основании поведения ДО. В этом случае задача идентификации выглядит следующим образом. Прогноз развития шторма основывается на исследовании изменения параметров волнения в течение некоторого интервала в режиме реального времени. На основе данных динамических измерений качки ДО можно использовать итеративный алгоритм адаптивной идентификации параметров волнения (рис. 1).

Алгоритм является развитием подхода, изложенного в работе [8]. Реализация алгоритма осуществляется в интервале времени, задан-

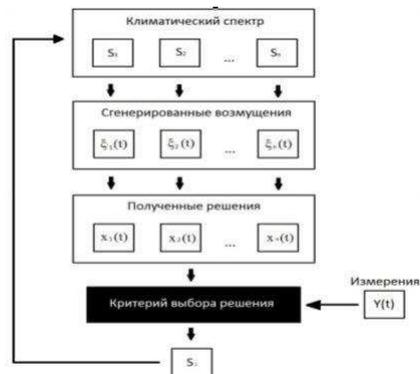


Рис. 1. Алгоритм идентификации параметров волнения

ном в зависимости от контролируемой ситуации. Причем в каждый временной интервал считываются показания датчиков колебательного движения ДО и происходит итерация алгоритма в такой последовательности:

1. На первом шаге выбираются характерные спектры для района плавания.
2. На втором шаге строятся функции возмущения для каждого из спектров.
3. Согласно выбранной математической модели (в данном случае мы имеем линейную модель) численно вычисляется решение уравнения движения.
4. В результате получают данные измерений и набор решений уравнения движения. Выбор решения происходит согласно заданному критерию.
5. На выходе итерации выделяется один из характерных спектров для прошедшего момента времени.

Далее через заданный интервал времени снова начинается итерация алгоритма, которая дает возможный вид спектра волнения в следующий момент времени. От описанной выше итерации она отличается тем, что при выборе характерных спектров будет учитываться вид спектра, найденный на предыдущей итерации. Таким

образом, по истечению некоторого времени мы составим представление об изменении спектра волнения.

Для построения уравнения (1) в нашем подходе нужен алгоритм настройки параметров судна a и b , что является задачей идентификации типа «черный ящик». Требуется решение задачи выбора решения, наиболее близкого к измеренному значению. Так как разные виды качки — бортовая, килевая — могут вносить разный вклад в движение судна, то в решении надо учитывать наиболее информативный сигнал. Как видно из рис. 1 алгоритм предполагает решение некоторого количества дифференциальных уравнений.

Требование обеспечить получение решения в режиме реального времени приводит к мысли использования мультипроцессорной архитектуры. Предложенное нами решение просто распараллеливается. Распараллеливание идет по алгоритмам, по данным, по решению отдельных слабосвязанных задач: идентификация параметров судна, решение дифференциальных уравнений, распознавание образов. В заключение добавим, что новые алгоритмы и/или новые данные могут помочь уточнению решения и при этом особо не затруднить внесения изменений в существующее решение.

3. Заключение. Таким образом, проблема идентификации параметров волнения в условиях неопределенности представляет собой одно из важных направлений в решении общей задачи функционирования ИС обеспечения мореходных качеств морских ДО. Был предложен более общий подход к решению задачи, основанный на использовании нескольких алгоритмов решения одновременно. Также был предложен новый, обобщающий уже существующие попытки решения задачи, алгоритм, который активно использует «климатический спектр», характерный для существующего района плавания. Реализация данного решения предполагается в мультипроцессорной вычислительной среде из-за требования осуществления его в режиме реального времени.

Литература

1. Нечаев Ю. И., Демкин М. А. и др. Бортовые интеллектуальные системы. Часть 1, 2. Авиационные системы. Корабельные системы. М.: Радиотехника, 2006. 104 с. Часть 3. Системы корабельной посадки летательных аппаратов М.: Радиотехника, 2008. 112 с.

2. Нечаев Ю. И. Теория катастроф: современный подход при принятии решений. СПб.: АРТ-Экспресс, 2011. 623 с.
3. Нечаев Ю. И. Математическое моделирование в бортовых интеллектуальных системах реального времени // Труды 5-й всероссийской научно-технической конференции Нейроинформатика. Часть 2. Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ, 2003. С. 119–179.
4. Нечаев Ю. И., Тихонов Д. Г. Нейропрогноз на основе логического вывода по прецедентам // Сборник научных трудов 7-й всероссийской научно-технической конференции Нейроинформатика. М.: МИФИ, 2005. С. 197–204.
5. Nielsen U. D., Stredulinsky D. C. Onboard sea state estimation based on measured ship motions // Proceedings of the 12th international ship stability workshop. USA, 2011. P. 61–67.
6. Бухановский А. В., Дегтярев А. Б., Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Климатические спектры ветрового волнения // Судостроение, 1997. С. 14–18.
7. Degtyarev A. V. New approach to wave weather scenarios modeling // Contemporary ideas on ship stability and capsizing in waves, fluid mechanics and its applications / Ed. by M. A. S. Neves. USA: Springer, 2011. P. 599–617.
8. Благодарный Н. С., Кобозев В. Ю. Метод идентификации и проверки адекватности имитационной модели технологического процесса // Сборник докладов международной конференции по мягким вычислениям и измерениям SCM-2011. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ, 2011. С. 137–140.

Ганкевич И. Г.

Санкт-Петербургский государственный университет

Эффективность МІС архитектуры в задаче решения стохастических дифференциальных уравнений

Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.

Введение. Стохастические дифференциальные уравнения представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных, в которых один или более членов, а также решение описывают стохастические процессы, и одним из таких уравнений является уравнение Блека — Шоулза. Среди методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений наиболее простым считается метод Монте-Карло, в котором в случае уравнения Блека — Шоулза с помощью псевдослучайных чисел моделируется процесс изменения цен на опции. Данная модель была выбрана в качестве примера реальной задачи, а метод решения был выбран как самый простой в реализации на параллельных архитектурах компьютеров. Описанию методики преобразования исходного кода программы и обсуждению результатов тестов производительности и посвящена данная статья.

Методика преобразования и тестирования кода программы для МІС архитектуры. Методика тестирования программы включала в себя компиляцию и запуск программы под x86 и МІС архитектуры, которые проводились с помощью специализированных инструментальных средств, и состояла из трех этапов. Первый этап состоял в отладке последовательной версии кода и его оптимизации под x86 архитектуру. Компилятор Intel использовался для тестирования различных вариантов опций, а инструмент Intel Vtune Amplifier — для измерения производительности отдельных частей исходного кода программы. Целью второго этапа был анализ зависимостей по данным и последующее распараллеливание и векторизация кода, обрабатывающего независимые структуры данных, и цель была достигнута путем использования библиотеки Intel OpenMP, «нотаций массивов» (Intel Cilk Array Notation), а также специфических директив компилятора Intel. Наконец, третий этап тестирования состоял в оптимизации программы под МІС архитектуру и сравнении

производительности с x86 архитектурой. В целом, исходная программа была оптимизирована под архитектуру МПС путем выбора определенных опций компиляции, путем векторизации исходного кода, и производительность измерялась с помощью стандартных инструментов на каждом этапе тестирования.

Этап I. Первый этап преобразования незначительно повлиял на производительность программы, однако он создал основу для оптимизаций на следующих этапах. Во-первых, все файлы, содержащие исходный код, были объединены в один файл для включения межпроцедурной оптимизации (опция `-ip`), и опции `-Wall -Wextra -std=c99` были использованы для исключения отмеченных компилятором подозрительных участков кода и для его преобразования в соответствие со стандартом C99. Далее, опции `-strict-ansi -fno-alias` и ключевое слово `restrict` были использованы для исключения пересечения массивов в памяти устройства. Также подпрограмма `posix_memalign` и внутренние директивы компилятора `__assume_aligned` и `_assume` были использованы для выравнивания массивов по границам в 16 байт (64 байта для МПС архитектур) для исключения неэффективных операций доступа к памяти [1]. Несмотря на проделанные оптимизации, опции отчетов `-vec-report -opt-report-phase=hlo -opt-report 3` показали, что они имеют незначительный эффект на результирующий исполняемый файл, и не все циклы были векторизованы в автоматическом режиме. Таким образом, получившийся код требовал более детального исследования и ручной оптимизации, что и стало целью второго этапа тестирования.

Этап II. Детальное исследование исходного кода показало, что большая часть процессорного времени тратится на выполнение одной функции в цикле, и эта функция была модифицирована для увеличения производительности. Анализ «горячих точек» в Intel Vtune Amplifier XE определил, что большая часть времени тратится на исполнение функции `current_solution`, в которой компилятор не векторизовал код. Ручной анализ кода показал, что между итерациями внешнего цикла функции нет зависимости по данным, и этот цикл был распараллелен с помощью директивы OpenMP `#pragma omp for schedule(dynamic)`; динамическое планирование итераций цикла было выбрано после тестирования производительности. Такое преобразование кода сократило время выполнения программы почти в два раза на двухпроцессорном компьютере (см. таб-

лицу 1). Далее в коде были определены дополнительные массивы, необходимые для векторизации тела внешнего цикла, и это преобразование сократило время выполнения еще примерно в два раза при длине вектора, равной четырем. Для получения максимальной производительности были проведены эксперименты с разными инструментами векторизации, такими как Intel Cilk array notation [2], `#pragma simd` и автоматической векторизацией компилятором, что позволило получить четырехкратное ускорение по сравнению с последовательной версией программы. После проведения описанных оптимизаций анализ параллелизма в Intel Vtune Amplifier показал, что только 0,057 секунд тратится на синхронизацию независимых потоков исполнения, что свидетельствует о хорошем уровне оптимизации программы. В целом, с помощью распараллеливания на уровне потоков и последующей векторизации удалось получить четырехкратное ускорение на двухъядерном x86 процессоре.

Таблица 1. Спецификация программно-аппаратной вычислительной платформы, использованной на первом и втором этапе тестирования

Операционная система	CentOS release 5.8 (Final)
Компилятор	Intel(R) C Intel(R) 64 Compiler XE 12.1.1.256 Build 20111011
Вычислитель	2x Intel(R) Xeon(R) CPU X5670 @ 2.93ГГц (2 ядра, виртуальная машина VMware)

Этап III. В заключительной фазе тестирования оптимизированный код программы был перенесен на платформу с ускорителем Xeon Phi (таблица 2) и настроен под архитектуру MIC, однако многоядерный процессор показал большую производительность, чем ускоритель MIC. Во-первых, последовательная и параллельная версии программы были перезапущены на новой платформе (таблица 2), и показали ускорение в 23,62 раза на 24 ядрах для сетки `TIME_GRID=64`. Далее, путем использования опции `-mmic` и команды `micnativeoadex` [3] исходный код был скомпилирован под архитектуру ускорителя и запущен на нем, показав ускорение в 87,82 раза на 60 ядрах для сетки `TIME_GRID=64`. Затем параллельная версия программы были запущены еще раз с увеличенным размером сетки `TIME_GRID=256` и завершились через 247 и 903 секунд на x86 и MIC вычислителях. Таким образом, переход от x86 к MIC архитектуре увеличил ускорение относительно последовательной версии программы ввиду большего размера вектора (16 против 4 элементов), но 24 ядра архитектуры x86 показали меньшее общее время выполнения по сравнению с 60 ядрами MIC (таблица 3).

Таблица 2. Спецификация программно-аппаратной вычислительной платформы, использованной на третьем этапе тестирования

Операционная система	Red Hat Enterprise Linux Server release 6.1 (Santiago)
Компилятор	Intel(R) C Intel(R) 64 Compiler XE 13.0.0.079 Build 20120731
Вычислитель	2x Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2640 0 @ 2.50ГГц (24 ядра) Intel XEON PHI-5110P @ 1.053ГГц (60 ядер)

Результаты. Целью тестирования было сравнение производительности вычислителей MIC с традиционными x86 компьютерами на примере легко распараллеливаемых и векторизуемых расчетов Монте-Карло. Несмотря на проделанные автоматические и ручные оптимизации, проводившиеся под контролем анализатора производительности, общее время выполнения программы на ускорителе больше, чем на x86 компьютере. Таким образом, использование ускорителя MIC в качестве замены основному процессору x86 неэффективно, а эффективность его использования в качестве сопроцессора требует дополнительных исследований.

Таблица 3. Сравнение производительности и ускорения последовательной и параллельной версий программы на архитектурах MIC и x86

Арх.	Сетка	Ядра	Время, с.	Ускорение	Эффективность, %
x86	64	1	189,06	1	100
x86	64	24	8	23,62	98
x86	256	1	6160,52	1	100
x86	256	24	247,18	24,92	104
MIC	64	1	2206,48	1	100
MIC	64	60	25,12	87,82	146
MIC	256	1	75248,89	1	100
MIC	256	60	903,18	83,32	139

Литература

1. Doerner Wendy. Advanced Optimizations for Intel MIC Architecture. <http://software.intel.com/en-us/articles/advanced-optimizations-for-intel-mic-architecture>
2. Green Ronald W. Vectorization Essentials. <http://software.intel.com/en-us/articles/vectorization-essential>
3. Intel Xeon Phi Coprocessor System Software Developers Guide. <http://software.intel.com/sites/default/files/article/334766/intel-xeon-phi-systemsoftwaredevelopersguide.pdf>

Гришкин В. М., Якушкин О. О.
Санкт-Петербургский государственный университет

Разработка брокерной системы передачи сообщений на C#

1. Введение. Высоко нагруженные распределенные вычислительные системы состоят из набора элементов, связанных коммуникационной прослойкой. Выделяется три типа таких коммутаторов: «точка-точка», «пиринговая сеть» и «брокер». «Точка-точка» позволяет максимально быстро доставить информацию от одного отправителя к одному получателю. В пиринговой сети команда от отправителя рассылается по сети остальным участникам. Брокеры дают возможность в рамках единой системы дифференцировать отправляемые сообщения по темам, для того, чтобы только подписавшиеся участники сети могли получить специфически промаркированные сообщения.

В системах, состоящих из разнородных подзадач, которые требуют специфического оборудования или настройки, для успешного управления необходимо применение не только метода тематической массовой рассылки, но и точечного взаимодействия узлов.

2. Постановка задачи. Это является актуальной исследовательской задачей, которая решалась при создании распределенной гетерогенной системы, предоставляющей удаленный доступ к изображениям и их обработке на высокопроизводительном кластере факультета ПМ–ПУ [1]. Для ее реализации был проведен критический анализ ряда уже существующих решений для аналогичных систем.

Одной из наиболее известных реализаций концепции сетевого брокера является RabbitMQ. Возможность создавать системы с множеством участников, отправляющих тематические сообщения, удобна для создания сети, информирующей о происходящих в системе событиях [2], однако, реализация точечного управления в рамках одного коммуникационного канала требует сильного усложнения архитектуры и ручной реализации системы адресации сообщений на стороне клиентов брокера.

Популярной библиотекой для разработки пиринговых систем является ZeroMQ. Ее интерфейс удобен для точечного взаимодействия или односторонней рассылки команд, но не предоставляет абстрак-

ций для идентификации сущностей, взаимодействующих в рамках одного канала [3, 4].

Неоптимальность анализируемых решений продиктовала необходимость разработки собственного программного продукта, предоставляющего как тематическую, так и адресную маршрутизацию сообщений в рамках единого канала.

3. Архитектура системы. В основе системы лежит сервер-брокер, к которому подсоединяются участники сети. У каждого участника имеется уникальный идентификатор, по которому к нему можно напрямую обратиться через брокера, и набор тем сообщений, на которые он подписан.

Сообщения в системе делятся на два типа: операции и события. Операции имеют однозначного получателя и отправителя, а события промаркированы темой и доставляются через брокера всем подписавшимся, сохраняя идентификатор отправителя.

Такая интеграция в брокера событий системы операций позволяет реализовать не только паттерн «Publish-Subscribe», но и «Request-Response» между любыми участниками одного канала, что придает большую гибкость системе. Важный для систем с высокой нагрузкой паттерн «Surveyor-Respondent» [5] привносится в данную архитектуру созданием сообщения, отправляемого брокеру, содержащего набор адресатов, которым направлен запрос, и временное ограничение на сборку их ответов.

Сущности, необходимые клиенту для работы с каналом брокера, сводятся к асинхронным менеджерам рассылки операций, событий и опросов, а также приемщикам операций и сообщений.

4. Реализация решения. Используя C# .NET [6], разработан сервер-брокер и клиентская библиотека к нему. Для поддержания возможности общения с клиентами, реализованными на других языках, протокол составлен открытым языком описания данных Google Protobuf [7].

Реализация брокера позволяет интегрировать стороннюю систему кодирования и предобработки сообщений, что дает возможность внедрения бизнес-логики авторизации клиентов и дополнительных механизмов сжатия сообщений.

Балансировка нагрузки рассылки сообщений осуществляется умной очередью, ограничивающей для каждого отправителя максимально допустимое количество последовательных сообщений.

5. Заключение. В ходе создания системы разработан протокол общения, поддерживающий тематическую и адресную маршрутизацию сообщений. Описано создание оригинального прототипа коммуникационного брокера, предоставляющего такие паттерны передачи сообщений, как «Request-Reply», «Surveyor-Respondent» и «Publish-Subscribe». Перспективой развития брокера представляется поддержание кластеризации, которая позволит объединять системы, связанные брокерами. Выбор стратегии адресации дублирующих пользователей объединяемых сетей и передача сообщений таким пользователям является актуальной задачей при разработке любой расширяемой системы.

Литература

1. Cloud Observer on Google Code.
<http://cloudobserver.googlecode.com>
2. Videla A., Williams J. RabbitMQ in action // Distributed messaging for everyone / Manning Publications Co., 2012. 288 p.
3. Hintjens P. Code connected // Learning ZeroMQ / CreateSpace Independent Publishing Platform, 2013. 318 p.
4. ZeroMQ – The Guide. <http://zguide.zeromq.org/>
5. Design patterns in communications software / Ed. by L. Rising. Cambridge University Press, 2001. 548 p.
6. .NET on MSDN.
<http://msdn.microsoft.com/en-us/vstudio/aa496123>
7. Protocol Buffers on Google Code.
<http://protobuf.googlecode.com>

Ишкулов¹ И. Г., Шлыков² В. А.

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²ОАО Северное ПКБ

Использование виртуализации и облачной инфраструктуры при разработке комплексного имитационного стенда

Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.

1. Введение. За последнее время виртуализация стала одной из ключевых технологий во многих сферах ИТ индустрии. Ее относят к числу наиболее перспективных и выгодных решений [1, 2]. Важным фактором является то, что виртуализация позволяет перенастраивать ИТ-инфраструктуру и перераспределять ресурсы в соответствии с потребностями.

В данной работе рассматривается применения виртуализации при разработке комплексно имитационного моделирующего стенда (КИМС). Накопленный в отечественной и зарубежной практике опыт показал необходимость испытаний при создании автоматизированных систем обработки информации и управления (АСОИУ). КИМС необходим для проведения испытаний опытных образцов, которые позволяют определить соответствие результата работ заданным требованиям и оценить пригодность разработанной системы [3].

Для управления инфраструктурой КИМС предлагается использование облачной платформы на основе OpenStack.

2. Анализ требований. Система, для которой изначально разрабатывался стенд, состояла из большого количества различных подсистем. Каждая подсистема состоит из нескольких отдельных модулей. Каждый модуль в свою очередь выполняется на отдельной ЭВМ. Разработкой подсистем занимались различные разработчики. Каждый разработчик применял привычные для него средства разработки. В связи с этим, для работы подсистемы требовались различные операционные системы: Window XP, QNX, ОС КПДА, МСВС.

Программное обеспечение стенда должно было соответствовать требованиям ФСТЭК России:

- 2-ой уровень контроля отсутствия НДВ;
- класс защищенности от НСД к информации 1Б.

Для обеспечения данных требований основной операционной системой была выбрана система «Astra Linux Special Edition» (Astra Linux SE), удовлетворяющая требованиям ФСТЭК [4].

Модули взаимодействуют друг с другом через локальную вычислительную сеть. Максимальная нагрузка сети в конечной системе была заранее известна и не должна была превышать 40 Mbs. Исходя из этого, в качестве сети на стенде использовался 1Gbps Ethernet.

3. Виртуализация. Для сокращения количества используемых ЭВМ была выбрана технология виртуализации. Виртуализация позволяет запускать несколько виртуальных операционных систем (гостевых операционных систем) одновременно на физической ЭВМ, при этом гостевые операционные системы вообще могут быть разными. Это позволяет заменить физические ЭВМ на виртуальные и разместить по несколько виртуальных ЭВМ на одной физической. Дополнительно это увеличивает нагрузку ЭВМ и повышает коэффициент использования аппаратуры, что позволяет существенно сэкономить на аппаратуре, обслуживании и электроэнергии.

Аппаратная виртуализация обеспечивает производительность, сравнимую с производительностью не виртуальной ЭВМ. Исходя из этого, количество серверов было выбрано из расчета, что для каждой виртуальной ЭВМ можно выделить N процессоров, где N — количество процессоров ЭВМ в реальной системе конкретного модуля.

Для соответствия требованиям ФСТЭК использовалась операционная система Astra Linux SE, имеющая сертификаты, подтверждающие соответствие ФСТЭК. На момент разработки Astra Linux SE была единственной ОС, имеющей сертификат ФСТЭК.

В среде Astra Linux SE представлен гипервизор KVM на основе аппаратной виртуализации Intel VT или AMD SVM. Гипервизор KVM обеспечивает аппаратную виртуализацию для гостевых систем. Каждая гостевая операционная система представляет собой отдельный процесс базовой операционной системы. Процесс KVM имеет изолированное от других гостевых процессов адресное пространство. Подробную информацию про KVM можно найти в [5].

Для повышения изоляции процессов гостевых ОС и разграничения доступа пользователям может быть использовано мандатное разграничение доступа к процессам гипервизора. В этом режиме на процесс гипервизора и образ ВМ устанавливаются дополнительные мандатные атрибуты. Управление ВМ и удаленное подключение по протоколам VNC и SPICE в этом случае возможно только для пользователей с идентичными мандатными атрибутами.

Использование виртуализации позволяет в короткие сроки построить КИМС для работы другой системы, а также последующее использование созданной инфраструктуры в составе ИТ инфраструктуры предприятия.

4. Облачная инфраструктура. Для управления вычислительными ресурсами была использована облачная платформа на основе OpenStack [6]. OpenStack — это комплекс проектов свободного программного обеспечения, которое может быть использовано для создания вычислительных облаков и облачных хранилищ, как публичных, так и частных (работающих только для обеспечения внутренних нужд компании). Эти проекты распространяются под лицензией Apache License 2.0. Разработанная платформа получила название «Глобула».

Облачная платформа «Глобула» состоит из набора компонент со стандартизированным прикладным программным интерфейсом (API). Комбинируя состав разворачиваемого облачного сервиса, возможно решать самый широкий круг задач. Защищенная облачная платформа «Глобула» включает шесть базовых сервисов: менеджер виртуальных машин, реестр образов, инструментальная панель, служба безопасности, сетевой интегратор, оператор блочных устройств.

Инструментальная панель — это модульное веб-приложение, предоставляющее интерфейс пользователям и администраторам к сервисам облака. Аутентификация пользователя осуществляется веб-сервером по протоколу Kerberos с использованием средств защиты информации (СЗИ), встроенных в Astra Linux SE. Типовая конфигурация предполагает использование средств аутентификации Kerberos службы Astra Linux Directory (ALD).

Менеджер управления виртуальными машинами обрабатывает запросы пользователя и передает их в гипервизор KVM, также он

выполняет функции диспетчера, определяет физическую ЭВМ, на которой будет запущена виртуальная ЭВМ.

Реестр образов позволяет пользователям производить манипуляции с образами виртуальных машин. Через реестр образов загружаются подготовленные для КИМС образы испытываемых систем. Реестр образов позволяет управлять доступом к образам на основании мандатных меток.

Служба безопасности обеспечивает единую точку интеграции политики, каталогов, меток безопасности и аутентификации. Для авторизации и аутентификации сервис использует AFD. Данные о пользователях и группах запрашиваются из службы каталога, функционирующей в составе AFD. Пользователь должен быть корректно аутентифицирован в домене AFD, чтобы использовать сервисы облака. Это происходит при первичном входе пользователя в систему.

Сетевой интегратор осуществляет функции сетевой интеграции интерфейсов виртуальных ЭВМ и устройств, управляемых другими сервисами облака. Сервис позволяет создавать пользователям собственные сети и подключать к ним интерфейсы виртуальных ЭВМ. С помощью сетевого интегратора возможно создавать виртуальную сеть для каждой испытываемой на КИМС системы, повторяющую сеть реальной системы. Это позволяет избежать изменения настройки сети для модулей системы.

Важной особенностью платформы является возможность ограничения доступа к объектам облачной инфраструктуры (виртуальные ЭВМ, образы и т. д.) в соответствии с мандатными и ролевыми правами пользователей. Процессам виртуальных ЭВМ, запускаемым пользователем с помощью интерфейса «Глобулы» назначаются мандатные метки, соответствующие уровню доступа пользователя. Все механизмы аутентификации и авторизации в «Глобуле» используют механизмы Astra Linux SE.

5. Результаты. Разработанный комплекс программ для КИМС позволяет создавать и модифицировать инфраструктуру. Создавать изолированные сети типа Ethernet, подключать к ним виртуальные ЭВМ, клонировать и делать снимки ВМ, работать с ВМ через протоколы vnc и spice. Применение виртуализации позволило сократить расходы на оборудование и обслуживание.

В рамках проекта разработан прототип облачной платформы

«Глобула», которая в дальнейшем может применяться для построения КИМС-ов. Также «Глобула» может применяться для построения закрытых защищенных «облаков», соответствующих требованиям ФСТЭК. «Глобула» может быть сертифицирована на соответствие требованиям ФСТЭК для упрощения повторного использования. В данный момент рассматривается возможность применения «Глобула» для построения облачных ЦОД.

Литература

1. Kroeker K. The evolution of virtualization // Communications of the ACM – Being Human in the Digital Age, 2009. Vol. 52, No 3. P. 18–20.
2. Богданов А. В., Станкова Е. Н., Мареев В. В. Виртуализация: новые возможности известной технологии. <http://www.ict.edu.ru/ft/005713/68359e2-st15.pdf>
3. Додонов В. А. Организация структуры компьютерного комплексного имитационного моделирующего стенда. // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2007. Т. 9. Вып. 2. С. 42–52.
4. <http://www.astra-linux.com>
5. Kernel Based Virtual Machine. <http://www.linux-kvm.org>
6. Openstack Open Source Cloud Computing Software. <http://www.openstack.org>

Князькин Я. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Компьютерное моделирование процесса поворота морского судна по курсу с оптимизацией по быстродействию

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. В работе рассматриваются вопросы построения компьютерной модели системы управления курсом морского судна и проведение имитационного моделирования процессов управления на базе этой модели. В центре внимания находятся стабилизирующие законы управления, обеспечивающие приближение к оптимальному быстродействию при повороте судна на заданный курс. В качестве уравнений динамики принимается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\delta, \\ \dot{\delta} &= u, \end{aligned} \tag{1}$$
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \omega \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где β — угол дрейфа, ω — угловая скорость вращения по курсу, φ — курс, δ — угол отклонения вертикального руля, u — управляющий сигнал. При формировании управления учитываются ограничения $|\delta| \leq 30^\circ$ и $|u| \leq 3^\circ/\text{с}$.

Поставим задачу о формировании управляющего воздействия

$$u = k_1\beta + k_2\omega + k_3(\varphi - \varphi_z) + k_4\delta, \tag{2}$$

которое обеспечивает поворот объекта на желаемый угол φ_z и стабилизирует соответствующее положение равновесия замкнутой системы (1), (2). Время перехода в малую окрестность этого положения должно быть сделано минимальным за счет выбора коэффициентов $k_1 \div k_4$ в (2). Заметим, что простота принятого закона позволяет осуществлять настройку коэффициентов обратной связи прямо на борту судна, что допускает адаптацию к конкретным условиям функционирования по результатам идентификации параметров объекта.

В связи с этим, компьютерная модель системы управления также должна включать модуль настройки указанных коэффициентов.

2. Выход на заданный курс в программном режиме. В качестве базы для выбора коэффициентов $k_1 \div k_4$ в соотношении (2) примем *программное* управление, обеспечивающее наиболее быстрый разворот судна. Целью такого управления служит перевод системы (1) из начальной точки $x_0 = x(0) = (0 \ 0 \ 0)'$ в точку $x_\varphi = x(T_\varphi) = (0 \ 0 \ \varphi_z)'$, т. е. поворот по углу φ на заданную величину φ_z , где T_φ — заранее не фиксированный момент времени. Качество поворота будем оценивать его длительностью, т. е. значением функционала $T_\varphi = T_\varphi(u)$, заданного на множестве управлений, определяемых заданными выше ограничениями. Существо задачи теории оптимального быстрогодействия состоит в поиске такого программного управления $u = u_c(t)$ из указанного множества, которое обеспечивает минимум функционала $T_\varphi = T_\varphi(u)$. Методы точного решения этой задачи достаточно сложны для реализации на борту, что определяет необходимость применения приближенного подхода к поиску управления. Предлагаемый приближенный подход заведомо ориентирован на бортовую компьютерную реализацию. Он основан на представлении оптимального управления, как релейной функции, с количеством переключений, которое, в соответствии с теоремой Фельдбаума, в данном случае не превосходит трех (все собственные числа матрицы A действительные). Оптимальное управление в виде функций и качественно показано на рис. 1. Естественно, что его конкретный вид однозначно зависит от командного сигнала, однако имеются общие закономерности, следующие из физического смысла процесса, которые разумно использовать при приближенном синтезе.

Рассмотрим вопрос о приближенном поиске моментов $t_1 \div t_4$ переключения управления. Заметим, что нижней оценкой для минимального времени поворота с очевидностью служит величина, определяемая равенством, где функция соответствует движению при условии, определяющему максимально быстрый выход руля на упор в нужном направлении и дальнейший разворот по курсу с максимальным значением отклонения руля.

Для поиска первого переключения легко построить итеративный процесс и найти такой момент $t = t_1$, чтобы выполнилось условие $\max_{t \in [t_0, \infty]} = |\varphi_z|$. Этому условию удовлетворяет конкретное дви-

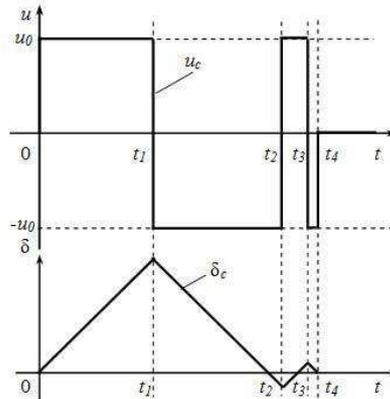


Рис. 1. Управление и отклонение рулей в программном повороте

жение $\varphi = \varphi^*(t)$, для которого выполняется равенство $\varphi^*(t^*) = \varphi_z$ в момент $t = t^*$. Его можно использовать для поиска момента переключения $t = t_2$, который с очевидностью должен принадлежать отрезку $[t^{**}, t^*]$, где $t = t^{**}$ — момент перехода рулей δ_c через ноль. Легко видеть, что $t^{**} < t^*$, поскольку причиной изменения знака скорости ω может быть только изменение направления отклонения руля. Поиск момента переключения на отрезке $[t^{**}, t^*]$ можно осуществлять любым способом, включая перебор с определенным шагом. К сожалению, поиск моментов переключения t_3 и t_4 сопряжен с определенными вычислительными трудностями, однако, как будет показано ниже, в их точном определении нет необходимости.

3. Комбинированный режим разворота. Возникшие трудности с поиском последних двух моментов могут быть преодолены с использованием комбинированного управления, включающего как участок программного движения, так и движения с замыканием обратной связью.

Сначала, как и в предыдущем случае, руль поворачивается с максимальной скоростью до момента t_1 , потом с максимальной скоростью поворачивается обратно до момента t_2 . За это время объект приходит в состояние, которое достаточно близко к требуемому.

Наконец, на последнем участке включается стабилизирующее управление вида (2). Его коэффициенты можно получить, исполь-

зую идеологию LQR-оптимизации [1], причем выбор весовых множителей в интегральном квадратичном функционале позволяет влиять на длительность завершающего движения и на величину перерегулирования.

Синтезированный регулятор (2), включенный в момент $t = t_2$, подтягивает объект к желаемому положению, что позволяет найти недостающие точки переключения t_3 и t_4 .

4. Построение квазиоптимальной обратной связи. Найденное программное управление $u = u_c(t)$, которое близко к оптимальному по быстрдействию, позволяет выполнить полную настройку коэффициентов линейной обратной связи (2). Рассуждения строятся на том факте, доказанном в работе [2], что реализация конкретного оптимального по времени программного управления рассматриваемого типа с известными моментами переключения для линейного объекта (1) может быть осуществлена с помощью стабилизирующей линейной обратной связи (2). Эта обратная связь замыкает объект

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf_\delta(\delta), \\ \dot{\delta} &= f_u(u), \end{aligned} \quad (3)$$

где функции-срезки f_δ и f_u вводят в систему ограничения $|\delta(t)| \leq \delta_0, |u(t)| \leq u_0$ на угол и скорость поворота рулей соответственно.

Таким образом, существует обратная связь вида (2), обеспечивающая устойчивость замкнутой системы и дающая для неё оптимальный по времени переходный процесс. Но тогда коэффициенты такой обратной связи должны обеспечивать выполнение четырех равенств, соответствующих указанным выше моментам переключения:

$$\begin{aligned} u_c(t_1) &= k_1 x_{c1}(t_1) + k_2 x_{c2}(t_1) + k_3(x_{c3}(t_1) - \phi_z) + k_4 \delta_c(t_1), \\ u_c(t_2) &= k_1 x_{c1}(t_2) + k_2 x_{c2}(t_2) + k_3(x_{c3}(t_2) - \phi_z) + k_4 \delta_c(t_2), \\ u_c(t_3) &= k_1 x_{c1}(t_3) + k_2 x_{c2}(t_3) + k_3(x_{c3}(t_3) - \phi_z) + k_4 \delta_c(t_3), \\ u_c(t_4) &= k_1 x_{c1}(t_4) + k_2 x_{c2}(t_4) + k_3(x_{c3}(t_4) - \phi_z) + k_4 \delta_c(t_4). \end{aligned} \quad (4)$$

Обратим внимание на то, что в приведенных равенствах все элементы, кроме коэффициентов $k_1 \div k_4$, известны, если сформировано программное управление $u = u_c(t)$ (найлены моменты $t_1 \div t_4$ переключения) и построено соответствующее ему движение $x_c(t)$ и $\delta_c(t)$ объекта (3).

Тогда равенства (4) могут трактоваться как однородная система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $k_1 \div k_4$ обратной связи (2). Далее можно так зафиксировать один из коэффициентов, что после отбрасывания четвертого уравнения оставшаяся неоднородная система будет иметь единственное решение.

5. Пример синтеза. Зададим конкретные коэффициенты модели (1)

$$A = \begin{pmatrix} -0,0936 & 0,634 & 0 \\ 0,048V & -0,717 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0,0190 \\ 0,0160 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_z = 10^0.$$

После проведения расчетов получим регулятор (2) с коэффициентами $k_1 = -1,128$, $k_2 = 0,957$, $k_3 = -1,5$, $k_4 = -0,338$, обеспечивающий длительность переходного процесса 20,4 с, что на 26% хуже нижней оценки.

6. Построение обратной связи по выходу. Рассмотрим более сложную модель объекта, представленную соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\delta, \\ \dot{\delta} &= u, \\ y &= Cx + v(t), \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

Здесь дополнительно введены измеряемая переменная y (курс судна), внешняя возмущающая сила $w(t)$ и ошибка измерения $v(t)$. Будем считать, что переменные w и v являются белыми шумами с интенсивностями S_w и S_v соответственно. В данном случае формирование обратной связи в виде (2) невозможно, однако задачу можно решить с помощью фильтра Калмана. Уравнения фильтра имеют вид

$$\dot{z} = Az + b\delta + L(y - Cz), \quad (6)$$

с матрицей L , обеспечивающей минимум функционала

$$J = \int_0^{\infty} (x(t) - z(t))'(x(t) - z(t))dt. \quad (7)$$

Матрицу L можно найти, используя функцию `kalman` среды MATLAB. При этом обратная связь формируется по выходу фильтра в

виде (2), где используются найденные ранее коэффициенты [1]. Результат построения регулятора с использованием фильтра Калмана проиллюстрирован на рис. 2, где последовательно показаны графики изменения курса в замкнутой системе при отсутствии шумов в измерениях, при использовании зашумленного сигнала без фильтра и с использованием фильтрованного сигнала в обратной связи.

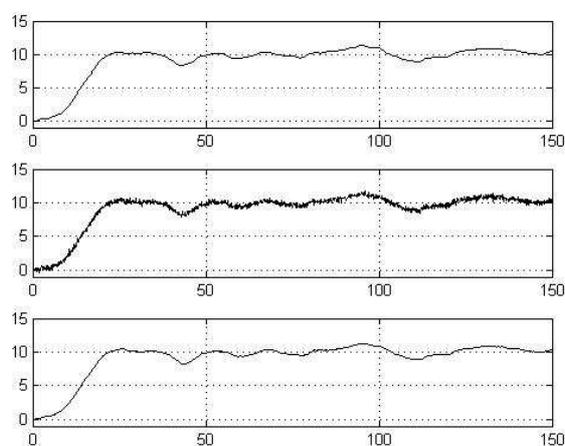


Рис. 2. Графики изменения курса в замкнутой системе

7. Вывод. Поставленная задача может быть успешно решена с применением предложенного подхода, работоспособность и эффективность которого продемонстрирована на примере с использованием среды MATLAB.

Литература

1. Веремей Е.И. Синтез законов многоцелевого управления движением морских объектов // Гироскопия и навигация, 2009. № 4. С. 3–14.
2. Антомонов Ю.Г. Синтез оптимальных систем. Киев: Наукова думка, 1972. 320 с.

Макаров А. А, Шабунин А. Н.
Санкт-Петербургский государственный университет

Особенности проектирования электронных услуг для органов государственной власти

В данной работе анализируется европейская практика формирования электронного правительства и предлагается создание структурированной политики, основанной на стандартах проектного управления PMI. В работе предложена методология создания проектов органов государственной власти с добавлением новых элементов, необходимых для детального описания спецификаций происходящих процессов. Описываемая в работе методология разработана во время участия в проекте TESIS G2B (электронные государственные услуги для предприятий малого и среднего бизнеса). В работе приведены результаты практической апробации описываемых подходов на примере создания проекта информационной системы по предоставлению земельных участков, находящихся в государственной собственности республики Карелия, гражданам и юридическим лицам.

1. Введение. В России деятельность по созданию «электронного правительства» осуществляется в рамках ФЦП «Электронная Россия» и направлена на то, чтобы повысить качество государственного управления. Данный проект возник в результате подписания в 2000 году лидерами Большой восьмерки Окинавской хартии, согласно которой в каждой стране должна быть разработана собственная стратегия построения информационного общества. Российская практика построения архитектуры электронного государства поддерживает концепцию саморазвивающейся системы, использующей нормативно-правовые основы и технологические ресурсы [1]. Подход, при котором не существует четкого представления последовательности выполняемых мероприятий по созданию электронного правительства (ЭП), противоречит наличию государственной политики в этой области. Данная проблема является следствием отсутствия системы управления проектами, которая решающим образом зависит от организации управления. Создание единой методологии, нотации и использование эффективного инструментария для разработки проектов в целях органов государственной власти (ОГВ) унифицирует процесс создания информационных систем (ИС) в раз-

личных регионах. Отметим, что унификация разработки значительно упрощает последующий процесс генерации кода. В случае однотипных систем для этого возможно использовать инструментальные средства автоматической генерации программного кода, которая будет значительно экономить финансы.

2. Зарубежная практика. Современная система управления проектами зародилась в США при разработке программ военно-морских сил США «Полярис», а позже программы НАСА по исследованию космоса. В конце 1960-х несколько специалистов, занимающихся управлением проектами в фармацевтической и строительной промышленности, создали профессиональную ассоциацию — Институт управления проектами (Project Management Institute). В дальнейшем отделения PMI были созданы и в других странах. Был разработан стандарт управления проектами — Руководство к своду знаний по управлению проектами (A Guide to the Project Management Body of Knowledge — PMBOK Guide).

Этот стандарт признается во всем мире, в том числе и в России, где проектное управление как вид управленческой деятельности не регламентируется официальными государственными документами. Согласно стандарту, управление проектами — это применение знаний, умений, инструментов и технологий для выполнения требований проекта. Его ключевыми процессами являются: инициация, планирование, исполнение, контроль и завершение.

Для анализа европейской практики в области создания электронного государства (ЭГ, e-government) были взяты отчеты ОЭСР (Organisation for Economic Co-operation and Development) — организацией создания ЭГ в Евросоюзе, проанализировавшей опыт в данной области всех развитых стран (Финляндии, Норвегии, Германии, США, Китая, Австралии и др.), и отчеты перед Евросоюзом о проделанной работе в области создания ЭГ. В результате анализа в качестве альтернативной модели для российской практики можно привести схему модели, которая используется компанией Cap Gemini, по которой оцениваются деятельность государств европейского Союза по созданию электронного государства. Этот проект реализуется с начала века по заданию Европейской Комиссии.

На рис. 1 приведена 8-компонентная модель, которая показывает не только структуру, но и «дорожную карту» создания проектов электронного государства. При этом понимается, что нельзя «пры-



Рис. 1. Модель Cap Jemini оценки проектов электронного государства

гать через ступеньку», успеха на определенной стадии развития (в условиях ограниченности ресурсов) можно достигнуть, только если достигнуты цели предыдущих стадий. То, что закладывается в архитектурное решение электронного государства, необходимо отражать в системе управления мероприятиями по достижению поставленных целей проектов электронного государства. Стандарт PMI — это управление мероприятиями, ориентированное на конечный результат.

Зарубежная практика показывает, что наиболее эффективным способом управления построением электронного государства является четкое продумывание действий и отработанная на самом начальном этапе построения модель. Опирается следует не на технологии ИТ индустрии, а на перестройку существующих бизнес процессов самих ОГВ, т. е. на технологии управления. Это нашло свое отражение в модели управления созданием электронного государства (см. рис. 2), предусмотренной проектами в рамках программы «Электронная Европа — 2010» (iEurope2010).

Приведенная на рис. 2 модель характеризуется значительно более высоким уровнем общности по сравнению с российской моделью,



Рис. 2. Модель управления построением электронного государства в представлении программы iEurope2010

приведенной на рис. 1, и, прежде всего, не содержит описания финансовых потоков, которые направляются к исполнителям отдельных мероприятий. Разумеется, что европейская модель в условиях России реализована быть не может, в силу, прежде всего, социокультурных традиций, однако принцип построения модели, которая должна быть понятна всем, стоило бы использовать.

3. Используемые нотации. В проектах по созданию государственных сервисов в России используются методологии: ARIS, BPM, UML. Каждый из указанных подходов имеет свои преимущества и недостатки, но ни одна нотация не позволяет формировать документы описания административных регламентов в установленном формате, что ставит барьер между административным регламентом как распорядительным документом органа исполнительной власти и электронным регламентом как информационно-технологическим решением.

За основу создания методологии для проектов ОГВ предлагается использовать стандарт IDEF0 (Integrated Definition Function

Modeling) [2], разработанный в ходе реализации программы интегрированной компьютеризации производства (ICAM). Данный стандарт основан на методологии SADT (методологии структурного анализа и проектирования) [3] и имеет ряд важнейших преимуществ. Например, очень высокую степень распространённости во всём мире в проектах, связанных с описанием, разработкой и изменением бизнес-процессов. В данном стандарте электронная услуга правительства республики Карелия (проект в рамках TESIS G2B) будет выглядеть таким образом, как показано на рис. 3.



Рис. 3. Диаграмма процесса предоставления земельных участков

В целях упорядочивания объектов по времени их появления рекомендуется использовать диаграмму последовательности UML, а для представления динамических особенностей взаимодействия элементов модели использовать диаграмму состояний. Диаграмма деятельности используется для детализации особенностей алгоритмической и процедурной реализации выполняемых системой операций. Для представления динамических особенностей взаимодействия элементов модели используется диаграмма состояний.

4. Понятие субъектов, объектов и информационная безопасность. Имеющийся в данных нотациях инструментарий не предназначен для детального описания спецификаций происходящих процессов и не способен качественно и полно отразить все бизнес-процессы электронных услуг ОГВ. Поэтому в нотацию были добавлены понятия объектов и субъектов.

Под *субъектом* будем понимать некоторую воздействующую сущность; это может быть как заявитель, так и ведомство. Под *объектом* будем понимать сущность, на которую происходит воздействие.

Описание новых параметров способствует генерации детальных спецификаций, с помощью которых возможен перенос созданного проекта в другой субъект федерации или другое ведомство, что отвечает главным принципам создания проектов для ОГВ. Использование IDEF0 значительно упрощает процесс понимания руководителем модели бизнес-процессов и помогает проводить стратегию развития ведомства.

Для более низких уровней, уровней описаний алгоритма (сценария) выполнения процесса данная нотация не подходит и рациональнее использовать нотации класса workflow.

Отдельная задача, которая с успехом решается в рамках предложенной технологии проектирования электронных услуг — обеспечение требований информационной безопасности. Технология обеспечивает синхронизированный контроль за использованием каждого атрибута в описаниях информационных объектов, используемых в модели. Централизованно присвоив статус «защищаемого» атрибута и устанавливая и/или редактируя правила обработки, пользователь имеет возможность контролировать и синхронизировать обработку атрибутов в рамках всей модели. Предложенная методология и инструментальные средства, с помощью которых был реализован один из многих возможных проектов по созданию электронных услуг для органов государственной власти в России, является новым звеном развития проектирования ИС для ОГВ.

Литература

1. Презентация Министерства Экономического развития и Торговли РФ «Архитектура Электронного Государства».
<http://www.economy.gov.ru/wps/portal/e-russia>
2. Официальный сайт IDEF. <http://www.idef.com/IDEF0.htm>
3. Марка Д. А., МакГоуэн К. Методология структурного анализа и проектирования SADT. М.: Изд-во МетаТехнология, 1993. 240 с.

Маров А. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Исправление ошибок в системах хранения данных¹

Рекомендовано к публикации профессором Утешевым А. Ю.

Введение. Системой хранения данных (СХД) называется совокупность оборудования и программного обеспечения, предназначенная для хранения больших объемов информации и бесперебойного доступа к ней. Одновременное использование нескольких жестких дисков в СХД позволяет увеличить объем хранимой информации и распараллелить чтение и запись данных, ускоряя таким образом процесс работы с ними.

При работе с СХД необходимо иметь возможность восстановить утраченные данные в случае выхода из строя одного или более дисков. Достичь этого можно за счет систем резервного копирования или хранения избыточных данных на дисках. Высокая устойчивость к потере информации достигается полным резервным копированием («зеркало»), но такое решение проблемы влечет за собой понижение скорости работы системы.

RAID и типы потери данных. RAID массивы представляют собой набор жестких дисков, воспринимаемых внешней системой как единое целое. Для повышения надежности массивов на них записываются и хранятся не только данные, но и некоторая избыточная информация (*синдромы*), которая позволяет восстанавливать данные в случае их частичной утраты. Будем различать два случая потери данных. Первый связан с таким выходом из строя одного диска или его части, который обнаруживается системами аппаратного контроля. В этом случае известно место утраты данных и будем говорить об *отказе* диска (или *выходе из строя*). Во втором случае данные искажаются в процессе записи, хранения или чтения таким образом, что системы аппаратного контроля не обнаруживают сбоя дисков. В этом случае место утраты данных неизвестно, так же как неизвестен и сам факт утраты. Соответственно, факт искажения данных необходимо обнаружить, найти место искажения и восстановить данные

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета, НИР № 9.38.674.2013, и компании RAIDIX

на основе избыточной информации. В случае, когда диск не выходит из строя, а данные на нем искажены, будем говорить о скрытом повреждении данных (*silent data corruption*).

В литературе [1] часто отказавшие повреждения называют *симптомами*, а скрытые повреждения — *ошибками*. В [1] также предложены некоторые методы исправления таких повреждений.

В современных СХД для обеспечения отказоустойчивости часто используются технологии RAID-5 и RAID-6. В RAID-5 массивах дополнительно хранится одна контрольная сумма, что обеспечивает восстановление одного отказавшего диска, но невозможно нахождение скрытых повреждений. Технология RAID-6, использующая хранение двух синдромов, позволяет восстанавливать один или два отказавших диска. Существует алгоритм нахождения скрытого повреждения данных [2], который основывается на сравнении двух имеющихся синдромов и синдромов, посчитанных после потери данных. Избыточность в два синдрома позволяет:

- восстановить один или два отказавших диска;
- определить факт скрытого повреждения одного диска;
- найти и восстановить один скрытый поврежденный диск,

но не позволяет:

- восстановить три и более отказавших диска;
- найти и восстановить два или более скрытых поврежденных диска;
- найти и восстановить скрытые и поврежденные диски, если есть отказавшие диски.

В системах хранения с большим количеством дисков может одновременно происходить отказ большого числа дисков, а также несколько скрытых повреждений. Для решения задачи исправления всех таких повреждений в таком случае требуется большее количество синдромов.

Рассмотрим массив из n информационных дисков и m избыточных дисков, в случае, когда есть несколько повреждений, места которых известны, и несколько повреждений, места которых не известны.

В RAID массивах диски разбиваются на блоки одинакового размера. Последовательность блоков с одинаковыми номерами, расположенных на разных дисках, называют страйпом. Расчет контрольных сумм и восстановление данных производится по страйпам, поэтому в дальнейшем, говоря о дисках, будем понимать различные блоки одного страйпа, и все вычисления производить с блоками страйпа.

Пусть имеется n информационных дисков D_0, \dots, D_{n-1} и m избыточных дисков S_0, \dots, S_{m-1} .

Расчет синдромов. Для расчета синдромов используется следующая схема, основанная на систематическом кодировании.

1. Вычисляются синдромы C_0, \dots, C_{m-1} в традиционной идеологии кодов Рида — Соломона [3, 4] с использованием арифметики полей Галуа $GF(2^q)$ [5], где q равно числу двоичных разрядов в кодовых словах D_i :

$$C_j = \sum_{i=0}^{n-1} D_i a^{j(n-i-1)}, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Здесь a — примитивный элемент поля. Например, $a = \{02\}$. Под умножением и сложением понимается сложение и умножение элементов поля Галуа $GF(2^q)$.

2. Определяются такие S_0, \dots, S_{m-1} , чтобы контрольные суммы, посчитанные от всей последовательности блоков $(D_0, \dots, D_{n-1}, S_0, \dots, S_{m-1})$, были нулевыми. То есть, если обозначить $(Y_0, \dots, Y_{N-1}) = (D_0, \dots, D_{n-1}, S_0, \dots, S_{m-1})$, где $N = n + m$, то должны выполняться соотношения

$$\sum_{i=0}^{N-1} Y_i a^{j(N-i-1)} = 0, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Искомые S_0, \dots, S_{m-1} находятся из соотношений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a^{m-1} & a^{m-2} & \dots & 1 \\ a^{2(m-1)} & a^{2(m-2)} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{(m-1)(m-1)} & a^{(m-1)(m-2)} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 a^m \\ C_2 a^{2m} \\ \vdots \\ C_{m-1} a^{(m-1)m} \end{pmatrix}$$

Обозначив матрицу из левой части системы через A , получим

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{m-1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 a^m \\ C_2 a^{2m} \\ \vdots \\ C_{m-1} a^{(m-1)m} \end{pmatrix}.$$

Матрица A обратима, если $(m-1) < 2^q$, так как в этом случае она является матрицей Вандермонда. Обратная матрица A^{-1} может быть рассчитана заранее, для фиксированного m . На дисках хранятся страйпы вида $(D_0, \dots, D_{n-1}, S_0, \dots, S_{m-1})$.

Основной результат. Утверждение, необходимое для описания метода исправления ошибок, может быть сформулировано в виде теоремы.

Теорема. Пусть имеются p отказавших дисков с известными номерами j_1, \dots, j_p . Пусть имеются l скрытых поврежденных дисков с неизвестными номерами k_1, \dots, k_l . Пусть $p + 2l < m$. И синдромы были посчитаны, как это описано выше. Тогда полином для определения k_1, k_2, \dots, k_l (полином локаторов ошибок) имеет вид

$$F(x) = \begin{vmatrix} \tilde{S}_0 & \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 & \dots & \tilde{S}_l & 1 & \dots & 1 \\ \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 & \tilde{S}_3 & \dots & \tilde{S}_{l+1} & a^{N-j_1-1} & \dots & a^{N-j_p-1} \\ \tilde{S}_2 & \tilde{S}_3 & \tilde{S}_4 & \dots & \tilde{S}_{l+2} & a^{2(N-j_1-1)} & \dots & a^{2(N-j_p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \tilde{S}_{l+p-1} & \tilde{S}_{l+p} & \tilde{S}_{l+p+1} & \dots & \tilde{S}_{p+2l-1} & a^{(l+p-1)(N-j_1-1)} & \dots & a^{(l+p-1)(N-j_p-1)} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^l & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $(\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_{m-1})$ — синдромы, посчитанные от всей последовательности дисков (информационных и избыточных) после повреждения. При отсутствии повреждений они нулевые по построению.

Определитель (1) имеет порядок $(l + p + 1)$. Корнями $F(x)$ являются $a^{N-k_1-1}, \dots, a^{N-k_l-1}$, т.е. для них выполняется $F(a^{N-k_1-1}) = 0, \dots, F(a^{N-k_l-1}) = 0$. Если найдены элементы поля, которые являются корнями уравнения $F(x) = 0$, то можно найти номера скрытых поврежденных дисков.

Доказательство. Пусть было посчитано m синдромов S_0, \dots, S_{m-1} . Тогда для блоков $(Y_0, \dots, Y_{N-1}) = (D_0, \dots, D_{n-1},$

S_0, \dots, S_{m-1}), где $N = n + m$, до возникновения повреждений выполнялись условия

$$\sum_{i=0}^{N-1} Y_i a^{j(N-i-1)} = 0, \quad j = \overline{0, m-1}. \quad (2)$$

Пусть произошли повреждения. Номера отказавших дисков j_1, \dots, j_p . Положив значения отказавших блоков равными нулю, пересчитаем синдромы от всей последовательности блоков (информационных и избыточных), получим

$$\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{Y}_i a^{j(N-i-1)} = \tilde{S}_j, \quad j = \overline{0, m-1}. \quad (3)$$

Сложив соответствующие уравнения систем (2) и (3) друг с другом, получим

$$Y_{j_1} a^{j(N-j_1-1)} + \dots + Y_{j_p} a^{j(N-j_p-1)} + (Y_{k_1+k_1}) a^{j(N-k_1-1)} + \dots + \dots + (Y_{k_l} + \tilde{Y}_{k_l}) a^{j(N-k_l-1)} = \tilde{S}_j, \quad j = \overline{0, m-1}. \quad (4)$$

Неизвестными в системе (4) являются величины $Y_{j_1}, \dots, Y_{j_p}, Y_{k_1}, \dots, Y_{k_l}, k_1, \dots, k_l$. Сначала определим номера скрытых поврежденных k_1, \dots, k_l , поскольку они входят в уравнения нелинейным образом. Будем искать их посредством величин $a^{N-k_1-1}, \dots, a^{N-k_l-1}$, которые входят линейно. Найдем уравнение, которому удовлетворяют эти элементы поля. Это уравнение имеет вид

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \dots + \sigma_l x^l = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$\sigma(a^{N-j_1-1}) = \sigma_{l+1}, \dots, \sigma(a^{N-j_p-1}) = \sigma_{l+p}. \quad (6)$$

В виду того, что $a^{N-k_1-1}, \dots, a^{N-k_l-1}$ являются корнями уравнения (5), с учетом обозначений (6) получим равенства

$$\begin{cases} \sigma_0 + \sigma_1 a^{N-j-1} + \sigma_2 a^{2(N-j-1)} + \dots + \\ \quad + \dots + \sigma_l a^{l(N-j-1)} + \sigma_{l+j} = 0, \quad j = \overline{j_1, j_p}, \\ \sigma_0 + \sigma_1 a^{N-k-1} + \sigma_2 a^{2(N-k-1)} + \dots + \\ \quad + \dots + \sigma_l a^{l(N-k-1)} = 0, \quad k = \overline{k_1, k_l}. \end{cases} \quad (7)$$

Умножим первые p уравнений системы (7) на Y_{j_1}, \dots, Y_{j_p} соответственно, а оставшиеся l уравнений на $(Y_{k_1} + \tilde{Y}_{k_1}), \dots, (Y_{k_l} + \tilde{Y}_{k_l})$ соответственно и сложим получившиеся равенства. Тогда с учетом (4) получим

$$\sigma_0 \tilde{S}_0 + \dots + \sigma_l \tilde{S}_l + \sigma_{l+1} Y_{j_1} + \dots + \sigma_{l+p} Y_{j_p} = 0. \quad (8)$$

Теперь умножим первые p уравнений системы (7) на $Y_{j_1} a^{N-j_1-1}, \dots, Y_{j_p} a^{N-j_p-1}$ соответственно, а оставшиеся l уравнений на $(Y_{k_1} + \tilde{Y}_{k_1}) a^{N-k_1-1}, \dots, (Y_{k_l} + \tilde{Y}_{k_l}) a^{N-k_l-1}$ и сложим получившиеся тождества. Тогда с учетом (4) получим

$$\begin{aligned} \sigma_0 \tilde{S}_1 + \sigma_1 \tilde{S}_2 + \dots + \sigma_l \tilde{S}_{l+1} + \\ + \sigma_{l+1} Y_{j_1} a^{N-j_1-1} + \dots + \sigma_{l+p} Y_{j_p} a^{N-j_p-1} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Повторим эту процедуру $l+p$ раз, каждый раз увеличивая степень a , т.е. домножая первые p уравнений в (7) на $Y_{j_1} a^{i(N-j_1-1)}, \dots, Y_{j_p} a^{i(N-j_p-1)}$, а оставшиеся l уравнений на $(Y_{k_1} + \tilde{Y}_{k_1}) a^{i(N-k_1-1)}, \dots, (Y_{k_l} + \tilde{Y}_{k_l}) a^{i(N-k_l-1)}$, $i = \overline{0, l+p-1}$, получим систему из $l+p$ равенств

$$\begin{aligned} \sigma_0 \tilde{S}_i + \sigma_1 \tilde{S}_{i+1} + \dots + \sigma_l \tilde{S}_{l+i} + \\ + \sigma_{l+1} Y_{j_1} a^{i(N-j_1-1)} + \dots + \\ + \dots + \sigma_{l+p} Y_{j_p} a^{i(N-j_p-1)} = 0, \quad i = \overline{0, l+p-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

По построению, величины σ_i таковы, что подстановка $x = a^{N-k_i-1}$, $i = \overline{1, l}$ в (5) дает ноль. Добавив это соотношение к системе (10) и введя обозначения

$$\sigma_{l+1} Y_{j_1} = \tilde{\sigma}_{l+1}, \dots, \sigma_{l+p} Y_{j_p} = \tilde{\sigma}_{l+p},$$

запишем получившиеся соотношения в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_0 & \tilde{S}_1 & \dots & \tilde{S}_l & 1 & \dots & 1 \\ \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 & \dots & \tilde{S}_{l+1} & a^{N-j_1-1} & \dots & a^{N-j_p-1} \\ \tilde{S}_2 & \tilde{S}_3 & \dots & \tilde{S}_{l+2} & a^{2(N-j_1-1)} & \dots & a^{2(N-j_p-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{S}_{l+p-1} & \tilde{S}_{l+p} & \dots & \tilde{S}_{2l+p-1} & a^{(l+p-1)(N-j_1-1)} & \dots & a^{(l+p-1)(N-j_p-1)} \\ 1 & x & \dots & x^l & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_l \\ \tilde{\sigma}_{l+1} \\ \vdots \\ \tilde{\sigma}_{l+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Необходимым условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю определителя системы. Отсюда и получаем выражение для полинома (1), для которого, по построению, выполняется $F(a^{N-k_1-1}) = 0, \dots, F(a^{N-k_l-1}) = 0$.

Когда найдены номера скрытых поврежденных блоков, значения поврежденных блоков восстанавливаются как в случае $l + p$ отказавших дисков, который уже имеет решение [4].

Замечание. В частном случае, когда $p = 0$, т. е. отказавших дисков нет, полином локаторов ошибок имеет вид

$$F(x) = \begin{vmatrix} \tilde{S}_0 & \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 & \cdots & \tilde{S}_l \\ \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 & \tilde{S}_3 & \cdots & \tilde{S}_{l+1} \\ \tilde{S}_2 & \tilde{S}_3 & \tilde{S}_4 & \cdots & \tilde{S}_{l+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{S}_{l-1} & \tilde{S}_l & \tilde{S}_{l+1} & \cdots & \tilde{S}_{2l-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^l \end{vmatrix}.$$

Заключение. Предложен способ расчета контрольных сумм и поиска ошибок, который может быть применен в системе хранения данных для обнаружения нескольких скрытых повреждений, даже в тех случаях, когда в системе имеются отказавшие диски.

Данный метод может быть применен в системах хранения с большим количеством дисков для обеспечения очень высокой отказоустойчивости.

Литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976. 593 с.
2. Anvin H. P. The mathematics of RAID-6. <http://kernel.org/pub/linux/kernel/people/hpa/raid6.pdf>
3. Утешев А. Ю. Математика отказоустойчивых дисковых массивов. <http://pmpu.ru/vf4/codes/raid>
4. Plank J. S. A tutorial on Reed — Solomon coding for fault-tolerance in RAID-like systems. <http://web.eecs.utk.edu/~plank/plank/papers/CS-96-332.pdf>
5. Утешев А. Ю. Поля Галуа. <http://pmpu.ru/vf4/gruppe/galois>

Мезенцева П. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Задача популяции онтологии предметной области с использованием искусственных нейронных сетей

Рекомендовано к публикации доцентом Матросовым А. В.

1. Введение. В результате стремительного распространения и популяризации веб-технологий в настоящее время осуществляется переход веб-пространства на новую ступень своего развития — семантический веб, предполагающий внедрение в веб-пространство моделей предметных областей — онтологий. Онтологии уже нашли свое применение в различных задачах, где требуется концептуальное представление данных. Однако динамичность предметных областей вызывает проблему своевременного обновления онтологий. Другими словами, существует необходимость в автоматическом обновлении онтологии при добавлении новых документов (веб-страниц) в коллекцию документов предметной области.

Структура онтологии представляет собой семантическую сеть, вершинами которой являются классы (понятия) и экземпляры этих классов. Задача добавления в структуру онтологии новых классов получила название обогащения онтологии (*ontology enrichment*), а задача добавления новых экземпляров в состав классов — название популяции онтологии (*ontology population*).

Ввиду того, что в ряде предметных областей, например, в предметных областях образования, знания о понятиях и их взаимосвязях более стабильны и постоянны, а знания об индивидуальных объектах (экземплярах понятий) чаще подвержены модификациям и дополнениям, наиболее актуальной является проблема автоматической популяции онтологии.

2. Постановка задачи. Пусть задана онтология предметной области O . Пусть $C(O)$ — множество классов (понятий) семантической сети онтологии. Введем понятие динамического класса онтологии:

Определение. Динамический класс онтологии — это класс, набор экземпляров которого не постоянен.

Пусть $C' = \{C_i\}$, $i = 1, \dots, m$, — множество динамических классов онтологии. Введем класс C'' , который характеризует экземпляры,

не принадлежащие классам $C_i, i = 1, \dots, m$. Рассмотрим множество классов $C_{dyn} = C' \cup C'' = \{C_j\}, j = 1, \dots, n$, где $n = m + 1$.

Пусть d — новый документ в коллекции документов предметной области; $T = \{T_k\}, k = 1, \dots, p$, — множество термов документа. Каждый T_k — претендент быть экземпляром одного из классов онтологии.

Тогда задачу популяции онтологии можно представить как задачу классификации, т. е. необходимо построить алгоритм $a : T \rightarrow C$, способный определить класс онтологии для каждого претендента $T_k \in T$ документа d или отнести претендента к классу «Прочее».

3. Выбор параметров задачи классификации. В теории классификации или распознавания образов используются понятия образа, прецедента, вектора признаков, решающего правила (классификатора) [1].

Рассматривая задачу популяции онтологии, назовем образом терм-претендент $T_k \in T$, а классом — класс онтологии $C_j \in C_{dyn}$.

Тогда для построения механизма, решающего задачу классификации, необходимо:

- выделить набор признаков термов-претендентов T_k ;
- выбрать решающее правило (или классификатор).

3.1. Выделение набора признаков термов-претендентов.

Пусть x — искомый вектор признаков терма-претендента. Разделим набор признаков терма-претендента на две группы:

- описательные признаки (не зависят от контекста, в котором встречается терм);
- контекстные признаки (зависят от контекста, в котором встречается терм).

В группе описательных признаков введем следующие признаки:

- x_1 — количество слов в терме, деленное на максимальную длину терма среди множества термов в документе ($x_1 \in [0, 1]$);
- x_2 — количество заглавных букв в терме, деленное на количество слов в терме ($x_2 \in [0, 1]$);
- x_3 — признак фамилии (бинарный признак: $x_3 = 0$, если T_k — «не фамилия», $x_3 = 1$, если T_k — «фамилия»).

В группе контекстных признаков будем использовать набор признаков, формализующих близость в контексте документа d терма-претендента и слов, характерных для контекста каждого из классов $C_j \in C_{dyn}$.

Пусть для каждого класса $C_j \in C_{dyn}$ экспертом выделено множество слов $U_j = \{U_{js}\}, s = 1, \dots, l_j$, характерно встречающихся в контексте вместе с экземплярами класса C_j . Тогда группа контекстных признаков будет состоять из признаков $x_v, v = 1, \dots, l$, где $l = \sum_{j=1}^m l_j$.

Пусть $post_{T_K} \in [1, length(d)]$ — позиция терма-претендента $post_{T_K}$ в документе d (если терм состоит из нескольких слов, то позиция терма рассчитывается как среднее между позициями концов слов терма); $pos_{U_v} \in [1, length(d)]$ — позиция слова U_v ($v = 1, \dots, l$) в документе d , тогда контекстный признак x_v рассчитывается по формуле:

$$x_v = \begin{cases} \frac{|post_{T_K} - pos_{U_v}|}{length(d)}, & U_v \in d, \\ 1, & U_v \notin d, \end{cases}$$

где $length(d)$ — длина документа d .

