

ISSN 2313-7304

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

ТОМ 1 (17)

**ТРУДЫ XLV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ**

**Санкт-Петербург
1 – 4 апреля 2014 года**

ISSN 2313-7304

***CONTROL PROCESSES
AND STABILITY***

Vol. 1 (17)

**PROCEEDINGS OF THE XLV
INTERNATIONAL CONFERENCE**

**St. Petersburg
April 1 – 4, 2014**

PUBLISHING HOUSE
FEDOROVA G.V.
2014

ББК 22.1

П84

Редакционная коллегия:

д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Петросян (отв. редактор) (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. В. Смирнов (зам. отв. редактора) (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. Е. И. Веремей (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. О. И. Дривотин (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. Жабко (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. Е. Д. Котина (СПбГУ)

Процессы управления и устойчивость. Том 1 (17) / науч. ред.
П84 тома Н. В. Смирнов. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В.,
2014. 529 с.
ISSN 2313-7304

«Процессы управления и устойчивость» – ежегодное научное издание. Издается на факультете прикладной математики – процессов управления СПбГУ с 1998 года. Сборник традиционно формируется по результатам работы ежегодной Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» и включает статьи студентов, аспирантов, сотрудников СПбГУ и других высших учебных заведений, в том числе зарубежных, по математической теории процессов управления, математическим методам в механике и физике, математическому моделированию в медико-биологических системах, информационным и компьютерным технологиям, теории управления социально-экономическими системами.

В Том 1 (17) включены статьи участников юбилейной 45-й Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (1 – 4 апреля 2014 года), прошедшие рецензирование и рекомендованные к публикации. Сборник предназначен для студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.1

*Сборник издается при финансовой поддержке
факультета прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета*

ISSN 2313-7304

© Издательский Дом Федоровой Г.В., 2014
© Смирнов Н.В., 2014

Содержание

1. Математическая теория процессов управления.....	9
<i>Гнилицкая Ю. А.</i> Управление параболической системой с распределенными параметрами на графе в банаховом пространстве с производной по времени.....	9
<i>Лакрисенко П. А.</i> Исследование устойчивости положения равновесия нелинейной механической системы с переключениями.....	15
<i>Медведева И. В.</i> Анализ устойчивости линейного дифференциального уравнения с двумя несоизмеримыми запаздываниями.....	21
<i>Пономарев А. А.</i> Функционал Ляпунова для управляемой линейной системы с компенсатором запаздывания.....	26
<i>Попков А. С., Баранов О. В.</i> Об оптимальном управлении вращательным движением вала электродвигателя.....	31
<i>Слупко К. А.</i> Приближенный метод построения функционалов Ляпунова — Красовского для периодических дифференциально-разностных систем.....	37
<i>Тамасян Г. Ш., Удот М. В.</i> Обобщенная точка Люиллье.....	44
<i>Фоминых А. В.</i> Точные штрафы в вариационной задаче с ограничениями в виде дифференциальных неравенств.....	50
<i>Холинова А. А.</i> Оценка области асимптотической устойчивости решений однородных дифференциально-разностных систем уравнений запаздывающего типа.....	56
<i>Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш.</i> Поиск наименьшего расстояния между эллипсоидами методом сопряженных гипогradientов.....	62
<i>Шуляк А. С.</i> Численное решение задачи чебышевской аппроксимации при наличии ограничений.....	65
<i>Shayakhmetova L. V.</i> Stabilization problem for a scalar equation with one state and two input delays.....	70
<i>Zgonnikov A. V., Lubashevsky I. A.</i> Optimal feedback approximation of human open-loop control in virtual stick balancing.....	76

2. Математические методы в механике и физике 82

<i>Абдулина К. А., Старков В. Н.</i> Качественное исследование динамики лесной системы с учетом вырубки и вывоза	82
<i>Абдушукуров Д. В.</i> Параметрическое моделирование допусков на примере сложных динамических систем	87
<i>Алцыбеев В. В., Скудниова И. С.</i> Об одном методе расчета параметров ускорителя с трубками дрейфа	93
<i>Андреева Т. А.</i> Колебательные спектры цианобифенилов	99
<i>Башканкова Е. А., Греков М. А.</i> Метод возмущений в задаче об упругой плоскости с эллиптическим включением	105
<i>Вакаева А. Б., Греков М. А.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния упругого тела с почти круговыми дефектами	111
<i>Громов А. О.</i> Оценка параметров для обобщенно-изотермической модели Галактики	117
<i>Доманская Т. О., Мальков В. М.</i> Нелинейная задача о сосредоточенной силе на межфазной границе двух полуплоскостей . .	123
<i>Дорофеева А. А., Еремин А. С.</i> Решение дифференциальных уравнений с переменными запаздываниями функционально-непрерывными методами Рунге — Кутты	129
<i>Ежакова Т. Р.</i> Построение вычислительного эксперимента в гидродинамике на основе метода крупных частиц	135
<i>Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И., Лебедев Т. В.</i> Моделирование процесса оледенения морского газопровода	140
<i>Жданов К. Е.</i> Оптимальное управление эволюцией частицы со спином $1/2$ в магнитном поле	146
<i>Кобышев С. С.</i> Нормирующий коэффициент для приближенного вычисления континуального интеграла	152
<i>Козынченко В. А., Бойко А. А.</i> Об одном методе учета взаимодействия заряженных частиц в линейных ускорителях	157
<i>Костырко С. А., Чепинога С. В.</i> Напряженное состояние пленочного покрытия со слабо искривленной свободной и межфазной поверхностью	163
<i>Костырко С. А., Шувалов Г. М.</i> Образование дефектов поверхности многослойного пленочного покрытия при диффузионных процессах	169
<i>Костюкова А. В., Павловский В. А.</i> Динамика истечения реальных газов из резервуаров	175

<i>Краснова А. А., Никифоров К. А.</i> Модель структуры поверхности автоэлектронного эмиттера	179
<i>Листрукова А. В., Виноградова Е. М.</i> Математическое моделирование эмиссионной системы	185
<i>Маринаки М.</i> Об одной задаче оптимизации дизайна магнитного сцепления	191
<i>Михеев С. А., Кривовичев Г. В.</i> Исследование устойчивости трехслойных разностных схем решения системы кинетических уравнений	196
<i>Никифоров К. А., Сайфуллин М. Ф., Трофимов В. В.</i> Исследование краевых эффектов по электрическому полю массива автоэлектронных эмиттеров	202
<i>Оскирко А. Д., Перегудин С. И., Холодова С. Е., Ширококов М. В.</i> МГД-волны с учетом эффектов динамики магнитного поля	208
<i>Седова О. С., Хакназарова Л. А.</i> Расчет напряжений в толстостенном сферическом элементе с наружной выемкой	212
<i>Сорокина В. А., Никифоров К. А.</i> Исследование ab initio плотности тока полевой электронной эмиссии углеродной нанотрубки	218
<i>Телевный Д. С., Виноградова Е. М.</i> Расчет диодной системы на основе полевого эмиттера с диэлектрической подложкой ..	224
<i>Устименко С. С., Распопова Н. В.</i> Исследование орбит в трехпараметрическом семействе несферических обобщенно-изохронных моделей звездных систем	230
<i>Устинов Р. Н., Виноградова Е. М.</i> Математическое моделирование электронно-оптической системы с диэлектрической диафрагмой конечной толщины	236
<i>Черняева Н. Н.</i> Выявление зависимости появления хаотичности от коэффициентов для модели Энона — Хейлеса	242

3. Математические модели медико-биологических систем **247**

<i>Бажанов П. В.</i> Моделирование сбора проекционных данных ПЭТ	247
<i>Куликова К. Ю.</i> Статистический анализ медицинских данных при наличии пропусков	253