Объединяя описательные и контекстные признаки в единый вектор признаков x , получим, что общая размерность вектора признаков $\dim x = l + 3 = R$.

3.2. Выбор классификатора. В качестве классификатора будем использовать инструмент искусственных нейронных сетей. Для решения задач классификации на основе прецедентов применяются нейронные сети типа «Персептрон». В алгоритме персептрона в основу положен принцип действия нейрона. Обобщенная схема нейрона представлена на рис. 1.

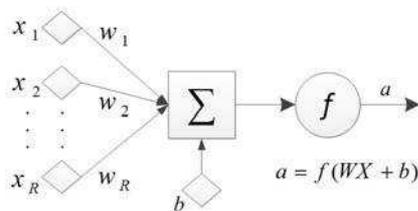


Рис. 1. Обобщенная схема нейрона

Здесь x_1, \dots, x_R — компоненты вектора признаков x ; Σ — сумматор, W_1, \dots, W_R — синоптические веса; f — функция активации; b — смещение. Выходом сумматора является величина $\sum_{i=1}^R W_i x_i + b$, которая является входом (аргументом) функции активации. Алгоритм персептрона представляет собой

последовательную итерационную процедуру. Каждый шаг состоит в предъявлении нейрону очередного вектора-прецедента и коррекции весов W_i по результатам классификации. При этом прецеденты предъявляются циклически, т. е. после предъявления последнего снова предъявляется первый. Процесс обучения заканчивается, когда нейрон правильно классифицирует все прецеденты.

Для классификации образов по n классам нейроны объединяются в нейронную сеть из двух слоев, схема которой представлена на рис. 2.

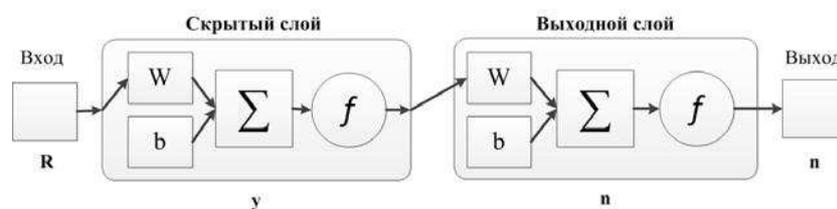


Рис. 2. Схема нейронной сети

Выходной слой содержит n нейронов, а количество нейронов скрытого слоя выбирается эмпирически.

4. Реализация. Для реализации предлагаемого метода решения задачи популяции онтологии будем использовать онтологию, рассмотренную в работе [2], которая построена для предметной области образования на факультете ПМ–ПУ СПбГУ.

Выделим пять динамических классов этой онтологии:

1. Учебная группа.
2. Преподаватель.
3. Специализация.
4. Направление обучения.
5. Учебный курс (дисциплина).

Введем шестой класс «Прочее» для отнесения к нему прочих экземпляров. Также определим набор признаков слов, т. е. слов, характерно встречающихся при упоминании экземпляров динамических классов на страницах сайта ПМ–ПУ. Размерность получившегося набора признаков слов равна 39. Таким образом, параметрами задачи классификации являются $n = 6$ — количество классов, $R = 39 + 3 = 42$ — размерность вектора признаков.

Для построения массива прецедентов сделаем выборку уже установленных экземпляров для пяти динамических классов онтологии. Размерность выборки — 626 экземпляров. Построим для каждого из них вектор признаков, выбирая для расчета документ d таким образом, чтобы в его тексте встречался экземпляр или его синоним, а также максимальное количество из 39 установленных характерных слов.

В качестве инструмента реализации нейронной сети выберем «Neural Network Toolbox» [3], входящий в состав программного продукта MATLAB. Для решения задачи классификации будем использовать компонент «Pattern Recognition Tool» в составе «Neural Network Toolbox».

Входным данным сети является массив прецедентов, состоящий из 626 строк. Разделим имеющуюся выборку на три множества:

1. Обучающая выборка (70% экземпляров).
2. Сверяющая выборка (15 % экземпляров).
3. Тестирующая выборка (15 % экземпляров).

Зададим количество нейронов скрытого слоя: $y = 20$. Проведем обучение нейронной сети и получим следующие результаты, представленные на рис. 3.

1 кл	55 8,8%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	3 0,5%	+94,8% -5,2%
2 кл	0 0,0%	220 35,1%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	+100% -0,0%
3 кл	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	+0,0% -0,0%
4 кл	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	+0,0% -0,0%
5 кл	0 0,0%	0 0,0%	14 2,2%	3 0,5%	287 45,8%	13 2,1%	+90,5% -9,5%
6 кл	1 0,2%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%	28 4,5%	+90,3% -9,7%
	+98,2% -0,8%	+100% -0,0%	+0,0% -100%	+0,0% -100%	+99,3% -0,7%	+63,6% -36,4%	+94,2% -5,8%
	1 кл	2 кл	3 кл	4 кл	5 кл	6 кл	

Рис. 3. Результаты обучения нейронной сети

5. Выводы. Реализация предложенного метода показала точность 94,2%, что говорит о возможности его применения для решения задачи популяции онтологии предметной области.

Можно заметить, что плохой результат классификации получили классы «Специализация» и «Направление обучения». Это связано с малым объемом обучающей выборки: класс «Специализация» имеет 11 экземпляров, класс «Направление обучения» — всего 3 экземпляра. Однако, классы с малым количеством экземпляров меньше нуждаются в автоматическом пополнении множества своих экземпляров, так как эксперт может обновлять их вручную.

Подводя итог, отметим, что важными факторами, влияющими на результат применения предлагаемого метода являются:

- достаточный объем обучающей выборки для каждого динамического класса;
- точно подобранные экспертом признаковые слова;
- подходящие параметры, задающие конфигурацию нейронной сети: количество нейронов скрытого слоя, функция активации нейрона.

Литература

1. Лепский А. Е., Броневич А. Г. Математические методы распознавания образов: Курс лекций. Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2009. 155 с.
2. Мезенцева П. В. Применение онтологии предметной области в задаче информационного поиска // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Еремина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 365–370.
3. Neural Network Toolbox 6. User's Guide.
<http://www.varpa.org/Docencia/Files/nnet.pdf>

Петрова В. А., Семенова А. Г.
Санкт-Петербургский государственный университет

Проект базы данных о вычислительной технике подразделения

В любой организации, где имеются компьютеризованные подразделения, необходимо хранить информацию о составе, характеристиках и загруженности вычислительной техники. Такая информация необходима для инвентаризации, для работы системного администратора, для планирования ремонтных работ, для планирования затрат на предстоящее переоснащение и т. д. В университете такими подразделениями являются кафедры, лаборатории и вычислительные классы, в других организациях — отделы, группы помещений и т. п. Разработка соответствующей базы данных для хранения информации о техническом оснащении таких подразделений является очень полезной для повышения эффективности работы.

Перед началом проектирования необходимо было провести исследование в следующих направлениях:

- проанализировать, что общего имеется в компьютерном обеспечении различных подразделений, чтобы структура и состав таблиц базы данных могли быть использованы без изменений в наибольшем числе случаев;
- исследовать способы использования соответствующей информации разными группами пользователей для последующего формирования видов запросов к базе данных;
- исследовать соответствующие инструментальные и программные средства, позволяющие решить поставленную задачу, а именно теоретические основы и технологии баз данных.

На основе проведенного анализа была спроектирована база данных в виде совокупности нормализованных связанных таблиц и написан оконный интерфейс для пользователей разных групп.

Данные, которые должны храниться в базе данных, можно разделить на две основные группы:

- информация о составе конфигурации и параметрах оборудования вычислительного класса;
- архив списанного оборудования.

Перечень оборудования подразделения выглядит следующим образом:

- компьютеры;
- мониторы;
- проекторы;
- проекционные экраны;
- коммутаторы;
- соединения с точками доступа;
- источники бесперебойного питания;
- коммутационные шкафы;
- телефоны;
- камеры;
- контроллеры домена.

У каждого из этих объектов можно выделить следующие общие параметры:

- инвентарный номер;
- заводской номер;
- наименование;
- гарантийный срок;
- стоимость;
- дата покупки;
- место расположения в настоящий момент;
- статус оборудования с точки зрения состояния работоспособности: работоспособно, подлежит ремонту, находится в ремонте, подлежит списанию, списано, находится на тестировании, резерв;
- информация о лице, персонально ответственном за оборудование.

Ряд категорий оборудования может иметь важные дополнительные характеристики, например, у источников бесперебойного питания есть также такая характеристика, как мощность.

Архив списанного оборудования содержит данные о ходе процесса списания, а именно, место расположения и дату списания того или иного объекта. Например, процесс списания может проходить в несколько этапов, и оборудование после списания может временно находиться в подразделении, быть отправлено на склад или вывезено и уничтожено.

Работать с базой данных могут три группы пользователей:

- лицо, материально ответственное за вычислительную технику подразделения;
- системный администратор;
- ответственный за регламент работы подразделения (например, дежурный в вычислительном классе).

Материально ответственный за вычислительный класс сотрудник может посмотреть информацию о ремонте оборудования, а именно, какие объекты находятся в ремонте в данный момент, какие подлежат ремонту, даты отправки в ремонт и предполагаемую дату получения, название, адрес и телефон ремонтной фирмы.

Системному администратору могут быть нужны данные по загруженности компьютеров и о их рабочем состоянии.

Для третьей группы пользователей, ответственных за работу вычислительного класса, интерес может представлять работоспособность и загруженность определенного компьютера, данные о пользователях.

Архив списанного оборудования содержит полные технические данные о списанном оборудовании, даты списания и отправки на склад, период исправной работы оборудования.

В пользовательском интерфейсе должны быть учтены возможности следующих видов запросов по инвентаризации и архиву:

- вывод полного списка оборудования;
- перечень оборудования, установленного в запрашиваемом помещении;
- перечень оборудования, списанного в запрашиваемом году, в определенном помещении;
- перечень оборудования, находящегося в ремонте в запрашиваемом помещении или в ряде помещений;
- какое оборудование находится на хранении у запрашиваемого материально ответственного лица;
- срок окончания гарантии запрашиваемого оборудования;
- информация о том, когда последний раз производился ремонт запрашиваемого оборудования;
- перечень оборудования, отремонтировавшегося в запрашиваемом году;
- история проведенных ремонтных работ по запрашиваемому оборудованию;

- текущий статус работоспособности запрашиваемого оборудования (работоспособно, подлежит ремонту, в ремонте, подлежит списанию, списано, на тестировании, резерв).

База данных по инвентаризации и архив списанного оборудования реализованы в Microsoft Access 2003.

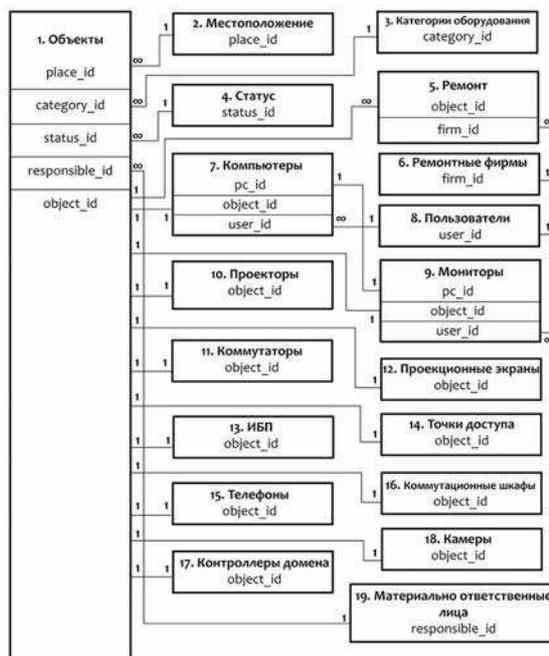


Рис. 1. Связи между таблицами

Microsoft Access — широко распространенная СУБД, главными достоинствами которой являются удобство, простота и интуитивно понятный интерфейс, что значительно упрощает задачу дальнейшего сопровождения проекта в случае необходимости дополнительной настройки на особенности конкретной фирмы, например, при создании дополнительных запросов к базе данных. Кроме того, Microsoft Access позволяет легко создавать удобный стандартный оконный пользовательский интерфейс, что тоже полезно для сопровождения [1].

Выбор 2003 версии Microsoft Access обусловлен тем, что она поддерживается и более поздними версиями, что позволит запускать приложение в организациях со старым программным обеспечением. Этот момент является достаточно важным с коммерческой точки зрения.

Пользовательский интерфейс части базы данных представляет собой набор оконных форм, позволяющих реализовать запросы пользователей.

Кроме прочего, в проекте предусмотрена возможность добавления новых объектов, изменения характеристик уже внесенного в базу оборудования, а также формирования разных видов печатных документов в соответствии с заданными видами запросов.

Инвентаризационная часть базы данных состоит из 19 таблиц.

Связи между таблицами представлены на рис. 1. Номера и названия таблиц выделены жирным шрифтом, указаны ключевые поля.

Архивная часть базы данных, содержащая информацию о списанном оборудовании, имеет аналогичную структуру и содержит кроме инвентаризационной информации об оборудовании также и дополнительные поля о ходе процесса списания.

Предлагаемый проект базы данных оттестирован, реализован и внедрен в ООО «Восход АС».

Литература

1. Дженнингс Р., Вильямс М. Использование Microsoft Office Access 2003. Специальное издание, 2006. 1312 с.

Приставко Г. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Погрешность построения интерполяционного полинома методом наименьших квадратов

Рекомендовано к публикации доцентом Калининой Е. А.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу интерполяции множества данных вещественных точек $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$, некоторым полиномом.

Для этого используем метод наименьших квадратов, получая в случае полинома степени n : $A_n X_n = B_n$, где

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{pmatrix},$$
$$X_n = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

здесь k_0, \dots, k_n — коэффициенты искомого полинома $f(x) = k_0 x^n + \dots + k_n$, элементы матрицы A_n и вектора B_n получаются при применении метода наименьших квадратов, т. е. $b_j = \sum_{i=1}^m x_i^j y_i$, $j = 0, \dots, n$, а $a_k = \sum_{j=1}^m x_j^k, k = 0, \dots, 2n$.

Погрешность метода наименьших квадратов уменьшается с ростом степени полинома. Однако при этом необходимо производить больше вычислений, в результате чего большее влияние на результат оказывает вычислительная погрешность (ошибки округления).

Задача. Требуется найти полную погрешность для полинома степени n .

Замечание 1. В дальнейшем полагаем, что нет точек, принадлежащих интервалу $[-2, 2]$.

Замечание 2. Полной погрешностью будем называть сумму норм погрешности метода и вычислительной погрешности, её норма не превосходит сумм норм данных погрешностей.

2. Решение задачи. Пусть заданы точки (x_i, y_i) . Составим матрицу A_n и вектор B_n , вычислив элементы по формулам метода наименьших квадратов. Найдем вектор решений X методом Гаусса.

2.1. Погрешность метода. Для найденного вектора решений X составим полином $f(x) = k_0x^{n-1} + \dots + k_n$, где n — размерность матрицы A_n .

Для нахождения нужной погрешности используем евклидову норму вектора

$$\|X\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i|^2},$$

где x_i — элементы вектора X . Для матрицы также будем использовать евклидову норму.

Найдем относительную погрешность метода по формуле $\sigma_n = \left\| \sum_{j=1}^m \left| \frac{f(x_j) - y_j}{f(x_j)} \right| \right\|$, или

$$\sigma_n = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left| \frac{f(x_j) - y_j}{f(x_j)} \right|^2}.$$

2.2. Погрешность вычислений. Найдем вычислительную погрешность решения. Как известно [2, 3]

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Так как матрица A_n является симметричной, то для числа обусловленности справедливо равенство

$$\text{Cond}(A_n) = \|A_n\| \|A_n^{-1}\| = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}.$$

Итак, задача свелась к нахождению максимального и минимального собственных чисел матрицы A_n .

2.3. Поиск наибольшего собственного числа. Так как матрица A_n симметричная, то её собственные числа являются вещественными. Воспользуемся теоремой Гершгорина для оценки сверху собственного числа произвольной $(n \times n)$ -матрицы A .

Теорема. *Спектр произвольной квадратной матрицы A принадлежит объединению кругов Гершгорина $Sp(A) \subset S_i$, где*

$$S_i = \left\{ \lambda \in C : |\lambda - a_{ii}| \leq R_i \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Согласно теореме, можно приблизить максимальное собственное число, выбрав максимальную сумму модулей элементов строки матрицы A , в которые не включаются элементы матрицы, стоящие на главной диагонали.

Теорема. *При $|x_i| \geq 2$, $n > 3$ для матрицы A максимальная сумма модулей элементов строки будет находиться в последней строке.*

Доказательство. Рассмотрим теорему Гершгорина, примененную к строкам нашей матрицы

$$\begin{aligned} & \left| \sum x_i^1 \right| + \dots + \left| \sum x_i^n \right|, \\ & \left| \sum x_i^1 \right| + \left| \sum x_i^3 \right| + \dots + \left| \sum x_i^{n+1} \right|, \\ & \dots \\ & \left| \sum x_i^n \right| + \dots + \left| \sum x_i^{2n-2} \right| + \left| \sum x_i^{2n-1} \right|. \end{aligned}$$

Сравним $n-2$, $n-1$ и n строки, вычеркнем повторяющиеся слагаемые

$$\begin{aligned} & \left| \sum x_i^{n-1} \right| + \left| \sum x_i^{n-2} \right| + \left| \sum x_i^{2n-2} \right|, \\ & \left| \sum x_i^{2n-4} \right| + \left| \sum x_i^{2n-1} \right| + \left| \sum x_i^{n-1} \right|, \\ & \left| \sum x_i^{2n-4} \right| + \left| \sum x_i^{2n-2} \right| + \left| \sum x_i^{2n-1} \right|. \end{aligned}$$

Очевидно, что сумма модулей элементов строки n больше чем сумма модулей элементов строки $n-1$, так как два слагаемых у них повторяются, а третье в строке n содержит сумму четных степеней вещественных чисел, что означает, что все отрицательные элементы его уменьшать не будут в отличие от элемента в предыдущей строке,

у которого степень может оказаться как четной, меньше $2n$, так и нечетной. Рассмотрим строки n и $n - 2$. Вычтем из $n - 2$ и n строк одинаковые слагаемые. Тогда необходимо доказать, что

$$\left| \sum x_i^{n-1} \right| - \left| \sum x_i^{2n-1} \right| \leq \left| \sum x_i^{2n-4} \right| - \left| \sum x_i^{n-2} \right|. \quad (1)$$

Правая часть неравенства (1) очевидно является положительной. Если левая часть (1) является отрицательной, то неравенство доказано. Пусть левая часть (1) положительна, это означает, что

$$\left| \sum x_i^{n-1} \right| \geq \left| \sum x_i^{2n-1} \right|.$$

Пусть n является четным, тогда рассмотрим неравенство

$$\left| \sum x_i^{n-1} \right| - \left| \sum x_i^{2n-1} \right| \leq \left| \sum x_i^{n-3} \right|. \quad (2)$$

Оно верно при заданных x_i , что можно проверить, расписав левую часть (2) через произведение и рассмотрев отдельно положительные и отрицательные суммы

$$x_i^{n-2}(1 - x_i^{n+1}) \leq x_i^{n-3},$$

что верно для любых x_i , указанных в условиях теоремы, а значит, верно и для суммы таких x_i . Тогда сделаем замену в (1)

$$\left| \sum x_i^{n-3} \right| \leq \left| \sum x_i^{2n-4} \right| - \left| \sum x_i^{n-2} \right| \leq \sum x_i^{n-2}(x_i^{n-2} - 1). \quad (3)$$

Рассмотрим каждый x_i отдельно. Разделим на x_i^{n-2} , получим

$$x_i^{-1} \leq (x_i^{n-2} - 1).$$

Это неравенство верно при заданных x_i и четных $n \geq 4$, следовательно, верно и для суммы x_i . А значит, неравенство (1) верно для любых $|x_i| \geq 2$. Если это выполнено для каждого x_i в отдельности, то будет верно и для суммы. Следовательно, последняя сумма модулей элементов строки действительно является наибольшей, так как аналогичные сравнения можно привести и для предыдущих строк.

Для n , являющихся нечетными, ход доказательства аналогичен с той лишь разницей, что мы используем не неравенство (2), а неравенство

$$\left| \sum x_i^{n-2} \right| - \left| \sum x_i^{2n-1} \right| \leq \left| \sum x_i^{n-3} \right|. \quad (4)$$

Теорема доказана.

Замечание 3. При $n \leq 3$ вычисляем соответствующие модули сумм строк и выбираем наибольшую.

Итак, максимальное собственное число λ_{max} не превосходит $|\sum x_i^n| + \dots + |\sum x_i^{2n-1}|$.

Теорема Гершгорина не годится для поиска минимального собственного числа, так как оно может быть ограничено нулем. Поэтому его будем искать иначе.

2.4. Поиск наименьшего собственного числа. Для поиска λ_{min} воспользуемся численным методом и теоремой Коши [1].

Для того чтобы приблизить λ_{min} со сколь угодно малой точностью $\varepsilon > 0$, воспользуемся следующим алгоритмом.

На первом шаге вычислим главные миноры матрицы $A - \lambda E$, определим количество положительных и отрицательных собственных чисел матрицы A .

На втором шаге рассмотрим два интервала $[-\frac{\lambda_{max}}{2}, 0)$ и $(0, \frac{\lambda_{max}}{2}]$ и отбросим промежуток, на котором знаки миноров совпадают со знаками миноров в нуле. Затем снова делим пополам максимальную по модулю границу интервала.

Повторяем второй шаг до тех пор, пока на последнем полученном интервале не совпадут знаки миноров на обоих концах отрезка, запоминаем предыдущую границу $g = \pm \frac{\lambda_{max}}{2^g}$ и границу $f = \pm \frac{\lambda_{max}}{2^{g-1}}$, где совпали знаки миноров.

В итоге получим некоторый промежуток $[r, d]$ (для определенности положительный), $|d - r| < \varepsilon$.

В примере был рассмотрен положительный отрезок, в этом случае за минимальное собственное число примем число $\lambda_{min} = r$.

2.5. Поиск погрешности элементов вектора решений. Погрешность элементов вектора b находится по формуле

$$\gamma_{n-1} = \sum_{p=1}^n \theta_p = \sum_{p=1}^n \left(\gamma_{n-1} \sum_{i=1}^n |y_i x_i^{p-1}| + \frac{(p-1)u}{1 - (p-1)\frac{u}{2}} \right),$$

где u — машинный ε .

Замечание 4. Количество проводимых операций над элементами вектора b легко вычисляется: для каждой строки p число сложений всегда равно $i - 1$, а число умножений равно $p - 1$, где i — количество данных точек. Данная формула вытекает из оценок вычислительной погрешности для произведения и сложения [2]. Имеем

$$\theta_p = \gamma_{n-1} \sum_{i=1}^n |y_i x_i^{p-1}| + \frac{(p-1)u}{1 - (p-1)\frac{u}{2}},$$

где p — номер элемента вектора решений.

3. Заключение. Формула полной погрешности имеет вид

$$\sigma_o = \sigma_n + \frac{\|\delta X\|}{\|X\|}$$

или

$$\sigma_o = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left| \frac{f(x_j) - y_j}{f(x_j)} \right|^2} + \frac{|\sum x_i^n| + \dots + |\sum x_i^{2n-1}|}{|r|} \sqrt{\sum_{p=1}^n \left(\gamma_{n-1} \sum_{i=1}^n |y_i x_i^{p-1}| + \frac{(p-1)u}{1 - (p-1)\frac{u}{2}} \right)}.$$

Задача полностью решена, формула полной погрешности получена.

Литература

1. Утешев А. Ю., Калинина Е. А. Лекции по высшей алгебре. Часть II. Учебное пособие. СПб.: «СОЛЮ», 2007. 279 с.
2. Björk A., Dahlquist G. Numerical mathematics and scientific computations. Philadelphia: SIAM, 2008. Vol. 1. 475 p.
3. Higham N. J. Accuracy and stability of numerical algorithms. Philadelphia: SIAM, 1996. 675 p.

Ружников В. О.

Санкт-Петербургский государственный университет

Исследование эффективности COSY Infinity на параллельных системах с общей памятью¹

Рекомендовано к публикации доцентом Овсянниковым А. Д.

Введение. Поиск нарушений фундаментальных симметрий играл центральную роль в исследованиях физики частиц в двадцатом веке, в частности, поиск электрического дипольного момента (ЭДМ) остается высокоприоритетным в списке исследований физики частиц. Возможно самым интересным предложением поиска последних лет является новый подход — измерение ЭДМ частиц в накопительных кольцах. Одним из таких проектов является поиск ЭДМ нейтрона в исследовательском центре города Юлиха в Германии [1]. Для этих целей разрабатывается накопительное кольцо без использования магнитных элементов. Для разработки элементов кольца проводится численное моделирование с использованием программы COSY Infinity [2]. Расчет динамики проводится с помощью моделирования миллионов оборотов и большого числа частиц на кластерной системе. Однако для уточнения деталей и подготовки расчетов на суперкомпьютере проводится предварительное моделирование на простых персональных компьютерах и двухпроцессорных системах с общей памятью, скорость работы MPI-версии COSY на которых не является оптимальной вследствие того, что технология MPI ориентирована на системы с распределенной памятью.

Целью проведенной работы являлось увеличение эффективности вычислений ПО COSY Infinity на параллельных системах с общей памятью, в том числе и на графических ускорителях. В соответствии с этим были поставлены следующие задачи:

- исследовать существующие подходы к разработке параллельных программ. Оценить применимость и эффективность этих подходов для параллельных систем на базе многоядерных процессоров и на базе графических процессоров;
- реализовать параллельную версию прикладного ПО COSY с использованием стандарта распараллеливания OpenMP;
- реализовать версию ПО COSY для расчетов на графических ускорителях NVidia;

¹Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, НИР 9.38.673.2013

- сравнить эффективность разработанных версий с имеющейся MPI-версией.

Параллельные реализации COSY. На данный момент существует большое количество подходов к реализации параллельных вычислений. Но наиболее простые подходы для написания параллельных приложений, такие как автоматическое и автоматизированное распараллеливание не применимы для COSY, так как большинство этих подходов и средств не поддерживают Fortran 77, а поддерживающие его САПФОР и BERT77 не смогли сгенерировать параллельный код COSY. Таким образом, было принято решение использовать ручное распараллеливание с использованием технологий OpenMP и CUDA.

COSY Infinity [2] — это программное обеспечение для симуляции, анализа и разработки оптических систем заряженных частиц, основанное на методах дифференциальной алгебры (ДА) [3]. Программа имеет собственный скриптовый язык с простым синтаксисом. Для использования методов ДА код является объектно-ориентированным, что позволяет динамически регулировать типы данных. Присутствуют также инструменты для преобразования любого кода в формате MAD или в формате Standard eXchange Format (SXF) в программу на языке COSY Script. Скомпилированный COSY-код может быть выполнен как непосредственно, так и сохранен в бинарный файл для включения в последующий код. Компилятор имеет строгий синтаксис и анализ ошибок и сравним по скорости с компиляторами для других языков. В COSY используется симплектический интегратор Рунге — Кутты восьмого порядка с автоматическим выбором шага на основе схемы седьмого порядка.

COSY Infinity предлагает различные методы для трекинга частиц с помощью матрицы перехода, также присутствует возможность анализа динамики спина. В коде матрица перехода представлена с помощью типа данных дифференциальной алгебры. Для вывода интерактивной графики используется графическая библиотека PGPLOT. COSY Infinity обеспечивает интерфейсы для Fortran90 и C++. Помимо последовательной версии COSY Infinity есть версия, поддерживающая параллельные вычисления с использованием технологии передачи сообщений MPI. Параллелизация вычислений достигается путем распараллеливания по данным в явном виде путем использования конструкции PLOOP при написании программы на языке COSY Script.

В рамках работы была проведена кроссплатформенная программная реализация версий COSY Infinity с использованием средств

параллельного программирования OpenMP и CUDA. Разработка производилась под Microsoft Windows 7 x64 Professional с помощью Microsoft Visual Studio 2010 Professional. Для компиляции исходного кода на языке Fortran77 и Fortran 90 был выбран компилятор Intel Fortran Composer XE 2011 Update 6. Для компиляции вычислительных ядер CUDA из исходного кода Fortran использовался компилятор PGI CUDA Fortran Compiler. В качестве реализации программного интерфейса MPI была выбрана версия от Intel.

В представленных версиях программы были распараллелены транслирование кода программы на языке COSY Script в мета-код и выполнение этого кода, также был реализован механизм распараллеливания для конструкций языка COSY Script, позволяющих явно указывать параллельные части программы. Так как ни CUDA, ни OpenMP не позволяют задокументированными способами осуществлять параллельную запись в файл, то данная возможность была отключена.

За основу для реализации OpenMP-версии был взят исходный код программного обеспечения COSY Infinity. Для повышения производительности переменные, к которым необходимо было обеспечить общий доступ, были объединены в common-блоки и описаны специальными модификаторами shared; переменные, в которые MPI версия собирала результаты вычислений, были сделаны общими, и запись результатов проводилась непосредственно в них для повышения производительности. Также были переписаны и распараллелены наиболее ресурсозатратные циклы.

Для CUDA-версии за основу была взята логика работы программы OpenMP. Из-за того, что оперативной памяти доступной устройству NVidia GeForce GTX560Ti было недостаточно для расчетов программы, целиком состоявшей из вычислительного ядра CUDA, программа была переписана с большим использованием host-части, обрабатываемой CPU. В результате экспериментов было установлено, что наибольшая производительность достигается при переносе транслирующей части на host, а вычислительной части — на устройство. Так как компиляторы CUDA не поддерживают Fortran77, был написан скрипт на языке Python для перевода исходного кода в стандарт Fortran90. Для оптимизации расчетов проводилось разворачивание циклов, но вследствие того, что Fortran в отличие от C++ не поддерживает механизм шаблонов для функций, то невозможно автоматизировать разворачивание циклов, и разворачивание производилось в очевидных случаях. Поскольку скорость перемещения данных между оперативной памятью и устройством является узким

местом при вычислениях, то основная часть вычислений перенесена на GPU, а на host передаются только результаты вычислений. Однако из-за невозможности проведения вычислений целиком на устройстве, все вычисления перенести не удалось.

Анализ эффективности приведенных реализаций. Для оценки времени выполнения расчетов была написана программа на языке COSY Script, которая рассчитывает динамику поляризованного пучка в электростатическом ускорителе. Параметры ускорителя теоретические, разрабатываются в НИИ города Юлиха, Германия [4]. Так как для уточнения параметров элементов производятся расчеты для 32768 частиц при 100000 оборотов с учетом эффектов до третьего порядка, то программа была написана с использованием этих параметров.

Для оценки эффективности реализованных версий проводилось сравнение времени выполнения программы относительно времени выполнения MPI-реализации и последовательной версии. Каждое измерение времени выполнения программы проводилось три раза. Во всех случаях разброс времени не превосходил 0,5%.

Для оценки зависимости времени вычислений от количества исходных данных было произведено моделирование динамики для различного числа частиц: 32768, 16384, 8192 и 4096. Полученные данные показали линейный прирост скорости вычислений OpenMP-версии в зависимости от количества частиц, что косвенно свидетельствует об эффективности распараллеливания.

Для оценки эффективности выполнения программы в зависимости от различного числа выполняемых потоков было произведено моделирование на процессоре Core i7-2600K. Моделирование было произведено как с включенной технологией Hyper-Threading, так и с выключенной, для оценки эффективности этой технологии применительно к расчетам COSY Infinity.

В итоге были получены следующие результаты для OpenMP:

- скорость вычислений линейно зависит от количества частиц и количества обсчитываемых оборотов, что свидетельствует об эффективном распараллеливании OpenMP версии;
- при использовании максимально доступного числа процессоров, прирост производительности OpenMP версии составляет до 10% по сравнению с MPI-версией;
- прирост производительности по сравнению с последовательной программой составляет 7,5 раз на процессоре с восемью логическими ядрами и 3,9 раз на процессоре с четырьмя физическими ядрами.

Для CUDA-версии было получено, что эффективность вычислений нелинейно растет в зависимости от количества рассматриваемых частиц, и наибольшая эффективность достигается при расчете большого количества частиц. При этом эффективность вычислений превосходит по быстродействию последовательную версию только при использовании максимального числа частиц (32768) и при достаточно большом количестве оборотов (100000).

В числе причин неудовлетворительной производительности CUDA-версии следует отметить следующие:

- низкая пиковая производительность вычислений двойной точности — 158 Gflops, т. е. всего лишь в 1,5 выше пиковой производительности CPU;
- из-за особенностей реализации и малого количества оперативной памяти устройства задержки при обмене данными между CPU и GPU;
- сильное ветвление алгоритма, которое подходит для расчетов на CPU и кластерах, но не подходит для GPU.

Закключение. В работе проведен анализ эффективности параллельных версий программного обеспечения COSY Infinity для проведения расчетов на графических ускорителях и параллельных системах с общей памятью.

В дальнейшем планируется совершенствование представленных параллельных версий COSY Infinity, а также увеличение производительности MPI-версии за счет использования в ней технологии OpenMP для реализации гибридного параллелизма на кластерных системах. Кроме того, для вычислений на графических ускорителях планируется использование не только технологии CUDA, но и открытого стандарта OpenCL, что позволило бы проводить вычисления на более широком классе графических ускорителей, в том числе и на ускорителях от ATI.

Литература

1. Search for Electric Dipole Moments (EDMs) at Storage Rings.
<http://www2.fz-juelich.de/ikp/edm/en/program.shtml>
2. COSY Infinity. http://bt.pa.msu.edu/index_cosy.htm
3. Berz M. High-order computation and normal form analysis of repetitive systems. M. Month (Ed.) // Physics of Particle Accelerators, AIP 249, American Institute of Physics, 1991.
4. Lorentz B. Spin tracking for polarized beam experiments at the Julich cooler synchrotron COSY.
<http://www.bt.pa.msu.edu/TM11/talks/lorentz.pdf>

Рябуша В. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Клеточный автомат, моделирующий движение пучка заряженных частиц

Рекомендовано к публикации профессором Андриановым С. Н.

1. Введение. В настоящее время клеточные автоматы широко используются в качестве среды моделирования (симулирования) сложных динамических систем во многих областях науки.

Среда, которая представляет из себя клеточный автомат, обладает широкими возможностями для моделирования взаимодействий совокупности связанных однородных объектов. К сферам применения клеточных автоматов можно отнести моделирование взаимодействующих клеточных систем в биологии и медицине, моделирование физических процессов в физике частиц и ядерной физике, моделирование гидродинамических и газодинамических течений и т. д. [1, 2]. Более подробно ознакомиться с концепцией клеточных автоматов можно в [3].

Благодаря однородной дискретной структуре, модели, построенные на основе клеточных автоматов, хорошо реализуются в параллельных вычислительных системах. Задачи компьютерного моделирования эволюции движущегося пучка элементарных заряженных частиц в ускорительных установках требуют высоких вычислительных ресурсов и эффективно решаются при распараллеливании вычислений. В связи с этим идея применения клеточных автоматов для данного класса задач моделирования представляется перспективной.

Целью данной работы является формализация правил клеточного автомата для моделирования движения пучка элементарных заряженных частиц под действием собственных кулоновских сил и разработке концепции параллельной реализации такого подхода.

Данная формализация клеточного автомата основана на идее метода Particle-In-Cell [4].

2. Формализация клеточного автомата для одномерного случая. Элементарная заряженная частица p_n обладает следующими характеристиками: x — декартова координата частицы, m — масса частицы, q — заряд частицы, \vec{v} — скорость частицы.

Пучок частиц состоит из N одинаковых частиц, имеет длину L в момент времени t_0 и среднюю скорость \vec{v}_{avg} . Расположим частицы вдоль оси Ox , например, равномерно и случайным образом. Зададим начальные скорости частиц \vec{v} .

Выберем шаг Δt (по времени) клеточного автомата и ограничим время его работы на промежутке $[t_0, T]$, где T — максимально возможное значение t для данного автомата.

Разобьем координатную ось Ox на равные промежутки (в теории клеточных автоматов говорят о ячейке) $K_i = [x_i, x_{i+1})$, где $x_i = i\Delta x$ и $i \in \mathbb{Z}$. Размер ячейки выбирается как $\Delta x = \vec{v}_{avg}\Delta t$ или иным образом.

Формализуем правила автомата в виде алгоритма:

1. Упаковка частиц в квазичастицу.

Ячейка $K_i = \{p_n | x_n \in [i\Delta x, (i+1)\Delta x)\}$. Будем считать, что каждая ячейка K_i является квазичастицей, у которой

$$x_{K_i} = i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, \quad q_{K_i} = \sum_{p_n \in K_i} q_{p_n},$$

$$m_{K_i} = \sum_{p_n \in K_i} m_{p_n}, \quad \vec{v}_{K_i} = \frac{\sum_{p_n \in K_i} \vec{v}_{p_n}}{n_i},$$

где n_i — количество частиц, содержащихся в ячейке K_i .

2. Расчет силы, действующей на квазичастицу. Пусть \vec{R}_{K_i} — результирующая сила, действующая на ячейку K_i .

- (а) Влияние соседних ячеек. Одного «соседа» слева и одного справа

$$\vec{R}_{K_i} = \vec{F}_{K_{i+1}} + \vec{F}_{K_{i-1}},$$

где \vec{F} — силы Кулона, действующие на ячейку. В проекциях на ось Ox имеем

$$R_{K_i} = k \frac{q_{K_i} q_{K_{i-1}}}{\Delta x^2} - k \frac{q_{K_i} q_{K_{i+1}}}{\Delta x^2} = k \frac{q_{K_i}}{\Delta x^2} (q_{K_{i-1}} - q_{K_{i+1}}),$$

где k — коэффициент пропорциональности в законе Кулона.

(b) Влияние двух соседей слева и двух справа

$$R_{K_i} = \vec{F}_{K_{i+1}} + \vec{F}_{K_{i-1}} + \vec{F}_{K_{i+2}} + \vec{F}_{K_{i-2}}.$$

$$\begin{aligned} R_{K_i} &= k \frac{q_{K_i} q_{K_{i-1}}}{\Delta x^2} - k \frac{q_{K_i} q_{K_{i+1}}}{\Delta x^2} + k \frac{q_{K_i} q_{K_{i-2}}}{2\Delta x^2} - k \frac{q_{K_i} q_{K_{i+2}}}{2\Delta x^2} = \\ &= k \frac{q_{K_i}}{\Delta x^2} (q_{K_{i-1}} - q_{K_{i+1}}) + k \frac{q_{K_i}}{2\Delta x^2} (q_{K_{i-2}} - q_{K_{i+2}}). \end{aligned}$$

Кулоновские силы являются дальнодействующими, но влияние M более удаленных соседей можно учесть.

(c) Влияние M соседей слева и M справа

$$\begin{aligned} R_{K_i} &= k \frac{q_{K_i}}{\Delta x^2} \left(\sum_{l=1}^M \frac{1}{l^2} q_{K_{i-l}} - \sum_{l=1}^M \frac{1}{l^2} q_{K_{i+l}} \right) = \\ &= k \frac{q_{K_i}}{\Delta x^2} \sum_{l=1}^M \frac{q_{K_{i-l}} - q_{K_{i+l}}}{l^2}. \end{aligned}$$

3. Ускорение, которое получит K_i ячейка (квазичастица), $a_{K_i} = \frac{R_{K_i}}{m_{K_i}}$, а приращение скорости $\Delta v_{K_i} = a_{K_i} \Delta t$.
4. Расчет координат и скоростей K_i ячейки (квазичастицы) в момент времени $t = t + \Delta t$

$$x_{K_i} = x_{K_i} + v_{K_i} \Delta t + \frac{a_{K_i} \Delta t^2}{2}, \quad v_{K_i} = v_{K_i} + \Delta v_{K_i}.$$

5. Распаковка квазичастицы в элементарные частицы.

- (a) Распаковка координаты частиц в соответствии с прежними координатами $x_{p_{K_i}} = x_{p_{K_i}} + (x_{K_i}^{old} - x_{K_i}^{new})$.
- (b) Распаковка скоростей частиц с учетом пропорционального изменения скорости квазичастицы

$$v_{p_{K_i}} = v_{p_{K_i}} \frac{v_{K_i}^{old}}{v_{K_i}^{new}}.$$

6. Сдвиг шага автомата по времени $t = t + \Delta t$. Если автомат не вышел за заданный промежуток во времени $t \leq T$, то переход к пункту 1.

3. Формализация клеточного автомата для двухмерного случая. Разобьем плоскость Oxy на квадратные ячейки $K_{i,j}$ размером $\Delta x \times \Delta y$, где $\Delta x = \Delta y$, и зададим частицы по аналогии с одномерным случаем.

Алгоритм аналогичен одномерному случаю и отличается размерностью. Особенностью алгоритма является расчет кулоновских сил для двумерного случая. Присутствуют все те же этапы и выполняются по аналогии с одномерным случаем.

Кулоновские силы рассчитываются следующим образом. Пусть элемент, взаимодействующий с $K_{i,j}$, находится на месте $(i-m, j-n)$. Тогда квадрат расстояния между ними можно выразить как

$$r^2 = (m^2 + n^2)\Delta x^2.$$

Проекции кулоновской силы на оси Ox и Oy можно выразить как

$$F_x^1 = k \frac{q_{K_{i,j}}}{\Delta x^2} \frac{q_{K_{i-m,j-n}}}{(m^2 + n^2)^{3/2}} m, \quad F_y^1 = k \frac{q_{K_{i,j}}}{\Delta x^2} \frac{q_{K_{i-m,j-n}}}{(m^2 + n^2)^{3/2}} n.$$

Учет суммарного влияния кулоновских сил соседних ячеек на квазичастицу $K_{i,j}$ в квадрате $(2M \times 2M)$ описывается формулой

$$R_{K_{i,j}}^x = -k \frac{q_{K_{i,j}}}{\Delta x^2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \frac{q_{K_{i+m,j+n}}}{(m^2 + n^2)^{3/2}} m, \\ R_{K_{i,j}}^y = -k \frac{q_{K_{i,j}}}{\Delta x^2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \frac{q_{K_{i+m,j+n}}}{(m^2 + n^2)^{3/2}} n, \quad m^2 + n^2 \neq 0.$$

Для каждой квазичастицы $K_{i,j}$ ускорение, новые скорости и новые координаты находятся по формулам одномерного случая для каждой из координат x и y .

4. Формализация клеточного автомата для трехмерного случая. Разобьем объем $Oxyz$ на ячейки $K_{i,j,k}$ размером $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, где $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, и зададим частицы по аналогии с предыдущими случаями. Алгоритм аналогичен предыдущим случаям и отличается размерностью.

Учет суммарного влияния кулоновских сил соседних ячеек на квазичастицу $K_{i,j,k}$ в кубе размером $(2M \times 2M \times 2M)$ описывается формулами

$$R_{K_{i,j,k}}^x = -k \frac{q_{K_{i,j,k}}}{\Delta x^2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \sum_{l=-M}^M \frac{q_{K_{i+m,j+n,k+l}}}{(m^2 + n^2 + l^2)^{3/2}} m,$$

$$R_{K_{i,j,k}}^y = -k \frac{q_{K_{i,j,k}}}{\Delta x^2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \sum_{l=-M}^M \frac{q_{K_{i+m,j+n,k+l}}}{(m^2 + n^2 + l^2)^{3/2}} n,$$

$$R_{K_{i,j,k}}^z = -k \frac{q_{K_{i,j,k}}}{\Delta x^2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \sum_{l=-M}^M \frac{q_{K_{i+m,j+n,k+l}}}{(m^2 + n^2 + l^2)^{3/2}} l,$$

где $m^2 + n^2 + l^2 \neq 0$.

Для каждой квазичастицы $K_{i,j,k}$ ускорение, новые скорости и новые координаты находятся по формулам одномерного случая для каждой из координат x , y и z .

5. Параллельная реализация. Сформулируем алгоритм для указанных выше случаев.

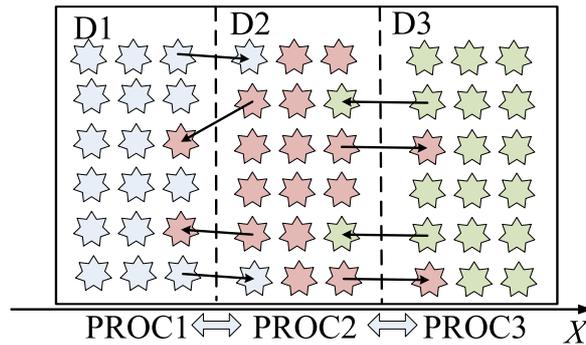


Рис. 1. Распределение квазичастиц по процессорам

1. Равномерно распределим частицы по процессорам $PROC_n$ в зависимости от местоположения. Разобьем координатную область частиц на подобласти D_n по одному из измерений, например, по Ox (см. рис. 1), таким образом, чтобы границы $BORD_D$ подобластей D проходили через одну из точек $x \in (\Delta x \cdot \mathbb{Z})$, и каждая подобласть содержала приблизительно равное количество частиц, т. е. к процессору $PROC_n \in D_n$.
2. Произведем «упаковку» частиц по множеству ячеек $\{K\}$.
3. Перераспределим ячейки K вместе с частицами $p \in K$ по процессорам в зависимости от их местоположения, передвинув границы $BORD_D$ подобластей D таким образом, чтобы каждая

из подобластей D содержала приблизительно равное количество ячеек K (перераспределение производится динамически, на каждой итерации алгоритма).

4. Для расчета сил R_D , ячеек, находящихся близко к границам $BORD_D$, требуется значение ячеек K_{D-1} и K_{D+1} из соседних подобластей $D - 1$ и $D + 1$. В связи с этим каждый процессор $PROC_D$ производит обмен необходимыми значениями ячеек K между смежными процессорами $PROC_{D-1}$ и $PROC_{D+1}$.
5. Для каждой ячейки K производится расчет сил, ускорений, новых скоростей и новых координат.
6. После пересчета координат некоторые ячейки могут переместиться в смежные подобласти, в связи с этим каждый процессор $PROC_D$ производит перемещение таких ячеек в смежные процессоры $PROC_{D-1}$ и $PROC_{D+1}$.
7. Произведем «распаковку» ячеек по найденным значениям.
8. Если не соблюдены условия выхода из алгоритма, то начнем новую итерацию, перейдем к шагу 2.

6. Выводы. В работе сформулированы и формализованы правила клеточного автомата, моделирующего движение пучка элементарных заряженных частиц под действием собственных кулоновских сил для одномерного, двумерного и трехмерного случаев. Также в работе представлены основные принципы реализации данного подхода в параллельной кластерной среде.

Литература

1. Wolfram S. Cellular automation Fluids // J. Stat. Phys., 1986. Vol. 45. P. 471–526.
2. Frish U. et al. Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions // Complex Systems, 1987. Vol. 1. P. 649–707.
3. Аладьев В. З. Классические однородные структуры. Клеточные автоматы. Fultus Publishing, 2009. 535 с.
4. Harlow F. H. A machine calculation method for hydrodynamic problems // Los Alamos Scientific Laboratory report, LAMS-1956, 1955.

Севостьянов Р. А., Нефедов Д. Э.
Санкт-Петербургский государственный университет

Система удаленного управления мобильным роботом

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. Зачастую при удаленном управлении различными типами подвижных объектов (таких как мобильные роботы, роботизированные руки-манипуляторы, квадрокоптеры и т. д.) возникает проблема задержек, которая заключается в том, что управляющий сигнал запаздывает на несколько тактов управления, что во многих случаях приводит к тому, что цель управления не достигается. В данной работе рассматривается задача удаленного управления мобильным роботом, показана проблема задержек, предложен метод решения этой проблемы при помощи алгоритмов компьютерного зрения и дополненной реальности, а также описана система управления, реализующая предлагаемый метод.

2. Объект управления. В качестве объекта управления выступает мобильный робот на гусеничном шасси, описанный в статье [1]. Единственным датчиком является видеокамера, с помощью которой осуществляется локализация положения робота по известным внешним указателям, что позволяет осуществлять автоматическое управление с обратной связью. Распознавание указателей, локализация и синтез управления происходят на внешнем компьютере, робот выступает только в качестве исполнителя управляющих команд, поступающих с компьютера.

Математическая модель робота выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos(\varphi), \\ \dot{y} = v \sin(\varphi), \\ \dot{\varphi} = \omega. \end{cases}$$

Здесь (x, y, φ) — координаты и угол направления движения робота, (v, ω) — поступательная и угловая скорости (управляющие сигналы). Для этой модели удобно строить законы управления, однако их реализация осуществляется с использованием напряжений, подаваемых

на правый и левый электромоторы. Это требует перехода к новым управляющим сигналам

$$v_r = k_r \frac{2v + L\omega}{2}, \quad v_l = k_l \frac{2v - L\omega}{2}.$$

Здесь L — расстояние между гусеницами, k_r и k_l — коэффициенты, связывающие напряжение со скоростью вращения колес. Кроме этого, далее будет учитываться физическое ограничение на движение робота, состоящее в том, что максимальная скорость вращения колес составляет 14 см/с.

Теперь, имея математическую модель и зная состояние робота и координаты конечной точки, построим закон управления, осуществляющий движение в эту точку, с помощью пропорционального регулятора

$$\omega = 0,8(\varphi - \varphi_d),$$

$$\varphi_d = \arctan\left(\frac{x - x_d}{y - y_d}\right).$$

Здесь (x_d, y_d) — координаты точки, φ_d — угол направления на точку.

Когда робот оказывается в некоторой окрестности точки, происходит остановка. Компьютерное моделирование показало, что указанное управление позволяет гарантировать радиус такой окрестности до 1 см (рис. 1). Для реального движения робота радиус окрестности составляет 2-3 см при поступательной скорости $v \approx 6$ см/с.

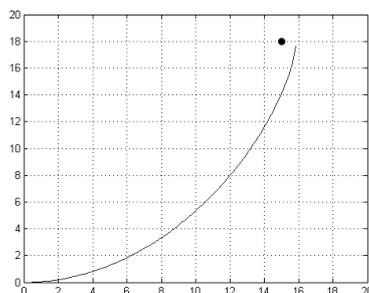


Рис. 1. Начальное положение робота $(x_0, y_0, \varphi_0) = (0, 0, 0)$. Координаты точки-цели $(x, y) = (15, 18)$. Расстояние до точки после остановки — 0,9 см

3. Введение задержек. Теперь рассмотрим ситуацию с удаленным управлением движением робота по компьютерной сети. Локальный сервер, связанный с роботом, передает необработанные изображения на удаленный компьютер через сеть. Далее на удаленном компьютере происходит распознавание, локализация и синтез управления. Управляющие команды передаются через сеть обратно на локальный сервер, который просто пересылает их роботу. Таким образом, контур управления замкнут на удаленном компьютере. Причем в качестве сети, связывающей локальный и удаленный компьютеры, может выступать как локальная сеть, так и сеть интернет.

В такой системе, в зависимости от пропускной способности каналов доступа к сети локального и удаленного компьютеров, а также в зависимости от загруженности промежуточных маршрутизаторов, могут возникать довольно большие временные задержки управляющего сигнала, весьма существенно влияющие на достижение цели управления. Более того, существует вероятность потери пакетов, содержащих управляющие команды, что тоже неблагоприятно сказывается на управлении.

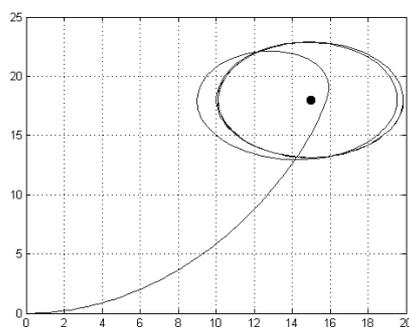


Рис. 2. Влияние задержки в 200 мс на достижение цели. Робот проезжает мимо цели и уже не может достичь ее

Компьютерное моделирование показало, что для некоторых точек задержка уже в 200 мс приводит к тому, что такие точки не могут быть достигнуты (рис. 2). Реальные эксперименты по удаленному управлению показали, что даже на уровне локальной сети за-

держки могут достигать 300 мс, что в некоторых случаях приводит к указанной нежелательной ситуации. Соответственно, при переходе на уровень глобальной сети интернет задержки могут возрасти еще существеннее.

4. Предлагаемый подход к решению проблемы. В предыдущем разделе была описана система, в которой контур управления замкнут на удаленном клиенте (рис. 3), что и является причиной временных задержек. Очевидно, что замыкание контура управления на локальном сервере позволило бы избавиться от этой проблемы. Сделать это можно следующим образом. Предлагается ввести новый уровень абстракции, касающийся выбора точки, к которой нужно двигаться в данный момент и отделить его от построения управления, осуществляющего такое движение. Таким образом, задачу стратегического выбора текущей цели можно возложить на удаленного клиента, а все вычисления, относящиеся к построению управления, передать локальному серверу, тем самым замкнув контур управления именно на нем (рис. 4). Такой подход позволяет удаленному кли-



Рис. 3. Классический подход — контур управления замкнут на удаленном компьютере

енту оперировать не низкоуровневыми командами, а законченными действиями — «приехать в точку». Все, что требуется передать от клиента серверу — координаты этой точки, после чего сервер осуществит все необходимые вычисления и передачу низкоуровневых команд роботу. Таким образом, два уровня системы управления разделены не только логически, но и физически.

Однако специфика ориентирования по внешним указателям подразумевает, что робот может достичь только весьма ограниченное количество точек окружающего пространства. К тому же, оператор может не ориентироваться в системе координат, используемой



Рис. 4. Предлагаемый подход — контур управления замкнут на локальном сервере

в системе. Для решения этой проблемы предлагается использовать технологии дополненной реальности. Зная положения указателей и самого робота в данный момент времени, можно выделить на изображении пиксели, соответствующие области точек, достижимой роботом из текущего положения, и передать удаленному клиенту уже обработанное изображение. Далее, каждому выделенному пикселю можно сопоставить точку в плоскости пола. Таким образом, удаленный оператор может выбрать целевую точку, совершив щелчок мышкой на изображении.

5. Заключение. Все приведенные рассуждения и идеи реализованы в системе удаленного управления мобильным роботом, описанным в начале статьи. Для локального сервера реализовано программное обеспечение, которое осуществляет захват изображения с видеокамеры робота, проводит распознавание внешних указателей и локализацию положения робота, а также отрисовку точек интереса, если это необходимо. После этого уже обработанное изображение кодируется в формат JPEG и передается удаленной программе-клиенту. Когда от клиентской программы приходят координаты целевой точки, программное обеспечение сервера строит управление и посылает управляющие команды роботу. Пока движение к текущей цели не будет завершено, координаты других целей не принимаются.

Соответственно, для удаленного компьютера реализовано клиентское программное обеспечение, которое принимает от удаленного сервера изображения, выводит их на экран монитора, а также может задавать текущую цель как путем щелчка на изображении, так и путем задания координат вручную. После задания цели координаты передаются локальному серверу, который генерирует необходи-

мое управление. Фрагмент пользовательского интерфейса для удаленного компьютера представлен на рис. 5. Изображение обработано локальным сервером, выделен указатель и область доступности для робота.



Рис. 5. Интерфейс программного обеспечения удаленного компьютера

Эксперименты с описанной системой удаленного управления показали, что система действительно работоспособна и обеспечивает такую же эффективность управления, как и локальная система, описанная в разделе 2.

Литература

1. Севостьянов Р. А. Программная поддержка процессов управления гусеничным роботом в реальном времени // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 388–392.
2. Нефедов Д. Э. Вопросы компьютерного зрения в управлении движением гусеничного робота // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 376–381.

Севрюков С. Ю., Соловьев П. А.
Санкт-Петербургский государственный университет

Возможность построения обобщенного алгоритма оценки криптографической стойкости симметричных блочных шифров к атакам на основе методов дифференциального криптоанализа

1. Введение. Несмотря на существенное развитие технологий криптоанализа в последние годы, до сих пор все шифры требуют в существенной степени индивидуального подхода при определении их криптографической стойкости. Отсюда возникает вопрос: «Возможно ли построение обобщенного алгоритма для оценки криптографической стойкости шифра, который будет использовать только данные о структуре шифра для своей работы?». Такой алгоритм, если он возможен, также должен давать достаточно точные оценки криптографической стойкости шифра.

Однако такой алгоритм, если он вообще возможен, должен создаваться для каждого класса шифров и каждого класса криптографических атак отдельно. В данной работе построен алгоритм для оценивания криптографической стойкости симметричных блочных шифров к атакам на основе широко-используемых методов дифференциального криптоанализа.

Симметричные блочные шифры были выбраны как один из самых популярных классов шифров. Они используются для защиты больших массивов данных, что требует от них высокой криптографической стойкости для обеспечения информационной безопасности данных на продолжительное время.

2. Возможный оценивающий алгоритм. Если обобщенный оценивающий алгоритм возможен, результатом его работы над входными данными в виде структуры рассматриваемого шифра должна быть некоторая характеристика криптографической стойкости этого шифра. Такой характеристикой может служить дифференциальная характеристика шифра.

Пусть криптографический алгоритм A симметричного блочного шифра C представим в виде

$$A = \{A_{11} \circ \dots \circ A_{1n_1}\} \circ \{A_{21} \circ \dots \circ A_{2n_2}\} \circ \dots \circ \{A_{m1} \circ \dots \circ A_{mn_m}\}, \quad (1)$$

где A_{ij} — составные блоки шифра, являющиеся атомарными криптографическими операциями, а фигурными скобками выделены группы блоков, выполняющиеся параллельно.

Криптографическая стойкость группы параллельно выполняемых блоков определяется криптографической стойкостью наиболее устойчивого ко взлому блока или, в случае методов дифференциального криптоанализа, блоком с наименьшей дифференциальной характеристикой. В случае же, когда блоки идут последовательно, дифференциальная характеристика группы будет представлять собой произведение дифференциальных характеристик блоков этой группы [1].

В силу этого, общая дифференциальная характеристика шифра может быть вычислена как

$$D = \prod_{i=1}^m \left(\min_j d_{ij} \right), \quad (2)$$

где d_{ij} обозначают дифференциальные характеристики блоков A_{ij} шифра в представлении (1).

Таким образом, построение обобщенного оценивающего алгоритма является возможным, если возможно нахождение обобщенных дифференциальных характеристик всех возможных видов блоков A_{ij} . Однако, при этом не дается никаких гарантий относительно соответствия полученного результата истинному значению дифференциальной характеристики данного шифра.

3. Атомарные криптографические операции. Всего существует восемь видов таких базовых операций [2–4], которые будут рассмотрены далее с целью нахождения их обобщенных дифференциальных характеристик.

3.1. S-box. По сути S-box представляет собой криптографический объект, преобразующий входную строку из 4 (например, шифр PRESENT [5]) или 6 (например, шифр DES [6]) бит в выходную строку из 4 бит в соответствие с некоторой таблицей преобразований, которая должна удовлетворять определенным правилам [5].

S-box имеют известную уязвимость, связанную с тем, что различные выходные строки имеют различные вероятности появления, что делает данный класс криптографических операций уязвимым к различного рода атакам [5, 6].

Стойкость отдельно взятой S-box к атакам дифференциального

криптоанализа определяется конкретными значениями из таблицы преобразований [5, 6]. В общем случае дифференциальная характеристика S-box не может иметь значение больше $\frac{1}{2}$.

3.2. Нелинейные логические функции. В большинстве случаев нелинейные логические функции в криптографии представляют собой суперпозиции из других базовых криптографических функций: перестановок, побитовых сдвигов, исключающего ИЛИ, сложения и вычитания по mod 2^n и умножения. Однако, существует и класс нелинейных логических функций, который необходимо рассматривать отдельно. Это функции расширения бит-строки. На вход такой функции подается строка бит длины n , которая преобразуется в бит-строку длины $m > n$ в соответствии с некоторым правилом [2].

Поскольку такое преобразование делает шифр сложнее для взлома, его дифференциальная характеристика в соответствии с формулой (2) и правилами построения дифференциальных характеристик должна быть $d_{i,j} > 1$. Пусть $k \leq m - n$ число строго определенных бит в расширенной строке. Тогда, дифференциальная характеристика $d_{i,j}$ может быть определена как $2^k = 2^{m-n-d}$.

3.3. Сложение и вычитание по mod 2^n . Сложение по mod 2^n может быть представлено как функция $F_{2^n} \times \dots \times F_{2^n} \rightarrow F_{2^n}$, где количество операндов в левой части соответствует длине бит-строки. Таким образом, дифференциальная вероятность может быть вычислена как [7]

$$x dp^+(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = Pr_{x,y}[(x \oplus \alpha) + (y \oplus \beta) \oplus (x + y) = \gamma].$$

При этом дифференциал $(\alpha, \beta \rightarrow \gamma)$ представим как восьмеричное слово $w = w_7 w_6 \dots w_0$ где $w_i = 4\alpha_i + 2\beta_1 + \gamma_i$. В силу этого, $x dp^+$ является моноидом восьмеричных слов с рациональными коэффициентами. Серии восьмеричных слов w могут быть записаны как $S(w) = L A_{w_1} \dots A_{w_n} C$, где $k = \overline{0, 7}$. Матрицы A_k имеют размерность 2×2 , Строка $L - 1 \times 2$, а столбец $C - 2 \times 1$. Конечные значения этих матриц могут быть найдены в [7].

В [7] также показано что дифференциальная характеристика сложения по mod 2^n сильно зависит от используемых при вычислениях матриц A_k , которые определяются количеством и значениями складываемых бит. Таким образом, сложению по mod 2^n нельзя поставить в соответствие обобщенную дифференциальную характеристику точнее, чем $\frac{1}{2}$.

Аналогичным образом может быть найдена дифференциальная характеристика вычитания по mod 2^n , которая не может быть дана более точной, чем $\frac{1}{2}$.

3.4. Исключающее ИЛИ. Исключающее ИЛИ может быть представлено как маппинг $Z_{2^n} \times Z_{2^n} \rightarrow Z_{2^n}$. Таким образом, дифференциальная вероятность данной операции может быть записана через маппинг $Z_{2^n}^3 \rightarrow [0, 1]$ как [7]

$$adp^{\oplus}(\alpha, \beta \rightarrow \gamma) = Pr_{x,y}[(x + \alpha) \oplus (y + \beta) - (x \oplus y) = \gamma].$$

Исключающее ИЛИ также может быть приведено к формальным сериям по основанию 8 и $(\alpha, \beta \rightarrow \gamma)$ может быть переписано в виде восьмеричного слова $w = w_7 w_6 \dots w_0$, или как формальная серия $S(w) = LA_{w_1} \dots A_{w_n} C$, где $k = \overline{0, 7}$. Матрица A_k имеет размерность 8×8 , строка $L - 1 \times 8$, а столбец $C - 8 \times 1$. Значения данных матриц и способы их получения могут быть найдены в [7].

Дифференциальная характеристика исключающего ИЛИ сильно зависит как от длин бит-строк операнд, так и от значений самих бит. Поэтому для исключающего ИЛИ невозможно дать обобщенную дифференциальную характеристику более точную, чем $\frac{1}{4}$.

3.5. Умножение. Умножение над полем 2^n использует представление двоичного числа в виде полинома $\sum_0^{n-1} b_i x^i$, где b_i есть значение i -го бита в двоичном представлении числа [7]. Для избежания переполнения, к непосредственному результату умножения применяется mod P , где P есть некоторый несократимый полином.

Поскольку умножение целиком и полностью основывается на операции исключающего ИЛИ [7], которая была рассмотрена в подразделе 3.4, для операции умножения нельзя построить обобщенную дифференциальную характеристику более точную, чем $\frac{1}{4}$.

3.6. Циклические побитовые перестановки. Пусть $\lll k$ обозначает циклический сдвиг влево на k бит. Также пусть нижние индексы при X обозначают систему счисления, в которой X записан. Тогда из [7] следует что

$$X_2 \lll 1 = ((X_{10} + X_{10}) \bmod 2^n - 1)_2. \quad (3)$$

Из уравнения (3) видно, что циклический сдвиг влево на k бит эквивалентен $2^k - 1$ операциям сложения по основанию 2^n . Аналогичные результаты можно получить и для циклического побитового

сдвига вправо. Таким образом, обобщенную дифференциальную характеристику для данной операции нельзя получить более точной, чем $\frac{1}{2}$.

3.7. Перестановки. Перестановки являются обширным классом криптографических операций, поэтому обобщенные дифференциальные характеристики будут даны только для наиболее широко используемых из них. Для перестановок дифференциальная характеристика есть коэффициент $(e_s, 0) \rightarrow e_t$, показывающий вероятность того, что s -бит во входной строке станет t -битом в выходной строке при постоянном ключе.

Ниже даны значения дифференциальных характеристик для наиболее широко используемых перестановок (l обозначает длину преобразуемой бит-строки):

GPR перестановка	$1/2 + 1/2^l$	[8, 9]
OMFLIP перестановка	$1/4$	[8]
BFLY, IBFLY, CROSS перестановка	$1/2^{\log_2 l}$	[9]
SWPERM перестановка	$1/2^{\log_2 2l}$	[10]
SIEVE перестановка	$1/2^{\log_2 6}$	[10]

4. Результаты. Было показано, что для всех выделенных видов атомарных криптографических операций можно построить обобщенные дифференциальные характеристики. Таким образом, построение обобщенного алгоритма оценки криптографической стойкости симметричных блочных шифров к атакам на основе методов дифференциального криптоанализа является возможным.

Однако уровень обобщения, понадобившийся для построения дифференциальных характеристик, означает, что точность оценок, полученных с помощью такого алгоритма будет очень низкой, и поэтому алгоритм оценивания является неприменимым на практике.

В качестве примера рассмотрим алгоритм шифрования DES. Его реальная дифференциальная характеристика равна примерно 2^{-19} при ключе длиной 48 бит, что означает, что для взлома шифра требуется примерно $2^{47,5}$ пар известных открытых тестов [1]. В соответствии же с выстроенной в данной работе техникой оценки, дифференциальная характеристика имеет значение около $2^{-15,3}$, и для взлома шифра требуется уже только $2^{40,15}$ пар известных открытых текстов.

Литература

1. Biham E., Shamir A. Differential cryptanalysis of DES-like cryptosystems // Journal of Cryptology, 1991. Vol. 4. P. 3–72.
2. Adams C. The CAST-128 encryption algorithm. <http://tools.ietf.org/html/rfc2144>
3. Daley W. M., Kammer R. G. The official AES standard // Federal Information Processing Standards Publication 197, 2001. <http://csrc.nist.gov/publications/fips/fips197/fips-197.pdf>
4. Biham E., Dunkelman O., Keller N. A new attack on 6-Round IDEA // Fast Software Encryption, 2007. P. 211–224.
5. S-Boxes and their algebraic representations. <http://www.sagemath.org/doc/reference/cryptography/sage/crypto/mq/sbox.html>
6. Gargiulo J. S-Box modifications and their effect in DES-like encryption systems. http://www.sans.org/reading_room/whitepapers/vpns/s-box-modifications-effect-des-like-encryption-systems_768
7. Wallen J. On differential and linear properties of addition // Helsinki University of Technology, Laboratory for Theoretical Computer Science Research, Reports 84, 2003. <http://www.tcs.hut.fi/Publications/bibdb/HUT-TCS-A84.pdf>
8. Lee R. B. et al, Permutation operations in block ciphers // Embedded Cryptographic Hardware: Design and Security, 2004. P. 219–236.
9. Hilewitz Y., Z. Jerry Shi, Lee R. B. Comparing fast implementations of bit permutation instructions // 38th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, 2004. P. 1856–1863.
10. McGregor J. P., Lee R. B. Architectural enhancements for fast subword permutations with repetitions in cryptographic applications // International Conference on Computer Design: VLSI in Computers and Processors, 2001. P. 453–461.

Сердюк Ю. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Выделение ключевых слов для различных интернет-сообществ в *Twitter*

Рекомендовано к публикации доцентом Добрыниным В. Ю.

1. Введение. В популярном сервисе микроблогинга *Twitter* ежедневно делаются миллионы записей, в которых люди выражают свое мнение по поводу того или иного события, делятся ссылками на новостные статьи и многое другое. Написано множество работ, посвященных работе с записями, сделанными в *Twitter*, также известными как твиты (*tweets*). К примеру, в статье [1] предлагается метод тематического разбиения твитов и рассматривается метод определения интернет-сообщества, в котором находится пользователь *Twitter*. В данном исследовании использовалась коллекция более чем из миллиона твитов, посвященных выборам 57-го президента США.

2. Поставленная задача. Большинство пользователей *Twitter* состоят в том или ином интернет-сообществе — группе людей со сходными интересами и общающимися на эту тему. Был выдвинут вопрос о том, можно ли найти слова, с помощью которых можно определить вероятность принадлежности пользователя к тому или иному интернет-сообществу. Цель эксперимента, описанного в данной работе, — это разбиение по определенному признаку твитов на кластеры и определение для каждого кластера ключевых слов.

3. Выдвинутая гипотеза. Все записи в *Twitter* ограничены размером в 140 символов, поэтому использование стандартных методов сравнения документов могло не принести желаемого результата, в связи с чем особое внимание было уделено хештегам. Часто в схожие по смыслу твиты добавляются различные по написанию хештеги (к примеру, #NObama, #AnybodyButObama, #ObamaMustGO). В связи с этим и была выдвинута гипотеза о том, что люди из одного интернет-сообщества будут использовать одинаковые хештеги. Попробовать объяснить это можно следующими причинами: люди, состоящие в одном интернет-сообществе, со схожими интересами, соответственно, общающиеся на общие темы и интересующиеся мнением друг друга, будут использовать и схожий язык хештегов. Следу-

ющая причина состоит в целенаправленном продвижении хештегов, придуманных тем или иным интернет-сообществом. Исходя из этого, для кластеризации твитов было решено использовать хештеги.

3.1. Кластеризация вершин графов. С помощью твитов был составлен граф: в вершинах находились хештеги, а ребра имели вес, равный количеству раз, когда оба хештега встречались в одном твите. Следующим шагом стал выбор метода кластеризации в данном графе. Был выбран метод, описанный в статье [2]. Данный метод использует понятие дерева минимальных разрезов [3], также называемых Gomory-Hu tree. Идея метода кластеризации состоит в том, что к исходному графу мы добавляем новую вершину t , соединяя ее со всеми уже имеющимися вершинами ребрами с весом α . Затем строим дерево минимальных разрезов для нового графа и удаляем из него t , разбивая тем самым граф на несколько подграфов, и считаем, что множества вершин каждого подграфа образуют кластеры. Выбором значения параметра α мы определяем «жесткость» кластеризации. Если взять значение α достаточно маленьким, то минимальным разрезом вершины t с любой другой вершиной будет просто «отделение» вершины t от всего графа. Поэтому у дерева минимальных разрезов с маленьким значением α вершина t будет стоять на крайнем положении и ее удаление никак не разобьет исходный граф. С другой стороны, если параметр α будет достаточно большим, то любой минимальный разрез сможет себе позволить «перерезать» ребро с весом α не более одного раза. Таким образом, дерево минимальных разрезов для графа с высоким значением α будет звездообразным с вершиной t в центре. Выбором параметра α между этими двумя крайними значениями можно менять количество кластеров и их размеры. Алгоритм построения дерева минимальных разрезов на $C++$ реализован в библиотеке *LEMON*.

3.2. Оценка качества кластеров. LDA. Следующим шагом стал выбор критерия качества кластеров, который помог бы выбрать оптимальное значение параметра α . Для этого была выбрана мера Perplexity, которая часто рассматривается с моделью LDA (latent Dirichlet allocation) [4]. LDA — это порождающая модель, которая с помощью неявных групп помогает объяснить, почему некоторые части наблюдений схожи. К примеру, если мы рассматриваем коллекцию документов, то в LDA каждый документ будет рассматриваться как набор различных тематик. С помощью LDA можно для всех слов, встречающихся в документах коллекции, найти вероят-

ности того, что это слово относится к той или иной тематике. Для этого мы выбираем количество тем K и значения гиперпараметров α и β . Опытным путем было получено, что часто оптимальными значениями являются $\alpha = 50/K$ и $\beta = 0,01$ [5]. Определив количество тем и гиперпараметры распределения, можно распределить слова по тематикам. Положим M — количество документов в коллекции, N_m — длина документа m , N — сумма всех N_m , V — размер словаря коллекции, \vec{w} — вектор, в начале которого стоят по порядку слова первого документа с учетом повторений, затем слова второго документа и т. д., \vec{z} — вектор, на i -ой позиции которого стоит тема, к которой относится слово w_i . Для начала каждое слово относим к случайной теме. Рассмотрим слово t , стоящее на первой позиции ($i = 1$) первого документа ($m = 1$), и для каждой темы k находим вероятности того, что это слово относится к данной теме [4]:

$$p(z_i = k | \vec{z}_{-i}, \vec{w}) = \frac{p(\vec{w}, \vec{z})}{p(\vec{w}, \vec{z}_{-i})} = \frac{p(\vec{w} | \vec{z})}{p(\vec{w}_{-i} | \vec{z}_{-i})} \frac{p(\vec{z})}{p(\vec{z}_{-i})} \propto$$

$$\propto \frac{n_{k,-i}^{(t)} + \beta}{\sum_{t=1}^V (n_{k,-i}^{(t)} + \beta)} \frac{n_{m,-i}^{(k)} + \alpha}{\sum_{k=1}^K (n_m^{(k)} + \alpha) - 1},$$

где $\vec{w} = \{w_i = t, \vec{w}_{-i}\}$, $\vec{z} = \{z_i = k, \vec{z}_{-i}\}$, $n_k^{(t)}$ — количество раз, с которым слово t встречается с темой k , $n_m^{(t)}$ — количество раз, с которым слово t встречается в документе m , $n_m^{(k)}$ — количество раз, с которым тема k встречается в документе m . Символ $-i$ означает, что мы рассматриваем все позиции, кроме i -ой, а \propto — символ пропорциональности. Посчитав вероятности для каждой темы, мы случайно относим это слово к какой-то из тем в соответствии с полученными вероятностями. Далее рассматриваем второе слово ($i = 2$) первого документа ($m = 1$). Потом рассматриваем все слова второго документа ($m = 2$) и так далее, затем начинаем сначала, и так достаточно большое количество раз (автором данной статьи делалось до 2000 итераций). Распределив слова по темам, находим значения для $(M \times K)$ -матрицы Θ распределения тем по документам, и $(K \times V)$ -матрицы Φ распределения слов по темам, по формулам

$$\varphi_{k,t} = \frac{n_k^{(t)} + \beta}{\sum_{t=1}^V (n_k^{(t)} + \beta)}, \quad \vartheta_{m,k} = \frac{n_m^{(k)} + \alpha}{\sum_{k=1}^K (n_m^{(k)} + \alpha) - 1}.$$

Будем говорить, что $\mathcal{M} = \{\Theta, \Phi\}$ — модель нашего языка.

3.3. Оценка качества кластеров. Perplexity. Вместе с LDA часто рассматривается мера Perplexity, характеризующая способность модели $\{\Theta, \Phi\}$ генерировать документы, или, проще говоря, говорит, какова правдоподобность того, что коллекция документов \mathcal{W} могла появиться в языке, описываемого моделью \mathcal{M} . Perplexity имеет два основных применения — оценка качества модели \mathcal{M} и соответствия коллекции \mathcal{W} этой модели. В качестве примера первого применения можно рассмотреть случай, когда мы, имея коллекцию из 10000 документов, построим модель \mathcal{M} с помощью 8000 документов, скрыв 2000 документов, а потом будем проверять, насколько хорошо данная модель описывает документы, которые были первоначально скрыты. Второе применение возможно, когда мы имеем модель языка, которая хорошо описывает документы какой-то тематики, и хотим проверить, соответствует ли коллекция \mathcal{W} этой тематике. Мера Perplexity для коллекции \mathcal{W} при учете модели \mathcal{M} определяется как

$$P(\mathcal{W}|\mathcal{M}) = \prod_{m=1}^M p(\vec{w}_m|\mathcal{M})^{-\frac{1}{N}} = \exp\left(-\frac{\sum_{m=1}^M \log p(\vec{w}_m|\mathcal{M})}{\sum_{m=1}^M N_m}\right),$$

$$p(\vec{w}_m|\mathcal{M}) = \prod_{t=1}^V \left(\sum_{k=1}^K \varphi_{k,t} \tilde{\vartheta}_{m,k}\right)^{n_m^{(t)}},$$

где $\tilde{\vartheta}_{m,k}$ — коэффициенты матрицы $\tilde{\Theta}$, рассчитанной для коллекции \mathcal{W} . Меньшее значение меры *Perplexity* соответствует большему соответствию коллекции \mathcal{W} модели \mathcal{M} . После разбиения нашего графа мы получили n кластеров. Для каждого кластера на основе 90% документов составляем модель \mathcal{M}_n . Пусть $\tilde{\mathcal{W}}_n$ — коллекция скрытых (оставшихся 10%) документов для кластера n . Была выдвинута гипотеза, что при высоком качестве кластеризации мера $P(\tilde{\mathcal{W}}_i|\mathcal{M}_j)$ должна быть ниже при $i = j$ и выше при $i \neq j$, или, другими словами, что модель, составленная на основе документов какого-то кластера, хорошо описывает документы, входящие в этот кластер, но плохо описывает документы из других кластеров. Основываясь на всех вышесказанных рассуждениях, было найдено оптимальное значение для параметра кластеризации α .

3.4. Поиск ключевых слов для кластеров. Используемый метод поиска ключевых слов хорошо описывается в [6, 7]. Идея метода состоит в том, что ключевые слова имеют неравномерное распределение по всей коллекции. Таким образом мы разбиваем коллекцию документов на D кластеров. Для каждого слова имеем значения N — количество кластеров, в которых встречается рассматриваемое слово и T — количество вхождений слова в коллекцию с учетом повторений. Таким образом, выдвигая гипотезу о равномерности распределения слова в коллекции, считаем для него меру

$$P(N, T) = \sum_{n=1}^N p(n, T) = \sum_{n=1}^N \frac{n! \binom{D}{n} \left\{ \begin{matrix} T \\ n \end{matrix} \right\}}{D^T},$$

которая должна иметь достаточно низкое значение для слов, имеющих неравномерное распределение. В фигурных скобках показаны числа Стирлинга второго рода [7].

3.5. Полученные результаты. Полученные значения *Perplexity* можно объяснить следующим образом: при маленьком значении α кластеризация очень мягкая и группирует достаточно разносторонние твиты, поэтому модель, построенная для одного кластера, примерно так же удачно описывает твиты из другого кластера. При высоком значении α в кластеры собираются наиболее схожие твиты, но каждый кластер получается заметно меньших размеров, поэтому на основе 90% документов сложнее построить качественную модель M . Было решено взять $\alpha = 1$, поскольку при этом значении параметра разница между *Perplexity* наибольшая.

Таблица. Зависимость *Perplexity* от значения параметра кластеризации α .

α	Среднее значение для собственного кластера	Среднее значение для других кластеров	Количество кластеров с более 1000 твитов
0.01	629	869	114
0.1	425	637	57
1	284	591	55
10	336	614	54
100	387	633	47

В результате поиска ключевых слов для кластеров были выделены следующие слова: southcarolina, cnelections, edshow, twister, clarkson, kelly, hitechcj, lgbt, bretbaier, hhrs, libertarian, reagan, foxdebate, abcdebate, immigration и другие.

4. Заключение. Таким образом получены слова, которые могут сообщить вероятность принадлежности автора твита к тому или иному интернет-сообществу. Это может быть полезно для изучения общественного мнения, можно в кратчайшие сроки узнать реакцию определенной группы людей на то или иное событие. Данный метод может быть улучшен применением других методов поиска ключевых слов и принятия другой гипотезы для разделения твитов на кластеры.

Литература

1. Rosa K. D., Shah R., Lin B. et al. Topical clustering of tweets. USA, 2011. 8 p.
<http://www.cs.cmu.edu/~kdelaros/sigir-swsm-2011.pdf>
2. Flake G. W., Tarjan R. E., Tsioutsoulouklis K. Graph clustering and minimum cut trees // Internet Mathematics, 2004. Vol. 1, No 4. P. 385–408
3. Gomory R. E., Hu T. C. Multi-terminal network flows // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1961. Vol. 9, No 4. P. 551–570
4. Heinrich G. Parameter estimation for text analysis. Technical report Fraunhofer IGD Darmstadt, Germany, 2009. 32 p.
<http://www.arbylon.net/publications/text-est.pdf>
5. Blei D. M. , Ng A. Y., Jordan M. I. Latent dirichlet allocation // Journal of Machine Learning Research, 2003. Vol. 3. P. 993–1022.
6. Bookstain A., Klein S. T., Raita T. Detecting content-bearing words by serial clustering // Proceedings of the Eighteenth Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval, 1995. P. 319–327.
7. Сердюк Ю. А. Алгоритм поиска ключевых слов методом кластеризации и его экспериментальное исследование // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 397–402.

Шакбасаров Р. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет

Идентификация объектов в видеопотоке на основе анализа цвета

Рекомендовано к публикации доцентом Погоржевским С. В.

1. Введение. Информационные технологии все сильнее входят в нашу жизнь. Одним из направлений является распознавание объектов. Существует множество технологий, позволяющих отслеживать предметы на видео, а с помощью специальных датчиков есть возможность определять свойства этих объектов, но чтение и анализ видео в реальном времени требует высоких мощностей.

Одной из задач распознавания объектов на видео является распознавание игроков на футбольном матче. Здесь информационные технологии помогают мгновенно дать ответ на спорные вопросы, на которые судье не всегда бывает легко ответить. Часто это бывает из-за халатности судейства или низкого уровня профессионализма. Но с другой стороны, необходимо оценивать и действия судей, и принятые ими решения во время игры.

2. Цель работы. Существует много программ, позволяющих отслеживать и анализировать позиции игроков, а также выдавать отчеты по игре, но программ, оценивающих работу судьи, по крайней мере в России, нет.

В данной работе описан алгоритм, дающий оценку главному судье на футбольном матче. Ниже предполагаются основные моменты игры, при которых позиция у судьи должна быть определенной. Далее понятие «зона» призвано подчеркнуть, что всякая рекомендованная позиция есть пространство, находясь в котором судья может действовать наиболее эффективно. Зона может быть больше, меньше или иметь различные очертания в зависимости от обстоятельств конкретного момента. Наилучшая позиция та, с которой судья может принять правильное решение. Все рекомендации по выбору позиции на поле основаны на различных вариантах возможного развития событий и должны корректироваться с учетом специфической информации о командах, игроках и событиях, произошедших по ходу игры. Рассмотрим игровые ситуации, в которых зона предопределена.

Расположение, когда мяч в игре [1]:

- движение судьи не должно мешать движению мяча;
- судья должен находиться достаточно близко, чтобы видеть игру, но не мешать ей.

Расположение, когда мяч не в игре [1]:

- расположение при начальном ударе;
- расположение при ударе от ворот;
- расположение при угловом ударе;
- расположение при штрафном/свободном ударе;
- расположение при выполнении 11-метрового удара.

3. Решение задачи. Исходя из поставленной задачи, видеозапись, с которой будет производиться распознавание, должна быть достаточно высокого качества (например, Full HD 1920 × 1080 пикселей). Чтение видео такого формата с анализом — задача весьма трудоемкая. Поэтому необходимо создать программу, способную максимально быстро считать видеозапись и проанализировать позиции судьи относительно других игроков и мяча.

В качестве метода распознавания объектов в видеопотоке был применен способ определения координат на основе анализа цвета. Заметим, что форма игроков разных команд, а также судьи отличаются друг от друга. На современных футбольных стадионах всегда имеется достаточно хорошее освещение, поэтому даже под влиянием внешних факторов смещение цвета в спектре на видео будет незначительным. Но все же для распознавания объектов на основе анализа цвета модель RGB не подойдет из-за высокой погрешности. Для более корректного определения объектов в программе используется цветовая модель HSV (Hue — цветовой тон (H), Saturation — насыщенность (S), Value — значение цвета (V)).

1. Для исключения лишних объектов, не попадающих на поле, первым делом на каждый кадр накладывается маска, которая делает черными все пиксели, не попадающие на поле.
2. Определяются цветовые тона формы футболистов каждой команды и судьи в разных моментах времени и на разных позициях. Далее вычисляется среднее значение цвета и необходимый интервал по каждому из параметров цветовой модели HSV. По этим параметрам, введенным в начале, будет происходить определение позиций игроков. Но стоит отметить три сопутствующие проблемы:

- если цвет формы будет красный, то возможны ситуации когда, параметр H близкий к 0 в одних пикселях и близкий к 1 в других. В этом случае будем иметь высокое максимальное отклонение от среднего. Проблема решена следующим способом. Если $H < 0,2$, то прибавим к H единицу. Далее найдем среднее по всем точкам и если оно больше единицы, вычитаем 1,0 из среднего значения, если меньше, то оставляем;
- если цвет формы объекта черный, или более темный, то значение параметра H не будет играть важную роль, так же, как и S . А вот параметр V будет определяющим. Проблема с черным цветом решается уменьшением интервала для V и S и увеличением интервала для H ;
- если цвет формы объекта — белый или серого оттенка, то значение параметра H опять же не будет играть важную роль. Уменьшаем интервал для параметра S и увеличиваем для H и V . Но тут встает еще одна проблема с распознаванием самого объекта, так как на футбольном поле есть белые полосы, которые иногда могут распознаться. Проблема решается следующим образом. В самом начале, когда поле пусто делается маска для белых полос, которая далее на каждом кадре меняет цвет на цвет футбольного покрытия, тем самым футбольное поле становится полностью зеленым.

3. Далее, когда есть цвет и цветовой интервал формы игроков каждой команды и судьи, можно определять координаты остальных игроков в каждый момент времени. Так как в каждом кадре позиция игроков не сильно изменяется, есть возможность оптимизировать программу и отслеживать координаты игроков один раз в секунду.

Теперь подробнее разберем, как происходит определение координат игроков.

1. Известно, что в каждой команде 10 полевых игроков и один вратарь, один судья на поле. Поэтому находим пиксели, попадающие в необходимый интервал, и находим центры сгущения таких областей для каждого объекта. В целях оптимизации программы находится не центр тяжести области, а центр

прямоугольника, в который вписана эта область. Это реализовано с помощью следующих методов работы с изображениями в MATLAB [2–4]:

- `bwlabel` — ищет на бинарном изображении `BW` связанные области пикселей объектов и создает матрицу `L`, каждый элемент которой равен номеру объекта, которому принадлежит соответствующий пиксель изображения;
 - `regionprops` — измеряет набор характеристик для каждой области, отмеченной в матрице меток. Положительные вещественные элементы этой матрицы соответствуют разным областям;
 - `ismember` — пригодна для конъюнкции с функцией `regionprops` при выборе областей на основе некоторых критериев.
2. Теперь встает задача определения прямоугольных координат игроков. При определении отсекающих прямых можно легко вычислить угловые точки игрового поля. Далее поле делится на два треугольника и для каждого треугольника задается матрица аффинного преобразования, с помощью которой находятся прямоугольные координаты игроков, судьи и мяча.
 3. Возможны ситуации, когда в кадр могут попасть лишние объекты, которые могут распознаться. Например, может случиться, что будет 11 игроков в одной команде. Решение проблемы основано на том, что за 1 секунду каждый игрок не сможет переместиться больше, чем на 8 метров. Для этого достаточно сверить полученные координаты в предыдущем кадре.

Необходимые параметры для оценки судьи:

- имея координаты судьи в каждый момент времени, можно легко определить его физические показатели: скорость, ускорение, количество ускорений, среднюю скорость, траекторию, плотность расположения координат, а также соответствие нормам, изложенным выше;
- количество ускорений определяется с использованием графика скорости судьи в течение матча;
- плотность расположения координат показано на чёрно-белом изображении. Чем больше времени судья находился в данной позиции, тем более белым будет цвет данной координаты;

- моменты, когда мяч вне игры, определяются вручную, но программа автоматически учитывает соответствие требованиям, изложенным выше.

4. Анализ результатов работы алгоритма. Алгоритм проанализирован на записи футбольного матча длиной 15 мин. 59 сек. с разрешением 720×576 пикселей. Из-за того, что футбольное поле на видео имеет форму четырехугольника, длина дальнего края на примере в 2,01 раза меньше, чем длина ближнего края (соотношение берется в пикселах). Но игроки, находящиеся на дальнем поле на видео отображаются с небольшими размытиями. Поэтому прямоугольники, в которых находятся позиции ближних игроков, по сравнению с дальними (на противоположной стороне относительно камеры) в 2–2,5 раза больше. Тогда отношение ширины области распознаваемого объекта в соотношении с полем будет равно 150–300. Если учесть, что длина поля 100 метров, а ширина 65 метров, то в метрах ширина игрока на видео 0,4–0,7 метра. При преобразовании в прямоугольные координаты потери в точности определения координат игроков на дальней позиции от камеры будет увеличено в 2–2,5 раза, т. е. 1–1,5 метра по координате X и 0,5–1 метр по координате Y.

Литература

1. Рекомендации для судей.
<http://refereeclub.ru/rekomendacii-pravilo-5-referee>
2. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. М.: Техносфера, 2006. 616 с.
3. Blanchet G., Charbit M. Digital signal and image processing using MATLAB. Wiley-ISTE, 2006. 763 p.
4. Demirkaya O., Asyali M. H., Sahoo P. K. Image processing with MATLAB: Applications in Medicine and Biology. CRC Press, 2011. 451 p.

Шарлай А. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Об определении встроенных формул в изображениях печатного текста

Рекомендовано к публикации профессором Андриановым С. Н.

Введение. В наше время основные задачи по распознаванию печатных текстов можно считать решенными. Существует много различных пакетов программ, позволяющих производить распознавание отсканированных текстов. Распознавание широко используется для конвертации книг и документов в электронный вид, для автоматизации систем учёта в бизнесе или для публикации текста на веб-странице. Оптическое распознавание текста позволяет редактировать текст, осуществлять поиск слова или фразы, хранить его в более компактной форме, демонстрировать или распечатывать материал, не теряя качества, анализировать информацию, а также применять к тексту электронный перевод, форматирование или преобразование в речь. Оптическое распознавание текста является исследуемой проблемой в областях распознавания образов, искусственного интеллекта и компьютерного зрения [1].

В ранних версиях системы оптического распознавания текста могли работать только с одним шрифтом и требовали для программирования изображение каждого символа шрифта. Сейчас больше всего распространены так называемые «интеллектуальные» системы с высокой степенью точности распознающие большинство шрифтов. При обработке сканированных печатных документов современными системами по распознаванию текстов точность распознавания латинских символов превышает 99%. Существующие системы распознавания показывают высокую точность обработки фрагментов текста, позволяя восстанавливать исходное форматирование текста, включая колонки, таблицы, изображения.

Однако, несмотря на широкое развитие OCR систем, существуют серьезные ограничения при преобразовании научных работ, технических документов, которые, как правило, содержат большое количество математических выражений (формул), с которыми системы распознавания не могут справиться.

Распознавание символов в математических выражениях является более трудной задачей, чем распознавание символов в обычном тексте, так как при формировании математических выражений одновременно используется много различных символов (буквы латинского алфавита, буквы греческого алфавита, арабские цифры, символы математических операций и т. д.) с различными начертаниями (обычный, полужирный, курсив) и различных размеров. Кроме того, некоторые символы (интегрирование, суммирование \sum , умножение \prod , различные скобки и т. п.) являются «эластичными» по своей природе и обладают широким спектром возможных масштабов.

Результаты работы популярной системы оптического распознавания символов ABBY FineReader OCR Professional 10.0 на примере изображения, содержащего математические символы, представлены в работе [2]. Документ был распознан с ошибками как в структуре документа (не был учтен блок с выделенной формулой), так и в распознавании математических символов. Это происходит по той причине, что существующие системы не в состоянии правильно распознать математические выражения в тексте, а также отчасти ошибки вызваны тем, что математические выражения являются сложными объектами для распознавания, так как включают большой набор символов из различных шрифтов и размеров и, кроме того, используют сложные пространственные связи между символами.

В распознавании документов, содержащих математические выражения, максимально далеко продвинулись японцы с продуктом, под названием InftyReader, который изначально разрабатывался с целью распознавания различных материалов: статей, технической документации и других документов подобного плана, содержащих математические выражения. Однако, данная система распознавания является коммерческой и накладывает множество ограничений на качество исходного изображения.

Постановка задачи. Как правило, математические выражения содержатся в документах либо в виде выделенных формул, либо в виде формул в тексте (встроенные). Идентификация выделенных строк рассмотрена в работе [2]. Данная же статья посвящена разработке алгоритма для нахождения встроенных формул на изображениях отсканированных документов. Будем предполагать, что на изображении тем или иным способом уже выделены горизонтальные блоки со строками и наша задача состоит в классификации этих строк и

определении тех, что содержат встроенные формулы.

Идентификация блоков со встроенными формулами является более сложной задачей, чем задача идентификации выделенных формул. Обойтись в данном случае без распознавания символов, к сожалению, не получится [3–5].

В ряде работ, например [6, 7], для идентификации встроенных формул предлагается использовать тот факт, что в формулах зачастую используются буквы греческого алфавита и используется стиль оформления символов, отличный от стиля основного текста (например, курсив, полужирный и т. д.), а следовательно, по данным критериям можно попытаться выделить блоки со встроенными математическими выражениями. Однако такой подход не совсем приемлем. Появляется большая вероятность ошибочной идентификации обыкновенного текста как математического выражения из-за того, что в блоке с текстом будет присутствовать ошибочно распознанный символ, принятый за математический.

Таким образом, было бы более разумным для всего текста не увеличивать столь сильно количество символов для распознавания, дабы уменьшить количество ошибок. Однако, поскольку нельзя полностью отказаться от распознавания символов, рассмотрим, каким должен быть набор символов для идентификации блоков со встроенными математическими выражениями.

Формализация задачи. Воспользуемся результатами исследований В. В. Chaudhuri и U. Gargain. В статье этих авторов [8] приведены результаты анализа отсканированных 10400 страниц текста, содержащих 11820 формул. В формулах было обнаружено 150 различных символов. Разделим символы на два типа: «текстовые» и «математические». Это деление условное и не означает, что «текстовые» символы могут встречаться только в текстовых блоках и не могут находиться в математических блоках. Данное деление необходимо для того, чтобы отделить символы, которые с большой долей вероятности могут встречаться только в математических выражениях и крайне редко встречаются в тексте.

К типу «текстовые» будем относить следующие символы:

- буквы английского алфавита;
- буквы русского или любого другого алфавита (если текст не на английском языке);
- знаки пунктуации (включая тире, знак переноса и дефис);

- скобки (,), [,].

К типу «математические» символы будем относить следующие:

- арабские цифры;
- математические символы:
 $= \neq + \pm \oplus / \langle \rangle \leq \geq * \partial \sum \prod f \rightarrow \Rightarrow \cup \cap \subset \supset \notin \forall \exists \nabla \infty \{ \}$;
- некоторые (наиболее часто встречающиеся) буквы греческого алфавита:
 $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \eta \mu \pi \phi \varphi \theta \vartheta \psi \sigma \omega \Delta \Omega$.

Будем предполагать, что текстовые строки разбиты на блоки — «слова», которые необходимо классифицировать, т. е. отметить как текстовый блок или встроенное математическое выражение. Вычислим для каждого блока в строке величины следующих характеристик.

1. Наличие «математических» символов в блоке.

$$f_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i, \quad (1)$$

где N — количество символов в блоке, $k_i = 1$, если символ относится к группе «математических» символов, $k_i = 0,5$, если символ является скобкой или тире (дефис, минус) и $k_i = 0$ — во всех остальных случаях.

2. Высота блока.

$$f_2 = \max \left(\frac{h - \bar{h}}{h_m - \bar{h}}, 0 \right), \quad (2)$$

где h — высота блока, \bar{h} — средняя высота блоков в строке, h_m — максимальная высота блока.

3. Расстояние между символами.

$$f_3 = \max \left(\frac{s - \bar{s}}{s_m - \bar{s}}, 0 \right), \quad (3)$$

где s — среднее расстояние между символами в блоке, \bar{s} — среднее значение величин s для блоков в строке, s_m — максимальное значение величин s для блоков в строке.

4. Разброс высот центров блоков (рис. 1).

$$f_4 = \max \left(\frac{\sigma_y - \bar{\sigma}_y}{\sigma_{ym} - \bar{\sigma}_y}, 0 \right), \quad (4)$$

где σ_y — стандартное отклонение координат (по вертикали) центров блоков, ограничивающих символы в блоке строки от середины высоты строки, $\bar{\sigma}_y, \sigma_{ym}$ — среднее и максимальное значения стандартных отклонений координат центров блоков в строке.

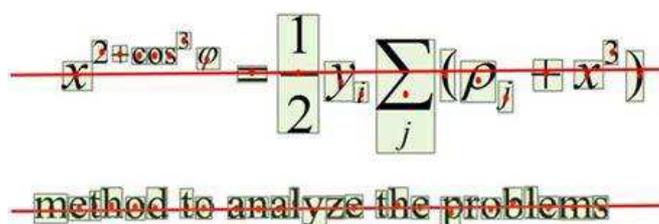


Рис. 1. Разброс высот центров блоков

5. *Верхние и нижние индексы.* Если нижняя граница блока, ограничивающего символ, находится выше средней линии строки, то возможно этот блок ограничивает символ, являющийся верхним индексом, хотя аналогичное может встречаться и для сносок, примечаний в тексте документа. В противном случае этот блок ограничивает символ, являющийся нижним индексом. Следовательно, будем принимать $f_5 = 1$, если в блоке содержится хотя бы один символ, у которого верхняя граница находится ниже средней линии строки или нижняя граница находится выше средней линии строки. Иначе $f_5 = 0$.

Каждая из вычисленных величин принимает значения на отрезке $[0, 1]$. В качестве критерия для классификации строк текста на предмет наличия в них встроженных математических выражений можно принять среднеарифметическое полученных величин, т. е. введем в рассмотрение функционал $f = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 f_i$. Если полученная величина принимает значения больше некоторого порогового значения p , т. е. $f > p$, тогда данный блок строки будем классифицировать как блок со встроженным математическим выражением, иначе классифицируем как текстовый блок. Для выявления величины порогового

значения были проведены эксперименты, в ходе которых было выявлено, что в качестве порогового значения можно принять величину $p = 0,33$.

Заключение. Данный алгоритм реализован и протестирован на ряде примеров. Точность распознавания составила 94%.

Литература

1. Оптическое распознавание символов. Wikipedia. http://ru.wikipedia.org/wiki/Оптическое_распознавание_символов
2. Погожев С. В., Шарлай А. С. Об определении выделенных формул в изображениях печатного текста // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2011. С. 327–332.
3. Chowdhury S. P., Mandal S., Das A. K., Chanda B. Automated segmentation of math-zones from document images // Proc. of the 7-th ICDAR, 2003. P. 755–759.
4. Jin J., Han X., Wang Q. Mathematical formulas extraction // Proceedings of the 7-th International Conference Document Analysis and Recognition (ICDAR). Edinburgh, Scotland, 2003. P. 1138–1141.
5. Garain U., Chaudhuri B. B. OCR of printed mathematical expressions // Digital Document Processing, Advances in Pattern Recognition / Ed. by B. B. Chaudhuri. London: Springer-Verlag, 2007. P. 235–259.
6. Garain U. Identification of mathematical expressions in document images // Proc. of the 10th Int. Conf. on Document Analysis and Recognition (ICDAR), 2009. P. 1340–1344.
7. Введение в контурный анализ / Под ред. Я. А. Фурман. М.: Физматлит, 2003. 592 с.
8. Chaudhuri B. B., Garain U. An approach for recognition and interpretation of mathematical expressions in printed document // Pattern Analysis and Applications, 2000. P. 120–131.

Ялов А. Л.

Санкт-Петербургский государственный университет

Распознавание движения со стационарной и поворотной камер видеонаблюдения

Рекомендовано к публикации профессором Дегтярёвым А. Б.

1. Компьютерное зрение. Большинство учёных и программистов знают о некоторых аспектах компьютерного зрения (КЗ), но мало кто знает обо всех областях, в которых оно используется. Например, большинство людей знает, что КЗ используется в системах наблюдения, применяется для обработки фото и видео в интернете, в изображениях карт улиц, в области беспилотных летательных аппаратов и биомедицинском анализе. Но немногие знают, насколько обыкновенным делом стало машинное зрение в производстве: практически всё, что выпускается серийно, автоматически проверяется с использованием КЗ.

1.1. Основные тезисы. Цель компьютерного зрения — формирование полезных выводов относительно объектов и сцен реального мира на основе анализа изображений, полученных с помощью датчиков, или преобразование этих изображений, например, преобразование цветного изображения в чёрно-белое или удаление движения камеры с видеозаписи [1].

В системе машинного зрения компьютер получает всего-навсего массив чисел с камеры или диска — и больше ничего. Задача заключается в том, чтобы превратить этот массив в восприятие объекта. На самом деле проблема ещё сложнее, поскольку формально её невозможно решить. Имея двумерное (2D) представление трёхмерного (3D) мира, нет единого способа воссоздания трёхмерного объекта.

Несмотря на интенсивную работу, все методы по-прежнему работают для отдельных объектов и только при определённых условиях. Задача построить систему распознавания на уровне человека является AI-полной задачей (т. е. сложность данной компьютерной задачи эквивалентна главной проблеме искусственного интеллекта — сделать компьютеры такими же умными, как люди).

1.2. Типичные задачи. Стоит отметить несколько типичных задач компьютерного зрения:

- распознавание: один или несколько предварительно заданных

объектов могут быть распознаны, обычно вместе с их положением на изображении;

- идентификация: распознается индивидуальный экземпляр объекта. Примеры: идентификация определённого человеческого лица или отпечатка пальцев;
- обнаружение: видеоданные проверяются на наличие определённого условия. Например, обнаружение возможных неправильных клеток в медицинских изображениях. Обнаружение иногда используется для нахождения небольших участков в изображении, которые затем анализируются с помощью приемов, более требовательных к ресурсам.

Крайне популярна задача трекинга (video tracking — видеослежение) — определение местоположения движущегося объекта (нескольких объектов) с помощью камеры. Алгоритм анализирует кадры видео и выдает положение движущихся целевых объектов относительно кадра. Задача имеет множество применений, например: взаимодействие с компьютером при помощи жестов, системы безопасности и видеонаблюдения, сжатие видео, дополненная реальность, управление движением, медицинская визуализация.

Трекинг — трудоёмкий процесс из-за количества данных, содержащихся в видео. Сложность ещё возрастает, так как наравне со слежением приходится использовать ресурсоёмкие алгоритмы распознавания. Несмотря на простую формулировку, на алгоритм решения влияют много факторов, например, тип объекта наблюдения или в помещении ли происходит движение.

Основными алгоритмами (методами) считают [2]:

- blob tracking: сегментация интерьера объекта;
- kernel-based tracking (Mean-shift tracking): итеративная процедура локализации, основанная на максимизации критерия подобия;
- contour tracking: поиск границы объекта;
- feature matching: визуальное согласование особенностей;
- point feature tracking (слежение за точечными особенностями сцены): получение набора как можно более точных последовательностей координат проекции некоторых «интересных» точек сцены в каждом кадре;
- каскады: самый ресурсоёмкий метод. Каскадом называют любое объединение любых методов, т. е. если некоторая оценка указывает, что метод не работает, включается другой метод, если он не работает — третий и т. д.

Каждая конкретная прикладная задача состоит из некоторой смеси методов, приведённых выше. Точного алгоритма действий не существует: методы, созданные для одной прикладной задачи, применяются в другой и имеют положительный результат.

2. Задачи. Рассматриваются две задачи: задача распознавания движения со стационарной и поворотной камер. Под стационарной камерой понимается камера видеонаблюдения, точка фиксации и направление которой постоянны. Допускается, что фон достаточно постоянен. Под поворотной камерой понимается камера, точка фиксации которой постоянна, однако направление изменяется во времени, причём не линейно (например, человек держит камеру, направляя по своему усмотрению).

2.1. Случай стационарной камеры. Входные данные — видеофайл, являющийся записью со стационарной камеры.



Рис. 1. Стационарная камера

Необходимо выявить не только движущиеся автомобили, но и малозаметных, даже для человека, пешеходов (рис. 1).

Для решения используется библиотека компьютерного зрения с открытым исходным кодом (OpenCV [3]), многие из рассматриваемых далее операций реализованы в данной библиотеке.

Для каждого кадра выполняются следующие операции:

1. Сглаживаем фильтром Гаусса, чтобы избавиться от шума.
2. Вычитаем из кадра предыдущий.
3. Сравниваем значения полученной разности с некоторым пороговым значением. Если значение пикселя больше порогового, то этот пиксель принадлежит движущемуся объекту, иначе отбрасываем его. Теперь мы получили бинарное изображение.
4. Применяем морфологические операции закрытия и открытия, чтобы избавиться от движущихся регионов малого размера. Полученное изображение и есть движущийся контур.
5. Наносим бинарное изображение на, так называемое, изображение истории движения. Интенсивность пикселей обратно пропорциональна времени, которое прошло от измерения контура до данного момента, т. е. чем раньше был получен движущийся контур, тем он бледнее изображён на истории движения.
6. Выделяем регионы с различными движениями на изображении истории движения.

7. Отбрасываем все регионы, площадь которых меньше некоторого значения.
8. Переходим на следующий кадр и повторяем всё сначала.



Рис. 2. Стационарная камера, результат

Результат работы алгоритма представлен на рис. 2. Выделен не только движущийся автомобиль, но и движущийся пешеход на заднем плане.

2.2. Случай поворотной камеры. Предыдущий метод «вычитания», используемый для стационарной камеры, в данном случае не применим, так как во время движения камеры весь кадр распознается как движущийся. Необходимо выделить особенность объекта и искать его на новом кадре, таким образом будет совершаться трекинг.

Сначала пользователь выделяет пешехода, далее с помощью алгоритма CamShift [4, 5] совершается трекинг уже выделенного объекта. Итак, последовательность действий следующая:

1. Выделить объект наблюдения.
2. Создать оттеночную гистограмму объекта, т. е. каждый ее столбец будет показывать оттенок (Hue) в HSV представлении цвета. Создаётся лишь однажды, а не для каждого кадра.
3. На основе оттеночной гистограммы объекта посчитать «вероятность объекта» для каждого пикселя во входящем кадре.
4. Переместить положение объекта в каждом кадре, в место, где посчитанное значение вероятности объекта максимальное. Это происходит итерационно при помощи алгоритма Mean Shift (CamShift — Continuously Adaptive Mean Shift).

5. Посчитать размер и угол. Метод непрерывно-адаптивный (Continuously Adaptive), поэтому он также на каждом шаге считает размер и угол объекта, пытаясь максимизировать суммарное значение вероятности объекта из п. 3.

Результат работы алгоритма показан на рис. 3.



Рис. 3. Поворотная камера

3. Результат и направление работы. Были реализованы методы «вычитания фона» и CamShift, работающие со скоростью, значительно превышающей скорость видеоряда в 25 кадров в секунду для тестовых записей с камер наблюдения, с положительным результатом обнаружения движущихся объектов. Планируется объединить с другими методами слежения (с образованием каскада) и методом автоматического обнаружения.

Литература

1. Шапиро Л. Компьютерное зрение. М.: Бином, 2006. 762 с.
2. Video tracking. http://en.wikipedia.org/wiki/Video_tracking
3. OpenCV documentation. <http://docs.opencv.org/>
4. Maggio E. Video tracking, theory and practice. Chichester: Wiley, 2011. 294 p.
5. Laganier R. OpenCV 2 computer vision application programming cookbook. Birmingham: Packt Publishing, 2011. 298 p.

Baravy I. I.
Saint Petersburg State University

Wavelets in Digital Audio Processing: Beethoven's Sonatas Clustering

Recommended for publication by Assoc. Prof. Grishkin V. M.

Wavelet theory is a rather young part of mathematical analysis. It has been developing very rapidly for a few decades¹ and is actively used by a wide range of scientists nowadays.

Evolving ideas of Fourier analysis wavelets have many applications in Digital Signal Processing (DSP). These are, but not limited to, digital audio and image processing, pattern recognition and computer vision. The former one is the subject of presented paper and so is described below in more detail.

1. Problem background. The amount of information is growing increasingly and getting really huge in recent years. Today's computing power though can not handle excessively large data sets efficiently. And so new data processing algorithms besides hardware upgrades are required. The field of computer science acting on data analysis and knowledge discovery is called Data Mining.

Data mining is not a separate science, in any sense. Instead, it is closely connected to many other computer science subfields and knowledge domains. And because of this fact a number of methods of different nature can be used here. In what follows wavelet analysis approach is applied to the clustering problem.

Clustering generally stands for splitting input data array into several groups based on particular internal properties. Defining and getting those properties are steps called knowledge discovery.

2. Formalization. The theoretical basis for the constructed research method is described in [1]. A number of practical ideas and recommendations are borrowed from [2, 3].

2.1. Design. First of all, note that input data to experiment on is all the Beethoven's piano sonatas. The whole cycle of 32 pieces was performed by Wilhelm Kempff in 1964–1965.

¹The most major advancements in the field of wavelets were made starting from 1975 by J. Morlet, S. Mallat and I. Daubechies.

Secondly, it should be said a few words about the composition of sonatas. In short, they contain from two to four parts. And just like any other musical piece every sonata is written in one defined tonality. Tonality is a language of music in which specific hierarchical pitch relationships are based on a key "center", or tonic, that is, on hierarchical scale degree relationships; the arrangement of all the tones and chords of a composition in relation to a tonic. Those are (the number of parts and tonality) the desired properties to be recovered from faceless input files.

Third, while the meaning of part is perfectly clear and easily understandable, tonality term is unfortunately very hard to formalize. As it often occurs in the world of art, some concepts are almost obvious for humans but can hardly be comprehended by machines. This is the case.

And finally, wavelets are used to analyse digital audio signal and extract hidden information. To be concrete, discrete wavelet transform² (DWT) is applied to the input signal.

A comprehensive review of wavelet analysis applications can be found in [4]. Digital sound processing is also detailed explained in [3].

2.2. Model. Piano records were made in mono, and therefore they are by default in ready-to-process format. Analog signal was discretized to sampling rate 48kHz and then quantized to 16 bits per sample. In order to make clustering problem sensible audio files are written one per sonata and renamed to uniform names as to hide internal musical properties to be discovered. In this way input signal may be considered as one-dimensional vector of length $R \times t$, where R and t stand for sampling rate and signal duration in seconds correspondingly.

To detect the number of parts in given sonata we assume:

- parts number exceeds the number of silence blocks between them by one;
- time length of such a silence interval depends on the tempo of adjoined parts and so is determined by the context;
- input signal being recorded half a century ago and then digitized is affected significantly by the noise of different nature.

To formalize tonality substance a more intricate approach is used. There are several conjectures about tonic pitch we will refer to in this paper:

²The Haar wavelet is used since current research is targeted on qualitative rather quantitative result.

- last melody tone pitch is a tonic pitch;
- final chords contain a tonic pitch;
- a final chord is often a tonic chord;
- pitch distributions of the whole piece and corresponding scale tone set correlate well.

3. Algorithm. In terms of assumptions stated above it is possible to describe more formal algorithm. It is notable that all the processing stages introduce wavelet analysis tools and so reuse precalculated data of preceding steps. This fact is of great importance from the computational point of view.

3.1. Signal denoising. In the first place input signal is denoised as to make succeeding analysis methods more accurate. We make use of discrete Haar wavelet transform to decompose a signal and then quantize its high frequency coefficients. Thus a smoother and denoised signal is obtained.

3.2. Silence intervals counting. The next phase utilizes DWT coefficients of denoising step. We need to recognize time intervals (t_1, t_2) such that signal $s(t) < H$, where H stands for expected noise level. H is supposed to be around zero since most of noise is eliminated by high frequency data quantization. Here we make use of DWT properties again: a transformed signal at particular scale is the reduced and smoothed copy of the original signal, and thereby significantly faster coefficients test is possible.

3.3. Tonality detection. Human ideas which are hard to formalize are thereafter hard to deal with. Proposed algorithm, however, is based on four assumptions from the model section and so it can be expressed in a formal manner.

Time localization of wavelet functions allows to separate the very last melody tone or chord. This is the case where wavelet analysis approach is more preferable than the Fourier one because the width of window function for short time Fourier transform can not be predicted well in advance. And thus multiresolution analysis methods make use of once computed DWT coefficients.

4. Conclusion and further work. Basic algorithms and properties of discrete wavelet transforms are considered. Wavelet analysis methods of digital audio processing are applied to knowledge discovery problem with a reasonable success. Good clustering results are achieved due

to choice of appropriate formalizing assumptions. Significant computational efficiency consists in reusing DWT coefficients of former processing steps. This confirms the broad applicability of wavelets in general and in DSP in particular.

Future work involves the expansion of formalizing consumptions set. It also makes sense to adapt developed methods to a wider class of input signals: instrumental or vocal music.

References

1. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992. 377 p.
2. Beneteau C., Fleet P. J. Discrete Wavelet Transformations and Undergraduate Education / Notices of the American Mathematical Society, 2011. Vol. 58, No 5. P. 656–666.
3. Walker J. S. Fourier Analysis and Wavelet Analysis / Notices of the American Mathematical Society, 1997. Vol. 44, No 6. P. 658–670.
4. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way. Burlington, MA: Academic Press, 2008. 832 p.

Makino Y, Klyuev V.
University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Japan

Web security learning technique for novices

Abstract In recent years, the crime using the brittleness of Web applications is increasing. Therefore, the necessity of information security education is increasing. Although there were the practical study methods also in the education for beginners, there was no study method with emphasis on management. We discuss a new technique to learn web security by using AppGoat and iLogScanner for the novice developers simply and efficiently. As compared with previous studies it can be expected that beginners can learn two important things. One is the importance of checking the logs all of the time. And the other is the feature of a log when your application is attacked. AppGoat is a platform independent environment to learn vulnerability, it was developed by FFR (Foruteen Forty Research institute of technology Co., Ltd.) and was open to the public by IPA (Information-technology Promotion Agency). With AppGoat, even a beginner can perform learning of the Web security effectively. iLogScanner is a tool to find attack to vulnerability easily by analyzing access log or error log on a web server. It was developed by LAC Co., Ltd, and was open to the public by IPA. Novice developers could learn how to find the vulnerability and the countermeasure, importance of checking the logs always, and the feature of a log which your application is attacked.

1. Introduction According to study[1], the number of users of the Internet increased from 2,014 million people to 2,300 million in the last year. However, not all of them are well-intentioned users. The damage of a cybercrime is actually expanded every year. We might also become a victim since the leak of the customer data of a state secret or a famous company takes place often. Furthermore, your computer might be inflicting injury, such as a Dos attack(Denial of Service attack) and a DDos attack(Distributed Denial of Service attack), to the server of a company without your notice. Many of these attacks are caused when a malicious aggressor abuses the brittleness of a Web site application.

Therefore, studying web security leads to protecting our property and our right. Moreover, it is expectable that making habit to secure coding and management by learning web security since beginners (We

defined beginners as the shallow developer of experience, or the student of an information processing system.)

Then, we discuss a new technique to learn web security by using AppGoat and iLogScanner for the novice developers simply and efficiently. As compared with previous studies it can be expected that beginners can learn two important things. One is the importance of checking the logs. And the other is the feature of a log when your application is attacked. AppGoat is a platform independent environment to learn vulnerability which was developed by FFR (Foruteen Forty Research institute of technology Co., Ltd.) and was open to the public. With AppGoat, even a beginner can perform learning of the Web security effectively fact. That iLogScanner is a tool to find attack to vulnerability easily by analyzing access log or error log on a web server. It was developed by LAC Co., Novice developers could learn how to find the vulnerability and the countermeasure, importance of checking the logs always, and the feature of a log which your application is attacked. The reason we chosen AppGoat is that one does not need to prepare exercise environment by oneself, and he/she can study how to find the vulnerability and the countermeasure systematically, and it's free of charge. The reason why we use iLogScanner with AppGoat is that novices can learn the feature of logs when they are attacked, the importance of checking logs regularly. Moreover, one can learn almost all vulnerability included in "OWASP Top Ten Project"[2] by AppGoat and iLogScanner.

2. Related Work Study[3] has concluded that information security education which emphasizes on recognition of vulnerabilities in web applications. The authors, write about the trial of the information security education which used only AppGoat. However, novices who learned only AppGoat may overlook attack or security vulnerability on his/her web application.

Thus we discuss a technique using iLogScanner for detecting attacks by AppGoat. It is expected that novices make a habit of checking the logs and raise the quality as security education.

3. Learning Technique AppGoat is very easy to use. When one executes start.bat file, AppGoat calls Apache 2.2(Apache HTTP Server Version 2.2) on his/her local PC, and then he/she can exercise on a web browser through this Apache. After the user exercises, one may start iLogScanner on a browser. The trainee may specify the access log and error log of Apache, and check how the attack is detected by using

the access log extracted by iLogScanner. When the web application is attacked, this experience makes it easy to expect what type of attack we receive. And trainee can learn the importance of checking the logs.

3.1. Case of Cross Site Scripting(XSS) In this section, we show a concrete example on Reflected XSS Attacks(Cross Site Scripting Attacks)[5]. Suppose that there is a questionnaire with brittleness. First, we input as following to find XSS.

```
'>"<s>
```

and we submit it. Then, if the strikethrough is displayed on a page, we can know that the web application has Reflected XSS brittleness. However, if the trainee uses a iLogScanner at this time any threat is undetectable even. It could be understood as that we could not know if the attacker probed our web application. By this fact, beginners can learn there is no telling whether attackers aim them even if any threat is undetectable. Accordingly, to check the logs is very important for minimizing the damage.

We can learn more by using AppGoat and iLogScanner. Then, in case of this exercise, we can make the following codes using the brittleness found. Most of students could not find vulnerability themselves so we have to support them.

```
<script>document.getElementById("account").innerHTML
= '<font color="blue" size="3">
Please input your name, a birth date, and a credit card
number. </font>';</script>
```

In this code, id attribute value of HTML is replacing the contents of the element of account with the innerHTML property. Then we embed previous script to HTML.

```
http://.../enquete.php?page=2&id=1&.....
&name = <script>document.getElementById("account")
.innerHTML = '<font color="blue" size="3">
Please input your name, a birth date, and a credit
card number. </font>';</script>
```

Next, we attach the previous URL to a bulletin board for exercise. We access the URL. Then we can see tampered web page and it is reported

that the attack was successful by AppGoat.

At the next step, we check the Apache logs by iLogScanner. It gives us detected logs as following. (We processed URL decoding, in order to make it readable.)

Log 1:

```
"GET /Web/Scenario102/VulSoft/bbs.php?name=
Cracker&title=XSS&content=I'll give you 1 million yen!
&url=http://localhost/Web/Scenario102/Vulsoft/enquete.php
?page=2&sex=0&old=1&company=&xss=1&trouble=1&content=&name
=<script>document.getElementById("account").innerHTML
    = '<font color="blue" size="3">
        Please input your name, a birth date,
        and a credit card number
    </font>'; </script>&token=c82175c18553920ed6992f2188c2b88d
HTTP/1.1"
```

Log 2:

```
"GET /Web/Scenario102/Vulsoft/enquete.php?
page=2&sex=0&old=1&company=&xss=1&trouble=1
&content=&name=<script>document.getElementById("account")
.innerHTML = '<font color="blue" size="3">
    Please input your name, a birth date, and a credit card
    number </font>';</script> HTTP/1.1"
```

Log1 is a threat found when URL is uploaded to a bulletin board. Log2 is a threat found when he/she jumps to the URL link. It means illegal script was executed on your application.

By comparing these logs and usual logs, novices can learn the feature of logs when the application is attacked.

4. Evaluation We carried out this approach in a class with 3 students. They are Second- and Third year students and master course second year student of computer science and engineering. In the end of the exercise, the questionnaire was given to the students. They responded to the questions. The evaluation range is from 1 to 5. From the data of Table 1, we can conclude that students could understand XSS with this technique by the below table. They felt it was a little difficult so we have to prepare learning plan that meets the their skill.

Question	Mean value	Standard deviation
I am interested in Web security	4	1
I was able to understand XSS	4.33	0.57
I was able to understand the countermeasure to XSS	4.33	0.57
I was worried about whether I can understand XSS	4.33	0.57
I think I can use this knowledge properly	4.66	0.57
I think this knowledge is useful	5	0
I understand the importance of seeing the logs	4.33	0.57

Table 1. Evaluation Questionnaire

5. Conclusion AppGoat is very good for beginners because they do not have to set up a web server and web applications so they could learn web security lawfully, safely and efficiently. iLogScanner is also good for beginners because they do not need special skills. Novices could learn the importance of the daily management not only secure coding with iLogScanner. Novices will understand more deeply the topic of web security applying this technique.

In conclusion, novices might learn the main security vulnerability and the countermeasure, the feature of logs when an application is attacked and the importance of the checking the logs. The technique using AppGoat and iLogScanner is very helpful for beginners especially in their selfstudy.

References

1. World Telecommunication/ICT Indicators Database 2012 (16th Edition) ICT(International Telecommunication Union) December, 2012
2. WILLIAMS Jeff, WICHERS Dave. OWASP top 10 2010. OWASP Foundation, April, 2010
3. MASUYAMA Kazumitsu, SATO Naoshi An attempt of information security education that emphasizes recognition of vulnerabilities in web application // J. of Japan Society for Educational Technology, Vol.2012, P.15-22.
4. XSS Attacks(Cross Site Scripting Attacks) OWASP(The Open Web Application Security Project) [https://www.owasp.org/index.php/Cross-site_Scripting_\(XSS\)](https://www.owasp.org/index.php/Cross-site_Scripting_(XSS)) [accessed in May 10, 2013]
5. How to learn vulnerability and countermeasure by using AppGoat IPA(Information-Technology Promotion Agency, Japan) http://www.ipa.go.jp/security/vuln/documents/appgoat_material01.pdf [accessed in May 10, 2013]

Tikhomirov V.A.
University of Eastern Finland

Optimization of sending WRITE SAME commands through HP Smart Array 642

Recommended by Dr Simo Juvaste

1. Introduction. This research is devoted to optimization of sending commands to the several disks through a controller. The research was performed for the company Blancco Oy Ltd, which is the world leader of software based data erasure. The purpose of Blancco software is to overwrite all data by sending write commands directly to the disks.

It is useful to know how many disks should be connected to the computer to achieve maximum efficiency. Searching the solution for that topic is one of the main questions of this research. Another question is consideration of several load balancing systems which we will also call as strategies. Load balancing is one of the optimization methods, which we are going to use for minimization of time of the data erasure. There are a lot of different parameters, which can influence on the speed of erasure, but various strategies can make these limitations not so obvious. These parameters can be bus speed or disk speed, cache of the disk or buffer of the data command. Moreover, we can not ignore the parameters of the controller, because it can also come as a bottleneck if big amount of data is sent to the disks. During different tests with various load balancing systems it is possible to find the most meaningful parameters, which will help us to find the solution of our problem. This paper shows that in current example, the main parameter of the erasure speed is rotation speed of the disks.

2. Problem definition. Let us consider the model presented on the Figure 1, which shows how SCSI controller is connected to the disks and CPU. This model can be divided to 5 parts: CPU, where Blancco software is running, bus *a* - from CPU through motherboard to the SCSI controller, SCSI controller *b*, buses *c* - from SCSI controller to the disks *d*. In current model *N* disks are connected to SCSI controller.

Let us consider the Figure 1 in more detail. We shall skip CPU part as current computers are powerful enough so they can be safely ignored. The main idea of Blancco software is to write the data to the disks. On the Figure 1, there are *N* disks and each of them has its own capacity

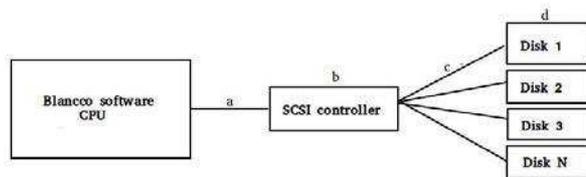


Рис. 1. Communication model of SCSI controller

d_i , where $i = \overline{1, N}$ shows the number of the disk. For erasure, each disk should get data which is equal to capacity of the disk. However, it does not mean that the same amount of data should be sent from the controller. For example, it may be needed to send the commands for setting the connection with the disks.

SCSI commands are used for the communication directly with the disks. Commands are divided to three groups: Non-Data commands, Data-In and Data-Out. Most of the time Blanco software is using WRITE SAME command [1] which is why it will be considered in more detail in this research. This command belongs to Data-Out group and performs the disk erasure by writing the same buffer to several sectors. It gives a huge advantage because with one command it is possible to overwrite more data than it was sent to the disk. WRITE SAME command has several variations, which differ mostly on the transfer length. This command includes Data-Out buffer, which keeps the information that will be written to the disk. The number of sectors depends directly on the WRITE SAME command which was chosen for erasing current disk. In this research only WRITE SAME 10 command is considered and the limitation for number of sectors gives us a possibility to write maximum 32 MB per command.

Let us define the capacities of the write commands in a mathematical way. The capacity of the WRITE command is c_1 , the capacity of the WRITE SAME command is c_2 and the capacity of other commands is c_3 . In this context, other commands means the commands for identification of the device and setting up the connection. All three variables c_1 , c_2 , c_3 are constant and are defined by Blanco software. Thus, for replacing all data on N disks software must send F MB from SCSI controller b to the disks d through the buses c . Let F be called *complete erasure*, it is

calculated by the following formula:

$$F = \sum_{i=1}^N F_i, \quad (1)$$

where F_i is the amount of megabytes, that should be sent to disk i , which is calculated as $F_i = c_1 m_{i1} + c_2 m_{i2} + c_3 m_{i3}$, where m_{ik} is the number of times that command c_k should be sent, where $k = \overline{1, 3}$. Furthermore, complete erasure F should fulfill the following condition: $c_1 c_2 = 0, \forall F_i, i = \overline{1, N}$, because of software logic. This condition means that only one command c_1 or c_2 can be written to each disk. Thus the software can not erase the same disk with both commands c_1 and c_2 . That means that software decides which command is better to use. In our case it is WRITE SAME command.

The main goal of this research is to find the way how to send the data faster to the disks. Mainly it depends on the devices and on the strategy of sending commands. Let us define the variable S_{max} for maximum speed of writing to the disk and it is obvious that this variable is constant. According to the Formula 1 and maximum speed S_{max} it is possible to calculate the minimum time T_{min} for realization of complete erasure F by the following formula:

$$T_{min} = \sum_{i=1}^N t_i = \frac{\sum_{i=1}^N F_i}{S_{max}} = F/S_{max}, \quad (2)$$

where t_i is the time for sending F_i MB to disk i with the maximum speed S_{max} .

There is matrix $H = \{h_{ij}\}$, where $i = \overline{1, N}$ is the disk number, $j = \overline{1, m}$ is the step number of the load balancing system and h_{ij} is the number of commands, which is sent to the i disk at j step. Also there is matrix $Q = q_{ij}$, where q_{ij} is the order number in the queue for sending commands to i disk at j step. Elements of matrix H should fulfill the following condition:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m h_{ij} = \sum_{i=1}^N F_i = F. \quad (3)$$

For mathematical problem definition it is convenient to introduce the

functional of time. Let the *functional of time* be defined as the functional

$$T = \sum_{j=1}^m t_j, \quad (4)$$

where t_j is the time for sending $\sum_{i=1}^N h_{ij}$ commands at j step of load balancing process.

The main idea of the optimization problem is to minimize the functional of time T

$$\min_{H, Q, s} T. \quad (5)$$

According the Formula 2 current minimization problem can be rewritten as

$$T \xrightarrow{H, Q, s} T_{min}. \quad (6)$$

That means that the application of load balancing algorithm should make the program faster and the value of T should come close to the minimum time T_{min} . The algorithm should use $\langle H, Q, s \rangle$ as parameters for making the program more efficient.

3. The solution methods. This section presents a description of the methods for solving the problem presented above in the section 2. The solutions that we offer are simple, but effectively show the results in practice. We applied them for testing the erasure time of several disks. First two are sequential and the third is parallel, which is working more effectively than the others. The first strategy performs the complete erasure disk by disk and the second one sends one command per disk and then changes the disk. The results show that the second strategy is working slower than the first one, which is obvious because it needs to change the devices quite often.

The third strategy is using parallel computing, which makes the process for complete erasure much faster. The application creates separate thread for each disk and start sending WRITE SAME commands to that disk. It is obvious that during increasing the amount of disks the value of functional of time will increase too, but slowly, because threads are working completely separately. But important limitations are the speeds of the disk and the bus. As we can see from Figure 1 separate buses c give the possibility to send data from the controller b to the disks d . In our situation, only one bus c exists, which is connected to the enclosure containing several disks. If we write information in parallel to

several disks the bus speed can be the limitation for data transfer. The maximum speed of the current bus is 320 MB/s.

One of the most important questions of this research is to understand how to decrease the time for complete erasure. It is difficult to find disks that are working completely the same way, even if they were produced in the same series and have the same characteristics. That is why if enclosure includes some slow disk, the time of complete erasure can be very similar to each other, because in most cases that disk will take more time for the erasure. Each disk went through the complete erasure separate and the results were completely different from each other. It gives difficulty for understanding what was the reason of the increasing of time.

4. Theoretical expectations and practical results. During modeling, different parameters were considered, but it was interesting to look which of them will be important in practice. For the current research we wrote separate program on language C under Arch Linux operation system. This application can send INQUIRY, READ 10 and WRITE SAME 10 commands. One of the open questions of the research is limitation of the communications of the devices. For WRITE SAME 10 command the maximum number of logical blocks is 0xFFFF, which gives the possibility so send 32 MB at once.

We use HP Smart Array 642 controller to connect the disks to the computer [2]. This controller has one internal and one external SCSI ports. The internal port gives the possibility to connect up to 6 internal drives and the external one up to 14 drives. Maximum capacity for all drivers in total is 6 TB. Controller has PCI-X bus, which has a 133-MHz frequency.

The disks were equal to each other with rotation speed 10000 RPM and capacity 18.2 GB. Using WRITE SAME 10 we can overwrite one disk by 582 commands. Furthermore, WRITE SAME 10 command consists of 522 B, which means that for complete erasure of one disk software must send only 304 KB. Thus, bus is not a bottleneck in current situation.

In practice, the results of a complete erasure with the second strategy are varied around 10 min for each disk, which makes the time for complete erasure to 50 min 10 sec with 5 disks. For the first strategy it takes less time, because it does not need to change the device so often. The result is 48 min 45 sec, which shows that for switching the devices the system does not need so much time. The system with more devices

was tested only with the third strategy, which shows better results of erasure. The first and second strategies were tested with the backplane connecting to the internal port of the SCSI controller.

But as we mentioned in the previous section, the results for separate erasure were different for several disks with the third strategy. For example, the speed for complete erasure of one disk can be varied from 6 min to 11 min according to the Figure 2.

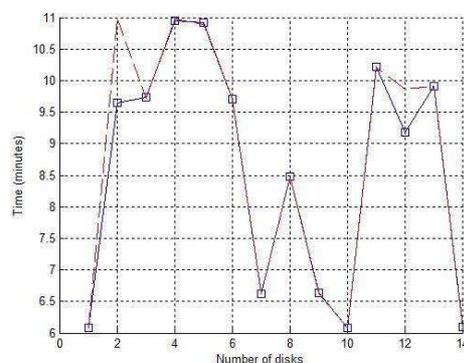


Fig. 2. Results for complete erasure

On the Figure 2 two graphics present the results of erasure. Graphics show the erasure time for single disk and for single disk during complete erasure with the third strategy. We can see the difference only with disks 2 and 12, which shows that the capacity of the bus is not a limiting value up to 14 disks using parallel strategy. The exact time for complete erasure of 14 disks was 10 min 57 sec, which means that

amortized time for erasure of one disk is 47 sec. This value proves one more time that only the rotation speed of the disk is the limiting factor.

5. Conclusion. This research showed that for this controller only the disk speed is playing the main role. Moreover, the results show that the capacity of the bus is much bigger in comparison with amount of data that should be sent. It gives a conclusion that the bus is not a bottleneck in current situation. The research can be improved by increasing the amount of disks, which would mean that the controller should be changed.

References

1. Global Engineering Documents, an IHS Company. SCSI Block Commands - 3 (SBC-3). 2012.
2. HP Smart Array 642 Controller. Hewlett-Packard, 2009.

Togashi N., Klyuev V.
University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Japan

Comparison of Go and Java features

Abstract In this paper, we compare Go and Java focusing on their features. Google's Go has many features similar to Java. Java is designed for object-oriented programming, but Go is not. However, Go has a mechanism for object-oriented style programming, and it is more advanced than Java's one. Go and Java have a mechanism for exception handling. In Go, the features for exception handling are provided as built-in functions. Go provides high-level built-in support for concurrent programming. Also Java already has these features, but Go's concurrent programming design is more simply. We analyze the suitable application areas for these languages and provide our suggestions for the potential users.