<i>Пасечная Г. А.</i> Определение поля скоростей в задачах обработки радионуклидных изображений	259
<i>Смирнов Б. В., Кирьянен А. И.</i> Математические модели распространения инфекционных заболеваний с учетом инкубационного периода	265
<i>Смирнов К. В.</i> Метод оптического потока в задаче обработки изображений	272
<i>Смирнов Н. В.</i> Оптимальное управление процессом биоочистки сточных вод в аэротенке	277

4. Информационные и компьютерные технологии 283

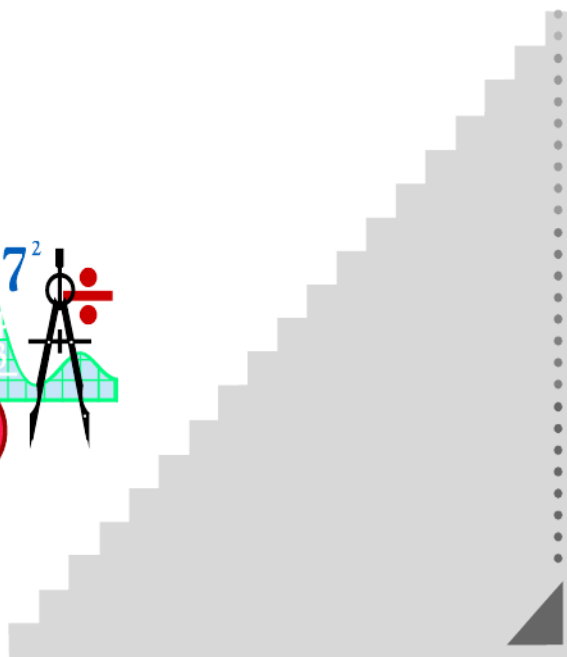
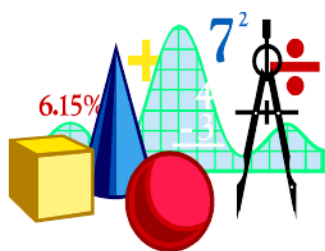
<i>Балян С. Г., Раловец Р. В., Абраамян С. А., Южанин Н. В.</i> Функциональности системы управления виртуальными кластерами FishDirector и проверка ее эффективности	283
<i>Бобылева В. В.</i> Синтез астатического МРС-регулятора для системы магнитной левитации	289
<i>Ганкевич И. Г., Дегтярев А. Б.</i> Метод распределения нагрузки на многопроцессорную систему	295
<i>Гиппиев М. Б.</i> Алгоритмы распознавания строк в стенографических документах	301
<i>Гришкин В. М., Якушкин О. О.</i> Опыт решения проблемы Round-Robin для безброкерных систем	304
<i>Гущанский Д. Е.</i> Метод извлечения текста из научных статей в формате PDF	308
<i>Карташов Д. Н.</i> Минимизация времени исполнения пользовательских программ	314
<i>Киктенко А. А., Никифоров К. А.</i> Исследование информационной чувствительности компьютерного алгоритма для проблемы коммивояжера	319
<i>Климов Н. С.</i> Распознавание лиц нейросетевыми методами	325
<i>Князькин Я. В.</i> Обнаружение и диагностика динамических сбоев в процессе стабилизации движения морского судна	330
<i>Комаров И. И., Юрьева Р. А., Дранник А. Л., Масленников О. С., Коваленко М. Е., Егоров Д. А.</i> Исследование деструктивного воздействия роботов-злоумышленников на эффективность работы мультиагентной системы	336
<i>Короткова Н. Ю.</i> Динамическое позиционирование мобильного робота	341

<i>Лашков А. А.</i> Решение СЛАУ с разреженной матрицей методом приведения к блочному диагонально-окаймленному виду.....	347
<i>Новопашин Д. В.</i> Статистическая обработка данных вторичной радиолокации с помощью ортогональных полиномов Чебышева.....	352
<i>Огийко А. А.</i> Применение метода Борда в ранжировании веб-сайтов.....	357
<i>Орехов М. Ю.</i> Быстродействующая строковая система на C++.....	363
<i>Пономарева Е. С.</i> Алгоритмы разбиения графов на сообщества на примере графа пользователей сайта twitter.com.....	369
<i>Приставка М. В.</i> Анализ робастной устойчивости системы автоматического управления движением автомобиля.....	375
<i>Рябуша В. А.</i> Моделирование интенсивного пучка заряженных частиц на основе клеточного автомата.....	379
<i>Севостьянов Р. А.</i> Управление движением мобильного робота с учетом транспортного запаздывания.....	385
<i>Северюков С. Ю., Соловьев П. А., Полонский В. А.</i> Обзор и анализ вариантов реализации растровых операций в Web-ГИС.....	391
<i>Смирнов М. Н., Смирнова М. А.</i> Современные информационные технологии в процессе обучения технических специалистов.....	397
<i>Сюз Юаньюань.</i> Компьютерное моделирование системы стабилизации курса автомобиля с использованием прогноза.....	401
<i>Тупикин Ю. А.</i> Механизм транзакций для RESTful веб-сервисов: концепции решения.....	407
<i>Южанин Н. В., Золотарев В. И.</i> Решение проблемы слежения за вычислительными задачами на суперкомпьютерах при помощи системы service desk.....	413
<i>Якушкин О. О.</i> Добавление новых коммуникационных шаблонов и их горизонтальное масштабирование в безброкерной системе.....	419
<i>Ялов А. Л.</i> Распознавание номеров вагонов при помощи нейросети.....	424
<i>Yuhei Akama, Keitaro Naruse.</i> A tool for visualizing multiple agents using the Octree algorithm.....	428

5. Управление социально-экономическими системами..	434
<i>Алферов Г. В., Малафеев О. А., Мальцева А. С.</i> Динамическая модель проведения инспекций	434
<i>Асанова Н. С.</i> Использование аппарата производственных функций в условиях толерантности	440
<i>Болотова В. И.</i> Статистический анализ телевизионных рейтингов	446
<i>Бутенко М. С.</i> Комбинированный принцип оптимальности в одной многошаговой сетевой игре	452
<i>Владимиров Е. В., Смирнов Н. В.</i> Сценарный подход моделирования развития предприятия, использующего кредитные ресурсы	458
<i>Дорофеев Б. В., Закройщиков С. А.</i> Приложение актуарных расчетов в страховании жизни	465
<i>Егорова Н. В.</i> Прогнозирование и многоцелевая оптимизация электроэнергетической отрасли Санкт-Петербурга	471
<i>Захаров В. В., Крылатов А. Ю.</i> Конкурентное равновесие Вардропы на транспортной сети из параллельных неоднородных маршрутов	476
<i>Лукина А. А.</i> Прогноз демографической ситуации в РФ с применением переменной матрицы Лесли	482
<i>Любич С. Я., Чугунов Е. С.</i> Применение LP/NLP алгоритма в многопродуктовой задаче управления запасами	488
<i>Прудникова Т. М.</i> Одна модель системы массового обслуживания с приоритетом	494
<i>Свиркина Н. М.</i> Метод кривых Пирсона в анализе баллов ЕГЭ абитуриентов, поступивших в вуз	500
6. Прикладная математика и процессы управления на факультете ПМ–ПУ СПбГУ	506
<i>Утешев А. Ю.</i> От Ферма до Максвелла: о стационарных точках семейства потенциалов	506
Contents	522
Именной указатель	527



*1. Математическая
теория процессов
управления*



УДК 517.954

Гнилицкая Ю. А.