1. Introduction Go is a new programming language developed by Google [1]. In 2009, the first Go was announced. Go is still not widely used compared to other programming languages. We think, however, Go can become mainstream in the future, because Go provides many powerful features, and some of these are similar to Java: garbage-collection, object-oriented programming, collection types, built-in support for concurrency, etc. Additionally, Go and Java are supported by Google App Engine. So, Go also can be used for developing web applications. In fact, Go provides many packages to build web applications, and also has extensive web frameworks as Java.

Our aim of this research is illustrating the power of Go to develop web applications. For this, we have been studied the Go programming language for a year, and we will discuss the things we got about three topics: object-oriented programming, exception handling, and concurrency.

2. Object-Oriented Programming Java is famous as object-oriented programming language. Go also allows object-oriented style programming, but Go doesn't have a mechanism of class, and class inheritance given in Java, etc. Unlike Java, Go takes a different approach to object-oriented programming. Instead of classes or inheritance mechanism, Go provides struct and interface, and in Go, polymorphism is realized using interfaces. The following are comparison of object implementation in Java and Go:

```

Java:
public class Person{
    private String name;
    private int age;

    public void string(){
        System.out.printf("%s, %d\n", name, age);
    }
}
Go:
type Person struct{
    name string
    age int
} //end of struct

func (this Person) String() string{
    return fmt.Sprintf("%s, %d\n", this.name, this.age)
}

```

An important difference is in the declaration of methods. In Java, all the methods are declared within a class, but in Go, all the methods are defined outside of a struct, and each method has a receiver: (this Person).

Go doesn't support inheritance mechanism which is common in Java, but Go's object-oriented style programming has advanced feature. This is the Duck Typing. It is a style of dynamic typing that is distinguishing in dynamic script languages like Python or Ruby etc. The concept derived from the phrase: If it walks like a duck and quacks like a duck, it must be a duck. This means if an object has all the methods of an interface, it can be said that the object implements the interface implicitly. The following are duck typing in Go.

```

type Shape interface{
    draw()
    getArea() float32
}

```

First, we define the Shape interface like above. In Go, interfaces are defined by a set of methods. This feature is similar to Java, but Go's interfaces are more advanced than Java. Second, we define two structs:

```

type Circle struct{radius float32}

```

```

func(this Circle)draw(){/* implementation */}
func(this Circle)getArea() float32{
    return this.radius * this.radius * math.Pi
}

type Square struct{side float32}
func(this Square)draw(){/* implementation */}
func(this Square)getArea() float32{
    return this.side * this.side
}

```

Each struct has two methods with the same signatures in the Shape interface. And in Go, explicit statement of implementation is not required. The main function is as follows:

```

func main(){
    var shape Shape
    circle:=&Circle{3.0}
    square:=&Square{5.0}

    shape=circle
    fmt.Printf("[Circle] Area = %f \n", shape.getArea())

    shape=square
    fmt.Printf("[Square] Area = %f \n", shape.getArea())
}
execution result:
[Circle] Area = 28.274311
[Square] Area = 25.000000

```

We can assign any type of an object to an interface if the object has all the methods of the interface. In this example, `getArea()` method behaves as the method which is declared inside the Shape interface. So, this illustrates the duck typing in Go.

3. Error Handling Java has the mechanisms for exception handling. Go also has the mechanisms for exception handling similar to Java or C++. The following are very simple programs written in Java and Go:

```

Java:
public class MyArithmeticException extends Exception{
    public static void main(String[] args){

```

```

        try{
            divide(10, 0);
        }catch(MyArithmeticException e){
            System.out.println("error");
        }
    }
    static void divide(int m, int n)throws
        MyArithmeticException{
        if(n==0){
            throw new MyArithmeticException();
        }
        System.out.println(m/n);
    }
}
Go:
package main
func main(){
    divide(10, 0)
}
func divide(m int, n int){
    if n==0 {
        panic("error")
    }
    println(m/n)
}

```

These programs execute a quotient of two integers, and print it. In the Java example, when we give zero to the second argument of `divide()` function, a `MyArithmeticException` will be thrown. After that, the program will be terminated.

Go doesn't have try-catch block or throw/throws statement used in Java. Instead of these, Go provides `panic()/recover()` built-in function and 'defer' statement to manage exception. In this example, the `panic()` function is used to manage an exception. If the denominator (the second argument of `divide()` function) is equals to zero, the `panic()` function will be called, and the program will be terminated.

4. Concurrency One of the main features of Go is concurrency [2]. Go provides high-level built-in support for concurrent programming. In Java, to create a thread we need to extend the `Thread` class or implement the `Runnable` interface, and override the `run()` method. And we will call the `start()` method to start the created thread. There are several ways

to communicate with another threads. These are quite useful features, but its complicated writing is very hard to understand. In Go, on the other hand, it is very easy to write concurrent processes. Go provides goroutine and channel, and these mechanisms simplify the writing of concurrent processes. To start a new goroutine you will just add the 'go' keyword before a function call like this:

```
go fuction(arguments)
go func(parameter){}(arguments)
```

All the called functions as goroutine will run in same address space.

When we need to communicate, synchronize, or share values between goroutines, we can use channels. The channel is a communication pipe that can be used to communicate between two or more goroutines. These are used in programs as follows:

```
channel <- value //send a value to the channel
<- channel //receive a value from the channel
```

These two features for concurrency simplify the writing of concurrent processes.

5. Conclusion Java has been improved and added useful features over many years. Go is a new, and still young language, but it already has inherited many powerful features from existing programming languages.

We discussed core features of Go and Java programming languages. Go doesn't have classes, but Go can be used for object-oriented programming, and it's superior over Java. Go doesn't provide try-catch block or throws/throw statement used in Java. Instead, Go provides panic()/recover() built-in functions for exception handling. Finally, Go provides built-in support for concurrency. Java already has the concurrent mechanism, but in Go, it is much easier to write concurrent processes.

From the aforementioned discussions, we may conclude that Go is more appropriate for implementing concurrent processes. Even without classes, Go is applicable to the projects based on the usage of object-oriented programming.

References

1. The Go Programming Language Official Website, www.golang.org [accessed on May 10, 2013].
2. Mark Summerfield, Programming in Go - Creating Application for the 21st Century. United States: Addison-Wesley Professional, 2012.

Waga K.¹, Mariescu-Istodor R.¹, Tabarcea A.¹, Makeev I. V.²,
Lepikhin T. A.², Fränti P.¹

¹University of Eastern Finland, ²Saint-Petersburg State University

Modeling user profile by analyzing user activity in location-based system

1. Introduction. Integrating user activity into recommender system and modeling user profile based on activities is an important basis for building a location-aware recommender system. We describe how user profile is modeled by analyzing user activity within MOPSI services that are available on website (cs.uef.fi/mopsi) and on mobile phones in applications supporting Symbian, Windows Phone, iOS and Android. Complete description of the recommender system that uses the user profiles created by the method described here is in [7]. Our aim is to deduce user characteristics and personal preferences without directly asking about them. We reach the goal by following user activity within the system including interaction with website and mobile applications. Additionally, we analyze user's own collection of photos and routes (GPS tracks) to determine what user is interested in, what his movement patterns are and what transportation means he uses.



Fig. 1. Recommendation screen in
mobile application

even in areas unfamiliar to the user. We are also using location history, but we are also recording user's activity within the system. A reference

One of the systems which takes into consideration the user's activities and the user's location is described in [2], which recommends social events based on such activity. It proves that geographical proximity is not the most effective criteria in recommending an item or an event and that user's activity enhances the recommendation quality. [1] also uses the location history of the users in order to build a preference model and to provide recommendation results

model for user profiles in social network has been described in [3]. The recommender system described Sinbad [5] aims at combining social and spatial relevance for the users. It also supports location-aware news feed, which supports alerts of friends in the same area, which is also one of the events detected by our system. We are detecting three types of activities: visit, pass-by and meeting. The problem of determining common meeting points is also studied in [4], but the difference is that we are trying to do the determination also in real time.

2. System description.

2.1. Recording user activities. User activity within the system is recorded to provide data for analysis to build user profile. Every user accessing webpage or starting mobile application begins new session. We monitor user activities in recommendation, search and collection screens. The recommendation screen displays items (see Fig. 1) recommended to user by our recommender system. The list usually consists of about 20 items of three different types: services, photos and routes (see Fig. 2) [6].



Fig. 2. Recommendation screen in mobile application

We check how long time user spends on the screen. In addition, for each item on the list we check it was selected or not. In case user selects one of the recommendation results additional data is stored. It includes time of viewing the item. In case of services and photos we record if user asks for guidance how to reach the item as well as rating, if any, given by user. Activity of user on the search result screen is tracked in the same manner. Moreover, users of the system collect photos and routes. The collections are accessible by any other user of MOPSI. Users can browse through the collections. The data is searchable by time and it is displayed in collection screen shown in Fig. 3. We record items that were displayed and for how long each of them was viewed by user in collection screen. In addition, we store information if user rated the photo.



Fig. 3. Collection screen on website.

2.2. Detecting user activities. Our system is not limited to recording activities manually triggered by users. We detect activities of users that are not explicitly initiated, for example, by pressing a button. The activities are related to usage of MOPSI mobile application, namely by sharing location, either by merely having application on or by using the application for tracking. A visit occurs when user stops in the location of the service in database. However, the location registered once in the same place as a service is located is not enough to detect visit. We use a visit strength counter (see Fig. 4). It is initiated with value of 50 when user is in the circle of 20 meters from location of the service. Every time user location is refreshed, the counter value increases by 5 if user is still in

the proximity of the service or decreases by the same value in opposite situation. When the strength counter reaches 100, visit is detected. In case the counter does not reach 100, pass-by is deduced. The motivation behind the visit strength counter is to ensure that user spends certain time in the location of the service. Moreover, we cannot rely on GPS accuracy to determine the visit activity, because most of the services are inside buildings and this causes that GPS signal is noisy. A meeting activity is detected according to schema shown on Fig. 5. To detect meeting we do not use actual user location, but distances between users. Nevertheless, we created special distance function to show distance between users that are moving. We do not consider distance between locations of users, because of not synchronized updates of position coming from mobile application. For example, let us consider, two users, A and B, traveling by train which moves with speed of 200

km/h. Both users seat next to each other in the train. Location from mobile applications is sent to server every 30 seconds. User A sends his location and user B sends his location at 10 seconds later. During the 10 seconds train changed his position significantly and the distance between users' positions is actually too big to be sure that meeting occurred. However, if we consider distance between trajectories the users move on, the distance is 0, because they are in the same train. Our algorithm clusters all the distances between users using DBSCAN. The clustering is performed every 30 seconds. A new clustering is compared to the previous clustering result. If new user appears in the cluster, the meeting is started. Similarly, when user left the cluster, meeting is ended. Users that stay in the same cluster are on the meeting.



Fig. 4. Detection of visit to service.

we distinguish walking, running, cycling and traveling by motor vehicle.

2.3. Modeling user profile. Having the data about user activity, we attempt to create user profile where we describe each user of the system using several characteristics. Analysis of user activities in search and recommendation screen allows deducing what results were good and should have increased chance to appear among recommendation results. For example, if user gives explicit rating to one of the items we know if user is interested in it or not. Moreover, the favorite types of services and photos of user can be established based on viewing time and viewing multiplicity. For example, if user watches photo often or for long time than average for all the photos, the keywords describing the photo are considered as keywords user is interested in. Similarly, if user checks how to get to a service from the list, it is likely that he would like to visit the service, thus keywords describing it are added to user profile. Similar information is obtained from analysis of visit activities detected. Keywords of visited services are added to user preferences and services from these categories will be more likely in recommendation results in different locations. Nevertheless, modeling profile of new user is not possible using the data from analysis user activity as the data

Furthermore, when user tracks, we store data about type of the movement [6]. We analyze each track in order to identify segments of movement of different type. Main goal is to identify transportation mean, therefore

size is limited. We attempt to solve the problem by using the meetings to initialize user profile. Assuming that user of the system meets with some of the users who have existing user's profile, we transfer the characteristics of the users to the new user.

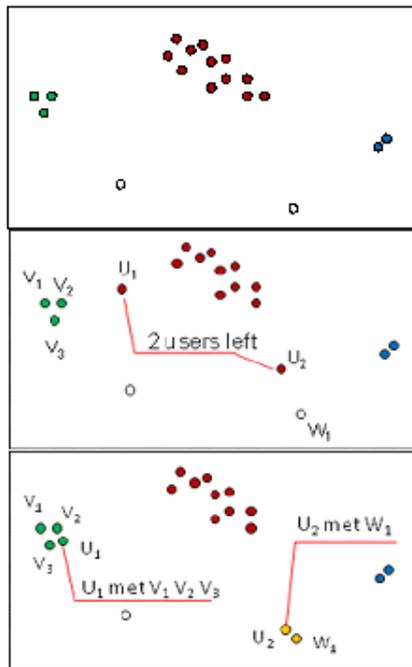


Fig. 5. Detection of meeting.

new users we will consider also chat interaction with other users, not only meetings with other users.

3. Future work. There are several additional sources of information about user that will be added in future to model user profile. Firstly, Facebook profile information can be used. Since users of MOPSI services often have their Facebook account associated, it is possible to extract user personal data such as age and preferences such as pages he likes. The information about pages liked can enrich user profile with new favorite keywords. Secondly, if we detect that user visited a place recommended to him, we will include keywords describing the place in user profile. Additionally, by analyzing collection of routes, we will calculate similarity matrix between users, based on similarity between routes collection. To improve initialization of profile of

References

1. Bao J., Zheng Y., Mokbell M. F. Location-based and preference-aware recommendation using sparse geo-social networking data // Proc. of Int. Conference on Advances in Geographic Information Systems, Redondo Beach, USA, 2012. P. 199–208.

2. Quercia D., Lathia N., Calabrese F., et al. Recommending social events from mobile phone location data // Proc. of Int. Conf on Data Mining, Sydney, Australia, 2010. P. 971–976.
3. Kapsammer E., Mitsch S., Poll B., et al. Towards a reference model for social user profiles data // Proc. of Int. Conference on Very Large Databases, Seattle, USA, 2011. P. 123–129.
4. Ketherpaul S., Gupta S. K., Subramaniam L. V., et al. Mining GPS traces to recommend common meeting points // Proc. of Int. Database Engineering and Applications Symposium, Prague, Czech Republic, 2012. P. 181–186.
5. Sarwat M., Bao J., Eldawy A., et al. The anatomy of Sindbad: a location-aware social networking system // Proc. of Int. Workshop on Location-Based Social Networks, Redondo Beach, USA, 2012. P. 1–4.
6. Waga K., Tabarcea A., Chen M., Fränti P. Detecting movement type by route segmentation and classification // Proc. of IEEE Int. Conf. on Collaborative Computing: Networking, Applications and Worksharing, (CollaborateCom'12), Pittsburgh, USA, 2012. P. 508–513.
7. Waga K., Tabarcea A., Fränti P. Recommendation of points of interest from user generated data collection // Proc. of IEEE Int. Conf. on Collaborative Computing: Networking, Applications and Worksharing, (CollaborateCom'12), Pittsburgh, USA, 2012. P. 550–555.

Wu Z.¹, Heikkinen V.¹, Hauta-Kasari M.¹, Parkkinen J.²

¹University of Eastern Finland

²Monash University Sunway Campus

Detection of intracutaneous allergic skin elements based on near-infrared spectral skin images

1. Introduction. Allergic dermatitis is one of the common skin problems for human beings. It can be categorized into Type I (immediate type) or Type IV (delayed type) based on its mechanism of development [1]. To diagnose the type of allergic dermatitis is not a trivial task, because the affected skin areas have similar colors and no specific shape. Dermatologists have to use different approaches and rely much on their experiences. It is time consuming and may result in partial subjective results. Moreover, skin biopsy, an invasive method, is sometimes used. It makes the diagnostic process slow, and may cause infection and scar formation. Therefore, an automatic non-invasive method to determine the type of allergic dermatitis is useful to assist dermatologists in their diagnostic decisions.

Imaging based non-invasive method is widely used in skin disease diagnosis, such as skin cancer detection [2] and skin lesion segmentation [3]. Recently, spectral images are increasing used in various skin related medical applications. The spectral image comprises a great number of spectral bands, not only in the visible wavelength range, but also in the ultraviolet and infrared ranges. Based on long-wavelength near-infrared (NIR) spectral imaging, Nishino et al. recently proposed a method to detect and visualize intracutaneous allergic skin elements of Type I and Type IV [4]. This method is based on supervised classification of NIR spectral skin images with Canonical Discriminant Analysis (CDA).

A spectral image is a three-dimensional cube concatenated by tens to hundreds of images taken at different wavelength. This large amount data results in computational and storage problems, and also "curse" of dimensionality problem in classification. Therefore, Dimension Reduction (DR) techniques are usually used in spectral imaging related applications. Generally, there are two ways to do DR for spectral images. One is to transform the high dimensional data into low dimensional space, such as the most widely used Principal Component Analysis (PCA) [5]; the other is band selection, to select a subset of the most

discriminate bands from all bands in the image.

In this work, we studied the detection of intracutaneous allergic skin elements by supervised pixel-wise classification based on NIR spectral skin images. We firstly pre-processed the images by spectrum normalization and DR. We tested two methods of DR, PCA and a sparse logistic regression based feature selection method BLogReg [6]. Then we did supervised classification on the low dimensional data with three widely used classifiers, Linear Discriminant Analysis (LDA), Quadratic Discriminant Analysis (QDA), and k-Nearest Neighbor (kNN). We did experiments to compare results from these three classifiers based on different data: 1) generated from different DR methods, 2) the band range suggested in [4], and 3) the original data. Experimental results showed that the best results of different types of skin elements came from different combinations of classifiers and data representations. It suggests that the dimension reduction and classification methods should be well selected in order to achieve accurate detection.

2. Preprocessing.

2.1. Spectrum Normalization. We normalized each spectrum in the spectral image by its Euclidean norm. It is useful to remove the magnitude of illumination by normalizing the spectra to ease the following classification process. For instance, the spectra of the skin under the same skin condition may have similar shapes but different intensities, due to the direction of the illumination. Obviously, the Euclidean distance, later used as the distance metric in classification, between these two spectra is large. Thus, this may result in a poor classification result. Normalization, however, can somewhat reduce this effect.

2.2. Dimension Reduction. PCA [5] is one of the most widely used dimension reduction techniques. It computes orthogonal projections that maximize the data variance from the original high dimensional data. Then it projects the original data to a low dimensional uncorrelated space. We could manually choose the dimensionality of the new data by using the corresponding number of principle components.

Band Selection We used an improved sparse logistic regression based feature selection method named BLogReg [6] to do band selection. The main idea is to do regression to select a sparse sub-set of the most discriminatory bands. In BLogReg, the regularization parameter arising in the sparse logistic regression algorithm [7] is eliminated via a

Bayesian approach with an uninformative Jeffery’s prior. In this method, we cannot manually control the number of bands to be selected, but there is a tolerance parameter that can affect the output band number.

3. Classification. We did supervised pixel-wise classification based on the low dimensional data generated by pre-processing the original spectra to detect normal skin, skin of Type I allergic dermatitis, and skin of Type IV allergic dermatitis. We trained classifiers to do three-class classification. Three standard classifiers, Linear Discriminant Analysis (LDA), Quadratic Discriminant Analysis (QDA) and k-Nearest Neighbor (kNN), were used in our work. For details of these three classifiers, refer to [8].

4. Experiments.

4.1. Dataset and Parameter Setting. We used two NIR spectral images with long-wavelength range of 910 – 2520 nm with 256 bands from [4]. These two images contain skin of Type I and Type IV allergic dermatitis, respectively. Dermatologists made Ground Truth (GT) of the allergic dermatitis skin areas. We omitted a small area in the leftmost part of the second image, due to noises. From Fig. 1 (a) and (b), we could see images generated by averaging all bands of each spectral image, and also their GT of different skin areas whose boundaries are shown with different colors. Based on the GT, 200 pixels of Type I allergic dermatitis, 200 pixels of Type IV allergic dermatitis, and 400 pixels of normal skin (200 pixels from each image), were randomly extracted from spectral images. The mean reflectance spectra of each type of skin after spectrum normalization are shown in Fig. 1 (c).

For the tolerance parameter in BLogReg method, we tested two values, 1 and 0.1, which return 20 and 77 bands, respectively. In comparison, we used PCA to get low dimensional data whose dimensions are also 20 and 77. Moreover, we manually selected bands from 1250 nm to 1870 nm (103 bands) suggested by [4] to do classification.

We did leave-one-out cross validation to test the classification accuracy. The number of k in kNN method was tuned by 10-fold cross validation in each leave-one-out cross validation. In addition, QDA cannot be run on the original training data with 256 bands, since the number of training pixels is too low compared to the data dimension.

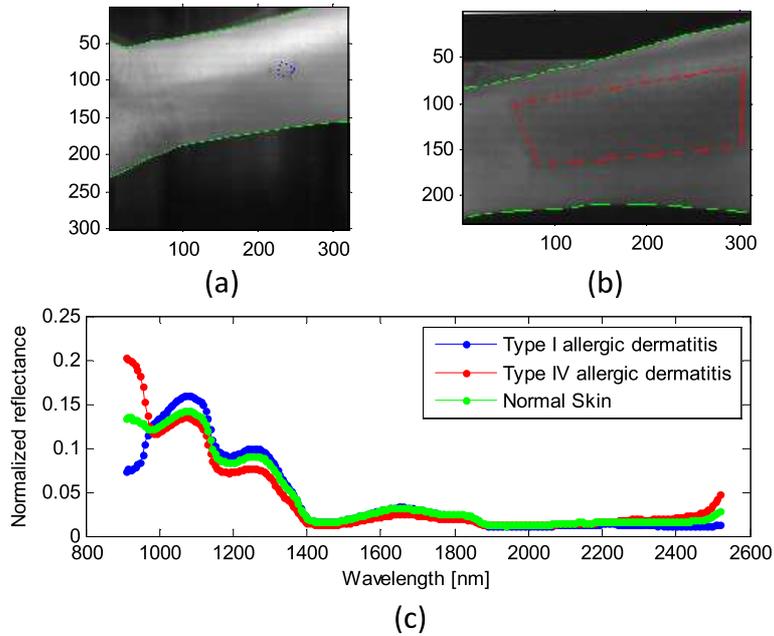


Fig. 1. (a) Image generated by averaging all bands of the first spectral image. Normal skin is in the area with green boundaries and skin of Type I allergic dermatitis is in the area with blue boundaries. (b) Image generated by averaging all bands of the second spectral image. Normal skin is in the area with green boundaries and skin of Type IV allergic dermatitis is in the area with red boundaries. (c) Mean reflectance spectra of each skin condition from selected training pixels after spectrum normalization.

4.2. Experimental Results. Table 1. gives the average classification accuracies of the leave-one-out cross validations of different data representations based on LDA, QDA, and kNN. We could see that QDA return the best results in all cases of normal skin. For Type I allergic dermatitis, the best results of different classifier are the same but from different data. LDA gave the best results in all cases of Type IV allergic dermatitis. Based on the average accuracies of all skin conditions, LDA with 77 band data from PCA gave the best results with 98.5%

classification accuracy. The second best accuracy is 96.2% from QDA with 20 band data generated by BLogReg. The best result of kNN is 93.4% from manually band selection data with 103 bands. It could be noted that for both Type I and Type IV, QDA return quite low results on high dimensional data, such as Manual, PCA77, and BS77, compared to other classifiers.

Table 1. Classification accuracy (%) of different data representations with LDA, QDA, and kNN. Columns are the results of different data representations: Manual - manual selected bands suggested by [4]; PCA20 - 20 bands from PCA; PCA77 - 77 bands from PCA; BS20 - 20 bands from BLogReg; BS77 - 77 bands from BLogReg; ALL - total 256 bands. The values in bold are the best results in each row, and underlined values are the best results of each column for one specific skin condition.

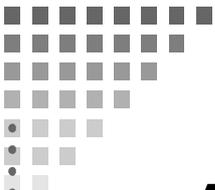
Skin	Classifiers	Manual	PCA20	PCA77	BS20	BS77	ALL
Normal	LDA	86.3	84.0	96.5	86.0	89.3	<u>86.3</u>
	QDA	99.5	<u>90.8</u>	<u>97.8</u>	<u>90.5</u>	<u>97.0</u>	-
	kNN	91.8	82.5	85.0	83.5	74.8	84.5
Type I	LDA	99.0	99.5	99.0	97.0	96.5	<u>97.0</u>
	QDA	55.0	99.5	69.5	99.5	66.0	-
	kNN	99.5	<u>97.5</u>	98.0	95.0	<u>97.0</u>	98.0
Type IV	LDA	<u>98.5</u>	100	100	99.5	100	<u>97.5</u>
	QDA	23.0	98.0	78.0	98.5	74.5	-
	kNN	91.8	82.5	85.0	83.5	74.8	84.5
Average	LDA	<u>94.6</u>	94.5	98.5	94.2	<u>95.3</u>	<u>93.6</u>
	QDA	59.2	<u>96.1</u>	81.2	96.2	<u>79.2</u>	-
	kNN	93.4	89.5	90.1	90.8	85.6	90.7

5. Discussion. In this work, we studied the detection of intracutaneous allergic skin elements based on near-infrared spectral skin images. Supervised pixel-wise classification was employed to do the detection. We tested two different dimension reduction techniques, PCA and BLogReg, with three widely used classifiers, LDA, QDA, and kNN. Experimental results showed that the method to detect different types of skin elements based on long-wavelength near-infrared spectral skin images worked well and return high detection accuracies. However, more images are needed to test the robustness of the method. Moreover, according to the results, dimension reduction methods affect a lot the accuracy of allergic skin elements detection. Therefore, more effects on it are needed in our future work. In addition, to well detect allergic skin elements, the classifier should be well selected based on the data representation. In future, we plan to test the advanced classification method support vector machine.

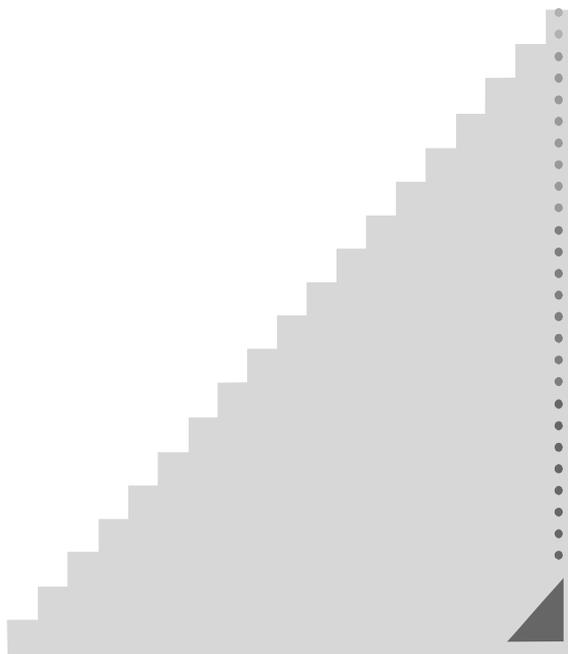
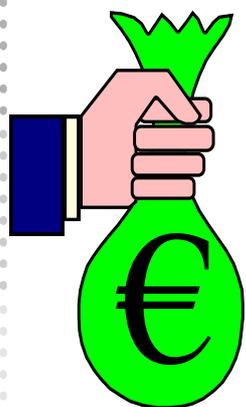
6. Acknowledgement. The authors would like to thank Prof. Shigeki Nakauchi for providing data and discussions. We also thank Prof. Evgeny Veremey and Assoc. Prof. Margarita Sotnikova for discussions.

References

1. Gell P. G. H., Coombs R. R. A. Clinical aspects of immunology. Oxford: Blackwell Science, 1963. P. 575–596.
2. Tang J. A multi-direction GVF snake for the segmentation of skin cancer images // Pattern Recognition, 2009. Vol. 42(6). P. 1172–1179.
3. Gomez D. D., Butakoff C., Ersboll B. K., Stoecker W. Independent histogram pursuit for segmentation of skin lesions // Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, 2008. Vol. 55(1). P. 157–161.
4. Nishino K., Fujiyama T., Hashizume H., Nakauchi S. Detection and visualization of intracutaneous allergic type-specific elements using long-wavelength near-infrared hyperspectral imaging // Skin Research and Technology, 2012. Vol. 19(1). P. 157–166.
5. Jolliffe I. Principal component analysis, 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 2002. 518 p.
6. Cawley G. C., Talbot N. L. Gene selection in cancer classification using sparse logistic regression with Bayesian regularization // Bioinformatics, 2006. Vol. 22(19). P. 2348–2355.
7. Shevade S. K., Keerthi S. S. A simple and efficient algorithm for gene selection using sparse logistic regression // Bioinformatics, 2003. Vol. 19(17). P. 2246–2253.
8. Bishop C. M. Pattern recognition and machine learning. New York: Springer, 2006. 749 p.



*5. Управление
социально-
экономическими
системами*



Аверьянова К. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Размещение распределительного центра для интернет-магазина

Рекомендовано к публикации доцентом Лежниной Е. А.

1. Введение. Интернет-торговля — это динамично развивающаяся отрасль во всем мире. Российские потребители уже оценили удобство и выгоду совершения покупок онлайн. Основными преимуществами, по результатам опросов, были признаны экономия времени и возможность доставки на дом, а также круглосуточная доступность и возможность избежать суеты традиционных магазинов, широкий ассортимент товаров, возможность ознакомиться с техническими характеристиками и воспользоваться системой сопоставления цен. А основными недостатками потребители признали: невозможность «пощупать» товар перед покупкой, неуверенность в доставке и ее ожидание [1]. Следовательно, необходимо усилить влияние плюсов и сгладить минусы. Именно создание распределительного центра призвано помочь в этой проблеме.

Данные размышления помогли сформулировать главную задачу, которая будет рассмотрена в работе: определить необходимость размещения распределительных центров на обслуживаемой территории для интернет-магазинов, а также определить их количество и местоположение. Перейдем к рассмотрению частных случаев.

2. Случай одного распределительного центра. Какой бы не была сеть, необходимо разместить хотя бы один распределительный центр для нормального функционирования интернет-магазина. В данном случае можно использовать *метод определения центра тяжести* [2]. Метод аналогичен определению центра тяжести физического тела. Если распределительный центр разместить в точке района, которая соответствует точке центра тяжести изготовленной модели, то транспортные расходы по распределению материального потока на территории района будут минимальны. Поскольку распределительный центр может осуществлять свою деятельность как магазин предварительного обслуживания и, учитывая тот факт, что более 70% населения предпочитает проверить товар до оплаты, то высока вероятность самовывоза, а следовательно, транспортные затра-

ты на доставку уменьшатся, и возникает необходимость разработки модифицированного метода. Добиваемся минимизации суммарных годовых затрат на транспортировку грузов, т. е. $TC = \sum_{i=1}^n q_i r_i q_{0i}$, где TC (Total Cost) — суммарные затраты на транспортировку, руб/год.

2.1. Алгоритм. Нахождение оптимальных координат x_0 , y_0 осуществляется с помощью итерационного сходящегося алгоритма.

Шаг 0. Начальный расчет величин

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (q_i r_i)}{\sum_{i=1}^n q_i r_i}, \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (q_i r_i)}{\sum_{i=1}^n q_i r_i}.$$

Шаг 1. Расчет расстояний между распределительным центром и множеством заказчиков: $d_{0i} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$.

Вводим переменную такую, что

$$c_{0i} = \begin{cases} 0,15, & \text{если } d_{0i} < 2, \\ 0,4, & \text{если } 2 \leq d_{0i} \leq 5, \\ 0,9, & \text{если } d_{0i} > 5. \end{cases}$$

Вместе с этим вводим переменную $a_{0i} = d_{0i} c_{0i}$.

Шаг 2. Расчет суммарных затрат на транспортировку

$$TC = \sum_{i=1}^n q_i r_i a_{0i}.$$

Шаг 3. Повторный расчет координат центра

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (q_i r_i / a_{0i})}{\sum_{i=1}^n q_i r_i / a_{0i}}.$$

Шаг 4. Повторять шаги 1, 2 и 3 до тех пор, пока суммарные транспортные затраты TC не перестанут изменяться на значимую величину.

После выполнения алгоритма получим координаты одного распределительного центра, который позволяет минимизировать транспортные затраты интернет-магазина.

Поскольку один центр доставки (распределительный центр) не может удовлетворить потребности всех клиентов, необходимо понять, где разместить остальные центры и сколько всего их нужно для нормального функционирования сети.

Широко известный метод определения количества складов по графику, объединяющему все основные затраты на содержание склада, показывает, что зависимость общих затрат на функционирование системы имеет параболический характер с явным оптимумом, следовательно, можно определить необходимое количество распределительных центров. Но отсутствие четких формул в данной области не позволяет проводить необходимые расчеты, а значит, зависимости носят качественный характер, основанный на логике и здравом смысле, поэтому будем определять количество необходимых распределительных центров, исходя из имеющихся средств и доступности помещений.

Выход из сложившегося положения можно найти в методах кластеризации, с помощью которых можно разбить район обслуживания на подрайоны, в котором можно искать место для распределительного центра.

3. Метод горной кластеризации. Метод горной кластеризации был предложен Р. Ягером и Д. Филевым в 1993 г. [3]. Особенностью метода является отсутствие необходимости задания количества кластеров до начала работы алгоритма.

3.1. Описание метода. Необходимо сформировать потенциальные центры кластеров. Если о центрах кластеров заранее ничего неизвестно, то в качестве потенциальных центров удобно принять сами объекты.

Шаг 1. Обозначим множество потенциальных центров кластеров Z_h . Если центрами кластеров считаются сами объекты, то тогда $Z_h = x_k$.

Шаг 2. Для каждой такой точки рассчитывается значение потенциала, показывающего возможность формирования кластера в ее окрестности

$$P_1(Z_h) = \sum_{k=1}^M \exp(-\alpha D(Z_h, x_k)),$$

где M — количество объектов x_i , α — положительная константа, характеризующая масштаб расстояний между объектами. В простейших случаях удобно полагать, что α равно единице, деленной на

среднее расстояние между объектами. $D(Z_h, x_k)$ — расстояние между потенциальным центром кластера Z_h и объектом кластеризации x_k . В евклидовом пространстве это расстояние рассчитывается по формуле

$$D(Z_h, x_k) = \sqrt{\|Z_h - x_k\|^2}.$$

В случае, когда объекты кластеризации заданы двумя признаками $n = 2$, графическое изображение распределения потенциала будет представлять собой поверхность, напоминающую горный рельеф. Отсюда и название — *горный метод кластеризации*.

Шаг 3. В качестве центров кластеров выбирают координаты «горных» вершин. Для этого центром первого кластера назначают точку с наибольшим потенциалом.

Обычно наивысшая вершина окружена несколькими достаточно высокими пиками. Поэтому назначение центром следующего кластера точки с максимальным потенциалом среди оставшихся вершин привело бы к выделению большого числа близко расположенных центров кластеров. Чтобы выбрать следующий центр кластера, необходимо вначале исключить влияние только что найденного кластера.

Шаг 4. Потенциалы для оставшихся возможных центров кластеров пересчитываются следующим образом:

$$P_2(Z_h) = P_1(Z_h) - P_1(V_1) \exp(-\beta D(Z_h, V_1)),$$

где $P_1(\cdot)$ — потенциал на 1-ой итерации; $P_2(\cdot)$ — потенциал на 2-ой итерации; $V_1 = \arg \max_{Z_1, \dots, Z_Q} (P_1(Z_1), \dots, P_1(Z_Q))$ — центр первого найденного кластера; β — положительная константа, характеризующая масштаб размера одного кластера (чем значение β меньше, тем больше размер кластера). В простейших случаях ее можно принять равной α .

Центр второго кластера V_2 определяется по максимальному значению обновленного потенциала: $V_2 = \arg \max_{Z_1, \dots, Z_Q} (P_2(Z_1), \dots, P_2(Z_Q))$.

Вновь пересчитывается значение потенциалов

$$P_3(Z_h) = P_2(Z_h) - P_2(V_2) \exp(-\beta D(Z_h, V_2)).$$

Итерационная процедура пересчета потенциалов и выделения центров кластеров продолжается до тех пор, пока максимальное зна-

чение потенциала превышает некоторый порог. В простейших случаях этот порог можно считать равным половине значения максимального потенциала $P_1(V_1)$.

В итоге получили район, разделенный на кластеры с размещенными в них распределительными центрами, из которых необходимо осуществить поставку товаров.

4. Задача китайского почтальона. В случае интернет-магазина целесообразно применить алгоритм китайского почтальона, который в отличие от алгоритма коммивояжера пройдет не все вершины графа, а все ребра, что для нас имеет большое преимущество, поскольку клиенты сосредоточены не только в основных вершинах, но и вдоль дорог.

Глобальная цель — искусственным образом привести граф к виду, когда эйлеров цикл существует, т. е. сделать все вершины нечетной степени вершинами со степенью четной. Это возможно путем добавления парных ребер к уже существующим ребрам графа. Тогда нахождение в новом графе эйлерова цикла даст и решение задачи. Напомним что: эйлеров путь [4] (эйлерова цепь) в графе — это путь, проходящий по всем ребрам графа и притом только по одному разу. Эйлеров цикл — это эйлеров путь, являющийся циклом. Цикл (цепь), проходящий через все ребра графа ровно по одному разу, называется эйлеровым циклом. Цепь — это маршрут, в котором каждое ребро используется не более одного раза.

4.1. Описание алгоритма. Используемые обозначения: $C[i, j]$ — матрица весов ребер графа G , $Step[i]$ — массив, содержащий сведения о степенях вершин, изначально заполнен нулями.

Шаг 1.

В цикле по i от 1 до N

В цикле по j от 1 до N

Если $C[i, j] < \infty$, тогда

$step[i] := step[i] + 1$ (ребра инцидентные i -ой вершине).

Шаг 2. При помощи алгоритма Флойда — Уоршелла [5] сформировать матрицу $d[i, j]$ кратчайших расстояний между вершинами, таких что $step[i]$ нечетная (т. е. вершин с нечетной степенью).

Шаг 3. Найти минимальное цепное паросочетание M (по матрице D) [5].

Шаг 4. Удвоить ребра, входящие в минимальное цепное паросочетание.

Шаг 5. Просуммировать веса всех ребер нового графа.

Шаг 6. С помощью алгоритма Флери [6] найти эйлеров цикл графа, записывая проходимые вершины в массив $P[i]$.

На выходе получаем вес оптимального цикла обхода ребер графа и последовательность вершин, задающую оптимальный цикл.

5. Заключение. Рассмотренные методы и алгоритмы позволяют вывести общий алгоритм, с помощью которого можно найти место для распределительного центра и доставку из этих центров с минимальными затратами.

Алгоритм. Основные шаги.

Шаг 1. Определить приемлемое для нас количество центров, обозначенное за k .

Шаг 2. Если $k = 1$, то применяем модифицированный алгоритм поиска центра тяжести, далее переходим на Шаг 4, иначе Шаг 3.

Шаг 3. Применение кластерного анализа, а именно, метода горной кластеризации.

Шаг 4. Вывод координат центра(ов) обслуживания клиентов.

Шаг 5. Применение алгоритма китайского почтальона для выявления наименее затратной доставки товаров.

Литература

1. Интернет торговля в России. <http://www.marketing.spb.ru>
2. Гаджинский А. М. Основы логистики. Учебное пособие. М.: ИВЦ «Маркетинг», 1996. 124 с.
3. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник. СПб.: Питер, 2001. 750 с.
4. Новожилова Л. М. Графы, сети, трассы. СПб.: Издательский Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2007. 108 с.
5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход.: Мир, 1978. 433 с.
6. Тихомирова А. Н., Сидоренко Е. В.. Математические модели и методы в логистике. Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. 320 с.

Андерсен А. А., Чистяков С. В.
Санкт-Петербургский государственный университет

Генератор оптимальных налоговых шкал

Введение. Разработаны методологические основы и первая версия интерактивной системы выбора прогрессивной шкалы ставок подоходного налога под названием «Генератор оптимальных налоговых шкал» (ГОНШ). В основу системы положена определенная модификация формулы оптимальной модельной шкалы средних ставок налога, установленной ранее в [1].

Установленная в [1] формула оптимальной шкалы имеет вид

$$y^*(x) = \begin{cases} 0, & x < x_-, \\ 1 - \left(\frac{x_-}{x}\right)^\sigma, & x_- \leq x < x_0, \\ 1 - (1 - y_+) \left(\frac{x_+}{x}\right)^\delta, & x_0 \leq x \leq x_+, \\ y_+, & x > x_+, \end{cases} \quad (1)$$

где x — независимая переменная (доход); $y^*(x) \in [0, 1]$ — ставка налога с дохода x ; x_- , x_+ , y_+ , δ и σ — входные параметры;

$$x_0 = \left((1 - y_+) \frac{x_+^\delta}{x_-^\sigma} \right)^{\frac{1}{\delta - \sigma}}.$$

Входные параметры имеют следующий смысл: x_- — необлагаемый налогом минимум, x_+ — величина объекта налогообложения, начиная с которой он облагается по заданной максимальной ставке шкалы $y = y^*(x)$, y_+ — максимальная ставка шкалы, δ и σ — минимальное и, соответственно, максимальное значения эластичности шкалы, а точнее, эластичности функции $z = z(x) = 1 - y^*(x) \in (0, 1)$.

Замена параметров модели и допустимые их вариации. Как отмечалось в [2], при выборе параметров x_- , x_+ и y_+ принципиальных проблем не возникает. Вместе с тем, с выбором параметров δ и σ дело обстоит иначе. Несмотря на известный смысл понятия эластичности и его широкое использование в экономической теории, в том числе и в теории оптимального налогообложения [3], дать обоснованные экономические рекомендации по выбору параметров δ и

σ весьма затруднительно. Возможный выход из этого затруднения видится в том [2], чтобы заменить выбор параметров δ и σ выбором производной от них пары параметров, которые, с одной стороны, допускали бы содержательную экономическую интерпретацию, позволяющую определить их количественные значения, а с другой, допускали бы возможность восстановления по ним значений исходных параметров δ и σ . В качестве такой производной пары параметров в [2] предлагается выбирать параметры x_0 и y_0 , связанные между собой и с параметрами x_-, x_+, y_+, δ и σ уравнениями:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 - \left(\frac{x_-}{x_0}\right)^\sigma, \\ y_0 &= 1 - (1 - y_+) \left(\frac{x_+}{x_0}\right)^\delta, \end{aligned} \quad (2)$$

которые, в предположении $y_0 = y^*(x_0)$, в силу непрерывности функции $y = y^*(x)$ [1] вытекают из (1).

Как отмечалось в [2], параметр x_0 может рассматриваться как нижний уровень доходов так называемого среднего класса, а параметр y_0 — как ставка налога с дохода x_0 .

Разрешая уравнения (2) относительно δ и σ , получим

$$\sigma = \frac{\ln(1 - y_0)}{\ln x_- - \ln x_0}, \quad (3)$$

$$\delta = \frac{\ln(1 - y_+) - \ln(1 - y_0)}{\ln x_0 - \ln x_+}. \quad (4)$$

Подставляя эти выражения в (1), получим вид оптимальной шкалы подоходного налога, соответствующей параметрам x_-, x_+, y_+, x_0 и y_0 .

Отметим, что формула (1) получена при определенных ограничениях на входные параметры x_-, x_+, y_+, δ и σ , а именно:

$$\begin{aligned} 0 &< x_- < x_+, \\ 0 &< y_+ < 1, \\ 0 &< \delta < \sigma < 1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^\sigma < 1 - y_+ < \left(\frac{x_-}{x_+}\right)^\delta. \quad (6)$$

Поэтому для корректного использования модифицированной формулы оптимальной модельной шкалы ставок налога следует иметь в виду, что неравенства (5) и (6) должны выполняться, если в них подставить формулы (3) и (4).

В результате проведенных исследований установлено, что корректное использование модифицированной формулы оптимальной шкалы ставок подоходного налога будет обеспечено, если параметры x_- , x_+ , y_+ , x_0 и y_0 будут удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{aligned} 0 < x_- < x_0 < x_+, \\ 0 < y_0 < y_+ < 1, \\ y_0 < 1 - \frac{x_-}{x_0}, \\ 1 - (1 - y_+) \frac{\ln x_- - \ln x_0}{\ln x_- - \ln x_+} < y_0. \end{aligned}$$

Эти неравенства при последовательном выборе параметров x_- , x_+ , y_+ , x_0 и y_0 в конечном итоге задают интервальные ограничения на выбор каждого из них. Так, например, если эти параметры выбираются в указанном здесь порядке их следования, а именно он и предусмотрен в разработанной версии системы ГОНШ, то интервальные ограничения на выбор каждого из них имеют вид

$$\begin{aligned} x_- &\in (0, +\infty), & x_+ &\in (x_-, +\infty), \\ y_+ &\in \left(0, 1 - \frac{x_-}{x_+}\right), & x_0 &\in (x_-, x_+), \\ y_0 &\in \left(1 - (1 - y_+) \frac{\ln x_- - \ln x_0}{\ln x_- - \ln x_+}, \min \left\{y_+, 1 - \frac{x_-}{x_0}\right\}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Интерактивная система поддержки принятия решения.

Разработанная система ГОНШ предлагает пользователю средство автоматизации построения и анализа оптимальных, в смысле рассматриваемой модели [1], налоговых шкал.

Процесс взаимодействия пользователя с системой можно разбить на несколько этапов: первоначальный ввод параметров x_- , x_+ , y_+ , x_0 и y_0 , построение оптимальной шкалы в виде графика или таблицы и модификация полученной шкалы варьированием параметров.

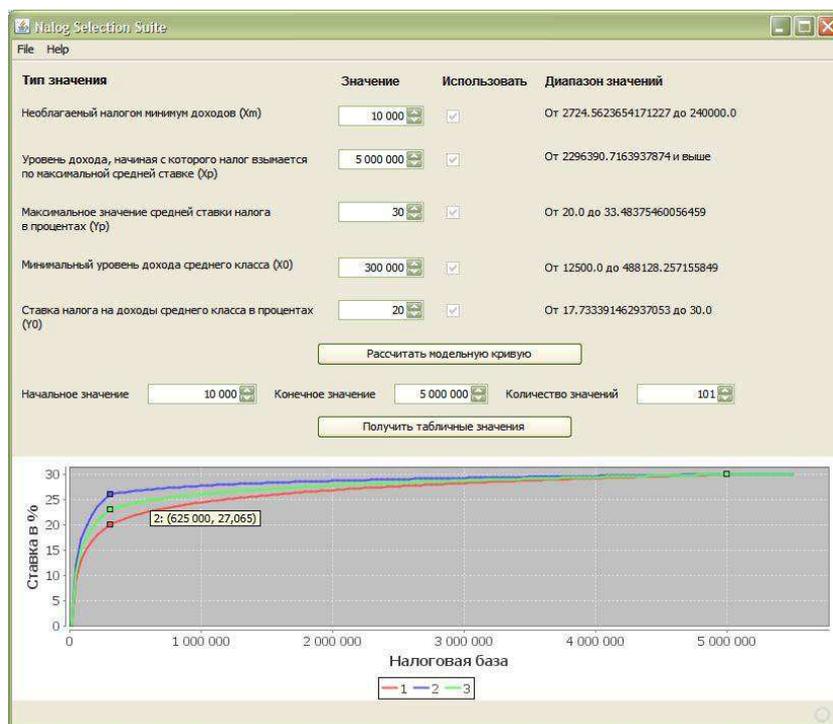


Рис. 1. Интерфейс системы: корректировка параметров, сравнение графиков модельных шкал

По окончании запуска системы пользователю предлагается поочередно ввести входные параметры модели, причем в интерфейсе ГОНШ отображаются допустимые диапазоны значений каждого из параметров, обусловленные установленными ограничениями (7), при этом вводимые данные контролируются на соответствие этим диапазонам: система не позволяет вводить недопустимые значения параметров.

Вслед за первоначальным вводом параметров пользователю предоставляется возможность их изменения (корректировки) и сравнения результатов корректировки с рассчитанными ранее оптимальными

X	Y (%)								
10000.0	0.0	1057900.0	26.218241...	2105800.0	27.919020...	3153700.0	28.898538...	4201600.0	29.586224...
59900.0	12.851745...	1107800.0	26.333355...	2155700.0	27.976186...	3203600.0	28.936342...	4251500.0	29.614381...
109800.0	16.816921...	1157700.0	26.443227...	2205600.0	28.032001...	3253500.0	28.973542...	4301400.0	29.642199...
159700.0	19.177529...	1207600.0	26.548309...	2255500.0	28.086525...	3303400.0	29.010156...	4351300.0	29.669686...
209600.0	20.848748...	1257500.0	26.648994...	2305400.0	28.139816...	3353300.0	29.046204...	4401200.0	29.696848...
259500.0	22.137074...	1307400.0	26.745631...	2355300.0	28.191927...	3403200.0	29.081700...	4451100.0	29.723694...
309400.0	23.080437...	1357300.0	26.838527...	2405200.0	28.242910...	3453100.0	29.116663...	4501000.0	29.750230...
359300.0	23.469080...	1407200.0	26.927957...	2455100.0	28.292810...	3503000.0	29.151107...	4550900.0	29.776464...
409200.0	23.805503...	1457100.0	27.014167...	2505000.0	28.341672...	3552900.0	29.185048...	4600800.0	29.802403...
459100.0	24.101933...	1507000.0	27.097377...	2554900.0	28.389539...	3602800.0	29.218500...	4650700.0	29.828052...
509000.0	24.366767...	1556900.0	27.177786...	2604800.0	28.436448...	3652700.0	29.251475...	4700600.0	29.853418...
558900.0	24.606015...	1606800.0	27.255573...	2654700.0	28.482437...	3702600.0	29.283989...	4750500.0	29.878507...
608800.0	24.824126...	1656700.0	27.330902...	2704600.0	28.527542...	3752500.0	29.316052...	4800400.0	29.903325...
658700.0	25.024486...	1706600.0	27.403921...	2754500.0	28.571794...	3802400.0	29.347677...	4850300.0	29.927878...
708600.0	25.209732...	1756500.0	27.474765...	2804400.0	28.615224...	3852300.0	29.378877...	4900200.0	29.952171...
758500.0	25.381954...	1806400.0	27.543558...	2854300.0	28.657863...	3902200.0	29.409661...	4950100.0	29.976210...
808400.0	25.542840...	1856300.0	27.610413...	2904200.0	28.699739...	3952100.0	29.440041...	5000000.0	30.0
858300.0	25.693770...	1906200.0	27.675436...	2954100.0	28.740876...	4002000.0	29.470027...		
908200.0	25.835887...	1956100.0	27.738723...	3004000.0	28.781302...	4051900.0	29.499629...		
958100.0	25.970151...	2006000.0	27.800362...	3053900.0	28.821039...	4101800.0	29.528856...		
1008000.0	26.097372...	2055900.0	27.860435...	3103800.0	28.860111...	4151700.0	29.557718...		

Рис. 2. Интерфейс системы: таблица значений средних ставок налога

ми шкалами как в графической (рис. 1), так и в табличной (рис. 2) формах. При корректировке входных параметров ограничения на их допустимые вариации по сравнению с ограничениями первоначального ввода (7), вообще говоря, меняются (в силу громоздкости соответствующих формул они здесь не приводятся). Допустимые диапазоны значений каждого из варьируемых параметров отображаются системой в пользовательском интерфейсе ГОНШ, автоматически обновляются по мере изменения пользователем значений параметров, при этом вводимые пользователем данные контролируются системой на соответствие этим диапазонам.

С технической точки зрения, система ГОНШ представляет собой оконное приложение, написанное на языке Java [4] с использованием библиотеки Swing [5] для реализации основной части пользовательского интерфейса и библиотеки JFreeChart [6] для отображения графиков. Таким образом, для запуска приложения на пользовательском ПК необходимо наличие операционной системы с графическим интерфейсом и наличие установленной среды исполнения JRE версии 1.6 [7].

Заключение. Выбранные в результате взаимодействия пользователя с системой ГОНШ параметры x_- , x_+ , y_+ , x_0 и y_0 можно использовать для построения маргинальной шкалы ставок подоходного налога [1]. Полученная шкала средних ставок подоходного налога применима в том числе и при оценке налоговых поступлений в государственный бюджет.

Литература

1. Чистяков С. В., Ишханова М. В. Математические модели выбора налоговых шкал. Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 52 с.
2. Смирнов Р. О. Моделирование выбора параметров шкалы подоходного налога // Вестник СПбГУ. Сер. 5, 2011. Вып. 4. С. 141–148.
3. Saez E. Using elasticities to derive optimal income tax rates // Review of Economic Studies, 2001. Vol. 68, No 38. P. 205–229.
4. Java. <http://ru.wikipedia.org/wiki/Java>
5. Swing. <http://ru.wikipedia.org/wiki/Swing>
6. JFreeChart. <http://en.wikipedia.org/wiki/JFreeChart>
7. Java Runtime Environment.
http://ru.wikipedia.org/wiki/Java_Runtime_Environment

Басков О. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Свойства острых нечётких конечнопорождённых двойственных конусов¹

Рекомендовано к публикации профессором Ногиным В. Д.

1. Введение. При решении некоторых задач прикладного характера возникает необходимость построения двойственных конусов. Вопрос о нахождении образующих двойственного конуса по образующим исходного конуса давно известен и хорошо изучен, он полностью решается алгоритмом Моцкина — Бургера [1]. В последнее время в связи с ростом популярности нечёткой логики многие проблемы стали обобщаться на нечёткий случай. Так возникла задача исследования двойственности нечётких конусов.

2. Основные понятия. В чётком случае двойственный конус к заданному конусу \mathcal{C} определяется как множество векторов $x \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих условию $\forall y \in \mathcal{C} \Rightarrow xy \geq 0$. Другими словами, для получения двойственного конуса из всего пространства следует исключить те векторы $x \in \mathbb{R}^m$, для которых $\exists y \in \mathcal{C} : xy < 0$. В такой форме это определение легко обобщается на нечёткий случай.

Определение 1 [2]. Двойственным нечётким конусом к нечёткому множеству \mathcal{C} называется нечёткое множество $\text{Dual } \mathcal{C}$ с функцией принадлежности

$$\lambda_{\text{Dual } \mathcal{C}}(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^m : xy < 0} (1 - \lambda_{\mathcal{C}}(y)).$$

При этом полагается $\lambda_{\text{Dual } \mathcal{C}}(0) = 1$.

Острые выпуклые нечёткие конусы удобно задавать с помощью образующих, т. е. в виде нечёткой конической оболочки.

Определение 2 [2]. Нечёткой конической оболочкой конечного числа векторов a^1, \dots, a^n со степенями принадлежности $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ называется наименьший по включению выпуклый нечёткий конус, содержащий эти векторы с не менее чем заданными степенями принадлежности. Векторы a^1, \dots, a^n называются образующими этого конуса, а сам конус — конечнопорождённым.

Очевидно, что конечнопорождённый конус можно задать различными наборами образующих. Например, включение в набор из определения вектора $a^1 + a^2$ со степенью принадлежности $\min\{\alpha^1; \alpha^2\}$ не изменит конуса. Поэтому вводится

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №11-07-00449

Определение 3. Образующая a^n нечёткой конической оболочки \mathbb{C} векторов a^1, \dots, a^n со степенями принадлежности $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ называется существенной, если нечёткая коническая оболочка векторов a^1, \dots, a^{n-1} со степенями принадлежности $\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}$ не совпадает с \mathbb{C} . В противном случае образующая называется лишней.

Если упорядочить образующие a^1, \dots, a^n по убыванию соответствующих степеней принадлежности, то функцию принадлежности их нечёткой конической оболочки можно представить в виде

$$\lambda(x) = \max_{x \in \text{cone}\{a^1, \dots, a^k\}} \alpha^k,$$

при этом $\lambda(x) = 0$ для $x \notin \text{cone}\{a^1, \dots, a^n\}$. Такое представление наглядно выявляет структуру нечёткого конуса: он есть не что иное, как «наслоение» конических оболочек с различными уровнями принадлежности.

3. Свойства нечётких двойственных конусов. Основные свойства нечётких двойственных конусов, являющиеся обобщениями соответствующих свойств чётких конусов, были рассмотрены в [2]. В данной работе затронем специфическое свойство, аналога которого в чётком случае нет.

Условимся называть γ -срезом нечёткого множества \mathbb{C} с функцией принадлежности $\lambda_{\mathbb{C}}$ чёткое множество $\mathbb{C}^{\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_{\mathbb{C}}(x) \geq \gamma\}$, а строгим γ -срезом множество $\mathbb{C}_{\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_{\mathbb{C}}(x) > \gamma\}$. Справедливо следующее

Утверждение 1. Пусть конечнопорождённые нечёткие конусы \mathbb{C} и \mathbb{D} взаимодвойственны. Тогда для $\forall \gamma \in [0, 1]$ чёткие конусы \mathbb{C}^{γ} и $\mathbb{D}_{1-\gamma}$ взаимодвойственны.

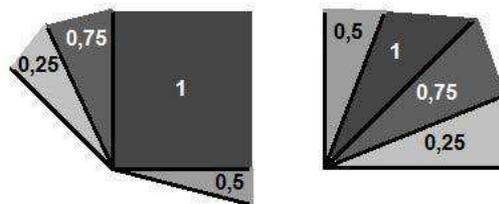


Рис. 1. Двойственные нечёткие конусы

Это свойство показывает связь «слоёв» конечнопорождённых двойственных нечётких конусов. На рис. 1 для примера изображе-

ны два нечётких конечнопорождённых взаимодвойственных конуса; числа обозначают степень принадлежности векторов в соответствующей области. На этом примере видно, что внутренний слой, так называемое ядро \mathbb{C}^1 , одного нечёткого конуса двойственно суппорту \mathbb{D}_0 двойственного нечёткого конуса; два внутренних слоя первого нечёткого конуса двойственны второму конусу, из которого исключён один внешний слой; и т. д.

4. Связь образующих двойственных нечётких конусов.

Приведённое утверждение в сочетании с известными результатами из теории двойственности чётких конусов позволяет установить некоторые свойства образующих конечнопорождённых двойственных конусов. Так, свойство образующей конуса являться нормалью к грани двойственного конуса приводит к следующему утверждению.

Утверждение 2. Пусть острый нечёткий конус \mathbb{C} есть нечёткая коническая оболочка векторов a^1, \dots, a^n со степенями принадлежности $\alpha^1, \dots, \alpha^n$. Пусть двойственный к \mathbb{C} острый нечёткий конус \mathbb{D} представлен в виде нечёткой конической оболочки векторов b^1, \dots, b^p со степенями принадлежности β^1, \dots, β^p . Тогда образующая b^k является существенной в том и только в том случае, если нет сонаправленной с ней образующей b^l с $\beta^l \geq \beta^k$, и $\dim \mathcal{L} \{ a^s \mid a^s b^k = 0, \alpha^s + \beta^k > 1 \} = m - 1$.

Этот результат показывает связь образующей нечёткого конуса с гранью слоя двойственного нечёткого конуса. Он позволяет проверять образующие двойственных нечётких конусов на существенность. Однако для этой цели его можно упростить за счёт исключения операции поиска размерности линейной оболочки векторов.

Утверждение 3. В условиях утверждения 2 образующая b^k является существенной в том и только в том случае, если нет образующей b^l с $\beta^l \geq \beta^k$, для которой $\forall a^s : a^s b^k = 0, \alpha^s + \beta^k > 1 \Rightarrow a^s b^l = 0$.

Таким образом, получен критерий, позволяющий выявлять лишние образующие острого нечёткого конуса в случае, если известны образующие двойственного к нему конуса.

Литература

1. Черников С. Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.
2. Басков О. В. Двойственные нечеткие конусы // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Еремина, Н. В. Смирнова. Спб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 449–453.

Болотина О. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Минимизация риска на основе теории нечеткой логики в рамках одной задачи

Рекомендовано к публикации профессором Колбиным В. В.

1. Введение. На практике часто сталкиваются с тем, что оценивание принятия решений производится с известной ценой за ошибку. В общем случае задана функция потерь, которая характеризует потери при неправильном принятии решений на основе экспертных оценок, учитывающих предыдущий опыт. Обычно под риском понимаются ожидаемые потери от принятого решения, поэтому функция риска есть математическое ожидание функции потерь. Математическое ожидание берется по множеству возможных значений некоторого неизвестного параметра.

Данная работа посвящена минимизации риска, т. е. снижению негативного воздействия, вызванного ошибками в решениях, на результаты производственно-финансовой деятельности. Для построения функции риска необходимо задание вероятностного распределения в зависимости от значений некоторого фактора. Часто возникает ситуация, когда при определенных значениях фактора вероятности либо неизвестны, либо определены заведомо неточно. Применяя теорию нечеткости [1, 2], можно попытаться задать вероятности в указанных ситуациях.

2. Постановка и решение задачи. Рассмотрим задачу минимизации риска потерь, когда имеется нечеткость (неопределенность) в задании исходной информации.

Предположим, что некоторая булочная расположена в курортном поселке, и количество посетителей в значительной мере определяется наличием или отсутствием туристов, которые приезжают на туристическом автобусе. Если туристов нет, то количество посетителей булочной в среднем за день равно θ_1 . Если приезжает автобус с туристами, то по предыдущему опыту в среднем количество посетителей булочной возрастает до θ_2 . Владелец булочной должен спрогнозировать количество посетителей булочной и выбрать функцию потерь $L(\theta, x)$, где x — прогноз числа посетителей, а θ — истинное количество посетителей булочной.

Предположим, что выбрана функция потерь следующего вида

$$L(\theta, x) = \begin{cases} c_1(\theta - x), & \text{если } \theta > x, \\ c_2(x - \theta), & \text{если } \theta < x, \end{cases}$$

где c_1 — цена производства одной булки, а c_2 — выгода, получаемая владельцем с каждой булки.

Если его оценка x окажется заниженной, то он потеряет $c_1(\theta - x)$ денег, если завышенной, то $-c_2(x - \theta)$. Естественно требовать от функции $L(\theta, x)$ неотрицательности и равенства нулю при $x = \theta$.

Предположим, событие A , которое заключается в том, что автобус с туристами приезжает, в большей степени зависит от температуры воздуха, а также от других погодных факторов. По наблюдениям владельца булочной температура $t < t_1$ является слишком низкой, и автобус с туристами приезжает с вероятностью p_1 , например, $p_1 = 0,1$; температура $t_2 < t < t_3$ (где $t_1 < t_2$) является комфортной для приезда туристов и они приезжают с вероятностью p_2 , например, $p_2 = 0,8$; температура $t > t_4$ является слишком жаркой и туристы приезжают с вероятностью p_3 , например, $p_3 = 0,2$. Вероятность $p_2 \neq 1$, так как возможны дождь или ветер. Таким образом, неблагоприятные погодные явления в условиях комфортной температуры, при осуществлении которых туристы не приезжают, происходят с вероятностью $1 - p_2$. Конечно, предполагается, что $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$.

Будем считать, что $t = 0$ и $t = t_5$ — соответственно минимально и максимально возможные температуры, когда туристы могут приехать. На промежутках $(0, t_1)$, (t_2, t_3) , (t_4, t_5) заданы четкие функции принадлежности и соответственно точные вероятности появления туристов $P(A/t)$. Имеется два участка неопределенности (t_1, t_2) и (t_3, t_4) . На рис. 1 приведена схема задания функции $P(A/t)$ на всех участках, включая зоны неопределенности, используя метод задания неопределенности в виде трапеции. Таким образом, функция $P(A/t)$, представляющая собой вероятность появления туристов в зависимости от температуры, полностью определена при всех значениях t .

Функцию риска $R_t(x)$ можно определить через функцию потерь $L(\theta, x)$ следующим образом:

$$R_t(x) = E_t L(\theta, x) = P(\bar{A}/t)L(\theta_1, x) + P(A/t)L(\theta_2, x),$$

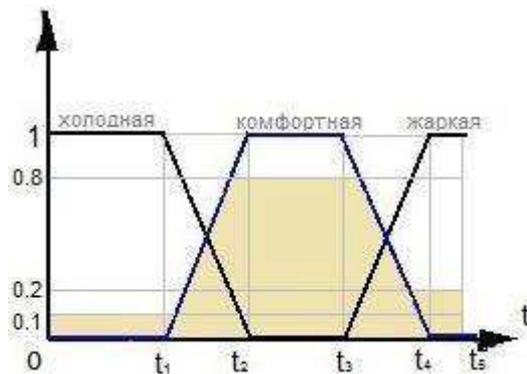


Рис. 1. Схема задания функции $P(A/t)$

где математическое ожидание берется по распределению, состоящему из двух вероятностей $P(\bar{A}/t)$ и $P(A/t)$, при этом вероятности зависят от величины температуры (от значения фактора t). Другими словами, за риск выбраны ожидаемые потери от неправильного решения. Считаем, что температура точно известна и не возникает неопределенности с её выбором.

Сформулируем задачу наилучшего выбора x :

$$x^* = \arg \min_x R_t(x) \quad (1)$$

Решение задачи (1) существует, но, вообще говоря, при определенных соотношениях на параметры задачи, может оказаться не единственным. Для нахождения решения задачи (1) рассмотрим три промежутка.

1. Если $x \leq \theta_1$, тогда

$$R_t(x) = E_t L(\theta, x) = P(\bar{A}/t)c_1(\theta_1 - x) + P(A/t)c_1(\theta_2 - x).$$

Очевидно, что

$$x_1^* = \theta_1 \text{ и } R_t(x_1^*) = E_t L(\theta_1, x_1^*) = P(A/t)c_1(\theta_2 - \theta_1)$$

2. Если $\theta_1 \leq x \leq \theta_2$, тогда

$$\begin{aligned} R_t(x) &= E_t L(\theta, x) = P(\bar{A}/t)c_2(x - \theta_1) + P(A/t)c_1(\theta_2 - x) = \\ &= x(c_2P(\bar{A}/t) - c_1P(A/t)) - c_2\theta_1P(\bar{A}/t) + c_1P(A/t)\theta_2, \end{aligned}$$

- если $(c_2P(\bar{A}/t) - c_1P(A/t)) > 0$, то $x_2^* = \theta_1$;
- если $(c_2P(\bar{A}/t) - c_1P(A/t)) < 0$, то $x_2^* = \theta_2$;
- если $(c_2P(\bar{A}/t) - c_1P(A/t)) = 0$, то x_2^* — любое число из промежутка $[\theta_1, \theta_2]$.

3. Если $x \geq \theta_2$, тогда

$$R_t(x) = E_t L(\theta, x) = P(\bar{A}/t)c_2(x - \theta_1) + P(A/t)c_2(x - \theta_2)$$

Очевидно, что $x_3^* = \theta_2$ и $E_t L(\theta, x_3^*) = P(\bar{A}/t)c_2(\theta_2 - \theta_1)$

4. Далее, выбирая минимальное из значений $R_t(x_1^*), R_t(x_2^*), R_t(x_3^*)$, находим решение задачи (1), определяя в качестве x^* соответствующее значение x_i^* , где $i = 1, 2, 3$, для которого $R_t(x_i^*)$ минимально.

Как видим, решение задачи (3) всегда существует и может быть найдено при помощи указанного алгоритма. Таким образом, в первом и третьем пунктах решения x_1^* и x_3^* — единственны. Во втором пункте решение x_2^* при определенных условиях может оказаться неединственным.

3. Заключение. В статье рассмотрена минимизация риска в рамках одной задачи. Функция риска построена на основе экспериментных оценок методами теории нечеткости. Найдено оптимальное решение, минимизирующее функцию риска.

Литература

1. Дюбуа Д., Прад. А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Пер. с франц. М.: Радио и связь, 1990. 288 с.
2. Асаи К., Ватада С., Иваи. С. Прикладные нечеткие системы / Пер. с японского М.: Мир, 1993. 368 с.

Григорьева К. В., Шайкина П. Г.
Санкт-Петербургский государственный университет

Коалиционная модель принятия решений с одной многокритериальной бескоалиционной игрой

1. Введение. Пусть имеется группа агентов N и совокупность каких-либо проектов M . Это могут быть объекты строительства, транспортные маршруты, государства в международной политике или любые другие проекты, где требуется участие так называемых агентов. Агенты принимают решение участвовать в проекте или нет. При этом принятие решения каждого агента по каждому проекту сопряжено с затратами (доходами), отличными от нуля, которые следует минимизировать (максимизировать). Более того, для каждого проекта производится оценка затрат (доходов) по нескольким параметрам, следовательно, задача является многокритериальной. Агенты создают коалиции с целью получения более высокого дохода. Соответственно возникает многокритериальная задача оптимизации, которую можно решить с помощью теоретико-игровой модели в смешанных стратегиях, которую будем называть *коалиционной моделью принятия решений с одной многокритериальной бескоалиционной игрой*. Эта модель формализуется как семейство коалиционных игр на множестве проектов, ассоциированных с бескоалиционной игрой, полученной из многокритериальной бескоалиционной игры с помощью минимаксного метода многокритериальной оптимизации. Таким образом, для каждого проекта задается коалиционная игра, которую необходимо решить. Затем, применяя алгоритм нахождения компромиссного решения к набору полученных дележей во всех коалиционных играх, требуется выделить проект, соответствующий компромиссному дележу. В качестве принципов оптимальности используются обобщенный PMS-вектор [1, 2] и компромиссное решение [3].

2. Постановка задачи. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, а $M = \{1, \dots, m\}$ — множество проектов. Обозначим через $X_i = \{0, 1\}$ — множество стратегий x_i игрока i , $i = \overline{1, n}$, где $x_i = 0$ — отрицательное решение игрока i по некоторому проекту или $x_i = 1$ — положительное решение. Набор чистых стратегий, выбранных агентами для некоторого проекта, образует ситуацию

$x = (x_1, \dots, x_n)$ игры между агентами. Множество $X = \prod_{i=\overline{1, n}} X_i$ — множество ситуаций игры. На множестве ситуаций в чистых стратегиях для каждого игрока i , $i = \overline{1, n}$, определена вектор-функция выигрыша $\mathbb{K}_i(x) : X \rightarrow R^r$.

Таким образом, для всех проектов j , $j = \overline{1, m}$, имеем одну многокритериальную бескоалиционную игру n лиц:

$$G(x) = \left\langle N, \{X_i\}_{i=\overline{1, n}}, \{\mathbb{K}_i(x)\}_{i=\overline{1, n}, x \in X} \right\rangle.$$

Смешанная стратегия игрока i в игре $G(x)$ — это вектор вероятностей выбора i -м игроком своих чистых стратегий, т. е. $\mu_i = (\xi_i^0, \xi_i^1)$, где ξ_i^0 — вероятность выбора отрицательного решения игроком i , а ξ_i^1 — вероятность выбора положительного решения. Набор смешанных стратегий, выбранных игроками для некоторого проекта, образует ситуацию $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ игры между игроками в смешанных стратегиях.

Используя минимаксный метод многокритериальной оптимизации, сведем многокритериальную бескоалиционную игру n лиц $G_j(x)$ к бескоалиционной игре в нормальной форме $\tilde{G}_j(x)$ со скалярными выигрышами

$$\tilde{G}_j(x) = \left\langle N, \{X_i\}_{i=\overline{1, n}}, \{\tilde{K}_i(x)\}_{i=\overline{1, n}, x \in X} \right\rangle,$$

где $\tilde{K}_i(x) = \sum_{s=1}^r \lambda_i^s K_i^s$, $K_i^s \in \mathbb{K}_i$, $s = \overline{1, r}$, а λ_i^s , $s = \overline{1, r}$ — коэффициенты предпочтения игрока i . Будем находить их значения с помощью ранжирования параметров по степени важности [4].

Пусть теперь задано коалиционное разбиение Σ^j множества N агентов для каждого проекта $j = \overline{1, m}$:

$$\Sigma^j = \{S_1, \dots, S_l\}, \quad l \leq n, \quad n = |N|, \quad S_k \cap S_q = \emptyset \quad \forall k \neq q, \quad \bigcup_{k=1}^l S_k = N,$$

с целью получения более высокого дохода.

Тогда получаем m одновременных коалиционных игр l лиц в нормальной форме $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$, $j = \overline{1, m}$, ассоциированных с бескоалиционной игрой $\tilde{G}_j(x)$, $j = \overline{1, m}$:

$$G_j(\tilde{x}, \Sigma^j) = \left\langle N, \{\tilde{X}_{S_k}\}_{k=\overline{1, l}, S_k \in \Sigma^j}, \{H_{S_k}(\tilde{x})\}_{k=\overline{1, l}, S_k \in \Sigma^j} \right\rangle,$$

где $\tilde{X}_{S_k} = \prod_{i \in S_k} X_i$ — множество стратегий \tilde{x}_{S_k} коалиции S_k ;
 $\tilde{x}_{S_k} = \{x_i\}_{i \in S_k} \in \tilde{X}_{S_k}$ — набор стратегий игроков, входящих в коалицию S_k ; набор стратегий $\tilde{x} = \{\tilde{x}_{S_k}\}_{S_k \in \Sigma^j} \in \tilde{X}$ — ситуация в игре $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$; $\tilde{X} = \prod_{k=\overline{1, l}} \tilde{X}_{S_k}$ — множество ситуаций; смешанная стратегия $\tilde{\mu}_{S_k} = \left\{ \tilde{\xi}(\tilde{x}_{S_k}) \right\}_{\tilde{x}_{S_k} \in \tilde{X}_{S_k}} \in \tilde{M}_{S_k}$ — вектор вероятностей выбора своих чистых стратегий коалицией S_k ; множество \tilde{M}_{S_k} — множество смешанных стратегий $\tilde{\mu}_{S_k}$ коалиции S_k ; набор стратегий $\tilde{\mu} = \{\tilde{\mu}_{S_k}\}_{S_k \in \Sigma^j} \in \tilde{M}$ — ситуация в смешанных стратегиях; $\tilde{M} = \prod_{k=\overline{1, l}} \tilde{M}_{S_k}$ — множество ситуаций в смешанных стратегиях.

Из определения стратегии \tilde{x}_{S_k} коалиции S_k следует, что \tilde{x} и x — одна и та же ситуация в играх $G_j(x)$ и $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$. Из этого однако не следует, что $\mu = \tilde{\mu}$.

Под выигрышем $H_{S_k} : \tilde{X} \rightarrow R^1$ коалиции S_k понимается сумма выигрышей игроков, входящих в эту коалицию:

$$H_{S_k}(\tilde{x}) = \sum_{i \in S_k} \tilde{K}_i(x), \quad k = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, m}, \quad S_k \in \Sigma^j, \quad (1)$$

где $\tilde{K}_i(x)$, $i \in S_k$, — функция выигрыша игрока i в ситуации x в соответствующей бескоалиционной игре $\tilde{G}_j(x)$.

Выигрыш коалиции S_k в ситуации $\tilde{\mu}$ игры $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$ в смешанных стратегиях определяется по следующей формуле

$$\tilde{E}_{S_k}(\tilde{\mu}) = \sum_{\tilde{x}_{S_1} \in \tilde{X}_{S_1}} \dots \sum_{\tilde{x}_{S_l} \in \tilde{X}_{S_l}} H_{S_k}(\tilde{x}) \tilde{\xi}(\tilde{x}_{S_1}) \dots \tilde{\xi}(\tilde{x}_{S_l}), \quad k = \overline{1, l}.$$

Определение 1. Множество из m коалиционных игр l лиц $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$, $j = \overline{1, m}$, называется многокритериальной коалиционной моделью принятия решений с различными предпочтениями игроков.

Определение 2. Под решением многокритериальной коалиционной модели принятия решений с различными предпочтениями игроков в чистых (смешанных) стратегиях будем понимать пару (\tilde{x}^*, Σ^*) $((\tilde{\mu}^*, \Sigma^*))$, где \tilde{x}^* $(\tilde{\mu}^*)$ — ситуация равновесия по Нэшу (НЭ) в чистых (смешанных) стратегиях в коалиционной игре l лиц $G_j(\tilde{x}, \Sigma^*)$, $j = \overline{1, m}$, с компромиссным коалиционным разбиением Σ^* .

В качестве дележа внутри коалиций используется обобщенный PMS-вектор [1, 2].

3. Решение задачи. Рассмотрим следующие принципы оптимальности.

3.1. Алгоритм построения обобщенного PMS-вектора в коалиционной игре. Напомним алгоритм построения обобщенного PMS-вектора в коалиционной игре [1, 2].

1. Решим коалиционную игру $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$ с выигрышами $H_{S_k}(\tilde{x})$, определенными формулой (1), т. е. найдем в игре $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$ ситуацию NE \tilde{x}^* или $\tilde{\mu}^*$ (одну или несколько [5]).

2. Рассмотрим для каждой коалиции S_k , $k = \overline{1, l}$, кооперативную игру $G_j(\tilde{x}, \xi_k)$ коалиции S_k в предположении, что игроки, входящие в S_k , используют равновесные стратегии, входящие, в общем случае, в ситуацию $\tilde{\mu}^*$ коалиционной игры $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$. Тогда характеристическая функция в кооперативной игре $G_j(\tilde{x}, \xi_k)$ определяется выражением $v(S) = \max_{x_S \in X_S} \min_{x_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}} \sum_{i \in S} \tilde{K}_i(x_S, x_{N \setminus S})$, где x_S — стратегия коалиции $S \subset S_k$, а $\tilde{K}_i(x_S, x_{N \setminus S})$ — выигрыши игроков коалиции S .

Введенная таким образом характеристическая функция всегда супераддитивна, а ее значение можно интерпретировать как максимальный гарантированный выигрыш коалиции S [6].

3. Выигрыш $v(S_k) = \tilde{E}_{S_k}(\tilde{\mu}^*)$ коалиций в ситуации NE $\tilde{\mu}^*$ в смешанных стратегиях разделим между агентами этой коалиции в соответствии с вектором Шепли [7] $Sh(S_k) = (Sh(S_k : 1), \dots, Sh(S_k : s))$:

$$Sh(S_k : i) = \sum_{\substack{S' \subset S_k \\ S' \ni i}} \frac{(s'-1)!(s-s')!}{s!} (v(S') - v(S' \setminus \{i\})),$$

где $Sh(S_k : i)$ при $\forall i = \overline{1, s}$, — компонента вектора Шепли для игрока i из коалиции $S_k \in \Sigma^j$, $s = |S_k|$ ($s' = |S'|$) — количество элементов множеств S_k (S'), а $v(S')$ — максимальный гарантированный выигрыш коалиции $S' \subset S_k$. При этом $v(S_k) = \sum_{i=1}^s Sh(S_k : i)$.

Тогда PMS-вектор в ситуации NE $\tilde{\mu}^*$ в смешанных стратегиях в коалиционной игре $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$ определяется как

$$\text{PMS}^j(\tilde{\mu}^*) = \left(\text{PMS}_1^j(\tilde{\mu}^*), \dots, \text{PMS}_n^j(\tilde{\mu}^*) \right),$$

где $\text{PMS}_i^j(\tilde{\mu}^*) = Sh(S_k : i)$, $i \in S_k$, $k = \overline{1, l}$.

Значение $\tilde{E}_{S_k}(\tilde{\mu}^*)$ — случайная величина. В игре $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$ может быть несколько ситуаций НЕ, поэтому набор значений $v(S_1), \dots, v(S_l)$ может определяться неоднозначно.

3.2. Алгоритм нахождения «компромиссного» решения.

Напомним алгоритм нахождения «компромиссного» решения [3]

$$C_{\text{PMS}}(M) = \arg \min_j \max_i \left\{ \max_j \text{PMS}_i^j - \text{PMS}_i^j \right\}.$$

1. Построим вектор $\text{PMS} = \{\text{PMS}_i\}_{i=\overline{1, n}}$, где $\text{PMS}_i = \max_j \text{PMS}_i^j$ — максимальное значение функции выигрыша i -го игрока в ситуации НЕ на множестве M , а j — номер проекта.

2. Найдем для каждого j отклонение от максимума PMS_i значений выигрыша остальных игроков, т. е. $\Delta_i^j = \text{PMS}_i - \text{PMS}_i^j$, $i = \overline{1, n}$.

3. Из найденных отклонений Δ_i^j для каждого j выбираем максимальное по всем игрокам i отклонение $\Delta_{i_j^*}^j = \max_i \Delta_i^j$.

4. Выбираем минимальное по всем j из всех максимальных отклонений по всем игрокам i отклонение $\Delta_{i_{j^*}}^{j^*} = \min_j \Delta_{i_j^*}^j = \min_j \max_i \Delta_i^j$.

Проект $j^* \in C_{\text{PMS}}(M)$, на котором достигается минимум, является компромиссным в игре $G_j(\tilde{x}, \Sigma^j)$ для всех игроков.

3.3. Алгоритм решения многокритериальной коалиционной модели принятия решений. Сформулируем алгоритм решения задачи.

1. Зафиксируем номер проекта j , $j = \overline{1, m}$. Найдем в коалиционной игре $G_j(\tilde{\mu}, \Sigma^j)$ ситуацию равновесия $\tilde{\mu}^*$ и дележ в этой ситуации, т. е. PMS-вектор [1, 2].

2. Повторим п. 1 для всех остальных проектов j , $j = \overline{1, m}$, т. е. получим для каждого проекта j ситуацию равновесия в соответствующей коалиционной игре $G_j(\tilde{\mu}, \Sigma^j)$.

3. К полученному набору PMS-векторов в равновесных ситуациях применим алгоритм нахождения «компромиссного» решения [3] и определим на множестве проектов «компромиссный» проект j^* .

4. Заключение. В работе [8] рассматривалась подобная задача для скалярной функции выигрыша. В данной работе предложена многокритериальная коалиционная модель принятия решений, а также алгоритмы ее для решения.

Литература

1. Grigorieva X., Mamkina S. Solutions of bimatrix coalitional games // Collected papers printed on the second international conference «Game theory and management» [GTM'2008] / Edited by L. A. Petrosjan, N. A. Zenkevich. SPb.: Graduate school of management, SpbSU, 2009. P. 147–153.
2. Petrosjan L., Mamkina S. Dynamic games with coalitional structures // Intersectional game theory review, 2006. Vol. 8, No 2. P. 295–307.
3. Малафеев О. А. Управляемые конфликтные системы. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 76 с.
4. Кокорина А. В. Оптимизационный подход в задачах математической диагностики. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 119 с.
5. Nash J. Non-cooperative games // Ann. Mathematics, 1951. Vol. 54. P. 286–295.
6. Зенкевич Н. А., Петросян Л. А., Янг Д. В. К. Динамические игры и их приложения в менеджменте. СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента», 2009. 415 с.
7. Shapley L. S. A value for n -person games / in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.) // Contributions to the theory of games. Princeton University Press, 1953. P. 307–317.
8. Grigorieva X. Static model of decision-making over the set of coalitional partitions // Collected papers printed on the Fifth international conference «Game theory and management» [GTM'2011] / Edited by L. A. Petrosjan, N. A. Zenkevich. SPb.: Graduate school of management, SpbSU, 2012. P. 111–121.

Жабченко А. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Географически взвешенная регрессия и ее применение

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. Метод географически взвешенной регрессии [1, 2] является расширением классического регрессионного анализа на нестационарный пространственный случай. Этот метод позволяет изучить пространственную изменчивость данных, зависимость между ними, определяет, каким образом эти зависимости изменяются в различных регионах изучаемой площади. Также метод позволяет оценивать качество полученных результатов.

2. Описание математической модели. В данном разделе рассмотрим математическую модель метода географически взвешенной регрессии, стандартные ошибки и способы задания весовой функции.

2.1. Математическая модель. Модель географически взвешенной регрессии имеет вид

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^p \beta_k(u_i, v_i)x_{ik} + \varepsilon_i,$$

где пара переменных (u_i, v_i) представляет собой координаты точки i , $i = 1, \dots, n$, y_i — значение наблюдаемой зависимой переменной, x_{i1}, \dots, x_{ip} — независимые объясняющие переменные, p — число объясняющих переменных, $\beta_k(u_i, v_i)$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие оценке, $k = 0, \dots, p$, ε_i — случайные ошибки.

Предполагается, что регрессионные модели для соседних точек схожи, но могут варьироваться по территории. Допустим, что коэффициенты регрессии $\beta_0(u, v), \dots, \beta_k(u, v)$ являются непрерывными функциями координат (u, v) . Если функции достаточно гладкие, то коэффициенты регрессии для близлежащих объектов приблизительно равны между собой. Тогда в некоторой окрестности точки наблюдения с координатами (u_i, v_i) исследуемая зависимость с переменными коэффициентами может быть приближена к локальной

линейной модели с постоянными коэффициентами:

$$y_j = \gamma_0 + \sum_{k=1}^p \gamma_k x_{jk} + \varepsilon_i,$$

где $\gamma_0 = \beta_0(u_i, v_i), \gamma_1 = \beta_1(u_i, v_i), \dots, \gamma_k = \beta_k(u_i, v_i)$.

Для нахождения оценок коэффициентов локальной модели используется взвешенный метод наименьших квадратов:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} \left(y_j - \gamma_0 - \sum_{k=1}^p \gamma_k x_{jk} \right)^2 \rightarrow \min_{\gamma_0, \dots, \gamma_p},$$

где w_{ij} — вес j -го наблюдения при построении локальной модели в точке с координатами (u_i, v_i) .

Вектор оценок коэффициентов для каждого местоположения i вычисляется по формуле

$$\widehat{\beta}(u_i, v_i) = (X^T W(u_i, v_i) X)^{-1} X^T W(u_i, v_i) Y, \quad (1)$$

где $\widehat{\beta}$, X^T , W , X — матрицы, $\widehat{\beta}$ представляет собой оценку β , $W(u_i, v_i)$ — $(n \times n)$ -матрица, недиагональные элементы которой равны нулю, а диагональные представляют собой географическое «взвешивание» каждого из n наблюдений для каждой регрессионной точки i .

Чтобы понять это более ясно, рассмотрим классическое уравнение регрессии в матричной форме

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

где вектор параметров β , который подлежит оценке, постоянный в пространстве и оценивается следующим образом:

$$\widehat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Уравнение географически взвешенной регрессии в матричной форме имеет вид

$$Y = (\beta \otimes X)1 + \varepsilon,$$

где \otimes является логическим оператором умножения каждого элемента из β на соответствующий элемент из X . Если имеется n наблюдений и k объясняющих переменных, то β и X будут иметь размерности $n \times (k + 1)$ и 1 — единичный $((k + 1) \times 1)$ -вектор. Матрица

β состоит из n наборов локальных параметров и имеет следующую структуру:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0(u_1, v_1) & \beta_1(u_1, v_1) & \dots & \beta_k(u_1, v_1) \\ \beta_0(u_2, v_2) & \beta_1(u_2, v_2) & \dots & \beta_k(u_2, v_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_0(u_n, v_n) & \beta_1(u_n, v_n) & \dots & \beta_k(u_n, v_n) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Параметры в каждой строке этой матрицы оцениваются:

$$\hat{\beta}(i) = (X^T W(i) X)^{-1} X^T W(i) Y,$$

где i обозначает строку матрицы в (2) и $W(i)$ — пространственная весовая ($n \times n$)-матрица:

$$W(i) = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{in} \end{bmatrix},$$

где w_{in} — вес n -ой точки по отношению к местоположению i .

2.2. Стандартные ошибки. В дополнение к оценкам локальных параметров также полезно рассчитывать локальные стандартные ошибки, которые получаются следующим образом.

Перепишем оценку локальных параметров, описанную в уравнении (1):

$$\hat{\beta}(u_i, v_i) = C y,$$

где

$$C = (X^T W(u_i, v_i) X)^{-1} X^T W(u_i, v_i).$$

Дисперсия оценок параметра задается [3]

$$\text{Var}[\hat{\beta}(u_i, v_i)] = C C^T \sigma^2,$$

где σ^2 — сумма квадратов остатков, которая определяется как

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) / (n - 2v_1 + v_2),$$

где

$$v_1 = \text{tr}(S), \quad v_2 = \text{tr}(S^T S).$$

Матрица S отображает \hat{y} в y следующим образом:

$$\hat{y} = Sy,$$

где каждая строка r_i матрицы S имеет вид

$$r_i = X_i (X^T W(u_i, v_i) X)^{-1} X^T W(u_i, v_i).$$

2.3. Способы построения матрицы весовых коэффициентов. При определении элементов матрицы применяют естественный принцип: более близкие соседи оказывают наибольшее влияние. Наиболее употребляемые методы вычисления весовых коэффициентов: административно-территориальное деление, метод движущегося окна, фиксированные и адаптивные ядра:

- административно-территориальное деление. Есть район A .

$$w_{ij} = 1, \quad \text{если } (i, j) \in \text{области } A,$$

$$w_{ij} = 0, \quad \text{если } (i, j) \notin \text{области } A;$$

- метод движущегося окна. Задают предельно допустимую удаленность, т. е. некоторое фиксированное расстояние b , относительно которого определяют категорию ближайшего соседа.

$$w_{ij} = 1, \quad \text{если } d_{ij} < b,$$

$$w_{ij} = 0, \quad \text{если } d_{ij} \geq b.$$

Расстояние между исследуемыми объектами находят как расстояние между двумя точками на плоскости. Величина b фиксирована и называется шириной окна (полоса пропускания);

- ядра. Подход, в котором веса строятся с учетом непрерывного изменения расстояния между исследуемыми объектами, называют ядерным, а веса, которые являются убывающими функциями расстояния, — ядрами. Наиболее часто применяют ядра Гаусса

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right),$$

где b — фиксированная ширина полосы пропускания, α — масштабный коэффициент. В местоположении i вес равен единице, а при удалении объектов исследования от него быстро уменьшается.

Как альтернативу можно использовать ядро би-квадрат:

$$w_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right)^2, & \text{если } d_{ij} < b, \\ 0, & \text{если } d_{ij} \geq b. \end{cases}$$

Би-квадрат обеспечивает непрерывное изменение веса в пределах полосы пропускания и ноль за ее границей.

Еще одним примером вычисления непрерывно меняющегося веса может служить ядро три-куб:

$$w_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^3\right)^3, & \text{если } d_{ij} < b, \\ 0, & \text{если } d_{ij} \geq b. \end{cases}$$

3. Вычислительный эксперимент. Применение алгоритма метода географически взвешенной регрессии началась с моделирования данных.

Смоделированная местность представляет собой четыре района, каждый из которых обладает определенными особенностями: два района — это чистая и сухая территория, третий — болотистая местность с кустарниками, четвертый — сухая местность с деревьями.

Введем два объясняющих фактора: x_1 — площадь участка, не нуждающаяся в предварительной вырубке, и x_2 — доля площади участка, не нуждающаяся в осушении.

Земельные участки имеют одинаковую площадь. Зависимая переменная y — стоимость земельного участка.

Также сделаем упрощающее предположение: рассмотрим ситуацию, когда все коэффициенты, кроме свободного члена, не меняются в пространстве.

Смоделированная выборка имеет размерность $n = 72$.

После моделирования данных в пакете прикладных программ Excel все необходимые вычисления производились в MATLAB.

Используя различные способы задания весовых функций, были рассчитаны оценки коэффициентов для каждого местоположения.

Оценки при изменении способа задания весовой функции не улучшились, при этом сохранилась достаточно хорошая аппроксимация. Ошибка аппроксимации составляет менее 5%.

4. Заключение. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что метод дает очень хорошую аппроксимацию исследуемого показателя. Но может оказаться совершенно непригодным для оценки параметров, являющихся коэффициентами при объясняющих переменных, в случае, когда количество наблюдений для оценки параметров локальной модели невелико, или, если весовая функция задана таким образом, что для оценки параметров локальной модели используется много наблюдений, соответствующих другой локальной модели, при этом вес этих наблюдений таков, что они вносят заметное искажение в оценке. Если уменьшить число локальных моделей за счет их расширения, то метод дает более точные оценки параметров.

Литература

1. Балаш В. А., Балаш О. С., Харламов А. В., Эконометрический анализ геокодированных данных о ценах на жилую недвижимость // Прикладная эконометрика. Сер. 22, 2011. Вып. 2. С. 62–77.
2. Fotheringham A. S., Brundson C., Charlton M. Geographically weighted regression the analysis of spatially varying relationships. University of Newcastle, UK, John Wiley & sons, LTD, 2002. P. 27–64.
3. Loader C. Local regression and likelihood. Springer, 1999. 283 p.

Жигачёва А. Л., Смирнов Н. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Обоснование непрерывности модифицированной модели эндогенного роста Лукаса

1. Введение. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается модель эндогенного роста Лукаса [1]. Ключевой особенностью этой модели является учет человеческого фактора. При этом основным понятием является *человеческий капитал*, под которым понимается уровень знаний и навыков работника. Идеи Лукаса вызвали большой интерес специалистов по стратегическому моделированию экономического роста на макроуровне (см., например, работы [2, 3]). Одной из основных задач в рамках модели Лукаса является оптимизация распределения рабочего времени и времени, затрачиваемого на обучение работника. Для ее решения используется принцип максимума Понтрягина.

Следуя работам [1–3], рассмотрим математическую модель экономики с идентичными работниками

$$\begin{cases} \dot{N} = \lambda N(t), \\ \dot{h} = \delta(1 - u(t))h(t), \\ \dot{K} = Y(t) - N(t)c(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $N(t)$ — число работников, $\lambda > 0$ — темп роста их численности (константа), $h(t)$ — уровень человеческого капитала работника, $u(t)$ — доля его рабочего времени, посвященная производству благ, $1 - u(t)$ — доля рабочего времени, посвященная обучению, $\delta > 0$ — константа, $K(t)$ — накопление физического капитала, $Y(t)$ — выпуск продукции, $c(t)$ — поток реального потребления на душу населения.

Предполагается, что выпуск $Y(t)$ зависит от запаса физического капитала $K(t)$, эффективной рабочей силы $u(t)h(t)N(t)$ и среднего человеческого капитала $h_\alpha(t)$. Эта зависимость определяется производственной функцией

$$Y(t) = AK^\beta [uhN]^{1-\beta} h_\alpha^\gamma. \quad (2)$$

При этом вводятся естественные ограничения: $N(t) \geq 0$, $h(t) \geq 0$, $h_\alpha(t) \geq 0$, $c(t) \geq 0$, $K(t) \geq 0$, $0 \leq u(t) \leq 1$. Кроме того, считается,

что уровень технологии A в (2) эластичен, эластичность выпуска по внешнему действию человеческого капитала γ и эластичность выпуска по физическому капиталу β считаются постоянными и, кроме того, $A > 0$, $0 < \beta < 1$, $\gamma > 0$.

Предпочтения определяются нормой дисконтирования $\rho > 0$ и коэффициентом относительной несклонности к риску $\sigma > 0$. Задан целевой функционал

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1-\sigma} (c(t)^{1-\sigma} - 1) N(t) e^{-\rho t} dt. \quad (3)$$

Принята гипотеза о том, что при максимизации функционала (3), при заданных условиях (1), (2), работник считает переменным собственным человеческий капитал $h(t)$. При этом средний для экономики человеческий капитал $h_\alpha(t)$ полагается экзогенно заданным. Его влияние на производительность каждого индивидуума является внешним эффектом человеческого капитала. По каждой функции $h_\alpha(t)$ можно найти набор функций

$$\{h(t, h_\alpha(t)), K(t, h_\alpha(t)), c(t, h_\alpha(t)), u(t, h_\alpha(t))\},$$

максимизирующий функционал при заданных ограничениях. Если при этом $h = h_\alpha$, то набор называется *равновесной траекторией*.

В статье [3] задача (1)–(3) решена для частного случая $\sigma = \beta$. Применение принципа максимума Понтрягина позволило авторам получить довольно простое дифференциальное уравнение относительно искомой функции $u(t)$:

$$\dot{u} = \frac{1}{\beta} (\lambda + (1 + \gamma - \beta)\delta - \rho) u - \frac{(\gamma - \beta)\delta}{\beta} u^2. \quad (4)$$

Там же проведен анализ его решения и показаны возможности модели (1)–(4) для построения стратегических прогнозов экономического роста для государств с различными стартовыми условиями.

В работах [4, 5] рассмотрена более общая ситуация, когда нарушено равенство коэффициентов, т. е. $\sigma \neq \beta$. Предложено ввести величину неравномерности $\varepsilon \geq 0$ (малый параметр) и считать, что $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\beta} + \varepsilon$. Использование принципа максимума дает в этом случае более сложное, чем в [3] уравнение, описывающее искомую функцию

$u(t)$. Его правая часть зависит от всех фазовых переменных, поэтому для поиска его решения необходимо интегрировать всю систему:

$$\begin{cases} \dot{N} = \lambda N(t), \\ \dot{h} = \delta(1 - u(t))h(t), \\ \dot{K} = AK^\beta [uhN]^{1-\beta} h_\alpha^\gamma - N(t)c(t), \\ \dot{u} = \varepsilon (\beta AK^{\beta-1} (uN)^{1-\beta} h^{1-\beta+\gamma} - \rho) u + \\ + \frac{1}{\beta} (\lambda + (1 + \gamma - \beta)\delta - \rho) u - \frac{(\gamma - \beta)\delta}{\beta} u^2. \end{cases} \quad (5)$$

Разработанный в [4, 5] алгоритм был реализован в виде компьютерной программы, основу которой составляет метод численного интегрирования системы (5). Таким образом, предлагаемый подход позволяет делать количественные оценки распределения временных затрат на производство и обучение с последующим прогнозированием тенденций макроэкономического развития. Однако, с теоретической точки зрения интерес представляет анализ модели на непрерывность решений по параметрам с целью определения границ применимости метода.

2. Анализ непрерывности решения от правой части системы и параметра. Покажем непрерывную зависимость решения системы (5) от правой части и параметра ε , а также докажем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ компонента $u(t)$ вектора решения системы (5) стремится к решению уравнения (4) при совпадении начальных данных.

Для решения этой задачи рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \dot{N} = \lambda N(t), \\ \dot{h} = \delta(1 - u(t))h(t), \\ \dot{K} = AK^\beta [uhN]^{1-\beta} h_\alpha^\gamma - N(t)c(t), \\ \dot{u} = \frac{1}{\beta} (\lambda + (1 + \gamma - \beta)\delta - \rho) u - \frac{(\gamma - \beta)\delta}{\beta} u^2. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) никак не связана с исходной задачей (1)–(3) и сформирована формально из первых трех уравнений (5) и уравнения (4).

Введем вспомогательные обозначения: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (N, h, K, u)^T$ — вектор фазовых переменных системы (6), $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (N, h, K, u)^T$ — вектор фазовых переменных

системы (5). Тогда системы (6) и (5) можно соответственно записать в виде

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (7)$$

$$\dot{y} = f(t, y) + \varepsilon g(t, y), \quad (8)$$

где

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \delta(1 - x_4)x_2 \\ Ax_3^\beta [x_4 x_2 x_1]^{1-\beta} h_\alpha^\gamma - x_1 c(t) \\ \frac{1}{\beta} (\lambda + (1 + \gamma - \beta)\delta - \rho) x_4 - \frac{(\gamma - \beta)\delta}{\beta} x_4^2 \end{pmatrix},$$

$$g(t, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\beta Ax_3^{\beta-1} (x_4 x_1)^{1-\beta} x_2^{1-\beta+\gamma} - \rho) x_4 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что формальное погружение задачи анализа непрерывности решения системы (5) по параметру ε относительно решения уравнения (4) в более широкую задачу анализа непрерывности решения системы (8) относительно правой части вполне корректно. Это обусловлено тем, что четвертое уравнение вспомогательной системы (6) никак не связано с ее первыми тремя уравнениями.

Для решения поставленной задачи проверим выполнение всех условий теоремы о непрерывной зависимости решения от правой части нормальной системы [6]. Очевидно, что функции $f(t, x)$ и $g(t, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в области $J \times G$, где J — интервал изменения независимой переменной t , G — некоторое подмножество фазового пространства R^4 , содержащее вектор начальных данных (с положительными компонентами по постановке задачи) и не содержащее начало координат. По экономической постановке задачи можно считать, что $J = [0, T]$, а множество G ограничено лишь реальными условиями моделирования.

Пусть $x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (7) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, а $y(t, t_0, y_0)$ — решение системы (8) с начальным условием $y(t_0) = y_0$. Будем считать, что $\|x_0 - y_0\| \leq \delta_1$, $\delta_1 \geq 0$, а значения $x(t, t_0, x_0)$, $y(t, t_0, y_0)$ при $t, t_0 \in [0, T]$ принадлежат некоторому шару $S \subset G$. Поскольку функция $g(t, y)$ непрерывна, а множество $[0, T] \times S$ ограничено, то существует величина $\delta_2 \geq 0$ такая, что $\|\varepsilon g(t, y)\| \leq \delta_2$ при $t \in [0, T]$, $y \in S$.

Поскольку функция $f(t, x)$ — непрерывно дифференцируема в S , то она липшицева при $t, t_0 \in [0, T]$, т. е. существует константа $L > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in S$ выполнено $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$. Тогда для решений систем (7), (8) при любом $t \in [t_0, T]$ имеет место неравенство [6]

$$\|x(t, t_0, x_0) - y(t, t_0, y_0)\| \leq \delta_1 e^{L|t-t_0|} + \frac{\delta_2}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1). \quad (9)$$

При совпадении начальных данных $x_0 = y_0$, что вполне естественно с точки зрения экономической постановки задачи, величина $\delta_1 = 0$, а неравенство (9) принимает вид

$$\|x(t, t_0, x_0) - y(t, t_0, y_0)\| \leq \frac{\delta_2}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1). \quad (10)$$

Проиллюстрируем непрерывность решения по определению. Зафиксируем произвольное $\tilde{\varepsilon} > 0$. Из уравнения $\frac{\delta_2}{L} (e^{L|T-t_0|} - 1) = \tilde{\varepsilon}$ найдем $\delta_2 = \frac{L\tilde{\varepsilon}}{e^{L|T-t_0|} - 1}$. Таким образом, найдена величина δ_2 такая, что если изменение правой части системы (8) удовлетворяет неравенству $\|\varepsilon g(t, y)\| \leq \delta_2$, то решения систем (7) и (8) различаются не более чем на $\tilde{\varepsilon}$ при любом $t \in [t_0, T]$. Это означает непрерывную зависимость решения системы (7) от правой части равномерно по t .

Поскольку предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ правой части системы (8) совпадает с правой частью системы (7), то, с учетом равномерной непрерывности решения относительно правой части, компонента $u(t)$ вектора решения системы (5) стремится к решению уравнения (4) при совпадении начальных данных.

Осталось отметить, что правая часть системы (5) (или (8)) непрерывна по параметру ε и липшицева по вектору фазовых переменных по крайней мере в S . В этом случае аналогичным образом несложно показать [6], что решение системы (5) непрерывно по параметру ε равномерно относительно $t \in [0, T]$.

3. Заключение. В настоящей работе предложено расширение классической модели Лукаса. Оно касается возможности варьирования ключевых параметров модели. Показана непрерывность расширенной модели относительно параметра неравномерности ε между эластичностью выпуска по физическому капиталу β и коэффициентом относительной несклонности к риску σ . Таким образом обоснована корректность расширения модели и увеличен диапазон ее приложений для анализа тенденций экономического роста.

Литература

1. Lucas R. E. On the mechanics of economic development // J. Monetary Econom., 1988. Vol. 22, № 1. P. 3–42.
2. Xie D. Divergence in economic performance: transitional dynamics with multiple equilibria // J. Econom. Theory, 1994. Vol. 63, № 1. P. 97–112.
3. Королев А. В., Матвеев В. Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // Автоматика и телемеханика, 2006. Т. 1. Вып. 4. С. 126–136.
4. Жигачёва А. Л. О модификации модели эндогенного роста Лукаса // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 483–487.
5. Смирнов Н. В., Жигачёва А. Л. Об оптимизации распределения времени на производственную деятельность и обучение в модели эндогенного роста Лукаса // Экономический рост, ресурсозависимость и социально-экономическое неравенство: Материалы III Всероссийской конференции 22–24 октября 2012 г. СПб.: Нестор-История, 2012. С. 67–70.
6. Антончик В. С. Методы теории дифференциальных уравнений (для приложения к задачам управления техническими объектами). Часть 2. Общая теория нормальных систем. Устойчивость движения. Деп. в ВИНТИ 14.02.83, № 3324-83. Л.: ЛГУ, 1983. 252 с.

Захаров А. О.

Санкт-Петербургский государственный университет

Учет информации об отношении предпочтения в одной экономической задаче¹

Рекомендовано к публикации профессором Ногиным В. Д.

1. Введение. Большинство задач выбора из области экономики, техники являются многокритериальными по своей природе, поскольку лицо, принимающее решение (ЛПР), преследует различные цели: максимизация дохода, минимизация издержек и т. д. Как правило, в распоряжении имеется некоторое множество возможных решений X , среди которых ищется «оптимальное». Вкусы и предпочтения ЛПР выражают компоненты числового векторного критерия $f = (f_1, \dots, f_m)$, заданного на X . Однако, имея в распоряжении только два данных объекта, сделать окончательный выбор довольно сложно, поэтому вводится дополнительный инструмент о предпочтениях, которым в данной работе является бинарное отношение \succ_X , заданное на X .

2. Аксиоматический подход сужения множества Парето. Рассмотрим модель многокритериального выбора: множество возможных векторных оценок (или, просто векторов) $Y = f(X)$ и бинарное отношение предпочтения ЛПР \succ_Y , заданное на множестве Y . При этом выражение $y^{(1)} \succ y^{(2)}$ означает, что в данной паре первый вектор $y^{(1)}$ выбирается, а второй — $y^{(2)}$ не выбирается. Выбор, удовлетворяющий всем гипотетическим вкусам и предпочтениям, составляет множество выбираемых векторов $C(Y)$ ($C(Y) \subseteq Y$).

В [1, 2] постулируются аксиомы, характеризующие «рациональное» поведение ЛПР: исключения доминируемых векторов, о существовании продолжения \succ отношения предпочтения на \mathbb{R}^m ($\succ|_Y = \succ_Y$), согласованности компонент векторного критерия и отношения предпочтения, инвариантности отношения предпочтения относительно линейного положительного преобразования.

Фундаментальным является принцип Эджворта — Парето. При выполнении данных аксиом для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливо включение $C(Y) \subseteq P(Y)$. Таким образом,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-07-00449

«рациональный» выбор лежит в рамках множества Парето $P(Y)$, а за его пределами «оптимальных» вариантов быть не может, т. е. любой парето-оптимальный вектор равнозначен с точки зрения предпочтений. Кроме того, множество Парето, как правило, довольно широкое, поэтому ставится задача его сужения при использовании дополнительной информации об отношении предпочтения, что позволяет упростить поиск «наилучших» решений.

3. Закрытая информация об отношении предпочтения.

Простейшей единицей дополнительной информации является «квант информации» [1, 2], который заключается в готовности ЛПР ради увеличения значения по одному критерию i (более значимому) на $w_i > 0$ единиц понести потери по другому критерию j (менее значимому) на $w_j > 0$ единиц.

В работе [3] была рассмотрена так называемая закрытая информация об отношении предпочтения, представляющая собой закрытую цепочку «квантов информации»: критерий i_1 более значим, чем критерий i_2 с параметрами $w_{i_1}^{(1)}, w_{i_2}^{(1)}; \dots$; критерий i_k более значим, чем критерий i_1 с параметрами $w_{i_k}^{(k)}, w_{i_1}^{(k)}$. По определению задание такой информации означает существование совокупности векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)} \in \mathbb{R}^m$ с компонентами

$$\begin{aligned} y_{i_1}^{(1)} &= w_{i_1}^{(1)}, & y_{i_2}^{(1)} &= -w_{i_2}^{(1)}, & y_s^{(1)} &= 0 \quad \forall s \in I \setminus \{i_1, i_2\}; \\ y_{i_2}^{(2)} &= w_{i_2}^{(2)}, & y_{i_3}^{(2)} &= -w_{i_3}^{(2)}, & y_s^{(2)} &= 0 \quad \forall s \in I \setminus \{i_2, i_3\}; \\ & & & \dots & & \\ y_{i_k}^{(k)} &= w_{i_k}^{(k)}, & y_{i_1}^{(k)} &= -w_{i_1}^{(k)}, & y_s^{(k)} &= 0 \quad \forall s \in I \setminus \{i_k, i_1\}, \end{aligned}$$

что справедливы соотношения $y^{(1)} \succ 0_m, y^{(2)} \succ 0_m, \dots, y^{(k)} \succ 0_m$.

Поскольку закрытая информация представляет собой не одно сообщение, а целый набор, то она может оказаться противоречивой (см. [2, стр. 112, опр. 4.1]), и тогда ее дальнейший учет невозможен. Этот вопрос разрешает следующий результат.

Теорема 1 [3]. *Для того чтобы закрытая информация была непротиворечивой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} \times \dots \times w_{i_{k-1}}^{(k-1)} w_{i_k}^{(k)} - w_{i_2}^{(1)} w_{i_3}^{(2)} \times \dots \times w_{i_k}^{(k-1)} w_{i_1}^{(k)} > 0. \quad (1)$$

4. Постановка экономической задачи. При моделировании широкого класса экономических задач используются степенные производственные функции, определяющие связь между выпуском продукции и затраченными ресурсами [4]. В моделях, предложенных К. Коббом и П. Дугласом, рассматривалось только два ресурса: трудовые и основные производственные фонды (капитал), где связь между выпускаемым объемом продукции z и количествами используемых трудовых ресурсов x_1 и капитала x_2 выражается функцией $z = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$, $x_1, x_2 > 0$; параметры $a, \alpha_1, \alpha_2 > 0$; $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

В качестве критериев рассмотрим стоимости трудовых ресурсов (f_1), основных производственных фондов (f_2) и доход от произведенной продукции (f_3). Положим p_1, p_2, p_z — цены за единицы трудового ресурса, основных производственных фондов, произведенной продукции, соответственно. Тогда

$$f_1(x) = -p_1x_1, \quad f_2(x) = -p_2x_2, \quad f_3(x) = ap_zx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}. \quad (2)$$

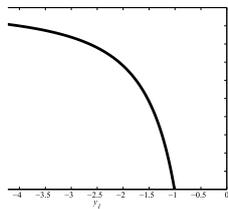


Рис. 1. Множество Y_4^{12}

Упорядоченная совокупность трудовых ресурсов и основных производственных фондов задает множество возможных решений $X = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, векторный критерий есть $f = (f_1, f_2, f_3)$. Ставится задача получения как можно большего дохода при как можно меньших затратах на производство. Множество возможных векторов Y , согласно вышесказанному, описывается уравнением $y_3 = p(-y_1)^{\alpha_1}(-y_2)^{\alpha_2}$, где параметр $p > 0$, и представляет собой в пространстве критериев вогнутую поверхность.

Нетрудно видеть, что все множество возможных векторов Y является парето-оптимальным ($P(Y) = Y$). Значит, невозможно сказать, что один объем затрачиваемых ресурсов (подразумевается пара труд, капитал) «лучше» другого в смысле отношения Парето.

Упорядоченная совокупность трудовых ресурсов и основных производственных фондов задает множество возможных решений $X = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, векторный критерий есть $f = (f_1, f_2, f_3)$. Ставится задача получения как можно большего дохода при как можно меньших затратах на производство. Множество возможных векторов Y , согласно вышесказанному, описывается уравнением $y_3 = p(-y_1)^{\alpha_1}(-y_2)^{\alpha_2}$, где параметр $p > 0$, и представляет собой в пространстве критериев вогнутую поверхность.

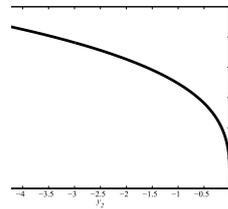


Рис. 2. Множество Y_3^{23}

Рассмотрим двумерные сечения множества возможных векторов Y . Множество $Y_{c_3}^{12} = \{(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2, c_3) \in Y, c_3 > 0\}$ задает гиперболу на плоскости (y_1, y_2) (см. рис. 1). При ее анализе видно, что ЛПР, сокращая затраты на один ресурс, вынуждено увеличить затраты на другой, и наоборот (при этом значение дохода остается неизменным).

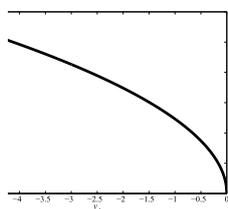


Рис. 3. Множество $Y_{c_2}^{13}$

Следующие сечения $Y_{c_1}^{23} = \{(y_2, y_3) \mid (c_1, y_2, y_3) \in Y, c_1 < 0\}$, $Y_{c_2}^{13} = \{(y_1, y_3) \mid (y_1, c_2, y_3) \in Y, c_2 < 0\}$ представляют собой степенные функции (см. рис. 2, 3). При стремлении снизить затраты на каждый ресурс в отдельности ЛПР будет получать проигрыш в снижении дохода, и наоборот (значение затрат на другой ресурс остается постоянным). В итоге, останавливая свой выбор на конкретном варианте, ЛПР придется сделать компромисс между доходом и величиной затрат (по каждому виду).

5. Учет замкнутой информации. На основании вышесказанного предположим, что ЛПР выражает свои предпочтения следующими «квантами информации».

1. Увеличение дохода (f_3) имеет больший приоритет по сравнению с сокращением трудовых затрат (f_1). ЛПР готово пойти на компромисс: ради увеличения дохода на $w_3^{(3)}$ тыс. руб. увеличить затраты на труд (оплата рабочей силы и пр.) на $w_1^{(3)}$ тыс. руб. ($w_3^{(3)} > w_1^{(3)}$). Другими словами, справедливо $(-w_1^{(3)}, 0, w_3^{(3)})^T \succ 0_3$.
2. Снижение трудовых затрат (f_1) более значимо, чем снижение затрат на основные производственные фонды (f_2). Для ЛПР является более приоритетным использование высококачественного (и, соответственно, дорогостоящего) оборудования, чем высококачественного труда. Ради снижения расходов на трудовые ресурсы на $w_1^{(1)}$ тыс. руб. проявляется готовность увеличить затраты на основные производственные фонды на $w_2^{(1)}$ тыс. руб. ($w_1^{(1)} > w_2^{(1)}$). Тогда справедливо $(w_1^{(1)}, -w_2^{(1)}, 0)^T \succ 0_3$.

3. Рост дохода (f_3) менее важен, чем снижение затрат на основные производственные фонды (f_2). Однако закупаемые материалы, оборудование и пр. (основные производственные фонды) не должны быть слишком дорогостоящими. Ради снижения расходов на основные производственные фонды на $w_2^{(2)}$ тыс. руб. ЛПР готово пойти на компромисс и снизить доход на $w_2^{(3)}$ тыс. руб. ($w_2^{(2)} > w_3^{(2)}$). В таком случае $(0, w_2^{(2)}, -w_3^{(2)})^T \succ 0_3$.

Если учесть неравенства, приведенные в пунктах 1–3, то такая информация будет непротиворечивой, поскольку выполнено (1).

Теорема 2 [3]. Пусть справедливы аксиомы «разумного» выбора и задана непротиворечивая замкнутая информация согласно пунктам 1–3. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(X)$ справедливы включения $C(X) \subseteq P_g(X) \subseteq P(X)$, где $P_g(X)$ — множество Парето в задаче $\langle X, g, \succ_X \rangle$, а векторный критерий g имеет компоненты

$$\begin{aligned} g_1 &= w_2^{(2)} w_3^{(3)} f_1 + w_3^{(2)} w_1^{(3)} f_2 + w_2^{(2)} w_1^{(3)} f_3, \\ g_2 &= w_2^{(1)} w_3^{(3)} f_1 + w_1^{(1)} w_3^{(3)} f_2 + w_2^{(1)} w_1^{(3)} f_3, \\ g_3 &= w_2^{(1)} w_3^{(2)} f_1 + w_1^{(1)} w_3^{(2)} f_2 + w_1^{(1)} w_2^{(2)} f_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим выражения (2) в формулы (3), получим, что $g(x)$ — сумма степенной и линейной функции (покомпонентно). Таким образом, на выпуклом множестве X задан покомпонентно вогнутый векторный критерий g . Имеем вогнутую многокритериальную задачу $\langle X, g, \succ_X \rangle$, для которой справедлива теорема.

Теорема 3 [5]. Для выполнения включения $x^* \in P_g(X)$ необходимо существование такого одновременно не равного нулю набора чисел $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, что линейная свертка $\varphi(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i(x)$ достигает своего максимума на X в точке x^* . Обратно, при $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, точка максимума указанной линейной свертки на X является парето-оптимальной.

Таким образом, в нашем случае поиск парето-оптимальных решений сводится к отысканию точек максимума числовой функции $\varphi(x)$, причем будет найдено все множество $P_g(X)$. Получаем $\varphi(x) = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + a_3 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, где $a_1 = p_1(\lambda_1 w_2^{(2)} w_3^{(3)} + \lambda_2 w_2^{(1)} w_3^{(3)} + \lambda_3 w_2^{(1)} w_3^{(2)})$, $a_2 = p_2(\lambda_1 w_3^{(2)} w_1^{(3)} + \lambda_2 w_1^{(1)} w_3^{(3)} + \lambda_3 w_1^{(1)} w_3^{(2)})$, $a_3 = p_3(\lambda_1 w_2^{(2)} w_1^{(3)} + \lambda_2 w_2^{(1)} w_1^{(3)} + \lambda_3 w_1^{(1)} w_2^{(2)})$.

Вычислив частные производные φ'_{x_1} и φ'_{x_2} и решив уравнения $\varphi'_{x_1}(x^0) = 0$, $\varphi'_{x_2}(x^0) = 0$, где $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, найдем

$$x_1^0 = \left(\frac{\alpha_1 a_3}{a_1} \right)^{\frac{\alpha_2 - 1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)}} \left(\frac{\alpha_2 a_3}{a_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)}},$$

$$x_2^0 = \left(\frac{\alpha_1 a_3}{a_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)}} \left(\frac{\alpha_2 a_3}{a_2} \right)^{\frac{1 - \alpha_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)}}.$$

Причем, поскольку $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2 > 0$, то $x^0 > 0_2$.

Нетрудно убедиться в выполнении достаточного условия существования максимума функции $\varphi(x)$ в точке $x = x^0$: $\varphi''_{x_1}(x^0) < 0$, $\varphi''_{x_2}(x^0)\varphi''_{x_2}(x^0) - (\varphi''_{x_1 x_2}(x^0))^2 > 0$, используя условия $a_3, \alpha_1, \alpha_2, x_1^0, x_2^0 > 0$; $0 < \alpha_1 < 1$; $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Тогда точка x^0 является точкой максимума линейной свертки $\varphi(x)$, и значит $x^0 \in P_g(X)$. В итоге сужение множества Парето $P_g(X)$ задается множеством точек $x^0 = x^0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$.

6. Заключение. Построенное множество Парето $P_g(X)$ представляет собой все пары ресурсов, удовлетворяющие введенной модели предпочтений. Таким образом, произведено сужение области компромиссов со множества X до $P_g(X)$, позволяющее упростить окончательный выбор.

Литература

1. Ногин В. Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений, 2008. № 1. С. 98–112.
2. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2005. 176 с.
3. Захаров А. О. Сужение множества Парето на основе замкнутой информации об отношении предпочтения ЛПР // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2009. Вып. 4. С. 69–83.
4. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование. М: Наука, 1984. 392 с.
5. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 256 с.

Ипатова Д. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Расчет страховых тарифов в условиях случайной ставки наращенного капитала

Рекомендовано к публикации доцентом Дорофеевым Б. В.

1. Введение. В основной литературе при расчете тарифа договора страхования жизни предполагается, что случайной величиной является только момент наступления страхового случая, а ставка процента детерминирована. Наша задача заключается в построении модели, которая учитывает случайный характер ставки наращенного капитала. В этом случае прежде всего необходимо выяснить, как переменная ставка процента будет влиять на величину тарифа при детерминированном моменте окончания договора.

2. Постановка задачи. В целях сохранения платежеспособности страховой компании важен грамотный подход к финансовым возможностям деятельности компании. Материальным воплощением экономической категории страховой защиты служит страховой фонд и представляет собой совокупность зарезервированных запасов материальных благ. Страховой фонд предназначен для страховых выплат по страховым случаям и формируется за счет нетто-премии страхового тарифа. Страховой тариф — это нормированный по отношению к страховой сумме размер страховых платежей [1].

Положим, что случайность ставки наращенного капитала определяется по некоторому закону распределения. Нужно определить вид распределения и конечный вид страхового тарифа.

3. Решение. Основным принципом страхования является эквивалентность потоков страховых премий и выплат по страховым случаям. В условиях инфляции необходимо учитывать положение финансовой математики об изменении стоимости денег со временем. Таким образом в уравнение эквивалентности финансовых потоков вносятся дисконтирующие множители, которые в нашей задаче носят случайный характер.

Прежде всего получим формулу страхового тарифа в общем виде. После определения функции распределения конкретизируем ее для данного случая.

3.1. Определение общего вида тарифа. В данной задаче необходимо рассчитать тариф через современную стоимость потока единичных платежей [2]

$$A = \sum_{k=1}^n e^{-(\delta_1 + \dots + \delta_k)}.$$

Для этого нужно определить математическое ожидание EA и меру разброса DA [3]

$$EA = E \sum_{k=1}^n e^{-(\delta_1 + \dots + \delta_k)} = \sum_{k=1}^n E \left(e^{-(\delta_1 + \dots + \delta_k)} \right),$$

$$DA = EA^2 - (EA)^2 = \sum_{k=1}^n E \left(e^{-2(\delta_1 + \dots + \delta_k)} \right) - E^2 \left(e^{-(\delta_1 + \dots + \delta_k)} \right).$$

В качестве случайной величины рассмотрим $-(\delta_1 + \dots + \delta_k) = \xi_k$ с плотностью распределения $f_{\xi_k}(x)$. Получаем функцию случайной величины, которая сама является случайной величиной, обозначим ее $\eta_k = e^{\xi_k}$. Для нее плотность распределения определяется с помощью теоремы.

Теорема. Пусть ξ имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$ и функция $g: R \rightarrow R$ монотонна. Тогда случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет плотность распределения

$$f_{\eta}(x) = (g^{-1}(x))' f_{\xi}(g^{-1}(x)).$$

Здесь $g^{-1}(x)$ — функция, обратная к $g(x)$, $(g^{-1}(x))'$ — её производная.

Получаем

$$f_{\eta_k}(x) = f_{\xi_k}(\ln x) \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$EA = E \sum_{k=1}^n \eta_k = \sum_{k=1}^n \int x f_{\xi_k}(\ln x) \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^n \int f_{\xi_k}(\ln x) dx,$$

$$DA = \sum_{k=1}^n E(\eta_k)^2 - (E\eta_k)^2 = \sum_{k=1}^n \int \frac{1}{2} f_{\xi_k} \left(\frac{\ln x}{2} \right) dx - \int f_{\xi_k}(\ln x) dx.$$

Тогда тариф составит

$$p = \left(1 + x_\gamma \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n \int \frac{1}{2} f_{\xi_k} \left(\frac{\ln x}{2} \right) dx - \int f_{\xi_k}(\ln x) dx}}{\sqrt{N \sum_{k=1}^n \int f_{\xi_k}(\ln x) dx}} \right) \sum_{k=1}^n \int f_{\xi_k}(\ln x) dx.$$

Здесь N — количество заключенных договоров, x_γ — квантиль с уровнем доверия γ [4].

3.2. Определение функции распределения. Для построения эмпирической функции распределения воспользуемся статистическими данными. Данные по ставкам берем за последние 12 лет [5]. Для удобства заносим их в таблицу 1.

Таблица 1. Сводные данные по ставкам

Год	I квартал	II квартал	III квартал	VI квартал
2001	4,4	4,8	5,0	5,1
2002	5,2	5,3	4,6	4,9
2003	4,4	4,6	4,5	4,4
2004	4,3	3,7	3,4	3,8
2005	4,3	4,0	3,9	3,8
2006	3,9	4,3	4,0	4,1
2007	5,0	5,2	5,1	5,3
2008	5,3	5,4	5,7	6,7
2009	7,8	8,7	9,0	8,7
2010	7,4	6,2	5,4	5,0
2011	4,4	4,1	4,0	5,2
2012	5,5	5,4	5,3	6,0

Для моделирования распределения случайной величины построим эмпирическое распределение частот и гистограмму (см. таблицу 2 и рис. 1) [6].

Таблица 2. Эмпирическое распределение частот

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Δx_i	(3; 4]	(4; 5]	(5; 6]	(6; 7]	(7; 8]	(8; 9]
ν_i	9	17	15	2	2	3

Данная функция аппроксимируется плотностью гамма-распределения. Для нахождения параметров распределения воспользуемся методом моментов. Параметры находим из системы уравнений

$$\begin{cases} Ex = \frac{\alpha}{\beta}, \\ Dx = \frac{\alpha}{\beta^2}. \end{cases}$$

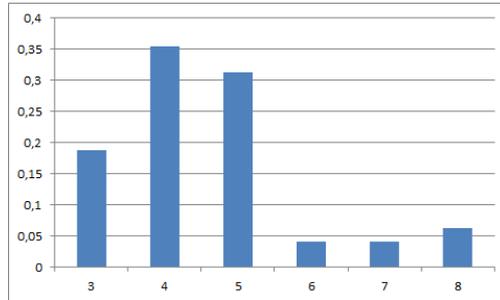


Рис. 1. Гистограмма выборки

Приравниваем выборочные моменты к соответствующим моментам распределения

$$\begin{cases} \bar{x} \sim Ex, \\ S^2 \sim Dx, \end{cases}$$

где \bar{x} — выборочное среднее, S^2 — выборочная дисперсия.

Отсюда оценки параметров

$$\hat{\alpha} = \frac{(\bar{x})^2}{S^2}, \quad \hat{\beta} = \frac{(\bar{x})}{S^2},$$

где $S^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$. В данном случае $\bar{x} = 0,051$. Следовательно, $\hat{\alpha} = 15,657$ и $\hat{\beta} = 304,886$.

Получаем, что для случайной величины δ_k гамма-распределение имеет вид

$$f_{\delta_k}(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Для случайной величины $\xi_k = -(\delta_1 + \dots + \delta_k)$ имеем

$$f_{\xi_k}(x, \alpha, \beta) = f_{\delta_k}(-x, k\alpha, \beta) = \begin{cases} (-x)^{k\alpha-1} e^{\beta x} \frac{\beta^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

4. Заключение. В данной задаче $x > 0$, поэтому вид функции распределения упрощается. В конечном итоге получаем, что тариф

составляет

$$p = \left(1 + x_\gamma \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n k \int \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln x}{2}\right)^{k\alpha-1} x^{\frac{\beta}{2}} dx - \int (-\ln x)^{k\alpha-1} x^\beta dx}}{\sqrt{N \sum_{k=1}^n k \int (-\ln x)^{k\alpha-1} x^\beta dx}} \right) \times \\ \times \frac{\beta^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha)} \sum_{k=1}^n k \int (-\ln x)^{k\alpha-1} x^\beta dx.$$

Таким образом в результате работы получены явные выражения для тарифа и смоделирована случайная величина ставки наращенная, основанная на статистических данных. Данной формулой можно пользоваться при анализе и расчетах тарифов в страховании.

Литература

1. Кудрявцев А. А. Актуарная математика: Оценка обязательств компании страхования жизни. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 240 с.
2. Четыркин Е. М. Финансовая математика. М.: Дело, 2011. 392 с.
3. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика / Пер. с англ. М.: Янус-К, 2001. 656 с.
4. Фалин Г. И., Фалин А. И. Актуарная математика в задачах. М.: Физматлит, 2003. 192 с.
5. Сводные данные по процентным ставкам.
<http://www.cbr.ru/statistics/default.aspx?Prtid=cdps>
6. Шмыров А. С., Шмыров В.А. Теория вероятностей. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. 187 с.

Климук Д. О.

Санкт-Петербургский государственный университет

Теоретико-игровая модель кооперации банков в задаче экономии издержек

Рекомендовано к публикации доцентом Париллиной Е. М.

1. Введение. Проблема снижения издержек является важной проблемой для организаций, занимающихся некоторым видом деятельности в конкурентной среде. При помощи аппарата теории кооперативных игр в некоторых случаях можно добиться снижения издержек организаций (игроков) путем принятия ими совместных действий.

2. Игра с коалиционной структурой. Кооперативная игра задается парой (N, v) , где N — множество игроков, $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ — характеристическая функция, определенная для каждого непустого множества $S \subseteq N$, называемого коалицией [2].

Определение 1. Коалиционная структура π — это разбиение $\{B_1, \dots, B_m\}$ множества игроков N , т. е. $B_1 \cup \dots \cup B_m = N$ и $B_i \cap B_j = \emptyset$ для всех $i, j = 1, \dots, m, i \neq j$.

Обозначим через (N, v, π) игру с множеством игроков N , характеристической функцией v и коалиционной структурой π .

Определение 2. Вектор $x^\pi = (x_1^\pi, \dots, x_n^\pi) \in \mathbb{R}^n$ называется распределением выигрыша в игре (N, v, π) с коалиционной структурой π , если выполняется условие коллективной рациональности, т. е. $\sum_{i \in B_j} x_i^\pi = v(B_j)$ для всех $B_j \in \pi$.

Определение 3. Распределение выигрыша x^π называется дележом в игре (N, v, π) с коалиционной структурой π , если выполняется условие индивидуальной рациональности, т. е. $x_i^\pi \leq v(\{i\})$ для всех $i \in N$.

Обозначим через π_{-B_i} разбиение $\pi_{-B_i} = \pi \setminus B_i \subset \pi$, а через $B(i) \in \pi$ — коалицию, содержащую игрока $i \in N$.

В игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ в качестве принципа оптимальности выберем эгалитарное решение $\xi^\pi = (\xi_1^\pi, \dots, \xi_n^\pi)$, компоненты которого вычисляются следующим об-

разом:

$$\xi_i^\pi = v(\{i\}) + \frac{v(B\{i\}) - \sum_{j \in B(i)} v(\{j\})}{|B(i)|} \quad (1)$$

для всех $i \in N$.

Определение 4. Коалиционную структуру $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ будем называть устойчивой относительно выбранного одноточечного принципа оптимальности, если для любого игрока $i \in N$ выполняется неравенство

$$x_i^\pi \leq x_i^{\pi'} \quad \text{и всех } B_j \in \pi \cup \emptyset, \quad B_j \neq B(i).$$

Здесь x_i^π и $x_i^{\pi'}$ — два распределения выигрыша, вычисленные согласно выбранному принципу оптимальности для игр с коалиционными структурами (N, v, π) и (N, v, π') соответственно, где $\pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\}$.

Теорема 1. Для того чтобы коалиционная структура π была устойчивой относительно выбранного принципа оптимальности, необходимо, чтобы распределение выигрыша x^π , вычисленное согласно этому принципу оптимальности для коалиционной структуры π , являлось дележом.

3. Существование устойчивых коалиционных структур относительно эгалитарного решения. Исследуем вопрос устойчивости коалиционных структур относительно эгалитарного решения в случаях игр двух и трех лиц.

Утверждение 1. В игре (N, v, π) в случае $N = \{1, 2\}$, всегда существует устойчивая коалиционная структура относительно эгалитарного решения.

Доказательство. В случае игры двух лиц существуют две возможные коалиционные структуры: $\pi_1 = \{\{1, 2\}\}$ и $\pi_2 = \{\{1\}, \{2\}\}$. Выпишем в общем виде компоненты эгалитарного решения игроков 1 и 2 соответственно для каждой коалиционной структуры (см. таблицу 1).

Таблица 1. Компоненты эгалитарного решения игроков 1 и 2.

π	ξ_1	ξ_2
$\pi_1 = \{\{1, 2\}\}$	$\xi_1^{\pi_1}$	$\xi_2^{\pi_1}$
$\pi_2 = \{\{1\}, \{2\}\}$	$\xi_1^{\pi_2}$	$\xi_2^{\pi_2}$

Учитывая формулу (1), можно выписать следующие равенства: $\xi_1^{\pi_1} = \xi_2^{\pi_1} = 0$, $\xi_1^{\pi_2} = \xi_2^{\pi_2}$.

Очевидно, что если $\xi_1^{\pi_2} = \xi_2^{\pi_2} < 0$, тогда коалиционная структура π_1 устойчива относительно эгалитарного решения. Если $\xi_1^{\pi_2} = \xi_2^{\pi_2} > 0$, тогда коалиционная структура π_2 устойчива относительно эгалитарного решения. И, наконец, если $\xi_1^{\pi_2} = \xi_2^{\pi_2} = 0$, тогда обе коалиционные структуры π_1 и π_2 являются устойчивыми относительно эгалитарного решения. Таким образом, показано, что в игре двух лиц всегда существует устойчивая коалиционная структура относительно эгалитарного решения.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. В игре (N, v, π) в случае $N = \{1, 2, 3\}$, всегда существует устойчивая коалиционная структура относительно эгалитарного решения.

Доказательство. В случае игры трех лиц существуют пять возможных коалиционных структур. Выпишем в общем виде компоненты эгалитарного решения игроков 1–3 соответственно для всех возможных коалиционных структур (см. таблицу 2).

Таблица 2. Компоненты эгалитарного решения игроков 1–3.