Управление параболической системой с распределенными параметрами на графе в банаховом пространстве с производной по времени

Рекомендовано к публикации профессором Провоторовым В. В.

1. Введение. В работе рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения с распределенными параметрами на графе и ей соответствующая задача оптимального управления в банаховом пространстве с производной по времени. При этом в качестве пространства управлений используется пространство $\mathbb{U} = L_2(\Gamma_T)$, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$. При изложении результатов используются принятые в [1, 2] понятия и утверждения. Данная работа является естественным продолжением представленного в [3] исследования.

2. Основные понятия и положения. Пусть Γ — произвольный, связный, ограниченный, ориентированный граф, допускающий наличие циклов, при этом сохраняются обозначения, представленные в [2]: $\partial\Gamma$ — множество граничных узлов, $J(\Gamma)$ — множество внутренних узлов. Γ_0 — объединение всех ребер, не содержащих конечных точек; $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$.

Введем необходимые пространства [2]: $L_2(\Gamma)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на графе Γ , $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка также из $L_2(\Gamma)$. Норма в $W_2^1(\Gamma)$ определяется скалярным произведением $(u, v)_{W_2^1(\Gamma)} = \int_{\Gamma} [uv + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}] dx$. Для билинейной формы

$$\int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x) \mu(x) \nu(x) \right) dx,$$

где $a(x), b(x) \in L_2(\Gamma)$ — фиксированные измеримые, ограниченные на Γ_0 функции, из леммы 2 [2] следует, что в пространстве

Гнилицкая Юлия Александровна — аспирант, Воронежский государственный университет; e-mail: *uliy_a@mail.ru*, тел.: +7(951)767-05-01

$W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma)$ есть множество Ω функций $u(x) \in C(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$ — пространство непрерывных на Γ функций), удовлетворяющих соотношениям $\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx}$ во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ — множество ребер, ориентированных «к узлу ξ », $r(\xi)$ — множество ребер, ориентированных «от узла ξ »). Замыкание в норме $W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma)$ множества функций из Ω , равных нулю во всех узлах $\xi \in \partial\Gamma$, обозначим через $W_{\frac{1}{2},0}^1(a, \Gamma)$.

Рассмотрим начально-краевую задачу отыскания решения $y(x, t)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x,t) = f(x,t) \quad (1)$$

в области $\bar{\Gamma}_T$, удовлетворяющего во всех внутренних узлах $\xi \in J(\Gamma)$ графа Γ условиям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x}, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

а также начальным и краевым условиям

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad y|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

при этом $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$, $|b(x)| \leq \tilde{b}$, $x \in \Gamma$.

Пусть $V = W_{\frac{1}{2},0}^1(a, \Gamma)$, через V' будем обозначать двойственное к V пространство: $V \subset L_2(\Gamma) \subset V'$ [1].

Билинейная форма $\ell(\mu, \nu) = \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x) \right) dx$ обладает следующими свойствами:

- а) для любых $\mu, \nu \in V$ выполняется $|\ell(\mu, \nu)| \leq c \|\mu\|_V \|\nu\|_V$, $c < \infty$,
- б) является коэрцитивной, т. е. существует такое число $\alpha > 0$, что

$$\ell(\mu, \mu) \geq \alpha \|\mu\|_V^2,$$

и определяет линейный непрерывный оператор A , действующий из V в V' : $\ell(y, \eta) = (Ay, \eta)$, $\forall y, \eta \in V$ (через (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение элементов, принадлежащих соответственно V' и V), где $Ay = \int_{\Gamma} \left(-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + b(x)y(x) \right) dx$.

Введем пространство $L_2((0, T); V)$ функций $\phi(t)$, отображающих интервал $(0, T)$ в пространство V , измеримых и таких, что имеет место $\left(\int_0^T \|\phi(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} < \infty$; аналогично определяется пространство

$L^2((0, T); V')$ с нормой $\left(\int_0^T \|\cdot\|_{V'}^2 dt \right)^{1/2}$. Ясно, что

$A : L^2((0, T); V) \rightarrow L^2((0, T); V')$ — линейный непрерывный оператор. Пусть $D'((0, T); V)$ — пространство линейных непрерывных отображений пространства $D(0, T)$ ($D(0, T)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями на $(0, T)$) в V .

Определение 1. Производной элемента $\phi \in D'((0, T); V)$ называется элемент $\frac{d\phi}{dt} \in D'((0, T); V)$, определяемый соотношением $\frac{d\phi}{dt}(\eta) = -\phi\left(\frac{d\eta}{dt}\right)$.

Если $\phi \in L_2((0, T); V)$, то можно определить $\phi(\eta)$ — непрерывное отображение $D(0, T)$ в V с помощью равенства $\phi(\eta) = \int_0^T \phi(t)\eta(t)dt$.

Таким образом определен элемент $\tilde{\phi} \in D'((0, T); V)$ и линейное, непрерывное, взаимно-однозначное отображение пространства $L^2((0, T); V)$ в $D'((0, T); V)$. отождествляя элементы ϕ и $\tilde{\phi}$, получаем $L_2((0, T); V) \subset D'((0, T); V)$. Следовательно, для функции $\phi \in L_2((0, T); V)$ можно определить производную $\frac{d\phi}{dt} \in D'((0, T); V)$.

Введем пространство

$$W_2(0, T) = \left\{ \phi : \phi \in L^2((0, T); V); \frac{d\phi}{dt} \in L^2((0, T); V') \right\}$$

с нормой $\|\phi\|_{W_2(0, T)} = \left(\int_0^T \left(\|\phi(t)\|_V^2 + \left\| \frac{d\phi(t)}{dt} \right\|_{V'}^2 \right) dt \right)^{1/2}$.

Теорема 1 [1]. Имеет место включение $W_2(0, T) \subset C([0, T]; L_2(\Gamma))$, где $C([0, T]; L_2(\Gamma))$ — пространство непрерывных отображений $[0, T]$ в $L_2(\Gamma)$.

3. Задача оптимального управления. Рассмотрим задачу (1)–(3) в пространстве $W_2(0, T)$. Пусть функция $y(t)$ класса $L^2((0, T); V)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dy}{dt} + Ay = f, \quad (4)$$

где f — заданная функция пространства $L_2((0, T); V')$, и начальному условию (5) (y_0 — заданный элемент пространства $L_2(\Gamma)$)

$$y(0) = y_0. \quad (5)$$

Теорема 2. Задача (4), (5) в пространстве $W_2(0, T)$ имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начально-

го условия: билинейное отображение $(f, y_0) \rightarrow y$ пространства $L^2((0, T); V') \times L_2(\Gamma)$ в $W_2(0, T)$ непрерывно.

Далее рассмотрим задачу оптимального управления параболической системой в пространстве управлений \mathbb{U} . Пусть $B : \mathbb{U} \rightarrow L_2((0, T); V')$ — линейный непрерывный оператор и пусть f и y_0 — заданные элементы пространств $L_2((0, T); V')$ и $L_2(\Gamma)$, соответственно; $y(v) \in W_2(0, T)$ — решение задачи (4), (5) с правой частью, равной $f + Bv$ ($v \in \mathbb{U}$), в уравнении (4):

$$\frac{dy(v)}{dt} + Ay(v) = f + Bv. \quad (6)$$

Состояние $y(v)$ системы (4), (5) зависит от x и t , поэтому будем обозначать его $y(v)(x, t)$. Тогда начальное условие записывается в виде

$$y(v)(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Gamma. \quad (7)$$

Пусть $C : W_2(0, T) \rightarrow L_2(\Gamma_T)$ — линейный непрерывный оператор (оператор наблюдения); $N : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ ($N \neq 0$) — линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv, v)_{\mathbb{U}} \geq \varsigma \|v\|_{\mathbb{U}}$ ($\varsigma > 0$); $J(v)$ — функционал (функция стоимости), требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{U}_{\partial} \subset \mathbb{U}$ (z_0 — заданное наблюдение) [1]: $J(v) = \|Cy - z\|_{L_2(\Gamma_T)}^2 + (Nv, v)_{\mathbb{U}}$.