π	ξ_1	ξ_2	ξ_3
$\pi_1 = \{1, 2, 3\}$	$\xi_1^{\pi_1}$	$\xi_2^{\pi_1}$	$\xi_3^{\pi_1}$
$\pi_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	$\xi_1^{\pi_2}$	$\xi_2^{\pi_2}$	$\xi_3^{\pi_2}$
$\pi_3 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$	$\xi_1^{\pi_3}$	$\xi_2^{\pi_3}$	$\xi_3^{\pi_3}$
$\pi_4 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$	$\xi_1^{\pi_4}$	$\xi_2^{\pi_4}$	$\xi_3^{\pi_4}$
$\pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	$\xi_1^{\pi_5}$	$\xi_2^{\pi_5}$	$\xi_3^{\pi_5}$

Учитывая формулу (1), можно выписать следующие равенства: $\xi_1^{\pi_1} = \xi_2^{\pi_1} = \xi_3^{\pi_1}$, $\xi_2^{\pi_2} = \xi_3^{\pi_2}$, $\xi_1^{\pi_3} = \xi_2^{\pi_3}$, $\xi_1^{\pi_4} = \xi_3^{\pi_4}$, $\xi_1^{\pi_2} = \xi_3^{\pi_3} = \xi_2^{\pi_4} = \xi_1^{\pi_5} = \xi_2^{\pi_5} = \xi_3^{\pi_5} = 0$. Введем обозначения: $\xi_1^{\pi_1} = \xi_2^{\pi_1} = \xi_3^{\pi_1} = a$, $\xi_2^{\pi_2} = \xi_3^{\pi_2} = b$, $\xi_1^{\pi_3} = \xi_2^{\pi_3} = c$, $\xi_1^{\pi_4} = \xi_3^{\pi_4} = d$.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что в игре (N, v, π) не существует устойчивой коалиционной структуры относительно эгалитарного решения. Тогда должна иметь решение система

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ \left[\begin{array}{l} 0 < a \\ b < c \\ b < 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} c < d \\ c < 0 \\ c < b \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} d < c \\ d < 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < c \\ 0 < d \\ 0 < b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решая данную систему, получаем, что она несовместна. Пришли к противоречию. Таким образом, в игре трех лиц всегда существует устойчивая коалиционная структура относительно эгалитарного решения.

Утверждение 2 доказано.

4. Игра банковской кооперации. Рассмотрим кооперативную игру, в которой N — конечное множество банков (игроков), которые могут размещать на рассматриваемой территории свои банкоматы [3]. Банкам допускается объединять свои банкоматы в единую сеть, тогда клиенты этих банков используют банкоматы сети с равными вероятностями [1].

Издержки банка на разовое обслуживание клиента посредством своего банкомата равны $\alpha > 0$, посредством банкомата другого банка, объединенных в общую сеть, $\beta > \alpha$, в остальных случаях $\gamma > \beta$. Предполагается, что параметры α , β и γ одинаковы для всех банков.

Каждый банк i имеет две числовые характеристики: $n_i > 0$ — количество транзакций банка $i \in N$ и $k_i > 0$ — количество банкоматов, которые банк $i \in N$ разместил на рассматриваемой территории.

Под коалицией S понимается некоторое непустое подмножество множества банков N , которые объединяют свои банкоматы в единую сеть. Пусть $A \subseteq N$ — множество банков, имеющих на рассматриваемой территории свои банкоматы.

Для некоторой непустой коалиции S суммарные затраты, которые несут банки из коалиции S , имеют вид

$$c(S) = \begin{cases} \alpha \sum_{i \in S} \frac{k_i}{k(S)} n_i + \beta \sum_{i \in S} \left(1 - \frac{k_i}{k(S)}\right) n_i, & \text{если } S \cap A \neq \emptyset, \\ \gamma n(S), & \text{если } S \cap A = \emptyset. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим кооперативную игру (N, v) , в которой характеристическая функция игры v определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} v(S) &= \sum_{i \in S \setminus A} c(\{i\}) - c(S) = \\ &= \begin{cases} (\gamma - \beta) \sum_{i \in S \setminus A} n_i - (\beta - \alpha) \sum_{i \in S \cap A} \left(1 - \frac{k_i}{k(S)}\right) n_i, & \text{если } S \cap A \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } S \cap A = \emptyset. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

5. Устойчивость коалиционных структур относительно эгалитарного решения. В игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ компоненты эгалитарного решения $\xi^\pi = (\xi_1^\pi, \dots, \xi_n^\pi)$ для характеристической функции вида (3) можно вычислить следующим образом:

$$\xi_i^\pi = \frac{v(S)}{|S|} \quad (4)$$

для всех $i \in S$.

Рассмотрим некоторые частные случаи и исследуем для них вопрос устойчивости относительно эгалитарного решения.

В случае, когда только один банк обладает банкоматами, пусть $N = \{0, 1, \dots, n\}$ — множество банков, из которого только банк 0 имеет $k_0 > 0$ банкоматов, $k_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Используя выражение (3), можно выписать значения характеристической функции в этом случае:

$$v(S) = \begin{cases} (\gamma - \beta) \sum_{i \in S \setminus 0} n_i, & 0 \in S, \\ 0, & 0 \notin S. \end{cases} \quad (5)$$

Вычислим компоненту ξ_i эгалитарного решения для игрока $i = 0, \dots, n$:

$$\xi_i = \begin{cases} \frac{(\gamma-\beta) \sum_{i \in S \setminus 0} n_i}{|S|}, & 0 \in S, \\ 0, & 0 \notin S. \end{cases} \quad (6)$$

Утверждение 3. В игре $(N, v, \bar{\pi})$ в случае $|A| = 1$ существует единственная устойчивая коалиционная структура относительно эгалитарного решения вида $\bar{\pi} = \{N\}$ — все игроки объединяются в гранд-коалицию N , а компоненты эгалитарного решения определяются по формуле (6).

Утверждение 4. В игре $(N, v, \bar{\pi})$ с коалиционной структурой $\bar{\pi}$ в случае $A = N$, т. е. все банки обладают банкоматами, существует единственная устойчивая коалиционная структура относительно эгалитарного решения вида $\bar{\pi} = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$, где все игроки действуют независимо друг от друга.

Утверждение 5. В игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ в случае $A \neq N$ и $A \neq \emptyset$, т. е. существуют игроки $j \in N \setminus S$ и $j \in N \cap A$, коалиционная структура π не является устойчивой относительно эгалитарного решения.

Утверждение 6. В игре (N, v, π) все коалиционные структуры устойчивы относительно эгалитарного решения тогда и только тогда, когда $N \cap A = \emptyset$, т. е. ни у одного из банков нет банкоматов.

6. Заключение. В работе рассмотрена игра с коалиционной структурой, введено понятие устойчивости коалиционной структуры относительно эгалитарного решения. В качестве примера рассмотрена задача экономии банковских издержек, для частных случаев приведен явный вид устойчивых коалиционных структур.

Литература

1. Парилина Е. М., Седаков А. А. Устойчивость коалиционных структур при совместном использовании ресурсов // Математическая теория игр и ее приложения, 2012. Т. 2. Вып. 3. С. 150–152.
2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
3. Bjorndal E., Namers H., Koster M. Cost Allocation in a Bank ATM Network. // Math. Meth. of Oper. Res. 59, 2004. P. 405–418.

Крутов Д. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

О динамике капитала банка с эндогенным спросом на продукты

Рекомендовано к публикации профессором Прасоловым А. В.

1. Введение. В работе решена задача построения и анализа динамической модели, описывающей накопление прибыли банка, в зависимости от проводимой кредитно-депозитарной стратегии.

2. Построение модели. Представим банк как фирму, которая привлекает депозиты со стороны заемщиков и предоставляет кредиты заемщикам. В основе исследуемой модели лежит предположение о возможности отслеживать объемы изучаемого ресурса через дискретные равноотстоящие промежутки времени t . Традиционная функция прибыли банка, учитывающая только кредитные и депозитные операции и различные издержки на их обслуживание, имеет следующий вид [1]:

$$K_n(D_n, L_n) = r_{L_t}L_t - r_{D_t}D_t - C_t, \quad (1)$$

где $K_n(D_n, L_n)$ — величина прибыли банка в момент времени t , L_t — поток выданных на момент t кредитов, D_t — поток привлеченных на момент t депозитов, r_{L_t} и r_{D_t} — средние процентные ставки на момент t по кредитам и депозитам соответственно, C_t — функция, возвращающая значение издержек, возникающих при управлении депозитами и кредитами в объемах D и L , соответственно, которые приносят прибыль K . Если обозначить через Ln_t и Dn_t потоки вновь выданных кредитов и вновь привлеченных депозитов соответственно, а через Lo_t и Do_t потоки возврата кредитов и изъятия депозитов, то динамику кредитов и депозитов можно описать следующим образом [2]:

$$L_t = L_{t-1} + Ln_t - Lo_t, \quad (2)$$

$$D_t = D_{t-1} + Dn_t - Do_t. \quad (3)$$

Величина Lo_t в (2) есть ни что иное, как значение величины потока кредитов в некоторый предшествующий момент, равный сроку кредита. Аналогичным образом можно определить и величину Do_t . У

каждого банка есть целый набор программ по кредитованию и депозитарной деятельности с разными сроками и разными процентными ставками. В уравнении (1) и далее будем использовать средние показатели процентных ставок по кредитам и депозитам. Для учёта различных сроков введём в рассмотрение функцию распределения сроков кредитов и депозитов

$$F(\tau) = \begin{cases} p_{\tau_1}, & \tau = \tau_1, \\ \dots & \\ p_{\tau_n}, & \tau = \tau_n. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь p_{τ_n} — доля объема кредитов или депозитов, выданных или привлечённых на срок τ_n . С учётом (4) получим

$$Lo_t = \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_n} F_L(\tau)L_{t-\tau}, \quad (5)$$

$$Do_t = \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_n} F_D(\tau)D_{t-\tau}. \quad (6)$$

Для упрощения будем полагать, что функции распределения $F_L(\tau)$ и $F_D(\tau)$ не зависят от времени, и количество сроков, на которые выдаются кредиты, равно количеству сроков, на которые выдаются депозиты.

Величины Ln_t и Dn_t в работе [2] являются экзогенными переменными, однако попробуем задать их как функции от соответствующих процентных ставок

$$Ln_t = f(r_{L_t}),$$

$$Dn_t = f(r_{D_t}).$$

Исходя из экономических реалий, поведение функции $f(r_L)$ может быть описано графиком S -образного вида, где по оси абсцисс отложены процентные ставки по кредитам, а по оси ординат — соответствующий объем выданных кредитов. Поведение функции $f(r_D)$ описывается аналогичным образом.

Аналитически зависимости такого вида можно выразить с помощью параметрического класса функций

$$Ln_t = f(r_{L_t}) = c_L(1 + \alpha_L r_{L_t}) \exp(-\alpha_L r_{L_t}), \quad (7)$$

$$Dn_t = f(r_{D_t}) = c_D(1 - (1 + \alpha_D r_{D_t}) \exp(-\alpha_D r_{D_t})), \quad (8)$$

где $c > 0, \alpha > 0, r_D \geq 0, r_L \geq 0$.

Параметр c может быть интерпретирован как масштабирующий коэффициент, а параметр α — как коэффициент, определяющий скорость подъема (спуска) кривой, т. е. скорость достижения состояния исчерпания возможностей рынка.

Подставляя (5)–(8) в (2), (3) получим

$$L_t = L_{t-1} + c_L(1 + \alpha_L r_{L_t}) \exp(-\alpha_L r_{L_t}) - \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_n} F_L(\tau) L_{t-\tau}, \quad (9)$$

$$D_t = D_{t-1} + c_D(1 - (1 + \alpha_D r_{D_t}) \exp(-\alpha_D r_{D_t})) - \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_n} F_D(\tau) D_{t-\tau}. \quad (10)$$

Функцию издержек C_t в (1) будем задавать как линейную функцию от объемов вновь выданных кредитов и вновь привлеченных депозитов:

$$C_t = C(Ln_t, Dn_t) = a + bLn_t + cDn_t.$$

Рассматривая (1) в динамике, получим

$$K_t = K_{t-1} + r_L \Delta L_{t-1} - r_{D_t} \Delta D_{t-1} - C(L_t, D_t),$$

где $\Delta L_{t-1} = L_t - L_{t-1}$ и $\Delta D_{t-1} = D_t - D_{t-1}$. Таким образом, уравнение для прибыли банка, зависящее от процентных ставок и функции распределения сроков, имеет вид

$$\begin{aligned} K_t = K_{t-1} + r_{L_t} \left(c_L(1 + \alpha_L r_{L_t}) \exp(-\alpha_L r_{L_t}) - \right. \\ \left. - \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_n} F_L(\tau) L_{t-\tau} \right) - r_{D_t} \left(c_D(1 - (1 + \alpha_D r_{D_t}) \exp(-\alpha_D r_{D_t})) - \right. \\ \left. - \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_n} F_D(\tau) D_{t-\tau} \right) - (a + bLn_t + cDn_t). \end{aligned} \quad (11)$$

3. Устойчивость уравнений потоков кредитов и депозитов. Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости уравнений потока кредитов L_t и депозитов D_t . В системах, обладаю-

ших свойством асимптотической устойчивости, сглаживаются ошибки моделирования, а также ошибки в начальных данных, что является очень важным для адекватности модели, а также для дальнейшего прогнозирования по ней. Далее будем исследовать уравнение потока кредитов, уравнение потока депозитов исследуется аналогично.

Для потока кредитов имеем неоднородное разностное уравнение с запаздываниями (9). Особый интерес представляет функция распределения сроков $F_L(\tau)$, на которые выдаются кредиты. Отметим, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ и $0 \leq p_i \leq 1$, поэтому разностное уравнение (9) можно рассматривать как уравнение с интервальными коэффициентами. Численно оценить коэффициенты распределения можно, построив множественную регрессию, и, используя интервальные оценки коэффициентов с заданным уровнем надежности, возможно сузить интервалы для p_i , представленные выше. Тогда получим семейство уравнений вида (9), где компоненты функции распределения p_i определены в известных интервалах $\underline{p}_i \leq p_i \leq \bar{p}_i$.

Теорема. *Разностное уравнение для потока кредитов (9) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда устойчивы четыре полинома с детерминированными коэффициентами:*

$$\begin{aligned} \underline{r}_0 w^n + \underline{r}_1 w^{n-1} + \underline{r}_2 w^{n-2} + \underline{r}_3 w^{n-3} + \dots + \underline{r}_n &= D(w_1), \\ \bar{r}_0 w^n + \bar{r}_1 w^{n-1} + \bar{r}_2 w^{n-2} + \bar{r}_3 w^{n-3} + \dots + \bar{r}_n &= D(w_2), \\ \underline{r}_0 w^n + \underline{r}_1 w^{n-1} + \underline{r}_2 w^{n-2} + \underline{r}_3 w^{n-3} + \dots + \underline{r}_n &= D(w_3), \\ \bar{r}_0 w^n + \bar{r}_1 w^{n-1} + \bar{r}_2 w^{n-2} + \bar{r}_3 w^{n-3} + \dots + \bar{r}_n &= D(w_4), \end{aligned} \quad (12)$$

где коэффициенты r_i выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} r_0 &= \tau_{00}(k) - \tau_{01}(k) + \tau_{02}(k)p_2 + \dots + \tau_{0n}(k)p_n, \\ r_1 &= \tau_{10}(k) - \tau_{11}(k) + \tau_{12}(k)p_2 + \dots + \tau_{1n}(k)p_n, \\ &\dots \\ r_n &= \tau_{n0}(k) - \tau_{n1}(k) + \tau_{n2}(k)p_2 + \dots + \tau_{nn}(k)p_n, \end{aligned}$$

$\tau_{ij}(k)$ — элемент матрицы, обратной к матрице билинейного w -преобразования, отображающего единичный круг в левую комплексную полуплоскость.

Доказательство. Чтобы избавиться от неоднородности, перейдем к матричной форме уравнения (9).

Пусть $c_L(1 + \alpha_L r_{L_t}) \exp(-\alpha_L r_{L_t}) = k_L$ и $\begin{pmatrix} L_t \\ k_L \end{pmatrix} = Y_t$. Тогда

$$Y_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_{t-1} - \sum_{\tau=2}^n \begin{pmatrix} p_\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{t-\tau}. \quad (13)$$

Исследуем (13) на асимптотическую устойчивость. Характеристический многочлен имеет вид

$$\lambda^n - \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_n = 0, \quad (14)$$

где $\underline{p}_i \leq p_i \leq \overline{p}_i$.

Для асимптотической устойчивости (13) необходимо, чтобы все корни уравнения (14) лежали внутри единичного круга. Задача усложняется тем, что нам известны лишь интервальные оценки коэффициентов в (13).

Используя билинейное w -преобразование, которое отображает круг единичного радиуса в плоскости z во всю левую полуплоскость плоскости w , перейдем к рассмотрению многочлена, полученного с помощью подстановки $\lambda = \frac{k+w}{k-w}$, при $k > 0$:

$$r_0 w^n + r_1 w^{n-1} + r_2 w^{n-2} + \dots + r_n = 0,$$

где интервальные коэффициенты $\underline{r}_i \leq r_i \leq \overline{r}_i$ и p_i связаны неособым нелинейным преобразованием:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} = (-1)^n A \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$A = \begin{pmatrix} k^n & \dots & k^{\frac{n}{2}} & \dots & 1 \\ nk^n & \dots & (n-2i)k^{\frac{n}{2}} & \dots & -n \\ \frac{n(n-1)k^n}{2} & \dots & \left(\frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-i)(n-1-3i)}{2}\right)k^{\frac{n}{2}} & \dots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^n & \dots & k^{\frac{n}{2}} & \dots & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Матрица A неособая, так как её столбцы совпадают со столбцами коэффициентов линейно независимых полиномов $(k(\lambda+1))^n, (k(\lambda+1))^{n-1}(\lambda-1), \dots, (\lambda-1)^n$.

Согласно известным результатам об устойчивости интервальных полиномов, полученным Харитоновым В. Л. [3], интервальный полином устойчив (т. е. все корни полинома с интервальными коэффициентами лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат вне зависимости от сочетаний значений коэффициентов), если устойчивы четыре характерных полинома (12) с детерминированными коэффициентами.

Коэффициенты r_i могут быть выражены из преобразования (15):

$$r = A^{-1}p,$$

где r и p — вектор-столбцы, размерности $n \times 1$. Так как A — неособая, то всегда может быть найдена A^{-1} .

Теорема доказана.

В ходе проверки на устойчивость конкретного уравнения вида (9) возникнут вполне определенные четыре полинома, для проверки которых на устойчивость предлагается использовать известные методы, такие как критерий Рауса — Гурвица или Лъенара — Шипара.

Знание интервалов для коэффициентов распределения сроков кредитов, при которых уравнение (9) асимптотически устойчиво, позволит управлять сроками выданных кредитов, меняя соотношение коротких, средних и длинных сроков, без риска утратить адекватность построенной модели и прогнозов по ней.

Литература

1. Конюховский П. В. Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. СПб.: Питер, 2001. 224 с.
2. Андреев М. Ю., Пильник Н. П., Поспелов И. Г. Моделирование деятельности современной российской банковской системы // Экономический журнал ВШЭ, 2009. № 2. С. 143–171.
3. Жабко А. П., Харитонов В. Л. Методы линейной алгебры в задачах управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993. 320 с.

Ледовская В. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Анализ некогерентных мер риска

Рекомендовано к публикации профессором Колбиным В. В.

Условия когерентности. Введем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где Ω — множество элементарных исходов, \mathcal{A} — σ -алгебра, заданная на Ω , а \mathbb{P} — вероятностная мера, определенная на множествах из \mathcal{A} .

Случайной величиной X (или риском) будем называть произвольное измеримое отображение из Ω в \mathbb{R} .

Обозначим χ совокупность всех случайных величин на (Ω, \mathcal{A}) . Перенумеровав элементы Ω некоторым произвольным образом, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, обозначим $X(\Omega) = x_i, i = 1, \dots, n$, и будем отождествлять случайные величины $X \in \chi$ с векторами $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ из \mathbb{R}^n .

Напомним [1], что отношением предпочтения \preceq на множестве χ называется произвольное полное транзитивное бинарное отношение, а мерой риска называется произвольный функционал $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Говорят, что мера риска f представляет отношение предпочтения \preceq , если

$$f(X) \leq f(Y) \Rightarrow X \preceq Y \quad \text{для } X, Y \in \chi.$$

Когерентной мерой риска называется функционал $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающий свойствами монотонности, субаддитивности, положительной однородности и инвариантности относительно сдвигов [2]. Рассмотрим эти свойства:

- монотонность

$$X \leq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y) \quad \text{для } X, Y \in \chi;$$

- субаддитивность

$$f(X + Y) \leq f(X) + f(Y) \quad \text{для } X, Y \in \chi;$$

- положительная однородность

$$f(\lambda X) = \lambda f(X) \quad \text{для } \lambda > 0, X \in \chi;$$

- инвариантность относительно сдвига (трансляционная инвариантность)

$$f(X + aI) = f(X) + a \quad \text{для } a \in R, X \in \chi.$$

Здесь $I = (1, \dots, 1)$ — вектор с единичными координатами длины n .

Меры риска. Рассмотрим некоторые меры риска и исследуем их на когерентность.

1. Дисперсия

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

не является когерентной мерой, так как не удовлетворяет ни одному условию когерентности меры: трансляционная инвариантность и положительная однородность не выполняются по свойствам дисперсии. Условиям субаддитивности и монотонности в общем случае дисперсия так же не удовлетворяет.

2. Стандартное отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i}$$

удовлетворяет условию субаддитивности, так как

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + Cov(X, Y),$$

а ковариация равна $Cov(X, Y) = \sigma(X)\sigma(Y)r$, где r — коэффициент корреляции. Так как $r \leq 1$, то верно

$$Cov(X, Y) \leq \sigma(X)\sigma(Y),$$

с его помощью получаем

$$\sigma^2(X + Y) \leq (\sigma(X) + \sigma(Y))^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\sigma(X + Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y).$$

Так же по своим свойствам стандартное отклонение удовлетворяет условию положительной однородности, но условия трансляционной инвариантности и монотонности для него не выполняются.

3. Market-risk или β -риск

$$\beta_X = r_{X,R} \frac{\sigma_X}{\sigma_R}, \text{ что эквивалентно } \beta_X = \frac{Cov(X, R)}{\sigma_R^2},$$

где σ_R — стандартное отклонение рыночного портфеля.

Проверим выполнение условий когерентности:

- субаддитивность. Она обусловлена тем, что ковариация представляет собой смешанный центральный момент первого порядка, который обладает свойствами математического ожидания. Рассмотрим две случайные величины X и Y :

$$\beta(X + Y) = \frac{Cov(X + Y, R)}{\sigma_R^2} = \frac{Cov(X, R)}{\sigma_R^2} + \frac{Cov(Y, R)}{\sigma_R^2};$$

- монотонность. Рассмотрим две случайные величины X и Y , причем $Y = X + \varepsilon$, где $\varepsilon \geq 0$, — случайная величина, то есть $X \leq Y$. Доказательство аналогично доказательству субаддитивности, так как ε — случайная величина.
- положительная однородность. Мера будет удовлетворять данному свойству для случайной величины X и постоянной $c > 0$, так как, наследуя свойства математического ожидания, ковариация удовлетворяет условию $Cov(cX, R) = c \cdot Cov(X, R)$;
- трансляционная инвариантность. Для случайной величины X и постоянной $c > 0$ выполняется

$$\begin{aligned} \beta(X + c) &= \frac{Cov(X + c, R)}{\sigma_R^2} = \\ &= \frac{\mu[(X - \mu(X) + c - \mu(c))(R - \mu(R))]}{\sigma_R^2} = \frac{Cov(X, R)}{\sigma_R^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для данной меры не выполняется свойство инвариантности, т. е. она не является когерентной.

4. $VaR_\alpha(X)$ (Value-at-risk)

$$VaR_\alpha(X) = -\inf \{x \in R : p(X < x) \geq \alpha\}, \text{ где } \alpha \in (0, 1).$$

Мера $VaR_\alpha(X)$ так же не является когерентной, так как для нее не выполняется свойство субаддитивности [3, 4]. Все остальные свойства выполняются (см. [5]).

5. $LPM_{n,t}$ (Lower Partial Moment)

$$LPM_{n,t} = \sum_i \max[(t - x), 0]^n p_i.$$

Мера риска $LPM_{n,t}$ не является когерентной, так как условиям монотонности, субаддитивности и положительной однородности она удовлетворяет при определенных условиях, а условию трансляционной инвариантности не удовлетворяет (см. [6]).

Практическое применение. Области применения мер риска разнообразны. С их помощью мер риска можно оценивать не только финансовые или материальные потери или прибыли, но и использовать их для оценки риска смертельных случаев при возникновении чрезвычайных ситуаций, а именно, стихийных бедствий. В статье приведены оценки рисков в количестве погибших при наводнениях, землетрясениях, извержениях вулканов и цунами.

По каждой мере рисков можно составить шкалу рисковости природных катаклизмов, при этом результаты упорядочивания могут отличаться. В исследовании использованы эмпирические данные [7], поэтому для расчета мер использовались их дискретные формы записи.

Для расчета меры риска β -риск было необходимо рассчитать величину σ_R — стандартное отклонение для случайной величины, характеризующей общее количество жертв для всех стихийных бедствий. Мера VaR_α для эмпирических данных представляет собой выборочную квантиль. При расчете меры $LPM_{n,t}$ необходимо задать t — уровень потерь. Будем принимать его равным различным квантилям распределения, тогда для удобства будем записывать $LPM_{n,\alpha}$, где α — уровень квантиля. Результаты расчетов для рассмотренных мер приведены ниже в таблице.

Таблица. Меры риска для разных видов стихийных бедствий

Мера риска	Наводнение	Извержение	Цунами	Землетрясение
σ^2	1915184872	268796024	144777643	3898477104
σ	43763	16395	12032	62438
$VaR_{0,05}$	1525	9	119	1000
$VaR_{0,3}$	5624	700	2182	1621
$VaR_{0,5}$	7625	1335	3620	2500
$VaR_{0,95}$	107485	29025	30000	87587
$LPM_{1;0,3}$	540	72	123	306
$LPM_{1;0,5}$	1298	360	622	895
$LPM_{1;0,95}$	87432	29249	24700	99341
β	1,03288	0,317872	0,292144	1,299354

Можно сделать вывод, что самая большая дисперсия (разброс) жертв характерна для землетрясений, за ними следуют наводнения, извержения и цунами.

По шкале рисковости VaR_α с уровнем $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,95$ видно, что самые большие потери ожидаются при наводнениях, затем следуют землетрясения, цунами и извержения. Но для шкалы рисковости VaR_α с уровнем $\alpha = 0,3$ и $\alpha = 0,5$ ситуация меняется: в порядке убывания величины риска следуют наводнения, цунами, землетрясения, извержения. Таким образом, шкала рисковости VaR_α зависит от того, для какой части распределения рассчитывается мера: для хвостовой или центральной.

Шкала меры $LPM_{n,\alpha}$ дает абсолютно другие результаты. Для уровня t , равного квантилю распределения с $\alpha = 0,95$, получена следующая шкала: землетрясения, наводнения, извержения, цунами, а с $\alpha = 0,3$ и $\alpha = 0,5$ — наводнения, землетрясения, цунами, извержения, что совпадает со шкалой рисковости VaR_α с уровнем $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,95$. Шкала для β -риска совпадает со шкалой $LPM_{n,\alpha}$ для уровня t , равного квантилю распределения с $\alpha = 0,95$.

Заклучение. В статье были рассмотрены пять мер риска, для каждой из них приведены доказательства некогерентности. При использовании мер риска для шкалирования количества жертв при стихийных бедствиях были получены следующие результаты. Дисперсия помогает определить, для какого стихийного бедствия характерен наибольший разброс по количеству жертв. Меры рисковости $VaR_{0,05}$, $VaR_{0,95}$, $LPM_{1;0,3}$ и $LPM_{1;0,5}$ дают одинаковый результат. Шкала для β -риска совпадает со шкалой $LPM_{1;0,95}$.

Литература

1. Новоселов А. А. Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения. Новосибирск: Наука, 2001. 99 с.
2. Новоселов А. А. Обобщенные когерентные меры риска // Труды IV Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам, 2005. Т. 1. С. 325–339.
3. Rootzen H., Kluppelberg C. A single number can't hedge against economic catastrophes // *Ambio*, 1999. Vol. 28, No. 6.
4. Danielsson J., Jorgensen B. N., Sarma M. et al. Fat tails, VaR and subadditivity // *Forthcoming Journal of Econometrics*, 2012.
5. Peng J. Value at Risk and Tail Value at Risk in uncertain environment // *Proceedings of the Eighth International Conference on Information and Management Sciences*, 2009.
6. Barbosa A., Ferreira M. A. Beyond coherence and extreme losses: Root Lower Partial Moment as a risk measure, 2004. <http://ssrn.com/abstract=609221> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.609221>
7. http://www.usgs.gov/natural_hazards/

Ледовская В. А., Колбин В. В.
Санкт-Петербургский государственный университет

Когерентные меры риска

Условия когерентности. Введем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где Ω — множество элементарных исходов, \mathcal{A} — σ -алгебра, заданная на Ω , а \mathbb{P} — вероятностная мера, определенная на множествах из \mathcal{A} .

Случайной величиной X (или риском) будем называть произвольное измеримое отображение из Ω в \mathbb{R} .

Обозначим χ совокупность всех случайных величин на (Ω, \mathcal{A}) . Перенумеровав элементы Ω некоторым произвольным образом, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, обозначим $X(\Omega) = x_i, i = 1, \dots, n$, и будем отождествлять случайные величины $X \in \chi$ с векторами $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ из \mathbb{R}^n .

Напомним [1], что отношением предпочтения \preceq на множестве χ называется произвольное полное транзитивное бинарное отношение, а мерой риска называется произвольный функционал $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Говорят, что мера риска f представляет отношение предпочтения \preceq , если

$$f(X) \leq f(Y) \Rightarrow X \preceq Y \quad \text{для } X, Y \in \chi.$$

Когерентной мерой риска называется функционал $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающий свойствами монотонности, субаддитивности, положительной однородности и инвариантности относительно сдвигов [2]. Когерентные меры рисков предпочтительны, так как их свойства позволяют более полно отражать условия реальных задач. Рассмотрим условия когерентности меры риска:

- монотонность

$$X \leq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y) \quad \text{для } X, Y \in \chi.$$

В приложении к теории принятия решений, это условие можно интерпретировать, как правило «чем больше, тем лучше», оно характеризует критерии выбора и отношение предпочтения;

- субаддитивность

$$f(X + Y) \leq f(X) + f(Y) \quad \text{для } X, Y \in \chi.$$

Это свойство характеризует поведение меры риска в ситуациях дробления или, наоборот, агрегирования (объединения) рисков. Его можно понимать так: объединение рисков не создает дополнительный риск;

- положительная однородность

$$f(\lambda X) = \lambda f(X) \quad \text{для } \lambda > 0, X \in \chi.$$

Приведем пример, поясняющий данное свойство. Поскольку, часто рассматриваемая нами мера риска применяется к финансовым рискам, необходимо, чтобы эта мера не зависела от выбора денежных единиц, в которых измеряется капитал, т. е. была инвариантна по отношению к ним. Действительно, риск не должен изменяться от того, в чем его измеряют — в рублях или тысячах рублей;

- инвариантность относительно сдвига (трансляционная инвариантность)

$$f(X + aI) = f(X) + a \quad \text{для } a \in R, X \in \chi.$$

Здесь $I = (1, \dots, 1)$ — вектор с единичными координатами длины n .

Меры риска. Рассмотрим когерентные меры риска.

1. $ES_\alpha(X)$ (Expected Shortfall).

Для случайной величины X с уровнем доверия $\alpha \in (0, 1)$ мера риска $ES_\alpha(X)$ будет иметь следующий вид:

- непрерывное распределение

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_\alpha^1 VaR_\beta(X, \beta) d\beta,$$

здесь $VaR_\alpha(X, \alpha) = -\inf \{x \in R : F(X) \geq \alpha\} = -F^{-1}(\alpha)$;

- дискретное распределение

$$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1}(E[X \cdot 1_{\{X \leq x_\alpha\}}] + x_\alpha(\alpha - p(X \leq x_\alpha))),$$

где $x_\alpha = \inf \{x \in R : F(X) \geq \alpha\}$,

$$1_{\{X \leq x_\alpha\}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \text{ удовлетворяет условию } X \leq x_\alpha, \\ 0, & \text{если } \alpha \text{ удовлетворяет условию } X > x_\alpha, \end{cases}$$

$1_{\{X \leq x_\alpha\}}$ — индикаторная функция, $E[1_{\{X \leq x_\alpha\}}] = \alpha$.

Когерентная мера риска $ES_\alpha(X)$ впервые была введена в статье [3]. Она удовлетворяет условиям монотонности, положительной однородности и трансляционной инвариантности, наследуя свойства от $VaR_\alpha(X)$ [4]. Доказательство субаддитивности $ES_\alpha(X)$ приведено в статье [5].

2. $WCE_\alpha(X)$ (Worst Conditional Expectation).

Для случайной величины X с уровнем доверия $\alpha \in (0, 1)$

$$WCE_\alpha(X) = - \inf \{E[X|A] : A \in \Omega, p(A) > \alpha\}$$

Впервые эта мера была введена в статье [3]. По своей сути она является математическим ожиданием события A , а математическое ожидание, благодаря своим свойствам, удовлетворяет условиям когерентности [5, 6].

Практическое применение. Области применения мер риска разнообразны. С их помощью можно оценивать не только финансовые или материальные потери или прибыли, но и использовать их для оценки риска смертельных случаев при возникновении чрезвычайных ситуаций, а именно, стихийных бедствий. В статье приведены оценки рисков в количестве погибших при наводнениях, землетрясениях, извержениях вулканов и цунами.

По каждой мере рисков можно составить шкалу рисковости природных катаклизмов, при этом результаты упорядочивания могут отличаться. В исследовании использованы эмпирические данные [7], поэтому для расчета мер использовались их дискретные формы записи.

Чтобы рассчитать $ES_\alpha(X)$ для эмпирического распределения, можно использовать несколько способов, в статье использованы два из них:

- первый способ, представленный в статье [8],

$$ES_\alpha(X) = - \frac{1}{[N\alpha]} \sum_{i=1}^{[N\alpha]} X_i,$$

- второй способ, представленный в статье [9],

$$ES_{\alpha}(X) = -\frac{1}{N\alpha} \left(\sum_{i=1}^{[N\alpha]} X_i + (N\alpha - [N\alpha])X_{[N\alpha]} \right),$$

здесь N — количество исходов, $[N\alpha]$ — целая часть $N\alpha$.

При расчетах для удобства обозначим $ES_{\alpha}^{(1)}(X)$ — меру Expected Shortfall, рассчитанную по первому способу и $ES_{\alpha}^{(2)}(X)$ — меру, рассчитанную по второму способу. Результаты расчетов приведены ниже в таблице.

Таблица. Меры риска для разных видов стихийных бедствий

Мера риска	Наводнение	Извержение	Цунами	Землетрясение
$ES_{0,05}^{(1)}(X)$	1525	9	119	1000
$ES_{0,3}^{(1)}(X)$	3802	276	2064	1240
$ES_{0,5}^{(1)}(X)$	4929	589	2273	1658
$ES_{0,95}^{(1)}(X)$	13059	3601	9480	11590
$ES_{0,05}^{(2)}(X)$	1916	19	325	1000
$ES_{0,3}^{(2)}(X)$	3829	280	1762	1267
$ES_{0,5}^{(2)}(X)$	5036	609	2340	1658
$ES_{0,95}^{(2)}(X)$	16533	3741	8861	12189
$WCE_{0,05}(X)$	—	—	2000	1000
$WCE_{0,01}(X)$	—	—	92000	316000

По шкале рисковости $ES_{\alpha}^{(1)}(X)$ и $ES_{\alpha}^{(2)}(X)$ с уровнем $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,95$ видно, что самые большие потери ожидаются при наводнениях, затем следуют землетрясения, цунами и извержения. Но для шкалы рисковости $ES_{\alpha}^{(1)}(X)$ и $ES_{\alpha}^{(2)}(X)$ с уровнем $\alpha = 0,3$ и $\alpha = 0,5$ ситуация меняется, в порядке убывания следуют: наводнения, цунами, землетрясения, извержения.

Меру $WCE_{\alpha}(X)$ удалось вычислить только для распределений, в которых события не являлись равновероятными, такие распределения у цунами и землетрясений. В зависимости от уровня вероятности меняется упорядочивание согласно этой мере. Оно не является наглядным, поэтому можно сделать вывод, что использование $WCE_{\alpha}(X)$ в распределениях, близких к равновероятным, нецелесообразно.

Заклучение. В статье рассмотрены когерентные меры риска и способы их вычисления для эмпирических данных. По каждой мере рисков составлена шкала рисковости природных катаклизмов.

Для меры риска $WCE_\alpha(X)$ можно сделать вывод, что она мало применима при эмпирическом распределении, так как оно чаще всего близко к равновероятному распределению.

В статье [10] проведены аналогичные расчеты рисков человеческих потерь в случае стихийного бедствия. Обратившись к полученным в ней данным, можно сделать вывод о том, что меры $ES_{0,05}^{(1)}(X)$, $ES_{0,05}^{(2)}(X)$ и $ES_{0,95}^{(1)}(X)$, $ES_{0,95}^{(2)}(X)$ дают то же упорядочение, что и $VaR_{0,05}$, $VaR_{0,95}$, $LPM_{1;0,3}$ и $LPM_{1;0,5}$. Шкалы $ES_{0,3}^{(1)}(X)$, $ES_{0,3}^{(2)}(X)$ и $ES_{0,5}^{(1)}(X)$, $ES_{0,5}^{(2)}(X)$ совпадают со шкалами $VaR_{0,3}$, $VaR_{0,5}$. При этом VaR_α дает риски с большим резервом, чем $ES_\alpha(X)$, хотя Expected Shortfall считается более консервативной, и в большинстве случаев складывается ситуация, обратная данной. Также при сравнении результатов для $ES_\alpha^{(1)}(X)$ и $ES_\alpha^{(2)}(X)$ видно, что $ES_\alpha^{(2)}(X)$ имеет больший запас, чем $ES_\alpha^{(1)}(X)$, но все же не такой большой, как у VaR_α . Таким образом, наиболее предпочтительной при расчетах рисков для эмпирических распределений будет мера $ES_\alpha(X)$, вычисленная по второму способу.

Шкала, полученная с помощью мер β -риск и $LPM_{1;0,95}$, не имеет аналогов среди шкал когерентных мер рисков.

Литература

1. Новоселов А. А. Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения. Новосибирск: Наука, 2001. 99 с.
2. Новоселов А. А. Обобщенные когерентные меры риска // Труды IV Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам, 2005. Т. 1. С. 325–339.
3. Artzner P., Delbaen F., Eber J. M. Coherent measures of risk // Math. Fin., 1999. Vol. 9(3). P. 203–228.
4. Peng J. Value at Risk and Tail Value at Risk in uncertain environment // Proceedings of the Eighth International Conference on Information and Management Sciences, 2009.

5. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of Expected Shortfall // Journal of Banking and Finance, 2002. Vol. 26(7). P. 1487–1503.
6. Benati S. The optimal portfolio problem with coherent risk measure constraints // European Journal of Operational Research, 2003. Vol. 150, No. 3. P. 572–584.
7. http://www.usgs.gov/natural_hazards/
8. Yuan H. Calculation of Expected Shortfall via filtered of historical simulation // University essay from Uppsala universitet, 2011.
9. Acerbi C. Coherent representations of subjective risk-aversion // Risk measures for the 21st century / Ed. by G. Szego, 2003. P. 147–207.
10. Ледовская В. А. Анализ некогерентных мер риска (в настоящем сборнике).

Михель Н. В., Смирнов Н. В.
Санкт-Петербургский государственный университет

Анализ математической модели кредитного механизма, используемого фирмой для развития нового производства

Описание модели кредитного механизма. Моделирование кредитных отношений — одна из актуальных задач математических методов в экономике. Для любого предприятия, в независимости от формы собственности, представляет интерес вопрос об эффективности покупки в кредит новых технологических линий производства. Одним из основных требований к моделям, описывающим такие ситуации, является относительная простота приложения и адекватность реальности на уровне анализа основных возможных вариантов и тенденций. Именно такими качествами обладает модель Лебедева [1, 2]. Следуя этим работам, дадим ее краткое описание и постановку задачи.

Динамика производства нового товара по купленной в кредит технологии и долговых обязательствам фирмы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{Q} = \lambda(pQ - C(t) - H(t)) - \mu Q, \\ \dot{z} = \beta(z - z_e). \end{cases} \quad (1)$$

Эти уравнения вытекают из нескольких начальных предположений.

Предприятие получает в банке единовременный кредит z_0 для развития производства, который оно использует для приобретения нового оборудования (основных производственных фондов). Таким образом в начальный момент стоимость основных производственных фондов равна величине кредита $K(0) = z_0$. Процентная ставка β по кредиту считается постоянной. Величина H_{Cr} описывает выплаты предприятия из полученной прибыли. Поэтому динамика долга $z(t)$ описывается вторым уравнением в системе (1), где $z_e = H_{Cr}/\beta$. Предприятие производит товар одного вида. Объем производства пропорционален основным фондам $Q(t) = \lambda K(t)$, где $\lambda > 0$ — коэффициент фондоотдачи. Начальные данные $Q(0) = \lambda z_0$.

Полные издержки производства моделируются полиномом второй степени

$$C(t) = mQ^2(t) + nQ(t) + c, \quad (2)$$

где m , n и c — неотрицательные коэффициенты (параметры). Предполагается, что в (2) учтены все издержки, в том числе оплата труда, затраты на материалы, затраты на обслуживание оборудования и др., за исключением затрат на приобретение нового оборудования.

Произведенный товар в количестве $Q(t)$ поступает на рынок. Считается, что спрос превышает предложение $Q(t)$, поэтому доход (выручка от продажи) определяется соотношением $R(t) = pQ(t)$, где p — цена товара. Прибыль фирмы $\Pi(t) = R(t) - C(t)$ делится на три части. Первая — $H_F = \text{const}$ составляет личный доход владельца предприятия; вторая — $I(t)$ используется для инвестиций в производство; третья — H_{Cr} идет на погашение долга. Поэтому объем инвестиций в производство есть $I(t) = R(t) - C(t) - H(t)$, где

$$H(t) = \begin{cases} H_F + H_{Cr}, & z(t) > 0, \\ H_F, & z(t) \leq 0. \end{cases}$$

Динамика основных производственных фондов $K(t)$, которые определяют производственный потенциал, задается уравнением $K(t) = I(t) - \mu K(t)$, где μ — коэффициент выбытия.

Учет всех предположений и описанных взаимосвязей величин приводит к первому уравнению системы (1).

Сразу отметим плюсы и минусы модели (1). К первым можно отнести простоту, удобство анализа и адекватность, о чем свидетельствуют работы [1, 2]. Например, интегрируя второе уравнение, можно сразу определить динамику долга и время, необходимое для его полной выплаты:

$$z(t, z_0) = z_e + (z_0 - z_e)e^{\beta t}, \quad T_{Cr} = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{z_e}{z_e - z_0} \right).$$

Недостатками являются отсутствие возможностей осуществлять управляющие воздействия и учитывать внешние возмущения, которые вполне возможны в реальности. Покажем далее варианты устранения этих недостатков.

Возможные модификации модели. Поскольку решения $Q(t)$ и $z(t)$ уравнений системы (1) связаны только через начальные данные $Q(0) = \lambda z_0$, то анализировать их качественные характеристики

удобно на фазовой плоскости. Например, при $m = 0$ в (2) (случай линейных издержек) система имеет единственное неустойчивое положение равновесия. По внешнему виду траекторий легко определить благоприятные и неблагоприятные для фирмы соотношения между параметрами λ и z_0 .

Очевидно, что наиболее вероятные возмущения в реальной жизни возможны при учете издержек. Как правило, так называемые постоянные расходы вовсе не постоянные, так как возможны небольшие сбои в поставках сырья, поломки оборудования, влияние человеческого фактора. Если считать их небольшими по амплитуде колебаниями, то формулу (2) можно записать в виде

$$C(t) = mQ^2(t) + nQ(t) + c_0 + \frac{c_0}{\alpha} (\sin(\gamma_1 t + \omega_1) + \cos(\gamma_2 t + \omega_2)), \quad (3)$$

где c_0 — базовое значение постоянных издержек, α — параметр, характеризующий амплитуду колебаний, параметры $\gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2$ определяют частотные характеристики и фазовые сдвиги возмущений.

Управление в моделях (1), (2) и (1), (3) возможно через величину выплат по долговым обязательствам H_{Cr} . Можно считать, что руководство фирмы имеет возможность варьировать ее значение в окрестности некоторого базового уровня \tilde{H}_{Cr} , т. е.

$$H_{Cr} = \tilde{H}_{Cr} + u(t), \quad (4)$$

где управляющее воздействие $u(t)$ — кусочно-непрерывная, ограниченная функция.

В рамках данной работы проведен качественный анализ модели (1), (3), (4) и построены благоприятные сценарии управления, когда долг сокращается до нуля, а производство выходит на запланированный уровень.

Литература

1. Лебедев В. В., Лебедев К. В. Исследование кредитного механизма, используемого для развития рынка новой продукции, на основе математического моделирования // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов VI Международной школы-симпозиума АМУР–2012, Севастополь, 17–23 сентября 2012 / отв. ред. М. Ю. Кусый, А. В. Сигал. Симф.: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2012. С. 328–334.
2. Лебедев В. В., Математическое моделирование социально-экономических процессов. М.: Изограф, 1997. 224 с.

Мишенина В. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

**Модификация обобщенной модели
экономического роста с учетом накопления
человеческого капитала**

Рекомендовано к публикации профессором Прасоловым А. В.

1. Введение. В рамках существующей экономической ситуации одной из наиболее важных задач является обеспечение устойчивого экономического роста, поэтому проблема выявления ключевых факторов и описание механизма их воздействия на экономический рост имеет существенное значение для современной экономической теории.

Одним из факторов экономического роста, несомненно, является человеческий капитал. В настоящее время считается, что человеческий капитал — это совокупность накопленных профессиональных знаний, умений и навыков, получаемых в процессе образования и повышения квалификации, которые впоследствии могут приносить доход в виде заработной платы, процента или прибыли.

Механизм накопления человеческого капитала предполагает обучение с «отрывом от производства». Это обучение происходит в рамках «образовательного сектора экономики», именно там работники осуществляют накопление и развитие своего человеческого капитала.

2. Описание модели. За основу взята модель [1]. В работе использована концепция «социального планировщика». Предполагается, что существует некоторый «социальный планировщик», выбирающий с точки зрения всего общества в целом оптимальный путь экономической системы, изначально располагающий исчерпывающей информацией о ее развитии и способный воздействовать на все ее составные части. Поэтому можно считать, что изначально заданы условия $h(t) = h_a(t)$, $u = u_a$, $\forall t \in [0, \infty)$.

С учетом условий получаем систему, описывающую модель

$$\begin{aligned}\frac{dK(t)}{dt} &= S_K A(t) K(t)^\beta (uh(t))^{1-\beta+\gamma} (N(t))^{1-\beta} - \mu_K K - c(t)N(t), \\ \frac{dh(t)}{dt} &= \delta(1-u)h(t) - \mu_h h(t),\end{aligned}$$

где $A(t)$ — функция, описывающая экзогенный технологический прогресс ($A(t) = A_0 e^{\alpha t}$, $\alpha = \text{const}$), u — доля активного времени, которую репрезентативный экономический агент посвящает производственной деятельности, $N(t)$ — численность рабочей силы ($N(t) = N_0 e^{nt}$, $n = \text{const}$), $uh(t)N(t)$ — эффективная рабочая сила («внутренний эффект» человеческого капитала), $c(t)$ — удельное потребление, S_K — норма сбережения капитала, β — доля физического капитала, γ — положительный параметр, μ_K — норма амортизации физического капитала, δ — положительный технологический параметр, p , s , q и r — неотрицательные параметры (эластичности), причем $p + s = 1$, $q + r = 1$, μ_h — норма амортизации.

Данная модель довольно точно отражает влияние фактора человеческого капитала на экономический рост. Но, как и все подобные модели, она имеет существенный недостаток — численность рабочей силы строится в виде экспоненты с постоянным темпом роста, несмотря на то, что ей свойственны различные колебания, которые данное представление не учитывает. Колебания могут быть вызваны различными причинами: войнами, спадом или, наоборот, увеличением рождаемости/смертности и др.

В данной работе предлагается кардинальным образом изменить вышеизложенную модель путем построения функции численности рабочей силы на основе статистических данных за предыдущие года, интерполированных с помощью полинома. Так как модель необходима для построения прогнозов, а делать прогнозы по полиному вне области интерполяции нельзя, то будем рассматривать функцию численности рабочей силы, построенную не только на основе предыдущих периодов, но и на основе прогнозов на следующие. Таким образом модель будет пригодна для прогнозов в рамках того периода, который мы включили в прогнозирование численности рабочей силы.

Также предполагается, что потребление растет по экспоненте с постоянным темпом роста q .

Прогнозирование численности рабочей силы предлагается осуществить с помощью матричной формы когортно-компонентного метода, основанного на применении матрицы Лесли [2]. Таким образом, спрогнозировав численность рабочей силы на некоторый промежуток вперед, можно по этим данным и данным за предыдущие года интерполировать функцию численности населения с помощью полинома.

3. Пример. На рис. 1 показано состояние рабочей силы России при предположении, что она растет с постоянным темпом роста по экспоненте (N'), и при ее прогнозировании с помощью когортно-компонентного метода (N).

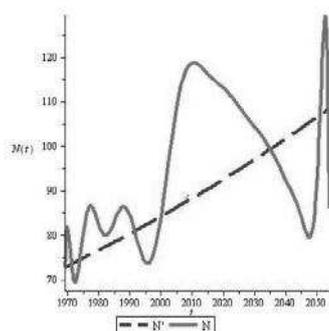


Рис. 1. Графики функции численности рабочей силы

Рис. 2 отражает состояние физического капитала России при численностях рабочей силы, изображенных на рис. 1.

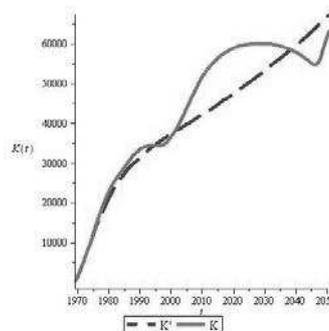


Рис. 2. Графики функции капитала

Как видно из графиков, функция численности рабочей силы в модифицированной модели выглядит более реалистично. Следует добавить, что по прогнозам численность населения России будет убывать, функция численности рабочей силы в виде экспоненты с постоянным

положительным темпом прироста никаким образом это не учитывает.

Также видно, что в функции капитала модифицированной модели присутствует дополнительная динамика (спады, подъемы), по которой можно судить о состоянии экономики России. Например такой спад можно видеть в 2029 году.

4. Задача. С помощью спрогнозированного значения капитала России требуется оценить необходимое количество миграции для того, чтобы предотвратить спад экономики в 2029 году.

Для этого введем функцию численности рабочей силы, построенную следующим образом: $\tilde{N}(t) = N(t) + l(t)$, где $N(t)$ — спрогнозированная рабочая сила, $l(t)$ — миграционный прирост. Функция миграционного прироста определяется следующим образом:

$$l(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } t \leq y \text{ и } t \geq y + 10, \\ x, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где y — начальный момент миграционного прироста, x — количество миграционного прироста (млн. чел. в год), которое остается постоянным на протяжении 10 лет.

Точку спада функции капитала можно найти, вычислив производную от этой функции. Она, как и $\tilde{N}(t)$, зависит от x и y . Обозначим точку спада $U(x, y)$.

Варьируя параметры x и y в среде Maple удалось получить график зависимости точки спада функции капитала от начального момента и количества миграционного прироста (рис. 3).

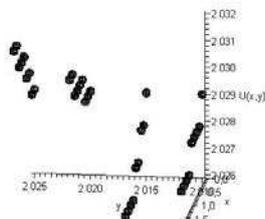


Рис. 3. Точка спада $U(x, y)$

Можно заметить, что если $y \in [2010, 2020]$, то спад экономики не удастся предотвратить. Более того, в зависимости от x он может произойти раньше — в 2026 году.

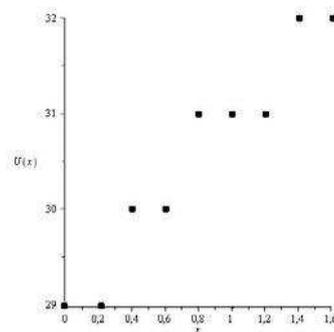


Рис. 4. Зависимость точки спада от миграционного прироста при $y = 2025$

Самым оптимальным является вариант осуществления миграционного прироста, начиная с 2025 года. В этом случае при $x \in [0, 4; 0, 6]$ спад можно отодвинуть на 1 год, при $x \in [0, 8; 1, 2]$ — на 2 года, при $x \in [1, 4; 1, 6]$ — на 3 года (рис. 4).

5. Заключение. В работе рассмотрена модификация обобщенной модели экономического роста с учетом накопления человеческого капитала, на основе статистических и спрогнозированных данных построена численность рабочей силы России, показано ее влияние на физический капитал России и оценено необходимое количество миграции для того, чтобы предотвратить спад экономики в 2029 году.

Литература

1. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, 2010. № 1. С. 171–178.
2. Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrika, 1945. Vol 33. Part III. P. 183–212.

Орлова А. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Многокритериальная оптимизация в модели информационного управления

Рекомендовано к публикации профессором Колбиным В. В.

1. Введение. В данной работе представлена модель оптимизации затрат на рекламу и СМИ. Данная модель является моделью информационного управления. В ней также рассматривается рефлексия, т. е. предполагается, что агенты в зависимости от своих мнений выбирают действия и наблюдают результаты этих действий. Это позволяет учитывать не только эффективность, но и стабильность информационных воздействий.

Для того, чтобы модель стала более реальной, подробнее остановимся на группе агентов, подверженных влиянию рекламы. Моделирование динамики мнений агентов проиллюстрируем пятью случаями. С учетом привлечения статистических данных возможно определение количества агентов, относящихся к каждой выделенной группе. Предполагая, что количество агентов, готовых купить товар, пропорционально количеству прибыли, получаем функцию прибыли, зависящую от вложений в рекламу и ставим задачу ее максимизации при минимизации затрат на рекламу и других логически понятных ограничениях.

2. Основные определения. Введем в рассмотрение шесть типов агентов:

- ϕ_{YES}^0 (ϕ_{NO}^0) — агент полагается только на свое мнение, подвержен (не подвержен) влиянию СМИ;
- ϕ_{YES}^1 (ϕ_{NO}^1) — агент полагается на свое мнение и на представлении о мнении других агентов, подвержен (не подвержен) влиянию СМИ;
- ϕ_{YES}^2 (ϕ_{NO}^2) — агент полагается на свое мнение, на представлении о мнении других агентов и на представлении о представлениях других агентов о его собственном мнении, подвержен (не подвержен) влиянию СМИ.

Верхний индекс обозначает ранг рефлексии, а нижний индекс говорит о влиянии на агента информационного управления.

Каждый агент имеет собственное мнение, которое может изменяться под воздействием информационного управления — агент получает от СМИ информацию и реагирует (или не реагирует) на нее определенным образом.

Для каждого из шести типов агентов рассмотрим функцию выбора — отображение B , переводящее множество Ω (или декартово произведение этих множеств) — множество характеристик объекта (товара или услуги) в X — множество действий агента. Данные множества содержат лишь по два элемента: $\Omega = \{g, b\}$, $X = \{a, r\}$, где g (good) — «хорошо», b (bad) — «плохо», действие a (accept) соответствует приобретению товара/услуги, а действие r (reject) — отказу от приобретения товара/услуги [1].

3. Динамика изменения мнения агентов. Рассмотрим динамику изменения мнений агентов, подверженных влиянию СМИ. Будем предполагать, что известны начальные мнения этих агентов. Обозначим их $x_i^0 \in R^1$, $i = \overline{1, \phi_{YES}}$, $\phi_{YES} = \phi_{YES}^0 + \phi_{YES}^1 + \phi_{YES}^2$.

3.1. «Осторожные» агенты. Для того чтобы отразить зависимость степени доверия агента сообщениям СМИ от их содержания, введем описывающую эту зависимость функцию доверия $G(x, u)$, где x — мнение агента, u — управление (сообщение СМИ). Относительно свойств функции доверия можно предполагать следующее (далее можно пользоваться теми или иными комбинациями вводимых предположений):

A1. Функция $G(x, u)$ принимает неотрицательные значения и достигает своего максимального значения, равного β , при $u = x$: $G(x, x) = \beta$.

A2. Функция $G(x, u)$ принимает неотрицательные значения и достигает своего минимального значения, равного β , при $u = x$: $G(x, x) = \beta$.

A3. Функция $G(x, u)$ зависит только от разности $x - u$.

A4. Функция $G(x, u)$ монотонно убывает с ростом $|x - u|$.

A5. Функция $G(x, u)$ монотонно возрастает с ростом $|x - u|$.

A6. Пусть выполнены предположения A1, A3 и $\forall x \in R^1$, $\lim_{u \rightarrow -\infty} G(x, u) = \beta_-$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} G(x, u) = \beta_+$ $\beta_- \leq \beta$, $\beta_+ \leq \beta$, а на полуинтервалах $(-\infty, x]$ и $[x, +\infty)$ значений u функция $G(x, u)$ имеет единственные точки минимума.

A7. Пусть выполнены предположения A2, A3 и $\forall x \in R^1$, $\lim_{u \rightarrow -\infty} G(x, u) = \beta_-$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} G(x, u) = \beta_+$ $\beta \leq \beta_-$, $\beta \leq \beta_+$, а на по-

дуинтервалах $(-\infty, x]$ и $[x, +\infty)$ значений u функция $G(x, u)$ имеет единственные точки максимума.

Содержательно предположение А1 (А2) означает, что агент максимально (минимально) доверяет СМИ, сообщаемым информацию, совпадающую с его мнением. Предположение А3 означает, что доверие к сообщениям СМИ зависит только от того, насколько оно отличается от мнения агента, и не зависит от их значений. Предположение А4 (А5) означает, что доверие к сообщению СМИ тем выше (ниже), чем оно ближе к мнению агента. Примерами являются соответственно

$$G(x, u) = \beta \exp(-\gamma|x - u|), \quad \gamma > 0, \quad (1)$$

$$G(x, u) = 1 - (1 - \beta) \exp(-\gamma|x - u|), \quad \gamma > 0. \quad (2)$$

Предположения А6 означает, что

— агент максимально доверяет СМИ, сообщаемым информацию, совпадающую с его мнением (А1);

— при сообщениях СМИ, все более отличающихся от его мнения, агент им все менее доверяет;

— но при «экстремальных» мнениях СМИ агент начинает все больше доверять СМИ («чем чудовищнее ложь, тем быстрее в нее верят»);

Примером при $\beta_- = \beta_+ = \beta$ является функция

$$G(x, u) = \beta[1 - (1 - \exp(-\gamma|x - u|)) \exp(-\gamma|x - u|)]. \quad (3)$$

Предположения А7 означает, что

— агент минимально доверяет СМИ, сообщаемым информацию, совпадающую с его мнением (А2);

— при сообщениях СМИ, все более отличающихся от его мнения, агент им все больше доверяет;

— но при «экстремальных» мнениях СМИ агент начинает все меньше доверять СМИ (люди восприимчивы к выводам, не превышающим их порога приемлемого);

Примером при $\beta_- = \beta_+ = \beta$ является функция

$$G(x, u) = (1 - \beta) \exp(-\gamma|x - u|) \exp(-\gamma|x - u|) + \beta. \quad (4)$$

Итак, можно условно выделить пять случаев: в качестве функций доверия можно использовать функцию, тождественно равную β —

случай 1, (1) — случай 2, (2) — случай 3, (3) — случай 4 или (4) — случай 5.

Для «осторожных» агентов введем следующую динамику мнений:

$$x_i^k = G_i(x_i^{k-1}, u^{k-1})u^{k-1} + (1 - G(x_i^{k-1}, u_i^{k-1}))x_i^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Более сложной будет являться динамика мнений агентов в неоднородной и нерегулярной (в общем случае) социальной сети:

$$x_i^k = \alpha_{ii}x_i^{k-1} + \beta G_i(x_i^{k-1}, u^{k-1})u^{k-1} + \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} G_i(x_i^{k-1}, x_j^{k-1})x_j^{k-1},$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Исследование данной динамики весьма перспективно, так как в рамках такой модели можно условно содержательно считать, что она отражает доверие агентов источникам информации и содержанию информации [2].

Понятие управления в данной модели будем отождествлять с влиянием СМИ. Вектор последовательностей управления

$$u^{0, T+n-1} = (u^0, \dots, u^{T-1}, u^T(c_1), \dots, u^{T+n-1}(c_n)) \in R^{T+n}$$

делим на две части: первая, это те отзывы о товаре, которые уже существуют и с которыми производитель ничего поделаться не может (здесь учитываются и отрицательные отзывы — антиреклама), а вторая часть — это разные виды СМИ (телевидение, радио, баннеры и т. д.), заказанные и оплаченные компанией производителя, т. е. они зависят от финансовых вложений c_1, \dots, c_n и имеют максимальный рейтинг (направлены на формирование «наилучшего» для продаж мнения).

4. Функции выбора. Вернемся к упомянутой ранее функции выбора. Как уже отмечалось, ее первая координата (отвечающая за собственное мнение) изменяется (у агентов, подверженных влиянию СМИ) или не изменяется, т. е. остается начально заданной (у агентов, не подверженных влиянию СМИ). Введем в функцию доверия дополнительную координату, а точнее функцию «доступности». Данная функция подразумевает под собой следующее. Товар или услуга

изначально имеет определенные характеристики, такие как цена, качество, страна (город) производитель, новизна на рынке и т. д. Рассмотрим функцию $\sigma(s_1, \dots, s_r)$, где s — объективные и известные характеристики товара/услуги. Аргументы функции «доступности» могут принимать значения $\{0, 1\}$, которые соответственно означают, не проходит товар/услуга по данной категории или подходит агенту. Логично предположить, что введенная функция также сможет принимать лишь два значения: d — доступен и n — недоступен, которые определяются интуитивным образом. Если хоть один из критериев получил «ноль», что товар/услуга считается недоступной для данного агента (n), если же все аргументы принимают значение «единица» — доступен (d).

Заметим, что функция выбора представляет собой бинарный выбор [1]. Положим, что ее первая координата (если она же не единственная) может принимать значения не $\{g, b\}$ а $\{1, 0\}$ соответственно, а мнение варьируется в промежутке $[0, 1]$ (всегда можно задать отображение, переводящее мнение в заданный отрезок). Рассмотрим, с учетом введения новой переменной, как будет высчитываться усовершенствованная функция выбора.

- $B_{NO}^0(\sigma, \omega_1)$:
 $if \ \sigma = d, \ \omega_1 = g \Rightarrow B_{NO}^0(\sigma, \omega_1) = a,$
 $if \ \sigma = n, \ \omega_1 = \forall \ or \ \sigma = d, \ \omega_1 = b \Rightarrow B_{NO}^0(\sigma, \omega_1) = r;$
- $B_{NO}^1(\sigma, \omega_1, \omega_2)$:
 $if \ \sigma = d, \ \omega_1 = g, \ \omega_2 = \forall \ or \ \sigma = d, \ \omega_1 = b, \ \omega_2 = g \Rightarrow$
 $B_{NO}^1(\sigma, \omega_1, \omega_2) = a,$
 $if \ \sigma = n, \ \omega_1, \ \omega_2 = \forall \ or \ \sigma = d, \ \omega_1 = b, \ \omega_2 = b \Rightarrow$
 $B_{NO}^1(\sigma, \omega_1, \omega_2) = r;$
- $B_{NO}^2(\sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$:
 $if \ \sigma = d, \ \omega_3 = g, \ \omega_1, \ \omega_2 = \forall \Rightarrow B_{NO}^2(\sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = a,$
 $if \ \sigma = n, \ \omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3 = \forall \ or \ \sigma = d, \ \omega_3 = b, \ \omega_1, \omega_2 = \forall$
 $\Rightarrow B_{NO}^2(\sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = r;$
- $B_{YES}^0(\sigma, \omega_1), \omega_1 = x^*$:
 $if \ \sigma = d, \ \omega_1 \geq 0,5 \Rightarrow B_{YES}^0(\sigma, \omega_1) = a,$
 $if \ \sigma = n, \ \omega_1 = \forall \ or \ \sigma = d, \ \omega_1 < 0,5 \Rightarrow B_{YES}^0(\sigma, \omega_1) = r;$

- $B_{YES}^1(\sigma, \omega_1, \omega_2), \omega_1 = x^*$:
if $\sigma = d, \omega_1 \geq 0,5, \omega_2 = \forall$ *or* $\sigma = d, \omega_1 < 0,5, \omega_2 = g \Rightarrow$
 $B_{YES}^1(\sigma, \omega_1, \omega_2) = a,$
if $\sigma = n, \omega_1, \omega_2 = \forall$ *or* $\sigma = d, \omega_1 < 0,5, \omega_2 = b \Rightarrow$
 $B_{YES}^1(\sigma, \omega_1, \omega_2) = r;$
- $B_{YES}^2(\sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_1 = x^*$:
if $\sigma = d, \omega_3 = g, \omega_1, \omega_2 = \forall \Rightarrow B_{YES}^2(\sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = a,$
if $\sigma = n, \omega_1, \omega_2, \omega_3 = \forall$ *or* $\sigma = d, \omega_3 = b, \omega_1, \omega_2 = \forall$
 $\Rightarrow B_{YES}^2(\sigma, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = r.$

Заметим, что третье и последнее правила вычисления функции выбора одинаковы, следовательно, не стоит рассматривать один из них.

5. Вывод постановки задачи. Проведя все вычисления, можно прогнозировать количество агентов, готовых купить товар. Логично предположить, что количество агентов, готовых купить товар, пропорционально количеству прибыли. Следовательно, получаем функцию прибыли, зависящую от вложений и ставим задачу ее максимизации при минимизации затрат (или их ограниченности).

$$\begin{aligned} \Gamma(c_1, \dots, c_n) &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^k c_j &\rightarrow \min, \\ \Gamma(c_1, \dots, c_n) &\geq \Gamma_0, \\ \sum_{j=1}^k c_j &\leq c_0. \end{aligned}$$

В зависимости от цели моделирования возможны и другие постановки задач в рамках данной теории.

Литература

1. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры М.: СИНТЕГ, 2003. 160 с.
2. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства / Под ред. чл.-корр. РАН Д. А. Новикова. М.: Физматлит, 2010. 228 с.

Петрашко А. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Теоретико-игровое моделирование ретрансляции данных в беспроводных сетях

Рекомендовано к публикации доцентом Париллиной Е. М.

1. Введение. Повышение эффективности совместной передачи данных в беспроводных сетях — актуальная задача на сегодняшний день. Особый интерес представляет ситуация, когда зона покрытия беспроводной сети не охватывает сразу все узлы, сигнала устройства не хватает для передачи данных напрямую в нужный узел. Тогда приходится передавать данные через посредников-ретрансляторов, которые устраняют так называемые «мертвые точки». В статье рассмотрена оптимизация передачи данных в беспроводной сети с точки зрения кооперативной теории игр.

2. Модель кооперативной игры. Рассмотрим систему, состоящую из четырех узлов, в которой узлы 1, 2 независимо генерируют пакеты данных на каждом промежутке времени с вероятностями a_1 и a_2 соответственно, а узлы S_1 и S_2 могут только принимать пакеты данных.

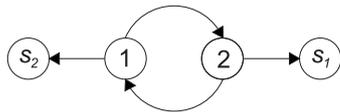


Рис. 1. Модель беспроводной сети

Введем обозначение состояния узла: (a, b) , где a — кол-во пакетов, сгенерированных непосредственно в узле, b — кол-во принятых пакетов. Назовем слот, на котором находятся сгенерированные пакеты — *внут-*

ренним уровнем, соответственно, слот, где хранятся принятые пакеты, — *внешним уровнем*. Максимальная вместимость на каждом уровне равна единице. Пакет данных может появиться в узле i с вероятностью a_i , только если в конце временного промежутка очередь на внутреннем уровне узла i пуста, $i = 1, 2$.

Сделаем следующие предположения:

- узел 1 стремится передать пакет данных, появившийся у него, в конечный пункт назначения — узел S_1 . Соответственно, узел 2 — в S_2 ;

- все передаваемые пакеты данных имеют одинаковый размер, и узлам требуется ровно одна единица времени для передачи каждого пакета;
- одновременная передача пакета различным получателям, передача нескольких пакетов, одновременная отправка и получение пакетов невозможны;
- если в какой-либо момент времени игрок i пересылает пакет игроку j , который в данный момент отправляет пакет данных, то передаваемый пакет отклоняется и возвращается обратно игроку i ;
- если при отправке пакета у принимающего игрока уже присутствует пакет на внешнем уровне, то передаваемый пакет также отклоняется и возвращается обратно отправляющему игроку. В противном случае, принимающий игрок решает принять или отклонить пакет, передаваемый ему.

3. Схема поощрений и наказаний. При передаче данных в беспроводной сети предполагается следующая система поощрений и наказаний:

1. Величина F_i — премия за успешную доставку пакета, сгенерированного в i -ом узле, в узел S_i ($0 < F_i < 1$), где $F_i = G_i + H_j$, число G_i — премия, которую получает i -ый игрок за успешную доставку пакета в узел j , $j \neq i$; H_j — премия, которую получает j -ый игрок за успешную доставку пакета в узел S_i , $i \neq j$.
2. Величины $g > 0$, $h > 0$ — штрафы за задержку доставки пакета данных на один промежуток времени для внутреннего и внешнего уровней соответственно ($g < \max\{G_1, G_2\}$, $h < \max\{H_1, H_2\}$).
3. Величина $D_{ij} > 0$ — это издержки по пересылке одного пакета данных от узла i к узлу j , которые несет игрок i . Пусть $D_{12} = D_{21}$.

Процесс передачи данных может остановиться в любой промежуток времени с вероятностью $0 \leq q \leq 1$. Выигрыш игрока в каждый промежуток времени определяется как разница между наградой и затратами, полученными в этот промежуток. Игроки стремятся максимизировать ожидаемый суммарный выигрыш с последующим разделом этого выигрыша с помощью вектора Шепли.

4. Марковская игра ретрансляции данных. Описанная выше динамическая модель передачи данных в беспроводной сети, изображенная на рис. 1, может быть представлена марковской игрой, т. е. следующим набором [2]:

$$G = \left\{ N, \{\Gamma^j\}, q, \pi, p(j, k, u^j)_{j=\overline{1,t}, k=\overline{1,t}, u^j \in \prod_{i=1}^n U_i^j} \right\},$$

где N — множество игроков, одинаковое для всех игровых элементов Γ^j , Γ^j — это игра n лиц вида $\{N, U_i^j, K_i^j\}$, U_i^j — множество стратегий i -го игрока в игре Γ^j , K_i^j — множество выигрышей i -го игрока в игре Γ^j . Множества U_i^j, K_i^j конечны для любого игрока $i \in N$ и любого игрового элемента Γ^j . Число q — вероятность окончания игры, π — вектор начальных вероятностей реализации игровых элементов, $p(j, k, u^j)$ — вероятность того, что состоится игра Γ^k , если на предыдущем шаге (в игровом элементе Γ^j) реализовалась ситуация u^j в игре Γ^j .

Марковская игра происходит следующим образом.

1. На нулевом шаге случайно выбирается игровой элемент в соответствии с вероятностями, образующими вектор начального распределения вероятностей $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_t)$, т. е. с вероятностью π_1 марковская игра G начнется с игрового элемента Γ^1 , с вероятностью π_2 — с игрового элемента Γ^2 и так далее. Пусть реализуется вероятность π_j , т. е. выбран игровой элемент Γ^j .
2. Пусть на первом шаге в марковской игре G реализуется игровой элемент Γ^j , и ситуация $u^j \in U^j = \prod_{k=1}^n U_k^j$. Далее игра либо прекращается с вероятностью $0 \leq q \leq 1$, либо с вероятностью $(1 - q)$ переходит на следующий шаг.
3. На втором шаге игры G происходит одна из игр $\Gamma^1, \dots, \Gamma^t$ с вероятностями $p(j, 1, u^j), \dots, p(j, t, u^j)$ соответственно. На втором шаге игра может прекратиться с вероятностью $0 \leq q \leq 1$, либо с вероятностью $(1 - q)$ перейти на третий шаг. Таким же образом марковская игра продолжается далее.

Обозначим через $\{Q_1, Q_2\}$ состояние в беспроводной сети, где Q_i — вектор, обозначающий число пакетов на внутреннем и внешнем уровнях в очереди игрока $i = 1, 2$, Q_i может принимать четыре

значения: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$. Всего в игре возможно 16 состояний:

$$X = (\{(0, 0), (0, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}, \dots, \{(1, 1), (1, 0)\}, \{(1, 1), (1, 1)\}).$$

Будем предполагать, что игроки имеют информацию не только о своей очереди, но и об очереди остальных игроков. Это предположение разумно, поскольку мы пытаемся найти кооперативное решение, которое подразумевает совместные действия, включая обмен информацией о состоянии очередей всех игроков.

4.1. Стратегии игроков. Смешанная стационарная стратегия первого игрока такова, что он выбирает:

- стратегию $A_3^1(\omega)$ с вероятностью 1 в состояниях $\{(0, 0), (0, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0), (0, 1)\}$;
- стратегию $A_4^1(Ac)$ с вероятностью p_{11} в состоянии $\{(0, 0), (1, 0)\}$, с вероятностью p_{12} в состоянии $\{(0, 0), (1, 1)\}$, с вероятностью p_{16} в состоянии $\{(1, 0), (1, 1)\}$;
- стратегию $A_2^1(\rightarrow S_2)$ с вероятностью 1 в состояниях $\{(0, 1), (0, 1)\}, \{(1, 1), (0, 1)\}, \{(1, 1), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}$;
- стратегию $A_1^1(\rightarrow 2)$ с вероятностью p_{13} в состоянии $\{(1, 0), (0, 0)\}$, с вероятностью p_{17} в состоянии $\{(1, 1), (0, 0)\}$, с вероятностью p_{18} в состоянии $\{(1, 1), (1, 0)\}$;
- стратегию $A_1^1(\rightarrow 2)$ с вероятностью p_{14} и стратегию $A_4^1(Ac)$ с вероятностью p_{15} в состоянии $\{(1, 0), (1, 0)\}$,

где $A_3^1(\omega)$ — ожидать (wait), $A_4^1(Ac)$ — принять пакет данных, присланный другим игроком (Accept), $A_2^1(\rightarrow S_2)$ — отправить пакет данных в узел S_2 , $A_1^1(\rightarrow 2)$ — отправить пакет данных в узел 2. Смешанная стационарная стратегия второго игрока определяется аналогично.

Обозначим через u_1, u_2 смешанные стационарные стратегии первого и второго игрока соответственно. Где $u_1 = (p_{11}, \dots, p_{18})$, $u_2 = (p_{21}, \dots, p_{28})$. Получаем ситуацию в смешанных стационарных стратегиях в марковской игре

$$u = (u_1, u_2) = (p_{11}, \dots, p_{18}, p_{21}, \dots, p_{28}).$$

Матрица вероятностей перехода в ситуации u в смешанных стационарных стратегиях будет следующей:

$$\Pi(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{116} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{216} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{161} & \alpha_{162} & \cdots & \alpha_{1616} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{11} = (1-a_1)(1-a_2)$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = (1-a_1)a_2$, $\alpha_{14} = 0$. Остальные вероятности перехода определим подобным образом.

4.2. Выигрыши игроков. Если в игре реализуется ситуация в стационарных стратегиях u , то выигрыши первого игрока в соответствующих состояниях будут следующими [1]

$$K_1(u) = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{116})^T,$$

где $k_{11} = k_{12} = k_{13} = k_{14} = z$, $k_{15} = k_{16} = k_{17} = k_{18} = (z + H_1 - D_{1S_2})$, $k_{19} = (z + G_1 - D_{12})p_{13}p_{23} + (z - D_{12} - g)p_{13}(1 - p_{23}) + (z - g)(1 - p_{13})$, где $z = -\min\{0, -g, G_i - D_{12}, -D_{12} - g, H_i - D_{1S_2}, H_i - D_{2S_1}, H_i - D_{2S_1} - g, H_i - D_{1S_2} - g, G_i - D_{12} - h, -D_{12} - g - h, -D_{21} - h - g\}$, $i = 1, 2$. Остальные элементы вектора $K_1(u)$ определяются аналогичным образом. У второго игрока вектор выигрышей определяется аналогичным образом

$$K_2(u) = (k_{21}, k_{22}, \dots, k_{216})^T.$$

5. Кооперативное решение марковской игры. Кооперативную игру передачи данных в беспроводной сети будем рассматривать в классе чистых стационарных стратегий. Обозначим через Φ_i множество чистых стационарных стратегий игрока i , $i = 1, 2$. Для каждой ситуации в чистых стационарных стратегиях $\eta \in \Phi = \prod_{i=1}^2 \Phi_i$ можно посчитать математическое ожидание выигрышей игроков для подыгры, начинающейся с определенного состояния $E_i(\eta) = (E_i^{\{(0,0),(0,0)\}}(\eta), E_i^{\{(0,0),(0,1)\}}(\eta), \dots, E_i^{\{(1,1),(1,1)\}}(\eta))$ по формуле [3]:

$$E_i(\eta) = (E - (1 - q)\Pi(\eta))^{-1}K_i(\eta),$$

где $K_i(\eta)$, $\Pi(\eta)$ определены ранее. Математическое ожидание выигрыша игрока i с учетом выбора начального состояния $\bar{E}_i(\eta) = \pi E_i(\eta)$.

Для решения марковской игры необходимо найти кооперативное решение $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$, т. е. ситуацию в чистых стационарных стратегиях такую, что

$$\sum_{i \in \{1,2\}} \bar{E}_i(\bar{\eta}) = \max_{\eta \in \Phi} \sum_{i \in \{1,2\}} \bar{E}_i(\eta).$$

Значение характеристических функций подыгр можно рассчитать по формуле

$$V^t(S) = \max_{\eta_S} \min_{\eta_{N \setminus S}} \sum_{i \in S} E_i^t(\eta_S, \eta_{N \setminus S}).$$

Значение характеристической функции для всей марковской игры определяется формулой $\bar{V}(S) = \pi V(S)$, $\bar{V}(\emptyset) = 0$.

В качестве дележа максимального суммарного математического ожидания выигрыша игроков рассмотрим вектор Шепли. Обозначим через $Sh = (Sh_1, Sh_2)$ вектор Шепли, рассчитанный для подыгр, где

$$Sh_i = (Sh_i^{\{(0,0),(0,0)\}}, Sh_i^{\{(0,0),(0,1)\}}, \dots, Sh_i^{\{(1,1),(1,1)\}}),$$

через $\bar{Sh} = (\bar{Sh}_1, \bar{Sh}_2)$ вектор Шепли, рассчитанный для всей марковской игры, т. е. $\bar{Sh}_i = \pi Sh_i$.

6. Заключение. Полученное кооперативное решение для игры передачи данных позволяет наладить работу беспроводной сети и получить от этой работы максимальный ожидаемый результат.

Литература

1. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. 302 с.
2. Парилина Е. М. Кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети // Управление большими системами. Спец. выпуск 31.1 «Математическая теория игр и ее приложения». М.: ИПУ РАН, 2010. С. 191–209.
3. Shapley L. S. Stochastic Games // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA, 1953. Vol. 39. P. 1095–1100.

Петросян О. Л., Буре В. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Метод множественной регрессии в задаче с неполными данными

1. Введение. Для прогнозирования числа поступающих на факультет Прикладной математики – процессов управления по различным направлениям важным показателем является число поданных аттестатов на первой стадии подачи документов. Это число естественно зависит от балла ЕГЭ, а также от общего числа поданных аттестатов (подлинников и копий). В работе построена эта зависимость на основе выборки, полученной по результатам приема на факультете ПМ–ПУ в 2011 году. Качество полученных результатов проверено на выборке 2012 года и поэтому может быть использовано в практической работе приемной комиссии в 2013 году.

Для анализа данных в работе предлагается статистический подход, использующий множественную регрессию. Имеется шкала значений баллов ЕГЭ, разбитая на интервалы (длина интервала равна 5 баллов). Для данной шкалы определено три выборки: выборка значений баллов в середине каждого из интервалов — X_1 , выборка числа абитуриентов, подавших документы, суммарный балл по ЕГЭ которых принадлежит промежутку на шкале, для каждого из промежутков — X_2 и выборка количества поступивших для каждого из промежутков на шкале — Y . Соответствующие выборки представлены для направления: ФИ и ИТ. Выборка с количеством зачисленных представлена с учетом квоты на поступление, т. е. выборка с количеством подлинных аттестатов с учетом квоты (см. таблицу 1).

В работе строится уравнение множественной регрессии по числу поступивших в 2011 году в зависимости от значения балла по ЕГЭ и количеству абитуриентов, сдавших документы с соответствующим количеством баллов. Строится прогноз на 2012 год, сравнивается с реальными значениями и делается вывод. Проверяются гипотезы о значимости построенных уравнений. Возможно построение прогноза для количества подлинников, если это целесообразно, на 2013 год.

Таблица 1. Статистика данных о приеме на 2011 год с учетом квоты

Баллы	ФИ и ИТ	Зачислены
X_1	X_2	Y
297,5	1	1
292	0	0
287	4	0
282	5	1
277	5	1
272	9	1
267	15	3
262	18	3
257	31	8
252	39	4
247	35	6
242	42	10
237	48	0
232	46	0
227	38	0
222	43	0
217	33	0
212	22	0
207	24	0
202	20	0
197	13	0
192	13	0
187	7	0
182	5	0
177	2	0
172	8	0
Квота		38

2. Уравнение множественной регрессии для количества подлинных аттестатов. Имеются выборки $\{X_1, X_2, Y\}$, где $X_1 = (x_{1,1}, \dots, x_{m,1})$, $x_{j,1}$ — среднее значение балла по ЕГЭ в j -ом промежутке (промежутки находятся в шкале баллов по ЕГЭ), $X_2 = (x_{1,2}, \dots, x_{m,2})$, $x_{j,2}$ — количество абитуриентов, которые имеют балл по ЕГЭ, находящийся в j -ом промежутке, $Y = (y_1, \dots, y_m)$, где y_j — количество абитуриентов, которые сдали подлинники и имеют балл по ЕГЭ, схожий со значением $x_{j,1}$.

Будем предполагать, что количество подлинных аттестатов, поданных на факультет ПМ–ПУ, является случайной величиной и подчиняется уравнению

$$y_i = ax_{i,1} + bx_{i,2} + c + \varepsilon_i, \quad (1)$$

где ε_i — случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению с параметрами $(0, \sigma_i^2)$, a, b, c — параметры, характеризующие зависимость.

Найдем оценки \hat{a} , \hat{b} и \hat{c} методом наименьших квадратов, используя данные из таблицы 1. Получаем уравнение множественной регрессии для количества подлинных аттестатов:

$$\tilde{y} = 0,023x_1 + 0,066x_2 - 5,348. \quad (2)$$

Для оценки значимости уравнения (2) будем проверять справедливость гипотезы $H_0 : a = b = 0$ (что означает статистическую незначимость построенной множественной регрессии). Для проверки применим критерий Фишера, критическое значение выберем для уровня значимости 0,05 из распределения Фишера с числом степеней свободы числителя k и знаменателя $(m - k - 1)$, где k — количество факторов в модели, m — объем выборки (количество интервалов). Значение F -статистики оказалось равным 3,584, критическая точка, соответствующая уровню значимости 0,05, из распределения Фишера с числом степеней свободы числителя $k = 2$ и знаменателя $m - k - 1 = 23$ равна 3,422. Таким образом, на выбранном уровне значимости 0,05 гипотезу $H_0 : a = b = 0$ следует отклонить и признать построенную зависимость (2) статистически значимой. Однако, как следует из проведенных расчетов, коэффициент детерминации $R^2 = 0,238$, что свидетельствует о недостаточно высоком качестве построенной зависимости. Найденная зависимость плохо описывает результаты наблюдений и непригодна для прогнозирования.

На основе построенного уравнения (2) не представляется возможным прогнозирование количества подлинников на основании имеющихся выборочных данных. Требуется проанализировать выборку подлинных аттестатов, которая у нас имеется. Нетрудно заметить, что нули, которые присутствуют в выборке Y , соответствующие баллам 172–237, являются следствием квоты, установленной на количество свободных мест на направление ФИ и ИТ. Но необходимо установить зависимость между количеством подлинных аттестатов, соответствующим баллу по ЕГЭ, и количеством общего числа аттестатов (подлинных и копий), квота может быть учтена позже, т. е. выборка Y не полна, а, следовательно, нужно восстановить выборку, чтобы построить уравнение множественной регрессии, тем самым установить зависимость между количеством подлинников и соответствующими факторами.

3. Восстановление выборки подлинных аттестатов. По направлению ФИ и ИТ видно, что данные по подлинным аттестатам отсутствуют почти наполовину (в выборке Y содержится 16 элементов равных нулю), поэтому необходимо восстановить данную выборку. Заметим, что балл, с которым студент сдает документы на поступление (подлинники и копии), является случайной величиной. Тогда выборка X_1 — выборка, содержащая средние значения балла в промежутке, а X_2 — выборка, содержащая частоты попадания случайной величины в данный промежуток. С помощью критерия χ^2 удалось установить, что данная случайная величина распределена нормально. При этом использовалась приближенная схема проверки, когда неизвестные параметры оценивались по исходной выборке методом максимального правдоподобия. Определена оценка для математического ожидания данной случайной величины — выборочное среднее, и оно равно 232. Но, учитывая тот факт, что значения баллов в выборке X_1 — средние значения для балла ЕГЭ, можно сделать вывод о некотором искажении данных при подсчете выборочного среднего. Пользуясь этим, следует откорректировать его с учетом таблицы 1, т. е. принять выборочное среднее равным 235,5.

Сделаем предположение о том что балл, с которым абитуриент сдает подлинник, также является нормально распределенной случайной величиной с тем же математическим ожиданием, что и у случайной величины, описанной выше. Тогда X_1 — выборка, содержащая средние значения балла в промежутке, а Y — выборка, содержащая частоты попадания случайной величины в соответствующие промежутки.

Используем симметричность нормального распределения, чтобы восстановить выборку подлинных аттестатов («отображаем» половину выборки). Для этого необходимо иметь хотя бы половину выборки, т. е. необходимо иметь все «частоты» до математического ожидания данной выборки. Так как математическое ожидание, соответствующее выборкам X_2 и Y , одно и то же (по предположению), то необходимо спрогнозировать только одно значение в выборке Y с помощью уравнения множественной регрессии, построенной по нейтральным данным, а именно, по значениям, соответствующим баллам 242–297,5 (см. таблицу 1):

$$\tilde{y} = -0,009x_1 + 0,178x_2 + 2,444. \quad (3)$$

Полученное значение статистики Фишера равно 19,097, что больше,

чем критическое значение на уровне значимости 0,05 для данного распределения: 4,256. Коэффициент детерминации существенно вырос, теперь он равен 0,809. Отсюда следует статистическая значимость и высокая надежность построенного уравнения множественной регрессии.

Таблица 2. Статистика данных о приеме на 2011 год

Баллы	ФИ и ИТ	Зачислены
X_1	X_2	Y
297,5	1	1
292	0	0
287	4	0
282	5	1
277	5	1
272	9	1
267	15	3
262	18	3
257	31	8
252	39	4
247	35	6
242	42	10
237	48	8,97
232	46	8,97
227	38	10
222	43	6
217	33	4
212	22	8
207	24	3
202	20	3
197	13	1
192	13	1
187	7	1
182	5	0
177	2	0
172	8	1
Квота		38

4. Построение тестового прогноза на 2012 год. На основе восстановленных данных из таблицы 2 построим искомую зависимость методом наименьших квадратов с помощью уравнения множественной регрессии:

$$\tilde{y} = 0,007x_1 + 0,195x_2 - 1,933. \quad (4)$$

Получено значение для распределения Фишера: 45,118, что больше, чем в прошлом случае и больше, чем критическое значение для данного распределения: 3,422. Коэффициент детерминации $R^2 = 0,7969$. Отсюда следует статистическая значимость построенного уравнения множественной регрессии. Используя его, прогнозируем данные о приеме на 2012 год (см. таблицу 3).

Таблица 3. Статистика данных о приеме на 2012 год

Баллы	ФИ и ИТ	Пр. без квоты	Пр. с уч. квоты	Зачислены
X_1	X_2	\tilde{Y}	\tilde{Y}	Y
297,5	1	0	0	0
292	1	0	0	0
287	4	1	1	1
282	10	2	2	3
277	19	4	4	3
272	15	3	3	1
267	20	4	4	5
262	39	7	7	6
257	37	7	7	2
252	66	13	13	17
247	44	8	7	10
242	92	18	0	0
237	63	12	0	0
232	74	14	0	0
227	68	13	0	0
222	62	12	0	0
217	37	7	0	0
212	35	6	0	0
207	35	6	0	0
202	21	4	0	0
197	16	3	0	0
192	14	2	0	0
187	7	1	0	0
182	9	1	0	0
177	0	0	0	0
172	0	0	0	0
Квота			48	48

Оценим построенный прогноз с помощью коэффициента корреляции для выборок \tilde{Y} (прогноз с учетом квоты) и Y , он равен 0,894. Для оценки значимости коэффициента корреляции будем проверять справедливость гипотезы $H_0 : \rho(\tilde{y}, y) = 0$ (что означает статистическую незначимость построенного коэффициента корреляции). Для проверки будем применять критерий Стьюдента, критическое значение будем выбирать для уровня значимости 0,05 из распределения

Стьюдента с числом степеней свободы равным 10. Значение статистики t_r оказалось равным 6,301, критическая точка, соответствующая уровню значимости 0,05, из распределения Стьюдента с числом степеней свободы 10 равна 2,228. Таким образом, на выбранном уровне значимости 0,05 гипотезу $H_0 : \rho(\tilde{y}, y) = 0$ следует отклонить и признать коэффициент корреляции статистически значимым. Полученное значение коэффициента корреляции свидетельствует о том, что выборки \tilde{Y} (прогноз с учетом квоты) и Y распределены одинаково, что является важным показателем качества прогноза.

5. Заключение. Уравнение (4) может быть использовано для построения прогноза для количества подлинников по направлению ФИ и ИТ на 2013 год.

Литература

1. Greene W. H. Econometric analysis, 5th edition. New Jearsey: Pearson Education, 2003. 1026 p.
2. Буре В. М., Евсеев Е. А. Основы эконометрики. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 72 с.
3. Ван Дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М.: Изд-во ИЛ, 1960. 436 с.

Платонова В. А., Губар Е. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Задача размещения новых филиалов банка в банковской сети

1. Введение. В данной работе рассматривается сеть банкоматов крупного города, где некоторая подсеть банкоматов располагается на достаточном удалении от центра города, а также в различных районах области. Обслуживание банкоматов происходит из инкассаторского центра, который расположен в филиале банка. При этом обслуживание удаленных от центра города банкоматов вызывает дополнительные издержки. Поэтому возникает вопрос о целесообразности размещения дополнительных инкассаторских центров и изменения маршрутов инкассации. Данная задача является модификацией задачи Vehicle Routing Problems (VRP) — Multi-Depots Location Routing Problem (MDLRP) [1].

Основной целью данной работы является изменение известной задачи MDLRP. Также на примере одного из банков г. Санкт-Петербурга проиллюстрирована работа нескольких методов, в результате использования которых определяется оптимальное размещение новых филиалов банка и построение маршрутов инкассации.

2. Постановка задачи. Рассмотрим сеть банкоматов одного из банков г. Санкт-Петербурга, состоящую из L банкоматов и нескольких филиалов. Каждый филиал отвечает за свою подсеть банкоматов, имея в распоряжении несколько инкассаторских бригад.

Поскольку сеть банкоматов включает пункты внутри городской черты и за ее границей, было принято решение открыть новый филиал банка с целью уменьшения издержек при обслуживании удаленностоящих банкоматов. Расстояния между банкоматами и филиалами сети заданы матрицей расстояний C .

Пусть [2]: I — множество всех филиалов банка, J — множество всех банкоматов, K — множество всех машин, тогда i — номер филиала, j — номер банкомата, k — номер машины, N — общее количество машин, C_{ij} — расстояние между пунктами i и j , где $i, j \in I \cup J$, V_i — количество кассет с наличностью, которым располагает i -ый филиал банка, d_j — количество кассет с наличностью, которое необходимо загрузить в j банкомат, F — расходы на работу инкасса-

торских бригад, O_i — затраты на открытие нового филиала, Q_k — вместимость транспортного средства машины k ,

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если филиал } i \text{ открыт,} \\ 0, & \text{если филиал } i \text{ закрыт.} \end{cases}$$

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ предшествует } j \text{ по маршруту } k, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если банкомат } j \text{ объединяется с филиалом } i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

3. Математическая модель. Рассмотрим математическую модель задачи MDLRP.

$$\begin{aligned} \min & \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jl} x_{jlk} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ji} x_{jik} + \right. \\ & \left. + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} F x_{ijk} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} F x_{jlk} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} F x_{jik} + \sum_{i \in I} O_i y_i \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I} x_{ijk} = 1, \quad j \in J, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} + \sum_{j \in J} \sum_{l \in J} x_{jlk} = 1, \quad k \in K, \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} x_{ijk} = 1, \quad i \in I, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} d_j \left(\sum_{i \in I} x_{ijk} + \sum_{j, l \in J} x_{jlk} \right) \leq Q_k, \quad k \in K, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq J, \quad k \in K, \quad (6)$$

$$\sum_{j, l \in J} x_{jlk} - \sum_{j, l \in J} x_{ljk} = 0, \quad k \in K, \quad (7)$$

$$\sum_{j \in J} d_j z_{ij} \leq V_i, \quad i \in I, \quad (8)$$

$$-z_{ij} + \sum_{u \in I \cup J} (x_{iuk} + x_{ujk}) \leq 1, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x_{ijk} & \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \\ z_{ij} & \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь выражение (1) соответствует целевой функции затрат; (2)–(4) гарантирует то, что инкассаторская бригада обслуживает банкомат только один раз; (5) — ограничение на вместимость машин; (6) — устраняет подмаршруты, входящие в маршрут машины k ; (7) — ограничение, отсекающее повторяющиеся маршруты, так как расстояние от банкомата i до j равно расстоянию от банкомата j до i ; (8) — общее количество кассет с наличностью, запрашиваемое банкоматами для их пополнения в маршруте, связанном с i -ым филиалом банка, не должно превышать количество кассет с наличностью, которыми располагает i -ый филиал; (9) — банкомат и один из филиалов могут быть объединены в маршрут машины k , если есть маршрут, проходящий через этот филиал и банкомат; (10) — бинарные переменные.

4. Методы решения задачи MDLRP. В задаче MDLRP рассматриваются несколько филиалов банка (центров инкассации), одни из которых — это уже открытые филиалы, а другие — фиктивные, которые еще планируется открыть. Следует отметить, что в ходе решения задачи определяются только такие фиктивные филиалы, размещение которых будет оптимальным в поставленной задаче.

Рассмотрим этапы решения MDLRP:

1. На первом шаге происходит группировка одного филиала и близлежащих к нему банкоматов за счет сравнения расстояний между ними. Таким образом, задача построения маршрутов инкассирования разделяется на несколько подзадач в зависимости от количества филиалов. Учитывая ограничения задачи, строим допустимое решение.
2. Из-за большого количества переменных задачу невозможно решить методами линейного программирования, поэтому для уменьшения их числа воспользуемся методом «супер-банкоматов», предложенным в статье [3]:
 - допустим, что имеется несколько предполагаемых мест для открытия нового филиала. Найдем допустимое решение исходной системы (1)–(10) любым эвристическим алгоритмом, например, методом Кларка — Райта, учитывая все возможные местоположения филиалов;
 - исключим филиалы из построенных маршрутов;
 - объединим банкоматы каждого маршрута в «супер-банкоматы»;
 - построим маршруты с новыми объединёнными банкоматами и филиалами;

- в каждом построенном маршруте разобьем «супер-банкоматы», в следствии чего получим новое решение.

Рассмотрим математическую модель задачи MDLRP для «супер-банкоматов»:

$$\begin{aligned} \min & \left(\sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} C_{ik} X_{ik} \right), \\ & \sum_{i \in I} X_{ik} = 1, \quad k \in K, \\ & \sum_{k \in K} D_k X_{ik} \leq V_i y_i, \quad i \in I, \\ & X_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad k \in K, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I. \end{aligned}$$

В отличие от модели MDLRP (1)–(10) число ограничений значительно уменьшилось.

5. Пример решения задачи типа MDLRP. Рассмотрим подсеть банкоматов размерности 90. Допустим, что поступила заявка [4] на обслуживание 15 банкоматов, расположенных по следующим адресам: (1) Новаторов бульвар, 11/2; (2) Народного Ополчения пр., 2; (3) Маршала Жукова пр., 30; (4) г. Стрельна, ул. Фронтальная, 1; (5) Стачек пр., 105; (6) Дачный пр., 33/1; (7) г. Красное Село, Стрельнинское ш., 4/1; (8) г. Стрельна, Заводская дорога, 11; (9) пос. Горелово, ул. Политрука Пасечника, 5/1; (10) г. Красное Село, ул. Красногородская, 17/1; (11) ул. Партизана Германа, 37; (12) ул. Рихарда Зорге, 1; (13) г. Петродворец, ул. Разводная, 2; (14) Стачек пр., 18; (15) ул. Лени Голикова, 3.

Адреса филиалов: г. Красное село, ул. Восстановления, 66(А) – открыт, три следующих являются фиктивными: г. Красное село, ул. Свободы, д. 50 (В), д. Горбунки, д. 3 (С), г. Стрельна, Петербургское ш., д. 88 (D).

Из заявки следует, что рассматриваются банкоматы, находящиеся на значительном удалении от центра города.

Требуется найти оптимальное размещение для открытия нового филиала банка, чтобы издержки инкассации были минимальны и все ограничения учтены.

Предположим, в каждый банкомат требуется загрузить $d_i = 4$ кассеты, вместимость инкассаторской машины $Q = 16$. Расстояния между банкоматами и филиалами банка заданы.

Этапы решения:

1) сгруппируем филиалы и банкоматы: филиал А: 3, 5, 7; филиал В: 9, 10; филиал С: не сгруппирован ни с одним банкоматом; филиал

D: 1, 2, 4, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15.

Допустимое решение: $A - 7 - 3 - 5 - A$; $B - 10 - 9 - B$; $D - 4 - 8 - 13 - 12 - D$; $D - 11 - 15 - 1 - 2 - D$; $D - 6 - 14 - D$

2) Воспользуемся методом «супер-банкоматов».

Исключим филиалы из построенных маршрутов и объединим банкоматы в «супер-банкоматы», которые будут иметь вид:

$a = 7 - 3 - 5$; $b = 10 - 9$; $d = 4 - 8 - 13 - 12$; $e = 11 - 15 - 1 - 2$;
 $f = 6 - 14$.

Так как количество неизвестных значительно уменьшилось, решение данной задачи сводится к решению системы линейных уравнений. В результате получили, что допустимое решение является оптимальным. Анализируя полученное решение, можно сделать следующие выводы: филиал С не связан ни с одним банкоматом, следовательно, его открывать не целесообразно; филиал В связан с двумя банкоматами, но он располагается вблизи филиала А, поэтому, банкоматы 9 и 10 объединим с филиалом А; местоположение филиала D (г. Стрельна, Петербургское ш., д. 88) оптимально для рассматриваемой сети. В полученной подсети оптимальные маршруты инкассации строятся с помощью методов решения задачи типа MDVRP (Multi-Depots VRP).

6. Заключение. В данной работе была представлена модифицированная модель задачи маршрутизации VRP. Также на примере одного из банков г. Санкт-Петербурга была рассмотрена реализация метода «супер-банкоматов».

Литература

1. Randolph W. Hall. Handbook of Transportation Science: Kluwer Academic Publishers, 2003. 741 p.
2. Ralphs T.K., Kopman L., Pulleyblank W.R., Trotter L.E. On the Capacitated Vehicle Routing Problem // Mathematical Programming, 2003. Vol. 94 P. 343–359.
3. Prins C., Prodhon C., Ruiz A., Soriano P., Calvo R. W. Solving the Capacitated Location-Routing Problem by a Cooperative Lagrangean Relaxation-Granular Tabu Search Heuristic. // Transportation Science, 2007. Vol. 41, No. 4. P. 470–483.
4. Gubar E., Zubareva M. Optimization of Encashment Routs in ATM Network // Contributions to game theory and management, 2012. Vol 5. P. 121–127.

Романова О. Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет

Эндогенно управляемая экономико-климатическая модель¹

Рекомендовано к публикации профессором Прасоловым А. В.

1. Введение. Проблема антропогенно обусловленных изменений климата принадлежит к числу наиболее острых глобальных проблем. Изменение климата, как ожидается, отрицательно скажется на воде, пище, здоровье человека и, в конечном счете, на экономическом росте. Глобальные выбросы углекислого газа в атмосферу, которые вносят наибольший вклад в антропогенные изменения климата, на сегодняшний день тесно связаны с объемами производства в экономике. Таким образом, существует отрицательная обратная связь между экономикой и климатом: увеличение производства в экономике приводит к увеличению выбросов и глобального потепления; глобальное потепление наносит ущерб экономике, снижая ее рост или даже приводя ее в упадок. В данной статье представлена модель, описывающая эту взаимосвязь экономики и климата.

2. Описание модели. Модель состоит из двух взаимодействующих модулей — экономического и климатического. Экономический модуль описывает динамику макроэкономических переменных в условиях антропогенных изменений климата, а климатический модуль описывает динамику глобальных климатических переменных, оказывающих влияние на экономический рост.

2.1. Экономический модуль. Экономический модуль является развитием экономической модели, предложенной в [1], и описывает экономический рост в замкнутой экономике в условиях воздействия последствий глобальных изменений климата. Все экономические переменные в модели рассматриваются на душу трудоспособного населения. Предполагается, что трудоспособное население растет экспоненциально с постоянным показателем λ_L : $L(t) = L_0 e^{\lambda_L t}$.

Капитал разделяется на «производительный» (производящий выпуск) капитал k и капитал, смягчающий антропогенные изменения

¹Работа выполнена совместно с Научным фондом «Международный центр по окружающей среде и дистанционному зондированию им. Нансена» и при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-06-00381

климата, k_a . Размеры выпуска в экономике определяются линейной производственной функцией $y = \nu k$, где ν — постоянный производственный параметр.

Предполагается, что рост глобальной температуры T наносит ущерб экономике, уменьшая ее эффективный выпуск за счет функции климатического ущерба $\chi(T)$, поэтому эффективный выпуск определяется выражением $y = \chi(T)\nu k$. Доля τ эффективного выпуска инвестируется в капитал k_a , иначе говоря, τ — это ставка налога на выбросы углекислого газа.

Все трудоспособное население делится на два социальных класса: предприниматели (они составляют постоянную долю ϑ ($0 < \vartheta < 1$) от населения $L_e = \vartheta L$) и наемные работники (соответственно, $L_w = (1 - \vartheta)L$). Потребление работника — это заработная плата w , потребление предпринимателя — это дивиденды d .

Экономический модуль состоит из пяти дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{k} &= (1 - \tau)\chi(T)\nu k - (\lambda_L + \delta)k - (1 - \vartheta)w - \vartheta d, \\ \dot{k}_a &= \tau\chi(T)\nu k - (\lambda_L + \delta_a)k_a, \\ \dot{w} &= \lambda_w \left(q \frac{\chi(T)\nu - \lambda_L - \delta}{1 - \vartheta} k - w \right), \\ \dot{d} &= \alpha_d(1 - \tau)\chi(T)\nu k + \beta_d w + \gamma_d d, \\ \dot{\tau} &= \alpha_\tau(1 - \tau)\chi(T)\nu k + \beta_\tau \tau + \gamma_\tau T.\end{aligned}$$

Первые два уравнения описывают динамику капитала k и капитала k_a , δ и δ_a их нормы износа. Третье уравнение отражает переговорный процесс между предпринимателями и наемными работниками, результатом которого является некоторая доля q целевой заработной платы работников, зависящей от текущего состояния экономики (определяется, исходя из условий «идеального» для работников режима функционирования экономики: $d = 0$, $w = w_{target}$, $\tau = 0$, $\chi(T) = 1$). Постоянный параметр λ_w характеризует скорость «приспособления» заработной платы к желательному для работников значению. Четвертое и пятое уравнения описывают эмпирическую модель управляющих стратегий предпринимателей и государства, соответственно, заданные в виде непрямого регулирования ($\alpha_d, \beta_d, \gamma_d, \alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$ — параметры управления). Предполагается, что государство влияет на экономику только за счет регулирования ставки налога на выбросы углекислого газа τ .

2.2. Климатический модуль. В основе уравнений климатического модуля лежит экономико-климатическая модель, представленная в статье [2]:

$$\dot{C} = \eta_0 e^{-\xi k_a} \nu k L_0 e^{\lambda_L t} - \frac{1}{\tau_C} (C - C_{PI}),$$

$$\dot{T} = \frac{1}{\tau_T} \left(\frac{\Delta T}{\ln 2} \ln \frac{C}{C_{PI}} - T \right).$$

Первое уравнение описывает динамику концентрации углекислого газа в атмосфере C . Выражение $\eta_0 e^{-\xi k_a}$ в первом уравнении климатического модуля — это величина выбросов углекислого газа на единицу выпуска, которая убывает экспоненциально при увеличении капитала k_a ; C_{PI} — доиндустриальное значение концентрации углекислого газа. Второе уравнение описывает изменение глобальной температуры T по сравнению с доиндустриальным значением, ΔT — значение изменения глобальной температуры T при удвоенной доиндустриальной концентрации углекислого газа.

2.3. Функция климатического ущерба. Одной из самых больших неопределенностей в экономико-климатическом моделировании является вопрос идентификации функции климатического ущерба. В настоящей статье используется квадратичная функция вида $\chi(T) = 1 - (aT^2 + bT)$, $a > 0$, т. е. в доиндустриальный период ($T = 0$) климатический ущерб отсутствует ($\chi(T) = 1$), а увеличение температуры ведет либо к снижению эффективного выпуска ($b \geq 0, 0 \leq \chi(T) \leq 1$), либо при небольшом увеличении температуры сначала положительно влияет на выпуск, а затем также снижает его ($b < 0, 0 \leq \chi(T) \leq 1 + b^2/4a$). Числовые коэффициенты могут быть вычислены из данных по климатическому ущербу при разных значениях глобального потепления, приведенные в статье [3].

3. Сценарий «бизнес-как-обычно». Рассмотрим случай «бизнес-как-обычно» («business-as-usual»), т. е. при отсутствии целенаправленной политики по смягчению антропогенных изменений климата ($k_a = 0, \tau = 0$). Перепишем систему уравнений для этого случая, заменяя переменные на душу населения k, w и d на глобальные переменные $K = kL, W = wL$ и $D = dL$, соответственно:

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= (\chi(T)\nu - \delta)K - (1 - \vartheta)W - \vartheta D, \\
\dot{W} &= \lambda_w q \frac{\chi(T)\nu - \lambda_L - \delta}{1 - \vartheta} K - (\lambda_w - \lambda_L)W, \\
\dot{D} &= \alpha\chi(T)\nu K + \beta W + (\gamma + \lambda_L)D, \\
\dot{C} &= \eta\nu K - \frac{1}{\tau_C}(C - C_{PI}), \\
\dot{T} &= \frac{1}{\tau_T} \left(\frac{\Delta T}{\ln 2} \ln \frac{C}{C_{PI}} - T \right).
\end{aligned} \tag{1}$$

3.1. Стационарные решения. Система (1) имеет тривиальное стационарное решение $(0, 0, 0, C_{PI}, 0)^T$. Тривиальное решение является неустойчивым. Действительно, если переписать экономический модуль системы (1) в виде $\dot{X} = A(T)X$ ($X = (K, W, D)^T$) и построить систему уравнений первого приближения для этой системы, то характеристический полином будет иметь вид $f(\lambda) = (-\frac{1}{\tau_T} - \lambda)(-\frac{1}{\tau_C} - \lambda) \det(A(0) - \lambda E)$, т. е. тривиальное решение устойчиво, если собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Но матрица A должна иметь, по крайней мере, одно положительное собственное число, чтобы обеспечить рост экономических переменных [1]. Поэтому тривиальное решение неустойчиво.

Нетривиальное стационарное решение должно удовлетворять системе $A(T^*)X^* = 0$, которая имеет ненулевое решение, если $\det A(T^*) = 0$. Запишем матрицу экономического модуля системы (1) в виде $A(T^*) = (A_0\chi(T^*) + A_1, A_2, A_3)$, где A_0, A_1, A_2, A_3 — столбцы с постоянными компонентами. Тогда $\det A(T^*) = \chi(T^*) \det(A_0, A_2, A_3) + \det(A_1, A_2, A_3) = 0$, откуда

$$\chi^* = \chi(T^*) = -\frac{\det(A_1, A_2, A_3)}{\det(A_0, A_2, A_3)}. \tag{2}$$

Тогда стационарное решение

$$\begin{aligned}
K^* &= \frac{(2^{\frac{T^*}{\Delta T}} - 1)C_{PI}}{\eta\nu\tau_C}, \quad W^* = \frac{\lambda_w q (\chi^*\nu - \lambda_L - \delta)}{(1 - \vartheta)(\lambda_w - \lambda_L)} K^*, \\
D^* &= \frac{(\chi^*\nu - \delta)(\lambda_w(1 - q) - \lambda_L) + \lambda_w q \lambda_L}{\vartheta(\lambda_w - \lambda_L)} K^*, \\
C^* &= \eta\nu\tau_C K^* + C_{PI}, \quad T^* = \chi^{-1}(\chi^*).
\end{aligned}$$

Это решение будет интерпретируемым ($K^*, W^*, D^*, T^* > 0$, $C^* > C_{PI}$), если последнее уравнение имеет положительный корень и

выполняется неравенство $\chi^* > \frac{\lambda_L + \delta}{\nu}$. Первое из этих условий обеспечивается за счет определения функции климатического ущерба $\chi(T)$ (см. пункт 2.3). Второе неравенство должно выполняться, поскольку максимальный прирост капитала должен быть выше его естественной убыли: $\chi^* \nu k > (\lambda_L + \delta)k$.

Таким образом, система (1) имеет интерпретируемое нетривиальное стационарное решение, если $(\frac{\lambda_L + \delta}{\nu} < \chi^* < 1$ при $b > 0$) и $(\frac{\lambda_L + \delta}{\nu} < \chi^* \leq 1 + \frac{b^2}{4a}$ при $b < 0$), где χ^* может быть вычислено по формуле (2).

4. Заключение. Построена экономико-климатическая модель, описывающая взаимосвязь мировой экономики и глобальных изменений климата. Рассмотрен частный случай «бизнес-как-обычно», т. е. в условиях отсутствия мер по смягчению антропогенных изменений климата. Для этого случая рассчитаны стационарные решения, а также выведены условия существования интерпретируемого нетривиального стационарного решения.

В дальнейшем планируется решать задачу управления, т. е. выбора управляющих параметров так, чтобы по крайней мере за 100 лет не произошел крах цивилизации.

Литература

1. Romanova O. Yu. Endogenously controlled system as a model of economic growth and business cycles // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 2nd International Scientific Conference of Students and Young Scientists. Kyiv: BubreK, 2012. P. 127–129
2. Kellie-Smith O., Cox P. M. Emergent dynamics of the climate-economy system in the Anthropocene // Phil. Trans. R. Soc. A, 2011, Vol. 369. P. 868–886.
3. Tol R. S. J. On the Uncertainty About the Total Economic Impact of Climate Change // Environ Resource Econ., 2012, Vol. 53. P. 97–116.

Рылов А. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Численное решение задачи о построении шкалы маргинальных ставок подоходного налога

Рекомендовано к публикации профессором Чистяковым С. В.

1. Введение. Рассматривается задача о построении шкалы маргинальных ставок прогрессивного подоходного налога по оптимальной шкале средних ставок налога, найденной на основе модели, предложенной ранее в [1, 2]. Формально рассматриваемая задача представляет собой задачу о наилучшем приближении заданной кусочно-гладкой функции кусочно-дробно-линейными функциями. Приводятся результаты модельных расчетов, проведенных в пакете прикладных программ MATLAB. Результаты проведенных исследований могут быть использованы при разработке автоматизированной системы построения налоговых шкал.

2. Шкала маргинальных ставок. Под шкалой маргинальных ставок налога обычно понимают следующую (или подобную) таблицу 1:

Таблица 1. Шкала маргинальных ставок

Диапазон	Границы диапазонов a_i	Маргинальная ставка налога η_i	Величина налога в денежном выражении $N(x)$
1	$a_0 < x \leq a_1$	η_1	$N_1(x) = \eta_1(x - a_0)$
2	$a_1 < x \leq a_2$	η_2	$N_2(x) = \eta_2(x - a_1) + \eta_1(a_1 - a_0)$
...
k	$a_{k-1} < x \leq a_k$	η_k	$N_k(x) = \eta_k(x - a_{k-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j(a_j - a_{j-1})$
...
$n-1$	$a_{n-2} < x \leq a_{n-1}$	η_{n-1}	$N_{n-1}(x) = \eta_{n-1}(x - a_{n-2}) + \sum_{j=1}^{n-2} \eta_j(a_j - a_{j-1})$
n	$a_{n-1} < x \leq +\infty$	η_n	$N_n = \eta_n x$

Зная величину налога в денежном выражении $N(x)$, определим величину средней ставки налога $y(x)$ по формуле

$$y(x) = \frac{N(x)}{x}. \tag{1}$$

В явном виде, пользуясь вышеприведенной формулой и таблицей 1, находим

$$y(x) = \begin{cases} \eta_1 - \frac{a_0(\eta_1 - \eta_0)}{x}, & a_0 < x \leq a_1, \\ \eta_2 - \frac{a_1(\eta_2 - \eta_1) + a_0(\eta_1 - \eta_0)}{x}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ \dots & \\ \eta_k - \frac{\sum_{j=1}^k a_{j-1}(\eta_j - \eta_{j-1})}{x}, & a_{k-1} \leq x \leq a_k, \\ \dots & \\ \eta_{n-1} - \frac{\sum_{j=1}^{n-1} a_{j-1}(\eta_j - \eta_{j-1})}{x}, & a_{n-2} \leq x \leq a_{n-1}, \\ \eta_n, & a_{n-1} \leq x \leq +\infty. \end{cases} \quad (2)$$

3. Теоретико-игровая модель. Предложенная в [1] теоретико-игровая модель выбора шкалы средних ставок налога представляет собой антагонистическую игру

$$\Gamma = \langle Y, F, S \rangle,$$

в которой Y — множество стратегий первого игрока, F — множество стратегий второго игрока, а $S: Y \times F \rightarrow R$ функция выигрыша. При этом Y — множество решений следующей краевой задачи для дифференциальных неравенств:

$$\begin{aligned} \delta \frac{1-y}{x} &\leq \frac{dy}{dx} \leq \sigma \frac{1-y}{x}, \\ (0 < \delta &\leq \sigma < 1), \\ y(x_-) &= 0, \\ y(x_+) &= y_+; \end{aligned}$$

F — некоторое множество допустимых функций распределения доходов налогоплательщиков, а функция S имеет вид:

$$S(y(\cdot), f(\cdot)) = \int_{x_-}^{x_+} y(x) df(x)$$

и содержательно представляет собой суммарный налог всех тех налогоплательщиков, чей личный доход находится в пределах полуинтервала $(x_-, x_+]$.

Входными параметрами рассматриваемой модели являются следующие числовые величины: x_- — необлагаемый минимум, x_+ — величина объекта налогообложения, начиная с которой он облагается по заданной максимальной ставке шкалы $y = y(x)$, y_+ — максимальная ставка шкалы, δ и σ — минимальное и, соответственно, максимальное значения эластичности шкалы (смотри [1]).

Как показано в [1], оптимальная шкала средних ставок (при некоторых естественных предположениях) имеет вид

$$y^*(x) = \begin{cases} 0, & x < x_-, \\ 1 - \left(\frac{x_-}{x}\right)^\sigma, & x_- \leq x < x_0, \\ 1 - (1 - y_+) \left(\frac{x_+}{x}\right)^\delta, & x_0 \leq x \leq x_+, \\ y_+, & x > x_+, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$x_0 = \left((1 - y_+) \frac{x_+^\delta}{x_-^\sigma} \right)^{\frac{1}{\delta - \sigma}}.$$

4. Восстановление таблицы налогов по оптимальной модельной шкале: задача о наилучшем приближении.

4.1. Постановка задачи. Поскольку оптимальная шкала (3) не представима в виде таблицы 1, т. е. в виде (2), то естественно возникает задача о наилучшем приближении этой шкалы шкалами, допускающими такое представление. Пусть $dist(\cdot, \cdot)$ — метрика в пространстве $L_2[x_-, x_+]$, т. е.

$$dist(y^*(\cdot), y(\cdot)) = \left(\int_{x_-}^{x_+} (y^*(x) - y(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Обозначим через K_n — класс допустимых приближений, а именно, класс функций $y(\cdot)$, имеющих вид (2) и стесненных следующими ограничениями на выбор их параметров $a_0, \dots, a_{n-1}, \eta_0, \dots, \eta_n$:

$$x_- = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} = x_+, \quad (5)$$

$$0 = \eta_0 \leq \eta_1 \leq \dots \leq \eta_{n-1} \leq 1, \quad (6)$$

$$\eta_n = y_+, \quad (7)$$

$$a_{n-1}(\eta_n - \eta_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0. \quad (8)$$

Упомянутая выше задача о наилучшем приближении функции $y^*(\cdot)$ элементами класса K_n формально ставится следующим образом. Требуется найти такую функцию $y^0(\cdot) \in K_n$, что

$$[\text{dist}(y^*(\cdot), y^0(\cdot))]^2 = \min_{y(\cdot) \in K_n} [\text{dist}(y^*(\cdot), y(\cdot))]^2. \quad (9)$$

Поскольку $y^*(\cdot)$ — известная функция, а функция $y(\cdot) \in K_n$ однозначно определяется параметрами $a_0, \dots, a_{n-1}, \eta_0, \dots, \eta_n$, то $[\text{dist}(y^*(\cdot), y(\cdot))]^2$ представляет собой некоторую функцию этих параметров:

$$[\text{dist}(y^*(\cdot), y(\cdot))]^2 = f(a_0, \dots, a_{n-1}, \eta_0, \dots, \eta_n).$$

Учитывая это, видим, что задача (9), (4) сводится к задаче конечномерной оптимизации

$$f(a_0, \dots, a_{n-1}, \eta_0, \dots, \eta_n) \rightarrow \min,$$

с ограничениями (5)–(8). В [1] предложен декомпозиционный метод решения этой проблемы: сначала при фиксированных значениях переменных a_0, \dots, a_{n-1} , ищется решение следующей задачи

$$g_a(\eta_0, \dots, \eta_n) \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$0 = \eta_0 \leq \eta_1 \leq \dots \leq \eta_{n-1} \leq 1, \quad (11)$$

$$\eta_n = y_+, \quad (12)$$

$$a_{n-1}(\eta_n - \eta_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0, \quad (13)$$

где $g_a = f$, а затем для отыскания оптимального решения исходной задачи осуществляется перебор по допустимым целочисленным переменным a_i .

Замечание 1. Как показано в [1] задача (10)–(13) является задачей выпуклого квадратичного программирования, для решения которой можно использовать многие известные методы [3].

4.2. Нахождение параметров δ и σ . Предложить обоснованные рекомендации по выбору параметров δ и σ крайне затруднительно, поэтому в [4, 5] было предложено вместо них выбирать параметры x_0 и y_0 , которым можно будет придать ясную экономическую интерпретацию, при этом между парами параметров x_0, y_0 и δ, σ имеется взаимно-однозначное соответствие, которое описывается равенствами

$$\sigma = \frac{\ln(1 - y_0)}{\ln x_- - \ln x_0},$$

$$\delta = \frac{\ln(1 - y_+) - \ln(1 - y_0)}{\ln x_0 - \ln x_+}.$$

4.3. Результаты численного решения задачи о наилучшем приближении. Описанная выше задача о наилучшем приближении численно исследовалась для $n = 5$ с использованием пакета прикладных программ Matlab, при этом среди параметров a_0, \dots, a_4 параметры a_0, a_2, a_4 выбирались так, что

$$a_0 = x_-, \quad (14)$$

$$a_2 = x_0, \quad (15)$$

$$a_4 = x_+, \quad (16)$$

а параметры a_1 и a_3 варьировались с определенным шагом с целью оптимизации на втором этапе описанного метода декомпозиции. Отметим, что равенства (14) и (16) предусматривались используемой моделью [1], а равенство (15) использовалось с целью упрощения вычислений.

Приведем результаты модельных расчетов, которые были получены для следующих значений входных параметров

$$x_- = a_0 = 60000,$$

$$x_0 = a_2 = 600000,$$

$$x_+ = a_4 = 3000000,$$

$$y_0 = 0,2,$$

$$y_+ = 0,3.$$

Таблица маргинальных ставок налога для этих значений входных параметров имеет вид:

Таблица 2. Шкала маргинальных ставок для пяти диапазонов

Диапазон	Границы диапазонов a_i	Маргинальная ставка налога η_i
1	$60000 < x \leq 185000$	$0,1375 (\approx 13,8\%)$
2	$185000 < x \leq 600000$	$0,2385 (\approx 23,9\%)$
3	$600000 < x \leq 1600000$	$0,2984 (\approx 29,8\%)$
4	$1600000 < x \leq 3000000$	$0,3467 (\approx 34,7\%)$
5	$3000000 < x \leq +\infty$	$0,3 (= 30\%)$

5. Заключение. Проведенные вычисления показали, что достаточно хорошее приближение оптимальной шкалы средних ставок налога элементами класса K_n (класса шкал маргинальных ставок налога с n диапазонами) можно получить уже при выборе $n = 5$.

Литература

1. Чистяков С. В., Ишханова М. В. Математические модели выбора налоговых шкал: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 52 с.
2. Смирнов Р. О., Чистяков С. В. О ставках налогообложения как инструменте государственного регулирования // Экономика и математические методы, 1993. Т. 29, № 2. С. 268–274.
3. Даугавет В. А. Численные методы квадратичного программирования: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 128 с.
4. Смирнов Р. О. Моделирование выбора параметров шкалы подоходного налога // Вестник СПбГУ. Сер. 5. Экономика. 2011. № 4. С. 141–148.
5. Смирнов Р. О. Моделирование инструментов бюджетно-налоговой политики государства. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. 110 с.

Свиркина Н. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Применение Каппы Коэна и взвешенной Каппы к анализу информации об учебном процессе

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. В данной статье рассматриваются коэффициенты, отражающие степень согласованности двух классификаций. Одной из мер согласованности является корреляция. Существует два основных типа коэффициентов корреляции, рассчитываемых в зависимости от вида шкалы переменных, участвующих в анализе. Коэффициент корреляции Пирсона применим только для оценки взаимосвязи признаков, измеренных в числовых шкалах, однако во многих областях применения статистических методов чаще встречаются измерения, сделанные в номинальных (классификационных) шкалах или порядковых (ранговых) шкалах. К таким областям относится, например, изучение статистических данных, связанных с учебным процессом.

Роль коэффициента корреляции Пирсона в номинальных шкалах может играть коэффициент *Каппы Коэна* [1–4]. Для измерений, сделанных в порядковых шкалах, можно использовать ранговые коэффициенты корреляции Спирмена и Кендела, однако эффективность использования коэффициентов ранговой корреляции существенно зависит от числа совпадений в измерениях. Ранговые коэффициенты применимы при небольшом количестве совпадений или, в лучшем случае, при полном их отсутствии. Поэтому если число совпадений велико (а подобная ситуация происходит всегда, когда число градаций признаков невелико, а число объектов значительно превышает число градаций), применение ранговых коэффициентов корреляции нецелесообразно. Естественной альтернативой для ранговых коэффициентов корреляции может также служить Каппа Коэна. Однако важно отметить, что при оценке степени согласованности в порядковых шкалах несовпадения градаций для одного и того же объекта означают разную степень несогласованности в зависимости от того, насколько далеки эти градации друг от друга. В порядковых шкалах возможна оценка близости тех или иных градаций. В связи с этим, коэффициент Каппа Коэна нуждается в некоторой модифика-

ции, т. е. необходимо задавать весовые функции, значения которых отражают, насколько сильно отличаются две градации по отношению друг к другу. Такой модификацией является так называемая *взвешенная Каппа Коэна* [2–5].

2. Каппа Коэна и взвешенные Каппы. Коэффициенты Каппа Коэна K и взвешенная Каппа Коэна K_w применяются для оценки согласованности работы двух экспертов, когда эксперты классифицируют объекты по категориям (например, выставляют баллы тестируемым работам). Статистика K_w подразумевает использование весовой функции w_{ij} , определение которой неоднозначно.

Предположим, что каждый из двух экспертов независимо распределяет один и тот же набор m различных объектов по $n \geq 2$ категориям, которые определены заранее.

Рассмотрим таблицу согласованности $F = \{f_{ij}\}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, которая отражает взаимную классификацию оценок экспертов, где f_{ij} — число объектов, отнесённых в категорию i первым экспертом и в категорию j вторым экспертом.

Пусть $P = \{p_{ij}\}$ — таблица, элементы которой получены из элементов таблицы F следующим образом: $p_{ij} = \frac{f_{ij}}{m}$.

Суммарные элементы по строкам и столбцам таблицы P (маргинальное распределение) $p_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$, $q_j = \sum_{i=1}^n p_{ji}$ называют основными оценками. Они показывают, как часто категории использовались экспертом 1 и экспертом 2, соответственно.

Также определим таблицу $E = \{e_{ij}\}$ с элементами $e_{ij} = p_i q_j$, где e_{ij} можно трактовать как совместную вероятность осуществления двух событий, когда эксперты выставляют оценки независимо и случайно, подчиняясь своим маргинальным распределениям.

Введём определение взвешенной Каппы

$$K_w = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} p_i q_j},$$

где значения весовой функции удовлетворяют условиям $w_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $w_{ij} = 0$ для $i = j$ при $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Значение $K_w = 1$ при совершенной согласованности между двумя

экспертами, $K_w = 0$, когда

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} p_{ij} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} p_i q_j \quad (1)$$

является равенством, и $K_w < 0$, когда (1) — строгое неравенство. Если используется весовая функция

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases}$$

получаем определение невзвешенной Каппы Коэна

$$K = 1 - \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_{ii}}{1 - \sum_{i=1}^n p_i q_i} = \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_{ii} - p_i q_i}{1 - \sum_{i=1}^n p_i q_i},$$

Величина $K = 1$ при совершенной согласованности между двумя экспертами, $K = 0$, когда согласованность равна ожидаемой согласованности в условиях «независимого и случайного» поведения экспертов, т. е. $p_{ii} = p_i q_i$ для всех i . Отрицательному значению K соответствует наличие систематических рассогласованных оценок в поведении экспертов.

Под «экспертами» понимают не только реальных экспертов, но, например, и последовательно проводимые испытания над одной и той же совокупностью объектов.

Как было замечено ранее, для вычисления коэффициента взвешенной Каппы весовую функцию можно определять различными способами. В данной статье рассматриваются два основных вида задания такой функции.

Первый вид задания [3] $w_{ij}(r) = (|i - j|)^r$, где $r \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. При $r = 1$ получаем линейную весовую функцию $w_{ij}(1) = (|i - j|)$. При $r = 2$ — квадратичную весовую функцию $w_{ij}(2) = (|i - j|)^2$.

Эти веса являются наиболее часто используемыми для взвешенной Каппы K_w . Линейно и квадратично взвешенные Каппы будем обозначать $K_w(1)$ и $K_w(2)$, соответственно. Для всех r при $n = 2$ категориях $K = K_w(r)$.

Второй вид задания весовой функции [4] $w_{ij}(r)_2 = 1 - \left(\frac{|i-j|}{n-1}\right)^r$.

Для такого вида линейная и квадратичная весовые функции строятся аналогичным образом (при $r = 1$ и $r = 2$, соответственно) и также являются наиболее используемыми частными случаями.

3. Интерпретация. В работе [6] предложена шкала для оценки статистической значимости вычисленного коэффициента Каппы Коэна (см. таб. 1).

Таблица 1.

К	Интерпретация
<0	Нет согласованности
0,0 – 0,20	Очень слабая согласованность
0,21 – 0,40	Слабая согласованность
0,41 – 0,60	Средняя согласованность
0,61 – 0,80	Хорошая согласованность
0,81 – 1,00	Почти совершенная согласованность

Однако приведённая шкала не является общепринятой. Существуют также и другие способы интерпретации. Например, шкала Флейса [4] представлена в таблице 2.

Таблица 2.

К	Интерпретация
$<0,40$	Слабая согласованность
0,40 – 0,75	Достаточно хорошая согласованность
$>0,75$	Отличная согласованность

4. Анализ информации об успеваемости студентов с помощью Каппы Коэна. Рассмотрим две группы студентов, проходивших обучение на первом курсе факультета ПМ–ПУ СПбГУ по направлению «Прикладная математика и информатика». По итогам двух сессионных аттестаций (за два семестра) была сформирована таблица оценок студентов по трём основным математическим дисциплинам за зимнюю и летнюю сессии. Студенты обеих групп в данной работе рассматриваются как единый набор объектов.

Требуется оценить стабильность успеваемости студентов с помощью коэффициентов Каппы Коэна и взвешенной Каппы.

В качестве объектов исследования представлены лишь те студенты, которые явились на первую сдачу каждого из рассматриваемых экзаменов обеих сессий. В роли «экспертов» в данной задаче выступают две сессионные аттестации.

Имеем четыре категории: оценки, которые может получить каждый студент (2, 3, 4 и 5). Всего рассматривается 30 объектов, которые распределяются по категориям для каждой из трёх дисциплин: высшая алгебра, геометрия, математический анализ.

Вычисления, необходимые для решения задачи были произведены в программе Excel. Были получены значения коэффициентов Каппы Коэна, взвешенных Капп с линейной и квадратичной весовыми функциями, а также взвешенной Каппы с весовой функцией второго вида, указанного ранее. Результаты вычислений представлены в таблице 3.

Таблица 3.

	K	$K_w(1)$	$K_w(2)$
Высшая алгебра	0,042996	0,078947	0,107649
Геометрия	0,267241	0,178832	0,106628
Математический анализ	0,270517	0,306723	0,338235

При использовании второго вида весовой функции взвешенные коэффициенты Каппы Коэна оказались отрицательными. В связи с отмеченным обстоятельством использование соответствующих весов нуждается в дополнительном исследовании.

В целом, по всем рассматриваемым дисциплинам согласованность результатов двух сессий слабая, о чём свидетельствуют небольшие значения всех коэффициентов, приведённых в итоговой таблице, колеблющиеся в промежутке (0,04; 0,34).

Если рассмотреть получившиеся значения обычной (невзвешенной) Каппы, можно заметить, что значение коэффициента, отражающего согласованность оценок по высшей алгебре, очень мало, и сама согласованность, таким образом, является очень слабой. Согласованность оценок по остальным двум дисциплинам несколько лучше. Она почти одинакова для обоих случаев. Данное наблюдение выделяет алгебру из трёх предметов в отдельную группу.

В данной задаче градации в шкале упорядочены, а значит, наибольший интерес представляют коэффициенты взвешенной Каппы. Но вследствие неоднозначности определения, в зависимости от выбора весовой функции получаются различные значения коэффициентов, и определить, какое из получившихся значений более достоверно отражает искомую согласованность, на сегодняшний день невозможно. Полученные значения взвешенной линейной и квадратичной Каппы Коэна показывают, что самыми стабильными результатами аттестаций являются оценки по математическому анализу

($K_w \approx 0,3$). Оценки успеваемости студентов по высшей алгебре и геометрии менее согласованы. При рассмотрении линейно взвешенной Каппы согласованность результатов для двух сессий по алгебре является очень слабой ($K_{w1}(1) \approx 0,8$), а по геометрии — немного сильнее ($K_{w1}(1) \approx 0,18$), в то время как для квадратично взвешенной Каппы согласованность оценок по обеим дисциплинам очень слаба и имеет примерно одинаковый показатель ($K_{w1}(2) \approx 0,1$). В целом, найденные значения коэффициентов позволяют говорить о том, что результаты экзаменов по математическому анализу отличаются существенно более высокой стабильностью, нежели по двум другим базовым математическим дисциплинам.

5. Заключение. Предложенные к рассмотрению коэффициенты, в принципе, применимы к решению задач рассмотренного типа. Так как в задаче наблюдается упорядоченность градаций в шкале, правильнее использовать именно взвешенную Каппу. Но следует учитывать, что использование такого коэффициента влечёт некоторые трудности, связанные с неоднозначностью определения весовой функции.