Задача оптимального управления системой (6), (7) состоит в определении $\inf_{v \in \mathbb{U}_{\partial}} J(v)$.

Теорема 3. *Задача оптимального управления системой (6), (7) имеет единственное решение $v^* \in \mathbb{U}_{\partial}$, т. е. $J(v^*) = \inf_{v \in \mathbb{U}_{\partial}} J(v)$.*

4. Соотношения, определяющие оптимальное управление. Положим в уравнении (4) $f = 0$. Согласно теоремам 1, 2 для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ определено линейное непрерывное отображение $y_0 \rightarrow y(t)$ пространства $L_2(\Gamma)$ в себя. Следовательно, $y(t) = G(t)y_0$, где $G(t) : L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ — линейный непрерывный оператор. Семейство $G(t)$ образует полугруппу, $-A$ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $G(t)$. Решение задачи (4), (5) с $f \in L_2((0, T); V')$ и $y_0 \in L_2(\Gamma)$ можно представить в виде $y(t) = \int_0^t G(t - \tau)f(\tau)d\tau + G(t)y_0$ [1].

Лемма 1. *При любых $v, u \in \mathbb{U}_{\partial}$ для функции состояния $y(v)$ системы (6), (7) имеет место соотношение $y'(u)(v - u) = y(v) - y(u)$ ($y'(u)$ — производная по управлению и функции состояния $y(u)$).*

Теорема 4. Пусть множество \mathbb{U}_∂ ограничено. Для того чтобы элемент $u \in \mathbb{U}_\partial$ был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения

$$\frac{dy(u)}{dt} + Ay(u) = f + Bu, \quad t \in (0, T)$$

$$y(u)(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$((Cy(u) - z_0), C(y(v) - y(u)))_{L_2(\Gamma_T)} + (Nu, (v - u))_{\mathbb{U}} \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial, \quad (8)$$

где $y(u) \in L_2((0, T); V)$.

Неравенство (8) можно преобразовать с помощью сопряженного состояния, учитывая симметричность оператора A . Пусть $W_2'(0, T)$ — пространство, двойственное к $W_2(0, T)$. Обозначим через $C^* : L_2(\Gamma) \rightarrow W_2'(0, T)$ оператор, сопряженный к оператору C . Тогда неравенство (8) можно записать в виде

$$(C^*(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u)) + (Nu, v - u)_{\mathbb{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial, \quad (9)$$

здесь через (ρ, ϱ) обозначено скалярное произведение элементов $\rho \in W_2'(0, T)$ и $\varrho \in W_2(0, T)$, т. е. (ρ, ϱ) — значение функционала $(\rho, \cdot) \in W_2'(0, T)$ на элементе $\varrho \in W_2(0, T)$. Остается интерпретировать неравенство (9), введя сопряженное состояние системы (6), (7). Проще всего это можно сделать в случае, когда оператор наблюдения C является линейным непрерывным оператором, действующим из $L_2((0, T); V)$ в $L_2(\Gamma_T)$. Тогда $C^* : L_2(\Gamma_T) \rightarrow L_2((0, T); V')$ и неравенство (9) принимает следующий вид ($v \in \mathbb{U}_\partial$)

$$\int_0^T (C^*(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u)) dt + (Nu, v - u)_{\mathbb{U}} \geq 0 \quad (10)$$

(скобки под знаком интеграла обозначают скалярное произведение элементов, принадлежащих соответственно V' и V для каждого t из $(0, T)$).

Для управления $v \in \mathbb{U}_\partial$ сопряженное состояние $\omega(v) \in L_2((0, T); V)$ определим как решение задачи

$$-\frac{d\omega(v)}{dt} + A^*\omega(v) = C^*(Cy(v) - z_0), \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

$$\omega(v)(x, T) = 0 \quad (12)$$

Положим в равенстве (11) $v = u$, умножим его скалярно на $y(v) - y(u)$ и проинтегрируем от 0 до T . Получим

$$\int_0^T (C^*(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u)) dt = (B^*\omega(u), v - u)_U.$$

Следовательно, неравенство (10) эквивалентно неравенству

$$(B^*\omega(u) + Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial.$$

Учитывая это и соотношения (11), (12), приходим к теореме.

Теорема 5. Пусть множество U_∂ ограничено и оператор наблюдения C действует из $L_2((0, T); V)$ в $L_2(\Gamma_T)$. Для того чтобы элемент $u \in U_\partial$ был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения

$$\frac{dy(u)}{dt} + Ay(u) = f + Bu, \quad t \in (0, T), \quad y(u)(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$-\frac{d\omega(u)}{dt} + A^*\omega(u) = C^*(Cy(u) - z_0), \quad t \in (0, T),$$

$$\omega(u)(x, T) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$(B^*\omega(u) + Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial,$$

где $y(u), \omega(v) \in L_2((0, T); V)$.

5. Заключение. Представленное исследование является развитием результатов работы [3] в направлении анализа задач управления в классе $L_2(\Gamma_T)$, результаты которого широко используются при описании процессов теплопереноса в антенных конструкциях разного типа.

Литература

1. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. Провоторов В. В., Гнилицкая Ю. А. Дифференциальные системы на графе: Дифференциальные системы с распределенными параметрами на графе и их приложения. Изд. 1-е. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2014. 234 с.
3. Провоторов В. В., Гнилицкая Ю. А. Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 112–120.

УДК 517.925.51

Лакрисенко П. А.

Исследование устойчивости положения равновесия нелинейной механической системы с переключениями

Рекомендовано к публикации профессором Александровым А. Ю.

Введение. В статье рассматривается следующая задача: необходимо найти класс законов переключения, гарантирующий асимптотическую устойчивость системы с переключениями, при условии, что все подсистемы асимптотически устойчивы. В данном случае полезным инструментом для исследования устойчивости служит составная функция Ляпунова [1].

Если переключения между подсистемами происходят через достаточно большие промежутки времени, система с переключениями будет устойчива [1]. Для нахождения класса переключений, обеспечивающего устойчивость системы с переключениями, необходимо определить ограничения на длины промежутков времени между последовательными переключениями. Данный подход разработан для линейных и квазилинейных систем [1] и распространен на нелинейные системы с однородными правыми частями [2].

Воспользуемся этим способом для того, чтобы добиться асимптотической устойчивости класса систем с переключениями в случае, когда все подсистемы нелинейны и правые части могут быть неоднородны. Исследуем систему с переключениями, состоящую из некоторого закона переключения и n подсистем, описываемых уравнениями Релея [3]

$$\ddot{x} + a_i \dot{x}^\mu + c_i x^\lambda = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $a_i > 0$, $c_i > 0$, а λ и μ — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\lambda > 1$. Случай $\mu = 1$ рассмотрен в работе [4], в данной работе полагаем $\mu > 1$.

Лакрисенко Полина Александровна — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: p.lakrisenko@gmail.com, тел.: +7(911)745-94-15
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00376-а, и СПбГУ, НИР № 9.38.674.2013

Оценки решений. Рассмотрим систему с переключениями, состоящую из подсистем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -c_i x_1^\lambda - a_i x_2^\mu, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

эквивалентных уравнениям (1).