Литература

1. Cohen J. A coefficient of agreement for nominal scales // Educational and Psychological Measurement, 1960. Vol. 20. P. 37–46.
2. Warrens M. J. Conditional inequalities between Cohen's kappa and weighted kappas // Statistical Methodology, 2013. Vol. 20. P. 14–22.
3. Warrens M. J. Cohen's quadratically weighted kappa is higher than linearly weighted kappa for tridiagonal agreement tables // Statistical Methodology, 2012. Vol. 9. P. 440–444.
4. Флейс Дж. Статистические методы для изучения таблиц долей и пропорций. М.: Финансы и статистка, 1989. 319 с.
5. Cohen J. Weighted kappa: nominal scale agreement with provision for scaled disagreement or partial credit // Psychological Bulletin, 1968. Vol. 70. P. 213–220.
6. Landis J. R., Koch G. G. The measurement of observer agreement for categorical data // Biometrics, 1977. Vol. 33. P. 159–174.

Смирнова Е. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Устойчивая кооперация в одной линейно-квадратичной дифференциальной игре

Рекомендовано к публикации доцентом Шевкопляс Е. В.

Введение. В данной статье рассмотрена линейно-квадратичная дифференциальная игра, основанная на модели загрязнения атмосферы [1]. Для случаев двух и трех игроков получена характеристическая функция, проверено выполнение условия супераддитивности, вычислено значение вектора Шепли, найдены ограничения, при которых выполняется условие динамической устойчивости данного кооперативного решения и условие защиты от иррационального поведения участников (условие Янга).

Модель игры. Рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(p_0, t_0)$ с предписанной продолжительностью $(T - t_0)$ и начальным состоянием p_0 . Множество всех игроков обозначим как $N = \{1, \dots, n\}$. Игроками являются страны-участницы соглашения о сокращении вредных выбросов. Каждая из стран располагает некоторым производством, загрязняющим атмосферу, и может управлять величиной выбросов $e_i(t) \in [0, b_i]$, $b_i \in R^+$, в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$. Пусть $p(t) \in R$ — общее загрязнение, накопленное к моменту времени t с начала игры. Динамика изменения величины загрязнения описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{p}(t) = \sum_{i=1}^n e_i(t), \quad p(t_0) = p_0.$$

Предполагается, что прибыль от производства каждой страны $i \in N$ связана с ее выбросами функцией $R_i(e_i(t)) = e_i(t) [b_i - \frac{1}{2}e_i(t)]$. Выплаты за производственные выбросы зависят от накопленного загрязнения $p(t)$ и имеют вид $d_i p(t)$, $d_i \in R^+$. Каждая страна стремится максимизировать свой доход, представимый функцией

$$K_i(t_0, p_0, e_1, \dots, e_n) = \int_{t_0}^T \left(e_i(t) \left[b_i - \frac{1}{2}e_i(t) \right] - d_i p(t) \right) dt.$$

Вычисление характеристической функции для n игроков. Используем подход, изложенный в [2]. Игроки, не входящие в коа-

лицию, придерживаются равновесных управлений из одного равновесия по Нэшу, которое было изначально найдено в игре, а игроки из коалиции максимизируют суммарный выигрыш. Если равновесий по Нэшу несколько, то вектор Шепли вычисляется для каждого из них, минуя при этом проблему выбора.

Вспользуемся уравнением Беллмана

$$-V_t(N; p(t), t) = \max_{e_1(t), \dots, e_N(t)} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(e_i(t) \left[b_i - \frac{1}{2} e_i(t) \right] - d_i p(t) \right) + V_p(N; p(t), t) \sum_{i=1}^n e_i(t) \right\}$$

с граничным условием $V(N; p^N(T), T) = 0$, где $p^N(t)$ — условно-оптимальная траектория, т. е. траектория, на которой игроки получают наибольший ожидаемый дележ.

Решением является функция

$$V(N; p(t), t) = -\frac{1}{2} n d^2 t^3 - b d t^2 + d t p - \frac{1}{2} \tilde{b} t + D,$$

где $D = -dTC + \frac{1}{2} \tilde{b} T$, $C = p_0 - b t_0 - \frac{1}{2} n d t_0^2$, $b = \sum_{i=1}^n b_i$, $d = \sum_{i=1}^n d_i$, $\tilde{b} = \sum_{i=1}^n b_i^2$.

Аналогично вычислим $V(S; p(t), t)$ для $\forall S \subset N$ и $V(\{i\}; p(t), t)$ для $\forall i \in N$. В результате получим

$$V(S; p(t), t) = -\frac{2n - \frac{s}{2}}{3} d^S t^3 - b d^S t^2 + d^S t p - \frac{1}{2} \tilde{b}^S t + D^S,$$

где $D^S = -d^S T C + \frac{1}{2} \tilde{b}^S T$, $d^S = \sum_{i \in S} d_i$, $\tilde{b}^S = \sum_{i \in S} b_i^2$, s — мощность коалиции S ;

$$V(\{i\}; p(t), t) = -\frac{2n - \frac{1}{2}}{3} d_i^2 t^3 - b d_i t^2 + d_i t p - \frac{1}{2} b_i^2 t + D_i,$$

где $D_i = -d_i T C + \frac{1}{2} b_i^2 T$.

Случай двух игроков. Рассмотрим случай $n = 2$. Характеристическая функция примет следующий вид

$$V(\{1, 2\}; p(t), t) = (d_1 + d_2) t p - (b_1 + b_2)(d_1 + d_2) t^2 - (d_1 + d_2)^2 t^3 - \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2) t - (d_1 + d_2) T C + \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2) T,$$

$$V(\{1\}; p(t), t) = d_1 tp - (b_1 + b_2)d_1 t^2 - \frac{7}{6}d_1^2 t^3 - \frac{1}{2}b_1^2 t - d_1 TC + \frac{1}{2}b_1^2 T,$$

$$V(\{2\}; p(t), t) = d_2 tp - (b_1 + b_2)d_2 t^2 - \frac{7}{6}d_2^2 t^3 - \frac{1}{2}b_2^2 t - d_2 TC + \frac{1}{2}b_2^2 T.$$

Данная функция является супераддитивной при выполнении условия $(d_1 - d_2)^2 \geq 10d_1 d_2$.

Развитию игры во времени соответствует движение вдоль условно-оптимальной траектории $p^N(t)$, которое не обеспечивает сохранения кооперации. В каждый момент времени игроки попадают в подыгры с текущими начальными состояниями. В некоторый момент ν может возникнуть ситуация, когда решение текущей игры $\Gamma(p^N(\nu), \nu)$ будет неоптимальным в смысле выбранного заранее принципа оптимальности. В такой ситуации игроки могут посчитать нецелесообразным и далее придерживаться соглашения действовать совместно оптимально. Последнее означает динамическую неустойчивость выбранного принципа оптимальности и движения по траектории $p^N(t)$ [3].

Для решения данной проблемы введем вектор-функцию $B(t) = \{B_i(t)\}_{i=\overline{1, n}}$ такую, что компоненты вектора Шепли в игре $\Gamma(p_0, t_0)$ представимы в виде $Sh_i(p_0, t_0) = \int_{t_0}^T B_i(\tau) d\tau$. Данная функция называется процедурой распределения дележа (ПРД).

Вектор Шепли является динамически устойчивым, если существует такая ПРД, что вектор Sh^ν такой, что $Sh_i^\nu = \int_{\nu}^T B_i(\tau) d\tau$ также является вектором Шепли в соответствующей подыгре $\Gamma(p^N(\nu), \nu)$, $\forall \nu \in [t_0, T]$.

С помощью ПРД получаем, что в каждый текущий момент времени дележ в оставшейся подыгре также является вектором Шепли. В этом случае игроки не имеют оснований для нарушения соглашения о кооперации, заключенного перед началом игры.

Для игры двух игроков вектор Шепли примет вид

$$Sh_1(p, t) = \left(\frac{1}{12}d_1^2 - \frac{13}{12}d_2^2 - d - 1d_2 \right) t^3 - (b_1 + b_2)d_2 t^2 + d_2 tp - \frac{1}{2}b_2^2 t - d_2 TC + \frac{1}{2}b_2^2 T,$$

$$Sh_1(p, t) = \left(\frac{1}{12}d_2^2 - \frac{13}{12}d_1^2 - d - 1d_2 \right) t^3 - (b_1 + b_2)d_1 t^2 + d_1 t p - \\ - \frac{1}{2}b_1^2 t - d_1 T C + \frac{1}{2}b_1^2 T.$$

Условно-оптимальная траектория из точки (t_0, p_0) представима в виде $p^N(t) = (b_1 + b_2)t + (d_1 + d_2)t^2 + C$, где $C = p_0 - (b_1 + b_2)t_0 - (d_1 + d_2)t_0^2$.
Компоненты ПРД

$$\begin{cases} B_1(t) = -\frac{1}{4}d_1^2 t^2 + \frac{1}{4}d_2^2 t^2 - d_2 C + \frac{1}{2}b_2^2, \\ B_2(t) = -\frac{1}{4}d_2^2 t^2 + \frac{1}{4}d_1^2 t^2 - d_1 C + \frac{1}{2}b_1^2. \end{cases}$$

В некоторых ситуациях на ПРД накладывают ограничение $B_i(t) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. В этом случае вектор Шепли будет динамически устойчив при выполнении для $\forall t \in [t_0, T]$, $i = 1, 2$, системы условий

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}d_1^2 t^2 + \frac{1}{4}d_2^2 t^2 - d_2 C + \frac{1}{2}b_2^2 \geq 0, \\ -\frac{1}{4}d_2^2 t^2 + \frac{1}{4}d_1^2 t^2 - d_1 C + \frac{1}{2}b_1^2 \geq 0. \end{cases}$$

Если такого ограничения нет, то для всех значений параметров.

Предположим, что в некоторый момент времени иррациональное поведение игрока (или группы игроков) приведет к распаду большой коалиции. В этом случае условие защиты от иррационального поведения [4] требует, чтобы выполнялось неравенство

$$V(\{i\}; p_0, t_0) \leq \int_{t_0}^{\nu} B_i(\tau) d\tau + V(i; p_{\nu}^N, \nu), \quad \forall t \in [t_0, T], \quad i = \overline{1, n}.$$

Условие Янга не выполнится, если $\exists t \in [t_0, T]$ такое, что

$$\begin{cases} t < \frac{\frac{1}{2}(b_2^2 - b_1^2) - (d_2 - d_1)C}{\left(\frac{1}{4}d_1^2\right) - \frac{3}{4}d_2^2 + 3d_1 d_2}, \\ t < \frac{\frac{1}{2}(b_1^2 - b_2^2) - (d_1 - d_2)C}{\left(\frac{1}{4}d_2^2\right) - \frac{3}{4}d_1^2 + 3d_1 d_2}. \end{cases}$$

Случай трех игроков. Рассмотрим случай, когда $n = 3$. Характеристическая функция примет вид

$$V(\{1, 2, 3\}; p(t), t) = dtp - bdt^2 - \frac{3}{2}d^2t^3 - \frac{1}{2}\tilde{b}t - \\ - d^{\{1,2,3\}}TC + \frac{1}{2}\tilde{b}^{\{1,2,3\}}T,$$

$$V(\{1, 2\}; p(t), t) = (d_1 + d_2)tp - b(d_1 + d_2)t^2 - \frac{5}{2}(d_1 + d_2)^2t^3 - \\ - \frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2)t - d^{\{1,2\}}TC + \frac{1}{2}\tilde{b}^{\{1,2\}}T,$$

$$V(\{1, 3\}; p(t), t) = (d_1 + d_3)tp - b(d_1 + d_3)t^2 - \frac{5}{2}(d_1 + d_3)^2t^3 - \\ - \frac{1}{2}(b_1^2 + b_3^2)t - d^{\{1,3\}}TC + \frac{1}{2}\tilde{b}^{\{1,3\}}T,$$

$$V(\{2, 3\}; p(t), t) = (d_2 + d_3)tp - b(d_2 + d_3)t^2 - \frac{5}{2}(d_2 + d_3)^2t^3 - \\ - \frac{1}{2}(b_2^2 + b_3^2)t - d^{\{2,3\}}TC + \frac{1}{2}\tilde{b}^{\{2,3\}}T,$$

$$V(\{1\}; p(t), t) = d_1tp - bd_1t^2 - \frac{11}{6}d_1^2t^3 - \frac{1}{2}b_1^2t - d^{\{1\}}TC + \frac{1}{2}b_1^2T,$$

$$V(\{2\}; p(t), t) = d_2tp - bd_2t^2 - \frac{11}{6}d_2^2t^3 - \frac{1}{2}b_2^2t - d^{\{2\}}TC + \frac{1}{2}b_2^2T,$$

$$V(\{3\}; p(t), t) = d_3tp - bd_3t^2 - \frac{11}{6}d_3^2t^3 - \frac{1}{2}b_3^2t - d^{\{3\}}TC + \frac{1}{2}b_3^2T.$$

Характеристическая функция супераддитивная, если выполнено

$$\begin{cases} (d_i - d_j)^2 \geq 18d_id_j, & \forall i, j \in \overline{1, 3}, \quad i \neq j, \\ d^2 \geq 20(d_id_j + d_kd_j) - d_j^2, & i, j, k \in \overline{1, 3}, \quad i \neq j \neq k. \end{cases}$$

Условно-оптимальная траектория из точки (t_0, p_0) представима в виде $p^N(t) = bt + \frac{3}{2}dt^2 + C$, где $C = p_0 - bt_0 - \frac{3}{2}dt_0^2$.

Компоненты вектора Шепли для $i \in \overline{1, 3}$

$$Sh_i(p(t), t) = \tilde{d}_it^3 - bd_it^2 + d_itp - \frac{1}{2}b_i^2t - \frac{5}{6}d_iTC + \frac{1}{4}b_i^2T,$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{d}_1 &= -\frac{5}{3}d_1^2 + \frac{1}{12}d_2^2 + \frac{1}{12}d_3^2 - \frac{14}{9}d_1d_2 - \frac{14}{9}d_1d_3 - \frac{19}{9}d_2d_3; \\ \tilde{d}_2 &= -\frac{5}{3}d_2^2 + \frac{1}{12}d_1^2 + \frac{1}{12}d_3^2 - \frac{14}{9}d_1d_2 - \frac{14}{9}d_2d_3 - \frac{19}{9}d_1d_3; \\ \tilde{d}_3 &= -\frac{5}{3}d_3^2 + \frac{1}{12}d_1^2 + \frac{1}{12}d_2^2 - \frac{14}{9}d_1d_3 - \frac{14}{9}d_2d_3 - \frac{19}{9}d_1d_2.\end{aligned}$$

Компоненты ПРД будут иметь следующий вид

$$B_i(t) = -\frac{9}{2}d_i dt^2 - d_i C + \frac{1}{2}b_i^2.$$

При отсутствии ограничения $B_i(t) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, дележ динамически устойчив всегда. При наличии ограничения дележ динамически устойчив в случае выполнения для $\forall t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, 3}$, условия

$$-\frac{9}{2}d_i dt^2 - d_i C + \frac{1}{2}b_i^2 \geq 0.$$

Условие Янга в данном случае не выполняется.

Выводы. Пример линейно-квадратичной дифференциальной игры, основанный на модели управления вредными выбросами в атмосферу, демонстрирует отсутствие связи между условием динамической устойчивости кооперативного решения (вектора Шепли) и условием защиты от иррационального поведения участников (условием Янга).

Литература

1. Breton M., Zaccour M., Zahaf M. A differential game of joint implementation of environmental projects // *Automatica* 41, 2005. P. 1737–1749.
2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 424 с.
3. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. Принципы устойчивой кооперации // *Математическая теория игр и ее приложения*, 2009. Т. 1. Вып. 1. С. 106–123.
4. Yeung D. W. K. An irrational-behavior-proofness condition in cooperative differential games // *Int. J. of Game Theory Review*, 2007. Vol. 9, No 1. P. 256–273.

Чугунов Е. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Нелинейная динамическая задача о распределении сотрудников по проектам

Рекомендовано к публикации профессором Захаровым В. В.

1. Введение. Классической задаче о назначении и алгоритмам ее решения посвящено много различных научных статей и книг, начиная от описания простого венгерского метода [1] и заканчивая различными нелинейными математическими моделями [2] со всевозможными модификациями, например, в [3] можно найти примеры трех- и многоиндексных задач о распределении сотрудников. Также повышенный интерес проявляется к задачам с дополнительными условиями на развитие навыков сотрудников [4] и дополнительными временными ограничениями для рассматриваемых задач [5]. Помимо формулировок самих задач предлагаются и различные методы их решения, например, в [6] рассматривается возможность применения «муравьиного алгоритма» для случая нелинейной задачи распределения сотрудников на фиксированных периодах, т. е. сотрудники назначаются на задачи на определенный период, после этого происходит перераспределение всех сотрудников.

В данной статье, в отличие от всех описанных выше, рассматривается задача о назначении в динамической постановке, когда на одну задачу может быть назначено сразу несколько сотрудников, при этом после того, как часть сотрудников закончит работу над своей задачей, данные сотрудники перераспределяются автоматически по другим задачам. В данном случае сотрудники работают над несколькими проектами одновременно. Каждый проект состоит из набора задач, причем некоторые из них должны выполняться в строгой последовательности, и определенную задачу могут выполнять только сотрудники определённой профессии, объединённые вместе в отдел. Для каждой задачи задается срок сдачи, а также ее сложность. В свою очередь каждый сотрудник обладает своим набором профессиональных качеств, которые могут быть охарактеризованы коэффициентами производительности труда. В соответствии с этими данными встает вопрос: как распределить сотрудников всех задействованных

отделов по задачам, чтобы все проекты были выполнены в срок, и расходы на оплату труда сотрудников были минимальны?

2. Математическая постановка задачи. Данная математическая постановка приводится для задачи распределения сотрудников одного отдела.

Введем следующие обозначения. Пусть N — количество сотрудников рассматриваемого отдела; M — количество задач, которые нужно решить сотрудникам рассматриваемого отдела; $i = \overline{1, N}$ — индекс сотрудника; $j = \overline{1, M}$ — индекс задачи; c_j — коэффициент сложности задачи, $c_j \geq 1$, c_j — целое; p_i — зарплата i -го сотрудника за определенный период; a_i — коэффициент производительности i -го сотрудника (время, которое требуется i -му сотруднику на выполнение задачи с коэффициентом сложности $c = 1$); b_j — максимальное время, отведенное на выполнение j -ой задачи, определяется автоматически как разность между датой сдачи задачи и датой назначения сотрудников на эту задачу.

Искомые переменные:

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый сотрудник работает над } j\text{-ой задачей,} \\ 0, & \text{если } i\text{-ый сотрудник не работает над } j\text{-ой задачей.} \end{cases}$$

В матричном виде набор переменных можно записать как

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N,1} & \cdots & t_{N,M} \end{pmatrix}.$$

Вспомогательная функция

$$x_{kj}(t_{kj}) = \frac{t_{kj}}{\sum_{i=1}^M \frac{a_k}{a_i} t_{ij}},$$

где $x_{kj}(t_{kj})$ — тот процент работы по j -ой задаче, который выполнит k -ый сотрудник, $0 \leq x_{kj}(t_{kj}) \leq 1$.

Если все $t_{ij} = 0$ для $\forall i = \overline{1, N}$, то $x_{kj}(t_{kj}) = 0$ для $\forall k = \overline{1, N}$.

Целевая функция: основная цель — нужно найти такое распределение сотрудников по задачам, при котором затраты на оплату труда данных сотрудников будут минимальными:

$$\min f = \min_{t_{ij}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_i c_j p_i x_{ij}(t_{ij}) \right). \quad (1)$$

Ограничения: ограничение по времени, т. е. j -ая задача должна быть выполнена не позже максимально отведенного времени b_j :

$$\frac{\sum_{i=1}^N a_i c_j x_{ij}(t_{ij})}{\sum_{i=1}^N t_{ij}} \leq b_j \quad \text{для } \forall j = \overline{1, M}. \quad (2)$$

На каждую задачу должен быть назначен хотя бы один сотрудник:

$$\sum_{i=1}^N t_{ij} \geq 1 \quad \text{для } \forall j = \overline{1, M}. \quad (3)$$

Каждый сотрудник одновременно может работать только над одной задачей:

$$\sum_{j=1}^M t_{ij} = 1 \quad \text{для } \forall i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

3. Метод решения. Рассмотрим метод решения поставленной математической модели, основанный на применении встроенной функции *Reduce* в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Данная функция позволяет из набора всевозможных вариантов расположения N единиц в матрице T оставить только те варианты, которые удовлетворяют ограничениям (3), (4).

Алгоритм:

1 шаг. Подставляем ограничения вида (3), (4) с учетом допустимых значений переменных t_{ij} в функцию *Reduce*, получаем набор матриц T_k .

2 шаг. Для каждого полученного варианта T_k определяем значение целевой функции $f_k = f(T_k)$.

3 шаг. Полученные значения целевой функции f_k выстраиваем в порядке возрастания: $f_i \leq f_k \leq f_l \leq \dots$

4 шаг. Для варианта T_i матрицы T , при котором целевая функция f принимает наименьшее значение f_i , проверяем последний набор уравнений-ограничений вида (2). Если данные ограничения выполнены, то рассматриваемая матрица T_i является матрицей оптимального распределения сотрудников по проектам. И алгоритм оста-

навливается. Если же ограничения не выполнены, то переходим к шагу 5.

5 шаг. Проверяем набор уравнений-ограничений (2) для следующего вида матрицы T_k , при котором целевая функция f принимает второе минимальное значение f_k .

Пятый шаг повторяется до тех пор, пока уравнения-ограничения (2) не будут выполнены.

Если все варианты T_k матрицы T не удовлетворяют набору уравнений-ограничений (2), то оптимального распределения сотрудников по задачам не существует, т. е. рассматриваемый набор сотрудников не сможет выполнить все задачи в срок. Для решения данной проблемы можно нанять дополнительных сотрудников или передвинуть сроки сдачи некоторых задач.

В итоге работы алгоритма будет найден вид матрицы T , при котором будут выполнены все уравнения-ограничения, и целевая функция будет иметь минимальное значение. Таким образом, оптимальное распределение сотрудников по проектам будет найдено.

Исходя из уравнений-ограничений вида (3) и (4) следует, что в матрице T будет ровно N единиц, а остальные элементы будут нулями. Всего возможно M^N различных вариантов расположения данных единиц в матрице T . Функция *Reduce* позволяет исключить из данного набора все варианты матрицы T , в которых есть нулевые столбцы. Количество удовлетворяющих ограничениям вида (3) и (4) вариантов матрицы T можно определить по формуле:

$$u_M = M^N - \sum_{k=1}^{M-1} C_M^k u_k, \quad (5)$$

где $u_1 = 1$, $C_M^k = \frac{M!}{k!(M-k)!}$.

Таким образом, предложенный метод сходится не более чем за $u_M + 3$ шага. А математическая модель относится к NP классу сложности.

4. Динамическое распределение. Рассмотрим случай, когда нужно распределить сотрудников нескольких отделов по задачам из разных проектов. В данном случае решить поставленную задачу можно следующим образом: сначала формируются два списка задач со всех проектов. В первый список (открытые задачи) попадают задачи, которые можно начать выполнять на первом этапе работы

над проектами. Во второй список (задачи в ожидании) попадают все оставшиеся задачи, каждая из которых может быть начата только после того, как будет закончена работа над определенной задачей из первого списка.

Для каждого отдела решается своя задача о распределении сотрудников отдела по профильным задачам из первого списка задач.

Суть динамического распределения заключается в том, что когда группа сотрудников рассматриваемого отдела закончит работу над своей задачей из первого списка, эта группа сотрудников будет автоматически перераспределена на новые задачи своего профиля из первого списка, находящиеся в стадии запуска, т. е. на задачи, над которыми еще не работают сотрудники рассматриваемого отдела.

Таким образом, динамическое распределение сотрудников происходит тогда, когда будет выполнена любая задача из первого списка.

Если в первом списке нет задач в стадии запуска, то освободившиеся сотрудники будут автоматически направлены на задачи, над которыми работают остальные сотрудники отдела. При этом если позднее в первом списке появляется задача специализации сотрудников данного отдела, то перераспределенные сотрудники снимаются с работы над задачами остальных сотрудников и назначаются на новую задачу.

Если в первый список попадает задача специализации сотрудников рассматриваемого отдела, и при этом все сотрудники работают над своими первоначальными задачами, то поступившая задача остается в стадии запуска в первом списке.

После того, как работа над определенной задачей из первого списка будет закончена, эта завершенная задача удаляется из первого списка, а следующие за ней задачи из второго списка, которые можно начать выполнять, переносятся из второго списка в первый.

5. Заключение. В результате проделанной работы предложены новая задача о назначении в динамической постановке и математическая модель распределения сотрудников по задачам нескольких проектов и их динамического переназначения по другим задачам. Предложен алгоритм решения динамической задачи о назначениях, реализованный при помощи системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Для удобства работы с данными и встроенными функциями системы Wolfram Mathematica разработана программная оболочка на объектно-ориентированном языке программирования C#.

в которой все данные хранятся в базе данных SQL, а полученный вид матрицы отображается в виде диаграммы Ганта. За счет того, что матрица T состоит из нулей и единиц, причем единиц всего N штук, функция *Reduce* работает достаточно быстро. Но при больших размерностях ($M = 20$, $N = 20$) компьютерной программе необходимо время на вычисление всех значений целевой функции и проверку уравнений-ограничений (2). Чтобы избежать задержки в отображении перераспределений сотрудников, компьютерная программа будет автоматически запускать перераспределение сотрудников до того, как будет завершена работа над какой-либо задачей из первого списка.

Литература

1. Kuhn H. W. The hungarian method for the assignment problem // Naval Research Logistics Quarterly, 1955. P. 83–87.
2. Panos M. P., Pitsoulis L. S. Nonlinear assignment problems: algorithms and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 295 p.
3. Гимади Э. Х., Коркишко Н. М., Сердюков А. И. О разрешимости многоиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках // Известия высших учебных заведений, Математика, 2000. No 12. С. 26–31.
4. Sayin S., Karabati S. Assigning cross-trained workers to departments: a two-stage optimization model to maximize utility and skill improvement // European Journal of Operational Research, 2007. Vol. 176, No 3. P. 1643–1658.
5. Miller J. L., Franz L. S. A binary-rounding heuristic for multi-period variable task-duration assignment problems // Computers and Operations Research, 1996. Vol. 23, No. 8. P. 819–828.
6. Fikri M., Elhilali A. A., El Khomssi M. Assignment staff with dynamic competencies in multi-projects & multi-periods: modelling and solving by a hybridization of ant colony algorithm // International Journal of Computer Science and Network Security, 2011. Vol. 11, No. 3. P. 227–240.

Шиманская Г. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Возможности технической реализации учебного процесса с помощью средств дистанционного обучения

Рекомендовано к публикации доцентом Должиковым В. В.

В настоящее время консервативный подход к обучению претерпевает изменения, связанные с расширением форм и методов обучения [1]. С традиционными формами получения образования — очной, заочной и вечерней — все большее распространение получает такая инновационная форма как дистанционное обучение.

Достаточно эффективной формой обучения является комбинирование дистанционного и традиционного обучения. При таком подходе ставится задача повышения экономической эффективности посредством нахождения оптимального соотношения долей дистанционного и традиционного обучения. При этом качество обучения и уровень подготовки выпускаемых специалистов не должен понижаться.

Перейдем к рассмотрению составляющих комплекса обучения со стороны ВУЗа, оказывающего данные услуги.

Пусть t_0 — время начала обучения по курсу, T — время окончания обучения по курсу. Пусть $t_{k, k \in (1, K)}$ — период времени, рассчитанный на изучение фрагментов курса до k -го фрагмента включительно. За фрагмент курса принимаются отдельные его темы, повторение материала, самостоятельные, лабораторные, контрольные работы и время подготовки к ним, и так далее. Пусть $\Delta_{k, k \in (1, K)}$ — время, рассчитанное на изучение k -го фрагмента курса, которое зависит от различных его характеристик. Таким образом, t_0 — время начала обучения по курсу, $t_1 = t_0 + \Delta_1$ — время, рассчитанное на изучение первого фрагмента курса, $t_2 = t_1 + \Delta_2 = t_0 + \Delta_1 + \Delta_2$ — время, рассчитанное на изучение первого и второго фрагмента курса, ... $t_p = t_{p-1} + \Delta_p = t_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_p$ — время, рассчитанное на изучение курса до p -го фрагмента, ..., t_k — время окончания обучения по курсу (рис. 1).

Введем функцию $F(D, S, t) : [t_0, T] \rightarrow [0, 1]$, которая определяет соотношение долей между дистанционным обучением D и тра-

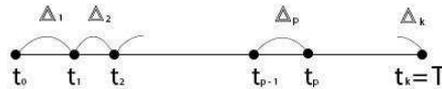


Рис. 1. Графическое изображение временного промежутка, рассчитанного на изучение полного курса

диционным обучением S в рассматриваемом курсе в момент времени t (рис. 2). Для удобства будем рассматривать значение функции $F(D, S, t)$ в моменты времени $t_{k, k \in (1, K)}$, определяя таким образом соотношение традиционного обучения S_k и дистанционного обучения D_k на каждом фрагменте изучения курса, предполагая это соотношение однородным на всем временном промежутке, рассчитанным на изучение k -го фрагмента курса.

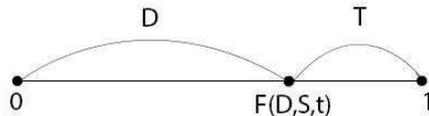


Рис. 2. Графическое изображение функции $F(D, S, t)$

За значение $F_k = F(D_k, S_k, t_k)$ будем принимать долю дистанционного обучения D_k в рассматриваемый период времени, рассчитывая его следующим образом.

Пусть доля дистанционного обучения D_k составляет $n\%$, тогда $F(D_k, S_k, t_k) = n/100$, очевидно, что $D_k + T_k = 1$ для $\forall k \in (1, K)$, так как весь курс принимается за единицу и обучение на данном этапе делится на две составляющих [2].

Пусть

$$(G_1(\tau), \dots, G_n(\tau)) = G_1(\tau) + \dots + G_n(\tau)$$

— стоимость обучения, осуществляемого полностью дистанционным образом. Здесь $G_i(\tau), i \in (1, n)$, — компоненты, требующие материальных расходов, τ — единица времени, за которое рассчитывается стоимость. В зависимости от долгосрочности обучения целесообразно рассматривать стоимость за час, день, месяц или семестр обучения. Например, $G_1(\tau)$ — стоимость программного обеспечения для реализации дистанционного обучения, $G_2(\tau)$ — стоимость домена и хостинга для расположения учебного модуля, $G_3(\tau)$ — стоимость поддержки и модернизации программного обеспечения и т. д. Все значения функций $G_i(\tau), i \in (1, n)$, отражают материальные затраты на те или иные компоненты за период времени τ .

Определим

$$Y_k(D_k) = \frac{G(G_1(\frac{\Delta_k}{\tau}), \dots, G_n(\frac{\Delta_k}{\tau}))}{100D_k}.$$

Данная функция будет определять затраты на дистанционное обучение D_k в период времени Δ_k .

Введем функцию $Y : Y(D) \rightarrow R$, выражающую полную стоимость доли дистанционного обучения за весь период курса, где R — множество действительных чисел:

$$Y(D) = \sum_{k=1}^K Y_k(D_k) = \sum_{k=1}^K \frac{G(G_1(\frac{\Delta_k}{\tau}), \dots, G_n(\frac{\Delta_k}{\tau}))}{100D_k}.$$

Пусть

$$(L_1(\tau), \dots, L_m(\tau)) = L_1(\tau) + \dots + L_m(\tau)$$

— стоимость обучения, осуществляемого полностью традиционным образом, где $L_j(\tau), j \in (1, m)$, — компоненты, требующие материальных расходов, τ — единица времени, за которое рассчитывается стоимость. В зависимости от долгосрочности обучения целесообразно рассматривать стоимость за час, день, месяц или семестр обучения. Например, $L_1(\tau)$ — стоимость работы преподавателя, $L_2(\tau)$ — стоимость аренды помещения для проведения занятий, $L_3(\tau)$ — стоимость техники, используемой для обучения (проектор, интерактивная доска, компьютеры) и т. д. Все значения функций

$L_j(\tau), j \in (1, m)$, отражают материальные затраты на те или иные компоненты за период времени τ .

Определим

$$Z_k(S_k) = \frac{L(L_1(\frac{\Delta_k}{\tau}), \dots, L_m(\frac{\Delta_k}{\tau}))}{100S_k}.$$

Данная функция будет определять затраты на традиционное обучение S_k в период времени Δ_k .

Введем функцию $Z : Y(S) \rightarrow R$, выражающую полную стоимость доли дистанционного обучения за весь период курса, где R — множество действительных чисел:

$$Z(S) = \sum_{k=1}^K Z_k(S_k) = \sum_{k=1}^K \frac{L(L_1(\frac{\Delta_k}{\tau}), \dots, L_m(\frac{\Delta_k}{\tau}))}{100S_k}.$$

Очевидно, что экономически выгодно будет затратить наименьшее количество средств на курс обучения, т. е.:

$$Y(D) + Z(S) \rightarrow \min.$$

При этом необходимо учитывать критерий качественной оценки обучения

$$Q(F(S, D, t)) = \sum_{k=1}^K Q_k,$$

где $Q_k = Q(F(D_k, S_k, t_k)) = Q(F_k)$ — уровень знаний обучающегося за k -ый фрагмент курса. Таким образом $Q(F(S, D, t))$ будет отражать фактический уровень знаний обучающегося после полного прохождения курса.

Введем следующие параметры $Q_{Nk}, k \in (1, K)$ — минимальный уровень знаний, необходимый для того, чтобы усвоение k -го фрагмента курса можно было считать успешным, T_N — время, предусмотренное нормами на прохождение всего курса.

На данный момент одной из актуальных задач в области профессионального образования является определение оптимального соотношения между формами обучения. Таким соотношением будет являться наиболее экономически выгодное решение, достигаемое путем минимизации стоимости курса, при этом не уменьшающее качества преподаваемого материала и укладывающееся в предусмотренное нормативами время для изучения курса T_N . Оптимальным соотношением будет являться решение системы

$$\begin{cases} Q(F(S, D, t)) \rightarrow \max, \\ Q_k \geq Q_{N_k}, \quad \forall k \in (1, K), \\ Y(D) + Z(S) \rightarrow \min, \\ T - t_0 \rightarrow \min, \\ T - t_0 \leq T_1. \end{cases}$$

В результате работы была поставлена задача поиска оптимального соотношения компонентов дистанционного и традиционного обучения. В постановке задачи рассматриваются аспекты повышения качества образования, экономической выгоды и временных затрат на курс обучения. Уже сейчас можно предполагать, что решение системы приведет к оптимальным условиям и выгодному балансу между дистанционной и традиционной формами обучения.

Литература

1. Молибог А. Г. Вопросы научной организации педагогического труда в высшей школе. М.: Высшая школа, 1971. 291 с.
2. Сушков Ю. А. Моделирование систем. СПб.: Изд-во ЛГУ, 1982. 109 с.

Яковлева Д. В., Губар Е. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Прогнозирование спроса для расчета оптимальной загрузки денежными средствами сети банкоматов

1. Введение. Экономический эффект работы банкоматов достигается за счет оптимального выбора сумм загрузки и периодов инкассации с учетом стоимости как загружаемых денежных средств, так и себестоимости инкассации [1].

Таким образом, разработка оптимальной стратегии загрузки сети банкоматов является актуальной задачей в настоящее время.

В работе рассматривается задача, заключающаяся в определении оптимального числа купюр, загружаемых в каждую из кассет во время очередной инкассации, с целью минимизации затрат при одновременном обеспечении достаточного числа денежных купюр для удовлетворения спроса клиентов — держателей карт.

2. Постановка задачи. Нахождение оптимального количества купюр для загрузки банкомата во многом схоже с управлением запасами на предприятии. Подобно предприятию банкомат содержит запас продукции, а именно, запас денежных средств. В момент инкассации запас пополняется на определенную денежную сумму, а оставшиеся в кассетах купюры возвращаются в банк. В течение определенного периода времени деньги в банкомате расходуются, и требуется очередная инкассация. При этом стоимость инкассации, загрузки купюр в кассеты и перерасчет возвращенных купюр можно расценивать как затраты на оформление заказа. В то время как затраты на хранение можно интерпретировать как потери от отвлечения денежных средств.

Для нахождения оптимального размера заказа предлагается использовать одноэтапную модель управления запасами. Одноэтапные модели управления запасами отражают ситуацию, когда для удовлетворения спроса в течение определенного периода продукция заказывается только один раз. Подробно эта модель рассмотрена в публикациях [2, 3].

Согласно этой модели оптимальный размер денежных средств, который необходимо загрузить в начале рассматриваемого периода,

вычисляется из уравнения

$$P(D \leq y^*) = \frac{p - c}{p + h}, \quad p, c, h \geq 0, \quad (1)$$

где D — величина случайного спроса за рассматриваемый период, y^* — оптимальный размер заказа, соответственно левая часть уравнения — интегральная функция распределения спроса; p — удельные потери от неудовлетворенного спроса, h — затраты на хранение, c — стоимость закупки продукции (в рассматриваемой задаче $c = 0$).

Левая часть уравнения (1) будет варьироваться в зависимости от рассматриваемого закона распределения. Допустим, что в нашей задаче имеет место нормальный закон распределения [4]. Для упрощения вычислений будем рассматривать стандартный закон распределения

$$\frac{p}{p + h_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_i^*} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi(y_i^*), \quad (2)$$

и от найденного «оптимального» значения перейдем к искомой величине, т. е.

$$y_{opt}^i = \sigma_i y_i^* + \mu_i, \quad (3)$$

где y_{opt}^i — оптимальная сумма наличности, которую необходимо загрузить в i -ую кассету банкомата в начале рассматриваемого периода, учитывая прогнозируемый спрос на этот период; $\Phi(y_i^*)$ — функция Лапласа (интеграл вероятности).

В работе [5] для прогнозирования суммы снимаемой наличности на каждый день строился тренд, исходя из данных за предыдущие несколько дней.

В поставленной задаче предполагается, что известен закон распределения спроса купюр в банкомате в течение периода. Таким образом, нет необходимости прогнозировать данные на каждый день, поскольку это увеличит и время, потраченное на решение задачи, и количество анализируемых данных. Эффективнее прогнозировать именно параметры μ_i и σ_i соответственно для i -ой кассеты на рассматриваемый период. Прогноз строится на основе полученных данных за предыдущие периоды.

Итак, рассмотрим отдельный банкомат, состоящий из четырех кассет. Предположим, что мы располагаем данными о снимаемой

денежной сумме с каждой кассеты банкомата за последние N периодов, т. е. известны параметры μ_t^i и σ_t^i , $t = 1, \dots, N$. Необходимо при помощи регрессионной модели получить значения μ_{N+1}^i и σ_{N+1}^i . Для нахождения этих параметров будем использовать регрессионную модель следующего вида:

$$\mu_t^{*i} = a_i + b_i t, \quad \sigma_t^{*i} = c_i + d_i t. \quad (4)$$

Константы a_i, b_i, c_i, d_i из формул (4) определяются из временных рядов с использованием метода наименьших квадратов, в соответствии с которыми находятся значения этих констант, доставляющих минимум сумме квадратов разностей между наблюдаемыми и вычисленными величинами.

Для оценки периодической составляющей необходимо устранить тренд из временного ряда. Оценка периодической составляющей находится по формуле

$$P_{1t}^i = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} (\mu_{t+rT}^i - \mu_{t+rT}^{*i}), \quad t = [1, \dots, T]. \quad (5)$$

$$P_{2t}^i = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} (\sigma_{t+rT}^i - \sigma_{t+rT}^{*i}), \quad t = [1, \dots, T]. \quad (6)$$

где N — количество наблюдений, T — длина периода временного ряда, $d = \lfloor \frac{N}{T} \rfloor$ — целое число периодов.

Таким образом, для каждой кассеты банкомата временной ряд данных о снимаемой денежной сумме представим в виде

$$\mu_t^i = \mu_t^{*i} + P_{1t}^i, \quad \sigma_t^i = \sigma_t^{*i} + P_{2t}^i, \quad t = 1, \dots, N.$$

В реальной жизни рассчитывать эти параметры каждый раз для каждого банкомата крупной сети громоздко и неэффективно. Допустим, что множество банкоматов можно разбить на m непересекающихся подмножеств банкоматов. При разбиении следует учитывать ряд факторов:

- место расположения банкомата;
- неравномерность снятия денежных средств через банкомат по дням недели;
- требуемые купюрные наборы в кассетах;

- режим работы банкомата и т. д.

Предположим, что для каждого подмножества наблюдается близкая, похожая интенсивность спроса.

Рассмотрим отдельно взятое подмножество S , состоящее из n банкоматов. За период t через каждую кассету i банкомата j снимается определенная денежная сумма μ_{jt}^i . Допустим, что мы располагаем данными о снимаемой денежной сумме с каждой кассеты каждого банкомата из подмножества S за N предыдущих периодов. Тогда среднее значение снимаемой суммы с i -ой кассеты за период находим по формуле

$$\overline{\mu}_t^i = \frac{1}{n} \sum_{j \in S} \mu_{jt}^i, \quad t = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, n.$$

Далее по предложенному выше алгоритму по двумерной выборке $(1, \overline{\mu}_1^i), \dots, (N, \overline{\mu}_N^i)$ строим парную регрессию показателя $\overline{\mu}_t^i$ на t , где $1, \dots, N$ — порядковый номер выборки. Оцениваем периодическую составляющую по формулам (5)–(6) и получаем временной ряд данных о снимаемой денежной сумме в виде

$$\overline{\mu}_{kt}^i = \mu_{kt}^{*i} + P_{1kt}^i, \quad \overline{\sigma}_{kt}^i = \sigma_{kt}^{*i} + P_{2kt}^i, \quad (7)$$

где $i = 1, \dots, 4$; $t = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, m$.

Основываясь на формулах (7), можно сделать прогноз о значении снимаемой наличности с i -ой кассеты на следующий год:

$$\overline{\mu}_{kT}^i = \mu_{kT}^{*i} + P_{1kT}^i, \quad \overline{\sigma}_{kT}^i = \sigma_{kT}^{*i} + P_{2kT}^i,$$

где $T = N + 1, \dots, N + 12$; $k = 1, \dots, m$.

Полученные значения параметров μ_t^i и σ_t^i и вычисленное из уравнения (2) значение y_t^* позволяет, используя формулу $y_{opt}^i = \sigma_i y_t^* + \mu_i$, найти оптимальное значение наличности, которую необходимо загрузить в банкомат в начале рассматриваемого периода для каждой кассеты в отдельности.

3. Численное моделирование. Рассмотрим, к примеру, четыре группы банкоматов. Предполагается, что сведения по ним, а именно, значения параметров μ_t^i и σ_t^i за последний год известны. Необходимо спрогнозировать спрос наличности по каждой кассете каждой

группы банкоматов и соответственно определить оптимальный размер наличности для каждой кассеты, который необходимо загрузить в начале рассматриваемого периода.

В каждой группе наблюдается повышенный спрос на определенный тип купюр.

Данные по каждой группе занесены в таблицы (см. рис. 1).

№ периода	I кассета (100 руб)		II кассета (500 руб)		III кассета (1000 руб)		IV кассета (5000 руб)		Сумма
	μ1	σ1	μ2	σ2	μ3	σ3	μ4	σ4	
	1	139805	118	426452	657	1193840	1297	1185096	
2	150963	181	594961	618	1256530	1389	1127539	5868	3129982
3	142874	150	519708	545	1617094	1057	1179370	5928	3459046
4	149811	234	564462	707	1547982	1145	1158785	5133	3421040
5	184082	247	528280	520	1641655	1452	1144141	5814	3498158
6	208709	172	686322	508	1833627	1001	1145638	5024	3874286
7	160818	173	668494	660	1768345	1111	1198308	5054	3795965
8	228108	207	664415	615	1788436	1185	1191537	5659	3871496
9	216907	195	539067	581	1586951	1306	1186795	5308	3538720
10	194785	118	455449	715	1246790	1151	1125325	5880	3022349
11	140900	227	484997	573	1742106	1158	1150836	5298	3518659
12	233710	134	657351	688	1835110	1487	1203650	5082	3929821

Рис. 1. Данные по первой группе

При помощи встроенного в Excel пакета для анализа линейной регрессии (Сервис > Анализ данных > Регрессия) прогнозируются значения параметров μ_{13}^i и σ_{13}^i .

В таблицах приведены уже усредненные значения параметров по каждой группе (см. рис.2).

Прогноз	μ1	σ1	μ2	σ2	μ3	σ3	μ4	σ4	Сумма
I группа	146056	178	539599	600	1294033	1213	1159314	5732	3139002
II группа	133088	121	713906	683	1614152	1364	790130	5328	3251276
III группа	57946	153	418190	702	902938	1210	2263755	5489	3642829
IV группа	227152	163	513494	578	1063990	1151	901618	5425	2706254

Рис. 2. Прогнозируемые значения параметров по каждой группе

Для каждой группы рассматриваются одинаковые значения следующих переменных: $d = 0,01$ (процентная годовая ставка); $s = 0,05$ (потери от дефицита); $h_1 = 0,00274$; $h_2 = 0,0137$; $h_3 = 0,0274$; $h_4 = 0,13699$, где h_i (стоимость хранения купюр) предлагается вычислять как $h_i = dN_i/365$, N_i — номинал купюр 100, 500, 1000 и 5000 рублей соответственно.

Поскольку параметры одинаковые, то значения y_i^* также будут

одинаковыми, так как вычисляются по формуле: $y_i^* = \Phi^{-1} \left(\frac{p}{p+h_i} \right)$.

Далее по формуле (3), используя спрогнозированные значения параметров, вычисляются оптимальные размеры загружаемой наличности. Ниже представлены результаты для всех четырех групп (см. рис. 3).

<i>I группа</i>		<i>II группа</i>		<i>III группа</i>		<i>IV группа</i>	
Yi opt	Кол-во купюр	Yi opt	Кол-во купюр	Yi opt	Кол-во купюр	Yi opt	Кол-во купюр
146346	1463	133285,2	1332	58195,39	581	227417,7	2274
540073	1080	714445,6	1428	418744,58	837	513950,6	1027
1294482	1294	1614657	1614	903385,7	903	1064416	1064
1162868	232	793433,4	158	2267158,18	453	904981,5	180

Рис. 3. Оптимальные размеры загружаемой наличности

4. Заключение. Анализ результатов, полученных при численном моделировании, показывает, что предложенная модель позволяет получать оптимальные значения искомых параметров. Также стоит отметить, что построенные оптимальные распределения внутри каждой группы различны и удовлетворяют первоначальному признаку разбиения всей сети на подгруппы, а именно, различной интенсивности спроса.

Литература

1. Бояршинов М. Г., Салихова О. С. Оптимальная загрузка банкомата денежными купюрами // Вестник ПГТУ. 2010. Вып. 15. С. 130–148.
2. Hiller F. S., Lieberman G. J. Inventory theory // Introduction to operations research. Seventh Edition, 2001. P. 960–1033.
3. Рыжиков Ю. И. Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер, 2001. 123 с.
4. Yasar Altunoglu. Cash Inventory Management at Automated Teller Machines under incomplete information. 2010. <http://www.thesis.bilkent.edu.tr/0004020.pdf>
5. Губар Е. А., Мерзлякова Ю. Д. Оптимальная политика инкассации банкомата // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2011. С. 528–533.

Именной указатель

Абдулина К.А.	105, 109	Викулина Ю.И.	165
Аверьянова К.В.	545	Виноградова Е.М.	230
Алферов Г.В.	113, 119	Вознюк А.Э.	9
Алцыбеев В.В.	125, 130	Волкова А.С.	14
Андерсен А.А.	551	Воскобойникова Е.В.	171
Андреева Т.А.	135	Гаёва Е.С.	177
Андриевский Д.С.	142	Ганкевич И.Г.	420
Арикайнен А.И.	385	Гнилицкая Ю.А.	20
Артемов А.Г.	389	Головкина А.Г.	182
Арцыбашева Л.Н.	395	Гордеев Д.Ф.	329
Бабин А.В.	313	Греков М.А.	148, 159
Балабанов М.Ю.	399	Григорьева К.В.	564
Барабанова С.А.	319	Гришкин В.М.	424
Басков О.В.	557	Громов А.О.	187
Башканкова Е.А.	148	Губар Е.А.	644, 683
Бедрина М.Е.	154	Дегтярев А.Б.	413
Блеканов И.С.	403	Доманская Т.О.	193
Болотина О.В.	560	Елаев Е.В.	198
Борисов Е.А.	408	Ермолин В.С.	204
Буре А.В.	325	Ефимова П.А.	211
Буре В.М.	637	Жабченко А.А.	570
Бусько И.В.	413	Жигачева А.Л.	576
Вакаева А.Б.	159	Забровский А.Л.	385

Зартдинов А.Н.	215	Мальков В.М.	193
Захаров А.О.	582	Мальцева А.С.	113
Зверков В.Н.	220	Малявкин Г.П.	245
Иванова О.А.	395	Манушкина Т.В.	345
Ипатов Д.А.	588	Маринаки М.	250
Ишкулов И.Г.	427	Маров А.В.	444
Климаков А.А.	225	Матросов А.В.	256
Климук Д.О.	593	Меденников И.П.	37
Князькин Я.В.	432	Мезенцева П.В.	451
Козлов К.А.	335	Митюшин Ф.М.	204
Колбин В.В.	611	Михеев С.А.	262
Колпакова Е.А.	26	Михель Н.В.	617
Котина Е.Д.	313	Мишенина В.В.	620
Кривовичев Г.В.	171, 177, 262	Молчанова И.Ю.	43
Крутов Д.А.	599	Морозов П.Д.	268
Кузнецов С.Р.	339	Нгуен Д.Х.	48
Куруч О.С.	230	Нефедов Д.Э.	479
Лебедев Д.М.	32	Никифоров К.А.	142, 215, 274
Ледовская В.А.	605, 611	Носов С.А.	350
Леонтьев В.А.	236	Овсянников Д.А.	130
Листрукова А.В.	241	Олемской И.В.	355
Макаров А.А.	438	Орлова А.С.	625
Максимов А.Ю.	403	Перегудин С.И.	279
Малафеев О.А.	113	Петрашко А.В.	631

Петрова В.А.	457	Старева И.А.	119
Петросян О.Л.	637	Старков В.Н.	105, 109
Платонова В.А.	644	Сударев О.И.	367
Пономарев А.А.	53	Сумачева В.А.	59
Попова М.А.	43	Тамасян Г.Ш.	94
Приставко Г.С.	462	Телевный Д.С.	301
Романова О.Ю.	649	Трофимов В.В.	154, 307
Рубша А.И.	361	Удот М.В.	65
Ружников В.О.	468	Унаров Д.М.	373
Рылов А.М.	654	Утешев Н.А.	71
Рябуша В.А.	473	Фальков Е.А.	76
Сайфуллин М.Ф.	274	Фирюлина О.С.	355
Свиркина Н.М.	660	Фоминых А.В.	82
Севостьянов Р.А.	479	Хамматова Г.М.	376
Севрюков С.Ю.	485	Холодова С.Е.	279
Седова О.С.	285	Чернэуцану Е.К.	88
Семенова А.Г.	457	Чистяков С.В.	551
Семяшкіна Е.В.	291	Чугунов Е.С.	672
Сердюк Ю.А.	491	Чумаков А.А.	94
Смирнов М.Н.	297	Шабунин А.Н.	438
Смирнов Н.В.	576, 617	Шайкина П.Г.	564
Смирнова М.А.	297	Шакбасаров Р.Н.	497
Смирнова Е.В.	666	Шарлай А.С.	119, 502
Соловьев П.А.	485	Шиманская Г.С.	678

Широколобов А.Ю.	380	Klyuev V.V.	517, 528
Ширунов Г.Н.	256	Lepikhin T.A.	533
Шлыков В.А.	427	Makeev I.V.	533
Шмыров А.С.	245	Makino Y.	517
Шуляк А.С.	100	Mariescu-Istodor R.	533
Яковлева Д.В.	683	Parkkinen J.	539
Якушкин О.О.	399, 424	Tabarcea A.	533
Ялов А.Л.	508	Tikhomirov V.A.	522
Вагаву I.I.	513	Togashi N.	528
Fränti P.	533	Waga K.	533
Hauta-Kasari M.	539	Wu Z.	539
Heikkinen V.	539		

Contents

1. Mathematical theory of control processes	9
<i>Voznyuk A. E.</i> Method of sets isolation by two balls	9
<i>Volkova A. S.</i> Generalized solution of a boundary problem for a parabolic equation on an arbitrary graph	14
<i>Gnilitskaya Y. A.</i> The construction of boundary control of system vibrations of strings in the class of generalized solutions	20
<i>Kolpakova E. A.</i> Separation of two sets via two hyperplanes	26
<i>Lebedev D. M.</i> Optimization problem of point projecting to a quadric	32
<i>Medennikov I. P.</i> Lyapunov-Krasovskii approach to the stability analysis of differential-difference systems with a linear increasing time-delay	37
<i>Molchanova I. Y., Popova M. A.</i> An algorithm for constructing the dual cone in three-dimensional space	43
<i>Nguyen D. H.</i> On the absolute stability of a class of nonlinear difference systems	48
<i>Ponomarev A. A.</i> Suboptimal control synthesis in model predictive control	53
<i>Sumacheva V.</i> Neutral type systems: H_2 norm of transfer matrix .	59
<i>Udot M. V.</i> About Lemoine-Grebe point	65
<i>Uteshev N. A.</i> Approximation of point-to-set mappings by means of algebraic polynomials	71
<i>Fal'kov E. A.</i> On a method of solving the control problem in relation to the part of variables with the restriction on uncontrolled variables	76
<i>Fominych A. V.</i> The steepest descent method in a non-smooth optimization problem	82
<i>Cherneucanu E. K.</i> Numerical experiments on the strict h-sepa- rability	88
<i>Chumakov A. A., Tamasyan G. S.</i> Methods for finding the nearest distance between ellipsoids	94
<i>Shulyak A. S.</i> Chebyshev approximation problem with const- raints	100
2. Mathematical methods in mechanics and physics	105
<i>Abdulina K. A., Starkov V. N.</i> The research of the «trees-insects» system with Leslie's model	105

<i>Abdulina K. A., Starkov V. N.</i> A qualitative research of the dynamics of the two-age forest system.....	109
<i>Alferov G. V., Malafeyev O. A., Maltseva A. S.</i> The process of search and seizure of the object	113
<i>Alferov G. V., Stareva I. A., Sharlaj A. S.</i> Linguistic geometry in the problems of robotics and mechatronics	119
<i>Altsybeyev V. V.</i> Beam dynamics simulation of an biperiodic electron linear accelerator	125
<i>Altsybeyev V. V., Ovsyannikov D. A.</i> On the structure with accelerating field focusing optimization.....	130
<i>Andreeva T. A.</i> The analysis of hybrid potentials in the density functional method	135
<i>Andrievskiy D. S., Nikiforov K. A.</i> Algorithms of macroparticles emission in particle-in cell method	142
<i>Bashkankova E. A., Grekov M. A.</i> The perturbation method in a problem on an elastic plane with an elliptic hole.....	148
<i>Bedrina M. E., Trofimov V. V.</i> Holographic images modeling by Gaussian.....	154
<i>Vakaeva A. B., Grekov M. A.</i> Perturbation method in a problem on a curvilinear hole located in an elastic plane.....	159
<i>Vikulina Y. I.</i> Effect of a surface shape to the stress state of a nanomaterial size	165
<i>Voskoboinikova E. V., Krivovichev G. V.</i> Finite-difference scheme with two stages for the system of kinetic equations with discrete velocities	171
<i>Gaeva E. S., Krivovichev G. V.</i> Application of the modified Lax finite-difference schemes in the method of lattice Boltzmann equation	177
<i>Golovkina A. G.</i> On subcritical reactor power gain	182
<i>Gromov A. O.</i> Projections of density for models of stellar systems with generalized isothermal potential.....	187
<i>Domanskaya T. O., Mal'kov V. M.</i> Michel's problem for half-linear material	193
<i>Yelaev Y. V.</i> The tolerances calculation of accelerating and focusing structures.....	198
<i>Ermolin V. S., Mitushin F. M.</i> Calculation of time zones radio visibility of area.....	204
<i>Efimova P. A.</i> On the singularities of the space robot manipulators control.....	211

<i>Zartdinov A. N., Nikiforov K. A.</i> Electric field enhancement for nanostructured emission surface	215
<i>Zverkov V. N.</i> Simulation of turbulent flows with free surface near the ship's hull	220
<i>Klimakov A. A.</i> Modeling of the electron gun with focusing lens system in different configurations of the focusing system	225
<i>Kuruch O. S., Vinogradova E. M.</i> Modeling of the field emission system	230
<i>Leontyev V. A.</i> Sea waves diffraction on fixed body before sloping bottom	236
<i>Listrukova A. V.</i> Mathematical modeling of an electron-optical system	241
<i>Malyavkin G. P., Shmyrov A. S.</i> Impact influence on the NEO in the near-earth space	245
<i>Marinaki M.</i> Iterative solution of the flow problem past infinite row of cylinders	250
<i>Matrosova A. V., Shirunov G. N.</i> A closed form for operators of initial functions method for a three-dimensional elastic solid problem	256
<i>Krivovichev G. V., Mikheev S. A.</i> Three-layer finite-difference scheme for the solution of the system of kinetic Boltzmann equations with discrete velocities	262
<i>Morozov P. D.</i> On a smooth local spline	268
<i>Nikiforov K. A., Sayfullin M. F.</i> Development of plane-spherical diode with field emission array cathode	274
<i>Peregudin S. I., Kholodova S. E.</i> Reduction in problems of dynamics of a rotating layer of electrically conducting incompressible liquid taking into account effects of diffusion of a magnetic field ..	279
<i>Sedova O. S.</i> Modelling of radiation impact caused by releases into the atmosphere	285
<i>Semyashkina E. V.</i> Parameter optimization of mass-spring mechanical system	291
<i>Smirnov M. N., Smirnova M. A.</i> Realization of software complex for dynamic control of nonlinear object	297
<i>Televnyy D. S.</i> The modeling of diode-type system based on the field emitter	301
<i>Trofimov V. V.</i> Effective field cathodes	307

3. Mathematical models of medical and biological systems	313
<i>Babin A. V., Kotina E. D.</i> Mathematical data processing of SPECT blood pool.....	313
<i>Barabanova S. A.</i> On the problem of estimating the parameters of two-term sums	319
<i>Bure A. V.</i> Comparative efficiency analysis of objects based on the statistical information.....	325
<i>Gordeev D. F.</i> The method of calculating the dose distribution in tissue-equivalent medium.....	329
<i>Kozlov K. A.</i> Modeling of the collimator blur matrix in SPECT..	335
<i>Kuznetsov S. R.</i> Mathematical model of activation, proliferation and differentiation of T- and B- lymphocytes in process of their interactions in lymph node describing switching of synthesis immunoglobulin isotypes IgM and IgG.....	339
<i>Manushkina T. V.</i> Statistical analysis of the cardiac infarction database by contingency tables.....	345
<i>Nosov S. A.</i> On the stability of difference systems in critical cases.....	350
<i>Olemskoy I. V., Firyulina O. S.</i> The solution of the problem of finding a maximum common substructure in molecular graphs...	355
<i>Rubsha A. I.</i> Survival analysis of medical database of patients with cancer of the prostate.....	361
<i>Sudarev O. I.</i> Modeling of the data acquisition process for PET using Monte-Carlo simulation	367
<i>Unarov D. M.</i> Poisson noise filtering using the method of minimization of the total variation	373
<i>Khammatova G. M.</i> Application of principal component analysis in the classification of regions of Leningrad Region by mortality..	376
<i>Shirokolobov A. Yu.</i> Software modules of motion correction in radionuclide reseach.....	380
4. Information and computer technologies	385
<i>Arikainen A. I., Zabrovskiy A. L.</i> Quality assessment of multimedia streams, transmitted in real time mode.....	385
<i>Artemov A. G.</i> Problem of recognition and tracking of given objects in video-surveillance systems	389
<i>Artsybasheva L. N., Ivanova O. A.</i> On one method of data retrieval for spatial-temporal databases.....	395

<i>Balabanov M. Y., Yakushkin O. O.</i> Communication layer of a heterogenous distributed system	399
<i>Blekanov I. S., Maksimov A. Y.</i> The webometric research of the university Web segment using the Web-crawler	403
<i>Borisov E. A.</i> Cluster analysis of food stores network availability in Peterhof city residential area.	408
<i>Busko I. V., Degtyarev A. B.</i> Parameter identification of sea waves in the onboard intellectual system. Linear case	413
<i>Gankevich I. G.</i> MIC architecture performance benchmark in problem of solving stochastic differential equations	420
<i>Grishkin V. M., Yakushkin O. O.</i> Message queue broker development in C#	424
<i>Ishkulov I. G., Shly'kov V. A.</i> Applying virtualization and cloud infrastructure in development of comprehensive imitation stand.	427
<i>Knyazkin Y. V.</i> Computer simulation of the ship turning with settling time optimization	432
<i>Makarov A. A., Shabunin A. N.</i> Design features of electronic services generation for state authorities	438
<i>Marov A. V.</i> Error correction in storage systems	444
<i>Mezentceva P. V.</i> The problem of ontology population using artificial neural networks	451
<i>Petrova V. A., Semenova A. G.</i> The project of a database about computing machinery of a division	457
<i>Pristavko G. S.</i> Total error for a polynomial constructed by the least squares method	462
<i>Ruzhnikov V. O.</i> Investigation of the COSY Infinity efficiency on parallel systems with shared memory	468
<i>Ryabusha V. A.</i> Cellular automaton emulating the motion of the charged particles beam	473
<i>Sevostyanov R. A., Nefyodov D. E.</i> Remote system for the mobile robot control	479
<i>Sevryukov S. Yu., Solovyev P. A.</i> The possibility of generalized algorithm to evaluate cryptographic security of symmetric block cyphers against differential cryptanalysis attacks	485
<i>Serdyuk Yu. A.</i> Twitter virtual community extraction based on keyword extraction	491
<i>Shakbasarov R. N.</i> Identification of objects in a video stream based on color analysis	497
<i>Sharlai A. S.</i> On embedded mathematical expressions extraction from document images	502

<i>Yalov A. L.</i> Motion detection from stationary and rotating cameras	508
<i>Baravy I. I.</i> Wavelets in Digital Audio Processing: Beethoven's Sonatas Clustering	513
<i>Makino Y., Klyuev V.</i> Web security learning technique for novices	517
<i>Tikhomirov V. A.</i> Optimization of sending WRITE SAME commands through HP Smart Array 642	522
<i>Togashi N., Klyuev V.</i> Comparison of Go and Java features	528
<i>Waga K., Mariescu-Istodor R., Tabarcea A., Makeev I. V., Lepikhin T. A., Fränti P.</i> Modeling user profile by analyzing user activity in location-based system	533
<i>Wu Z., Heikkinen V., Hauta-Kasari M., Parkkinen J.</i> Detection of intracutaneous allergic skin elements based on near-infrared spectral skin images	539

5. Control problems in social and economical systems .. 545

<i>Averyanova C. V.</i> Placing a distribution centre for Internet shop ..	545
<i>Andersen A. A., Chistiakov S. V.</i> The producer of optimal tax schedules	551
<i>Baskov O. V.</i> Properties of sharp fuzzy finitely generated dual cones	557
<i>Bolotina O. V.</i> Risk minimization on fuzzy logic in a single task ..	560
<i>Grigor'eva K. V., Shajkina P. G.</i> Multicriteria coalitional model of decision-making with different preferences of players	564
<i>Zhabchenko A. A.</i> Geographically weighted regression and its application	570
<i>Zhigachjova A. L., Smirnov N. V.</i> Rationale for the continuity of the modified model of endogenous growth Lucas	576
<i>Zakharov A. O.</i> Using information on the preference relation in one economic problem	582
<i>Ipatova D. A.</i> Insurance tariff computations with random accrual rate	588
<i>Klimuk D. O.</i> Game-theoretic model of bank's cooperation in a cost-saving problem	593
<i>Krutov D. A.</i> On the dynamics of bank capital with endogenous demand for products	599
<i>Ledovskaya V. A.</i> Analysis of non-coherent risk measures	605
<i>Ledovskaya V. A., Kolbin V. V.</i> Coherent risk measures	611

<i>Mikhel N. V., Smirnov N. V.</i> Analysis of the mathematical model of credit mechanism used by the company for the development of new production.....	617
<i>Mishenina V. V.</i> Modification of the generalized model of economic growth with account of human capital accumulation	620
<i>Orlova A. S.</i> Multi-criteria optimization in informational control models.....	625
<i>Petrashko A. V.</i> Game theoretical modeling of data retransmission in wireless networks	631
<i>Petrosian O. L., Bure V. M.</i> Multiple regression in the problem with incomplete data.....	637
<i>Platonova V. A., Gubar E. A.</i> Multi-depots location routing problem in ATM's network.....	644
<i>Romanova O. Yu.</i> Endogenously controlled climate-economic model.....	649
<i>Rylov A. M.</i> The numerical solution of the problem of constructing the scale of the marginal income tax rates.....	654
<i>Svirkina N. M.</i> Application of Cohen's Kappa and weighted Kappa to analysis of information on educational process.....	660
<i>Smirnova E. V.</i> Stable cooperation in one linear-quadratic differential game	666
<i>Chugunov E. S.</i> Nonlinear dynamic problem on the assignment of staff on the projects	672
<i>Shimanskaia G. S.</i> The possible technical realization of the educational process by means of distance learning	678
<i>Yakovleva D. V., Gubar E. A.</i> Demand forecasting for optimal loading of a network of ATMs with money	683
Contents	689
Author index.....	696

Научное издание

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Труды 44-й международной научной конференции
аспирантов и студентов

Печатается без издательского редактирования

Компьютерная верстка: *М. Н. Смирнов, М. А. Смирнова*

Редактор текста на английском языке: *М. А. Смирнова*

Обложка художников: *С. Ю. Куцков, Г. А. Мартыненко*

Подписано в печать 14.06.13

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 40,8. Тираж 160 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В.О. 6-я линия, 11/21

Тел. (812) 328-96-17, факс (812) 328-44-22

Типография Издательства СПбГУ

199061, С.-Петербург, Средний пр., д. 41