Полагаем, что закон переключения определяет кусочно-постоянная функция $\sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow S = \{1, \dots, n\}$. Считаем, что функция $\sigma(t)$ в точках разрыва непрерывна справа, и последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ является минимальной, т. е. $\sigma(\tau_k) \neq \sigma(\tau_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, будем рассматривать только такие законы переключения, для которых функция $\sigma(t)$ на промежутке $[0, +\infty)$ имеет бесконечное количество точек разрыва, а на любом ограниченном промежутке их может быть только конечное число.

Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ выберем функцию Ляпунова для подсистемы с номером i в виде

$$V_i(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + c_i \frac{x_1^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \eta_i x_2 x_1^\beta,$$

здесь $\eta_i > 0$, а β — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\beta \geq 1$ [3]. При помощи этих функций Ляпунова можно показать, что нулевое решение каждой из подсистем является асимптотически устойчивым. Производные функций $V_i(x_1, x_2)$ в силу i -ой подсистемы из семейства (2) имеют вид

$$\dot{V}_i = -a_i x_2^{\mu+1} - a_i \eta_i x_2^\mu x_1^\beta - \eta_i c_i x_1^{\beta+\lambda} + \eta_i \beta x_1^{\beta-1} x_2^2,$$

где $\mu + 1$, $\beta + \lambda$ и $\beta - 1$ — рациональные числа с четными числителями.

Можно показать, что для достаточно малых величин η_i и при выборе

$$\beta = \max \left\{ \frac{1}{2}(\mu\lambda + 1 + \mu - \lambda), \frac{\lambda}{\mu} \right\}$$

существуют такие $0 \leq \underline{D}_1(i) \leq \frac{c_i}{\lambda+1}$, $0 \leq \underline{D}_2 \leq \frac{1}{2}$, $\overline{D}_1(i) \geq \frac{c_i}{\lambda+1}$, $\overline{D}_2 \geq \frac{1}{2}$, $0 < \tilde{D}(i) < c_i$, $0 < \hat{D}(i) < a_i$, H_i , что для $\|\mathbf{x}\| \leq H_i$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ будут верны соотношения

$$\underline{D}_2 x_2^2 + \underline{D}_1(i) x_1^{\lambda+1} \leq V_i(x_1, x_2) \leq \overline{D}_2 x_2^2 + \overline{D}_1(i) x_1^{\lambda+1}, \quad (3)$$

$$\dot{V}_i \leq -x_2^{\mu+1} \widehat{D}(i) - \eta_i x_1^{\beta+\lambda} \widetilde{D}(i).$$

Из этих соотношений следуют дифференциальные неравенства

$$\dot{V}_i(x_1(t), x_2(t)) \leq -\phi_i V_i(x_1(t), x_2(t))^{1+\xi}, \quad (4)$$

где $\xi = \frac{\beta-1}{\lambda+1}$, ϕ_i — некоторые положительные постоянные.

Воспользовавшись неравенствами (3) и выбрав

$$\gamma_{ij} = \max \left\{ \frac{\overline{D}_2}{\underline{D}_2}, \frac{\overline{D}_1(i)}{\underline{D}_1(j)} \right\},$$

для каждой пары функций Ляпунова можно получить соотношение $V_i \leq \gamma_{ij} V_j$. Возьмем $\gamma = \max_{i=1, n} \max_{j=1, n} \{\gamma_{ij}\}$ и получим, что при $\|\mathbf{x}\| \leq H_i$ справедливы оценки

$$V_i(x_1, x_2) \leq \gamma V_j(x_1, x_2), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Воспользуемся теперь полученными оценками при исследовании системы с переключениями.

Определение класса допустимых законов переключения.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность моментов переключения. Введем следующие обозначения:

$$T_1 = 0, \quad T_k = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma^{-\frac{k-i}{\xi}} (\tau_{m+i} - \tau_{m+i-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

Теорема 1. *Если $T_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то нулевое решение гибридной системы асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Выберем $t_0 \geq 0$, $0 < \varepsilon < H$, где $H = \min_{i=1, n} \{H_i\}$.

Рассмотрим решение гибридной системы, выходящее из точки \mathbf{x}_0 , для которой верны оценки $0 < \|\mathbf{x}_0\| < \varepsilon$, построим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(t)}(\mathbf{x})$, соответствующую закону переключения $\sigma(t)$. Найдем натуральное число m такое, что $t_0 \in [\tau_{m-1}, \tau_m)$. Предположим, что $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon$ для $t \in [t_0, t']$. Если $t' \in (t_0, \tau_m]$, то, проинтегрировав неравенства (4), получим, что выполняется

$$V_{\sigma(\tau_{m-1})}(\mathbf{x}(t))^{-\xi} \leq \phi \xi (t - t_0) + V_{\sigma(\tau_{m-1})}(\mathbf{x}_0)^{-\xi}$$

при $t \in [t_0, t']$, где $\phi = \min_i \{\phi(i)\}$, $i = \overline{1, n}$.

Если $\tau_m \leq t \leq t'$, то существует натуральное число k такое, что $t \in [\tau_{m+k-1}, \tau_{m+k})$. Интегрируя соответствующие дифференциальные неравенства из семейства (4) на промежутках $[\tau_{m+k-1}, t]$, $[\tau_{m+k-2}, \tau_{m+k-1}]$, \dots , $[t_0, \tau_m]$ и учитывая оценки (5), получим

$$\begin{aligned} V_{\sigma(\tau_{m+k-1})}^{-\xi}(\mathbf{x}(t)) &\geq V_{\sigma(\tau_{m+k-1})}^{-\xi}(\mathbf{x}(\tau_{m+k-1})) + \phi\xi(t - \tau_{m+k-1}) \geq \\ &\geq (\gamma)^{-\xi} V_{\sigma(\tau_{m+k-2})}^{-\xi}(\mathbf{x}(\tau_{m+k-1})) + \phi\xi(t - \tau_{m+k-1}) \geq \dots \geq \\ &\geq (\gamma)^{-k\xi} V_{\sigma(\tau_{m-1})}^{-\xi}(\mathbf{x}_0) + \dots + \phi\xi(t - \tau_{m+k-1}). \end{aligned}$$

Можно показать, что при $\|\mathbf{x}\| \leq H$ для каждой функции V_i справедливы оценки $\underline{C}\|\mathbf{x}\|^{\lambda+1} \leq V_i(x_1, x_2) \leq \overline{C}\|\mathbf{x}\|^2$. Воспользовавшись ими, получаем следующее ограничение на решение гибридной системы (2) при $t \in [t_0, \tau_m)$, $t \leq t'$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \left(\frac{1}{\underline{C}} V_{\sigma(\tau_{m-1})}(\mathbf{x}(t)) \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} = (\underline{C})^{-\frac{1}{\lambda+1}} V_{\sigma(\tau_{m-1})}^{\frac{\xi}{(\beta-1)}} \leq \\ &\leq \underline{C}^{-\frac{1}{\lambda+1}} (\phi\xi(t - t_0) + (\overline{C})^{-\xi} \|\mathbf{x}_0\|^{-2\xi})^{-\frac{1}{\beta-1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

А при $t \in [\tau_{m+k-1}, \tau_{m+k})$, $t \leq t'$, будет верно соотношение

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \underline{C}^{-\frac{1}{\lambda+1}} ((\gamma)^{-k\xi} (\overline{C})^{-\xi} \|\mathbf{x}_0\|^{-2\xi} + \dots + \phi\xi(t - \tau_{m+k-1}))^{-\frac{1}{\beta-1}} = \\ &= \underline{C}^{-\frac{1}{\lambda+1}} ((\gamma)^{-k\xi} \phi\xi(\tau_m - t_0) + \phi\xi(t - \tau_{m+k-1}) + \\ &+ \phi\xi T_k + (\gamma)^{-k\xi} (\overline{C})^{-\xi} \|\mathbf{x}_0\|^{-2\xi})^{-\frac{1}{\beta-1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выберем натуральное число k_0 такое, что $T_k > \underline{C}^{\frac{1-\beta}{\lambda+1}} \varepsilon^{1-\beta}$ для всех $k \geq k_0$. Возьмем $\delta = \varepsilon^{\frac{\lambda+1}{2}} \gamma^{\frac{k_0}{2}} (\underline{C}(\overline{C})^{-1})^{\frac{1}{2}}$. Учитывая оценки (6), (7), получим, что, если $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, то $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$. Кроме того, из выражения (7) видно, что если выполнено условие теоремы, то $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Теорема 1 доказана.

Пример. Рассмотрим механическую систему, представляющую собой тележку массы m с присоединенными к ней пружинами и демпферами (рис. 1). Положение тележки характеризуется координатой x , пружины не деформированы при $x = 0$.

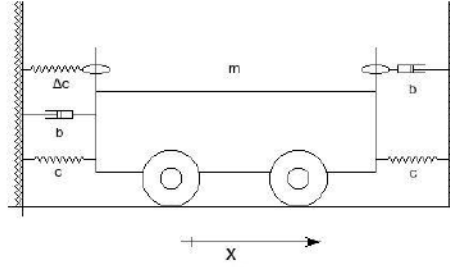


Рис. 1. Тележка с присоединенными к ней пружинами и демпферами

Предположим, что верхние демпфер и пружина могут быть независимо друг от друга отсоединены в произвольные моменты времени, а через некоторое время присоединены обратно.

Будем считать, что движения системы описываются уравнением

$$m\ddot{x}_1 + (b + \delta_{\sigma(t)}^{(1)} b)x_1^3 + (2c + \delta_{\sigma(t)}^{(2)} \Delta c)x_1^3 = 0,$$

где b — коэффициент демпфирования, а c и Δc — коэффициенты жесткости пружин, $\sigma(t)$ — закон переключения, $\delta_{\sigma(t)}^j \in \{0; 1\}$, $j = 1, 2$. Прономеруем подсистемы. Пусть для первой подсистемы $(\delta_1, \delta_2) = (1, 0)$, для второй — $(\delta_1, \delta_2) = (1, 1)$, для третьей — $(\delta_1, \delta_2) = (0, 0)$, для четвертой — $(\delta_1, \delta_2) = (0, 1)$. Таким образом, система состоит из четырех подсистем, и в каждый момент времени одна из подсистем активна.

Возьмем, например, $m = 3$, $b = 0,11$, $c = 1$, $\Delta c = 4,5$, начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0,65$. Построим траекторию решения системы с переключениями. Начнем построение с траектории решения первой подсистемы. Пусть переключения с нечетных подсистем на четные происходят при $\dot{x} = 0$, а с четных на нечетные — при $x = 0$. При таком законе переключения амплитуда колебаний быстро возрастает. Траектория решения системы с переключениями при выбранном законе переключения представлена на рис. 2.

Пусть теперь стремится к бесконечности промежуток времени, в течение которого активна первая подсистема, промежутки времени, в течение которых активны остальные подсистемы, ограничены. Этот закон переключения удовлетворяет условию теоремы 1, а траектория решения системы с переключениями имеет вид, представленный на рис. 3.

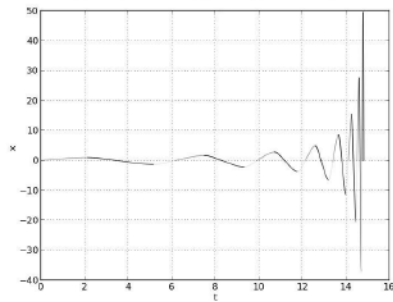


Рис. 2. Траектория решения системы с переключениями (неустойчивое положение равновесия)

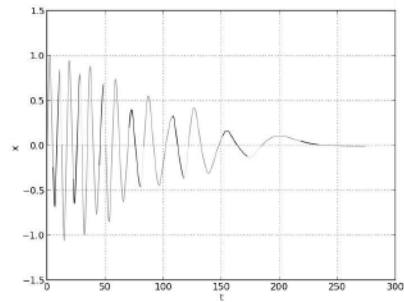


Рис. 3. Траектория решения системы с переключениями (устойчивое положение равновесия)

Заключение. Для нелинейной механической системы с переключениями, состоящей из семейства асимптотически устойчивых подсистем и некоторого закона переключения, найден класс законов переключения, гарантирующий асимптотическую устойчивость нулевого решения системы с переключениями.

Литература

1. Liberzon D., Morse A. S. Basic problems in stability and design of switched systems // Control System Magazine, IEEE. 1999. Vol. 19, No 5. P. 59–70.
2. Александров А. Ю., Платонов А. В. Об устойчивости гибридных однородных систем // Вестн. Сам. гос. техн. университета. Сер. физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 24–32.
3. Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Екимов А. В., Смирнов Н. В. Сборник задач и упражнений по теории устойчивости. СПб.: ООО «СОЛО», 2003. 162 с.
4. Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V, Lakrisenko P. A. Stability analysis of nonlinear mechanical systems with switched force fields // Proc. of the 21st Mediterranean Conference on Control & Automation, Platania-Chania, Crete, Greece. 2013. P. 628–633.

УДК 517.929.4

Медведева И. В.

Анализ устойчивости линейного дифференциального уравнения с двумя несоизмеримыми запаздываниями

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. Работа посвящена проблеме исследования устойчивости линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом. В статьях [1, 2] предложен новый подход к анализу этой проблемы, основанный на комбинации метода функционалов Ляпунова — Красовского [3, 4] и метода Разумихина [5]. В рамках предложенного подхода квадратичная оценка снизу для используемого функционала строится на множестве функций, удовлетворяющих специальному условию типа Разумихина, что позволяет получить конструктивный алгоритм анализа устойчивости. В работе [1] такой алгоритм основан на аппроксимации функций множества Разумихина кусочно-линейными, а в работе [2] — кусочно-кубическими функциями.

Применение описанного подхода к системам с несоизмеримыми запаздываниями сталкивается с проблемой построения матрицы Ляпунова, определяющей используемый для исследования устойчивости функционал. В настоящей работе предложена модификация этого функционала, основанная на замене в нем матрицы Ляпунова соответствующей матрицей, построенной по некоторой системе с соизмеримыми запаздываниями. На примере скалярного уравнения показано, что такая модификация позволяет применить подход, предложенный в работах [1, 2], к анализу устойчивости систем с двумя несоизмеримыми запаздываниями.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейное стационарное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-1) + cx(t-h), \quad (1)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $h > 1$ — иррациональное запаздывание. Пусть $t_0 = 0$ — начальный момент времени, $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, — кусочно-непрерывная начальная функция.

Медведева Ирина Васильевна — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: medv.irina@gmail.com, тел.: +7(911)769-00-87

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\dot{y}(t) = ay(t) + by(t-1) + cy(t-\hat{h}), \quad (2)$$

где \hat{h} — рациональное запаздывание; для определенности предположим, что $\hat{h} > h$. В дальнейшем на запаздывание \hat{h} будут наложены дополнительные ограничения.

Пусть $u_h(\tau)$ и $u_{\hat{h}}(\tau)$ — матрицы Ляпунова уравнений (1) и (2) соответственно, ассоциированные с некоторым $w > 0$. Согласно [3], функция $u_{\hat{h}}(\tau)$ может быть определена как решение системы

$$\begin{aligned} u'_{\hat{h}}(\tau) &= au_{\hat{h}}(\tau) + bu_{\hat{h}}(\tau-1) + cu_{\hat{h}}(\tau-\hat{h}), \quad \tau \geq 0, \\ u_{\hat{h}}(-\tau) &= u_{\hat{h}}(\tau), \quad \tau \geq 0, \\ au_{\hat{h}}(0) + bu_{\hat{h}}(1) + cu_{\hat{h}}(\hat{h}) &= -\frac{w}{2}. \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием существования и единственности $u_{\hat{h}}(\tau)$ является отсутствие в спектре уравнения (2) собственных чисел, сумма которых равна нулю. Это условие называется условием Ляпунова.

Будем исследовать экспоненциальную устойчивость уравнения (1) с помощью функционала, зависящего от матрицы Ляпунова, построенной по уравнению (2).

3. Функционал. Зададим функционал

$$w(x_t) = w_0 x^2(t) + w_1 \int_{-1}^0 x^2(t+\theta) d\theta + w_2 \int_{-\hat{h}}^0 x^2(t+\theta) d\theta, \quad w_0, w_1, w_2 > 0,$$

и предположим, что для уравнения (2) выполнено условие Ляпунова. Для исследования экспоненциальной устойчивости уравнения (1) будем использовать функционал

$$\begin{aligned} v_h(x_t, u_{\hat{h}}) &= u_{\hat{h}}(0)x^2(t) + 2bx(t) \int_{-1}^0 u_{\hat{h}}(-\theta-1)x(t+\theta) d\theta + \\ &+ 2cx(t) \int_{-\hat{h}}^0 u_{\hat{h}}(-\theta-h)x(t+\theta) d\theta + \\ &+ b^2 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 u_{\hat{h}}(\theta_1-\theta_2)x(t+\theta_1)x(t+\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 + \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& +2bc \int_{-1}^0 \int_{-h}^0 u_{\widehat{h}}(\theta_1 + 1 - \theta_2 - h)x(t + \theta_1)x(t + \theta_2)d\theta_1 d\theta_2 + \\
& +c^2 \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 u_{\widehat{h}}(\theta_1 - \theta_2)x(t + \theta_1)x(t + \theta_2)d\theta_1 d\theta_2 + \\
& +w_1 \int_{-1}^0 (\theta + 1)x^2(t + \theta)d\theta + w_2 \int_{-h}^0 (\theta + h)x^2(t + \theta)d\theta,
\end{aligned}$$

в котором матрица Ляпунова $u_{\widehat{h}}(\tau)$, $\tau \in [-h, h]$, ассоциирована с $w = w_0 + w_1 + hw_2$.

В рамках подхода Ляпунова — Красовского [3, 4] для анализа устойчивости традиционно используется функционал $v_h(x_t, u_h)$, производная которого вдоль решений уравнения (1) равна $-w(x_t)$. Продифференцируем теперь функционал (3) вдоль решений уравнения (1):

$$\frac{d}{dt}v_h(x_t, u_{\widehat{h}}) = -w(x_t) + R(x_t, \Delta u_{\widehat{h}}),$$

где $\Delta u_{\widehat{h}}(\tau) = u_{\widehat{h}}(h - \tau) - u_{\widehat{h}}(\widehat{h} - \tau)$, $\tau \geq 0$,

$$\begin{aligned}
R(x_t, \Delta u_{\widehat{h}}) &= 2c\Delta u_{\widehat{h}}(0)x^2(t) + 2bcx(t) \int_{-1}^0 \Delta u_{\widehat{h}}(\theta + 1)x(t + \theta)d\theta + \\
& + 2c^2x(t) \int_{-h}^0 \Delta u_{\widehat{h}}(\theta + h)x(t + \theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Пусть $M_{\widehat{h}} = \max_{\tau \in [0, \widehat{h}]} |u_{\widehat{h}}(\tau)|$, тогда

$$|\Delta u_{\widehat{h}}(\tau)| \leq M_{\widehat{h}}(|a| + |b| + |c|)(\widehat{h} - h) = K_{\widehat{h}}.$$

Лемма 1. Функционал $R(x_t, \Delta u_{\widehat{h}})$ допускает оценку

$$R(x_t, \Delta u_{\widehat{h}}) \leq K_{\widehat{h}} \left(\xi_0 x^2(t) + \xi_1 \int_{-1}^0 x^2(t + \theta)d\theta + \xi_2 \int_{-h}^0 x^2(t + \theta)d\theta \right),$$

где $\xi_0 = 2|c| + \xi_1 + h\xi_2$, $\xi_1 = |bc|$, $\xi_2 = c^2$.

Далее будем предполагать, что выполнены следующие условия

$$\xi_0 K_{\widehat{h}} < w_0, \quad \xi_1 K_{\widehat{h}} \leq w_1, \quad \xi_2 K_{\widehat{h}} \leq w_2. \quad (4)$$

Ясно, что при выполнении условий (4) производная функционала (3) вдоль решений уравнения (1) отрицательно определена.

4. Основной результат. Введем множество

$$S = \{\varphi : |\varphi(\theta)| \leq |\varphi(0)|, \theta \in [-h, 0]\}.$$

Следующий основной результат является аналогом результатов, полученных в работах [1, 2], для уравнения (1) с несоизмеримыми запаздываниями.

Теорема 1. Пусть уравнение (2) удовлетворяет условию Ляпунова и выполнены неравенства (4). Зададим произвольные $w_0, w_1, w_2 > 0$ и построим функционал (3). Уравнение (1) экспоненциально устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда существует $\mu > 0$ такое, что

$$v_h(\varphi, u_{\tilde{h}}) \geq \mu \varphi^2(0), \quad \varphi \in S.$$

Теорема 1 открывает возможность конструктивного исследования экспоненциальной устойчивости уравнения (1). Поскольку функционал $v_h(x_t, u_{\tilde{h}})$ отличается от функционала $v_h(x_t, u_h)$, используемого в статьях [1, 2], только матрицей Ляпунова, метод, изложенный в этих статьях, может быть применен к исследованию устойчивости уравнения (1) без изменений, с заменой соответствующей матрицы в функционале.

Идея метода заключается в следующем. Разобьем отрезки $[-1, 0]$ и $[-h, -1]$ на N_1 и N_2 равных частей соответственно точками

$$\begin{aligned} \theta_k^{(1)} &= -k\Delta_1, \quad k = \overline{1, N_1}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{N_1}, \\ \theta_k^{(2)} &= -1 - k\Delta_2, \quad k = \overline{1, N_2}, \quad \Delta_2 = \frac{h-1}{N_2}. \end{aligned}$$

Затем на каждом из отрезков разбиения приблизим произвольную функцию $\varphi \in S$ линейной или кубической функцией. Подставляя такое приближение в функционал (3) и оценивая его погрешность, получим оценку вида

$$v_h(\varphi, u_{\tilde{h}}) \geq \hat{\varphi}^T \mathbf{V} \hat{\varphi}, \quad \varphi \in S,$$

где $\hat{\varphi} = (\varphi(0), \varphi(\theta_1^{(1)}), \dots, \varphi(\theta_{N_1}^{(1)}), \varphi(\theta_1^{(2)}), \dots, \varphi(\theta_{N_2}^{(2)}))^T$. Согласно теореме 1, положительная определенность квадратичной формы $\hat{\varphi}^T \mathbf{V} \hat{\varphi}$

гарантирует экспоненциальную устойчивость уравнения (1). Элементы матрицы \mathbf{V} в полученной оценке определяются через матрицу Ляпунова $u_{\hat{h}}(\tau)$, которая может быть вычислена как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений со специальными граничными условиями [4], поскольку запаздывание \hat{h} рационально.

Пример. Рассмотрим уравнение (1) с параметрами $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$, $h = \sqrt{5}/2 \approx 1,118$, и выберем $\hat{h} = 23/20 = 1,15$. При значениях параметров $N_1 = 10$, $N_2 = 2$ описанный метод позволяет сделать вывод об экспоненциальной устойчивости рассматриваемого уравнения. Метод реализован в программной среде MATLAB.

5. Заключение. В работе предложена модификация метода, описанного в статьях [1, 2], позволяющая применить его к анализу устойчивости уравнения с двумя несоизмеримыми запаздываниями.

Литература

1. Жабко А. П., Медведева И. В. Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 9–20.
2. Medvedeva I. V., Zhabko A. P. Constructive method of linear systems with delay stability analysis // 11th IFAC Workshop on Time-Delay Systems. Grenoble, France. 2013. P. 1–6.
3. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov – Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 15–20.
4. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Birkhäuser, Basel, 2013. 311 p.
5. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 4. С. 500–512.

УДК 519.718.2

Пономарев А. А.

Функционал Ляпунова для управляемой линейной системы с компенсатором запаздывания

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. При управлении динамическими системами в контуре обратной связи часто возникает запаздывание. Оно может быть обусловлено, например, устройством самой системы или длительностью вычислений, необходимых для построения управляющего сигнала. Иногда запаздывание настолько мало, что им пренебрегают, но порой оно может существенно сказываться на динамических свойствах системы. Тогда запаздывание учитывают в математической модели управляемого объекта. Для анализа устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, особенно линейных, применяется прямой метод Ляпунова [1]. Несомненно, однако, что изучение таких уравнений и синтез регуляторов для них всегда будет более сложной задачей, чем аналогичные проблемы для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому представляет интерес использование *компенсатора запаздывания* — управления, которое подавляет эффект запаздывания и исключает его из замкнутой системы.

Идея компенсации запаздывания берёт начало в работе О. Смита [2]. Так называемый *предиктор Смита* был, однако, пригоден лишь для управления устойчивыми системами. Этот недостаток был впоследствии устранён, идеи Смита обобщены и усовершенствованы, а получившийся метод, названный *назначением конечного спектра* (*finite spectrum assignment*), изложен в статье А. Манитиуса и А. Ольброта [3]. В их работе показано, что линейная стационарная система, замкнутая компенсатором запаздывания, действительно имеет конечный спектр, как если бы в ней не было запаздывания. Тем не менее, остаются открытыми вопросы, касающиеся её устойчивости и робастности. Дело в том, что замкнутая система по своей природе остаётся системой с запаздыванием, и это проявляется на

Пономарев Антон Александрович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: anton.pon.math@gmail.com, тел.: +7(911)768-29-00

практике, когда в силу неизбежных погрешностей спектр вновь становится бесконечным. Этот факт, а также необходимость получения оценок скорости убывания решений, приводит к анализу замкнутой системы вторым методом Ляпунова.

Один из предложенных в недавнее время и достаточно общих подходов к построению функционала Ляпунова — Красовского для системы с компенсатором запаздывания содержится в книге [4]. С помощью ряда преобразований замкнутая система приводится к такому виду, что функционал для неё находится без затруднений. После возвращения к исходным координатам, однако, полученное выражение имеет достаточно нетривиальную форму. В данной работе приведён пример построения функционала, имеющего содержательный смысл сразу в исходных координатах.

2. Обозначения. Если функция $u(\theta)$ задана на отрезке $[t - h, t]$, то $u_t(\theta)$ обозначает функцию, определённую на $[-h, 0]$, причём

$$u_t(\theta) = u(t + \theta).$$

Если функция $\varphi(\theta)$ кусочно непрерывна на $[-h, 0]$, то

$$\|\varphi\|_h^2 = \int_{-h}^0 \varphi^2(\theta) d\theta.$$

3. Постановка задачи. Для краткости ограничимся скалярным случаем. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - h), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь x — состояние объекта, а u — управление, причём оно поступает в систему с постоянной задержкой $h > 0$. Идея компенсации запаздывания состоит в том, чтобы выбрать, например, управление

$$u(t) = -2x(t + h). \quad (2)$$

Тогда замкнутая система имела бы вид

$$\dot{x}(t) = -x(t).$$

Значение $x(t + h)$ для номинальной системы определяется по формуле Коши через $x(t)$ и u_t , поэтому обратная связь (2) должна быть реализована в виде

$$u(t) = -2p(x(t), u_t), \quad (3)$$

где $p(x, \varphi) = e^h x + \int_{-h}^0 e^{-\theta} \varphi(\theta) d\theta$ — предиктор состояния системы на h единиц времени вперёд.

Пусть $x(t)$ и u_t при $t \geq 0$ — движение замкнутой системы (1), (3) при начальных данных $x(0)$ и u_0 . Будем говорить, что система (1), (3) *экспоненциально устойчива*, если существует оценка

$$x^2(t) + \|u_t\|_h^2 \leq k e^{-\sigma t} (x^2(0) + \|u_0\|_h^2), \quad k \geq 1, \quad \sigma > 0.$$

Известен метод Ляпунова — Красовского [5] анализа устойчивости дифференциально-разностных систем. Он основан на построении функционала $v(x, \varphi)$, заданного для всех вещественных чисел x и функций φ , кусочно непрерывных на $[-h, 0]$. Этот функционал должен удовлетворять оценкам

$$m (x^2 + \|\varphi\|_h^2) \leq v(x, \varphi) \leq M (x^2 + \|\varphi\|_h^2), \quad m, M > 0. \quad (4)$$

Если производная функционала $v(x, \varphi)$ вдоль движений системы (1), (3) удовлетворяет неравенству

$$\left. \frac{dv(x, \varphi)}{dt} \right|_{(1),(3)} \leq -\gamma v(x, \varphi), \quad \gamma > 0, \quad (5)$$

то система (1), (3) экспоненциально устойчива.

В статье [1] описан общий принцип построения функционалов Ляпунова — Красовского для линейных систем с запаздыванием, но в данном случае использование его не позволило бы учесть предсказывающий характер обратной связи (3) и привело бы к неоправданным сложностям. Требуется построить функционал более частного вида.

4. Решение задачи. Рассмотрим функционал

$$v(x, \varphi) = p^2(x, \varphi) + \int_{-h}^0 e^{\theta} \varphi^2(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} e^{\theta} (-2e^{-\theta} p(x, \varphi))^2 d\theta.$$

Сумма интегралов в этом выражении представляет собой интеграл квадрата управления, реализуемого в номинальной замкнутой системе, с экспоненциальным весом. После вычисления несобственного интеграла функционал принимает вид

$$v(x, \varphi) = 5p^2(x, \varphi) + \int_{-h}^0 e^{\theta} \varphi^2(\theta) d\theta. \quad (6)$$

Вычислим производную функционала (6) вдоль движения системы (1), (3):

$$\left. \frac{dv(x, \varphi)}{dt} \right|_{(1),(3)} = -6p^2(x, \varphi) - e^{-h}\varphi^2(-h) - \int_{-h}^0 e^{\theta}\varphi^2(\theta) d\theta.$$

Она удовлетворяет условию (5) при $\gamma = 1$.

Покажем, что существуют оценки (4). Оценка сверху получается очевидным образом с применением неравенства Коши — Буняковского:

$$v(x, \varphi) \leq 2 \left(e^{2h}x^2 + h \int_{-h}^0 e^{-2\theta}\varphi^2(\theta) d\theta \right).$$

Значит, в (4) можно выбрать $M = 2e^{2h}\max\{1, h\}$. Чтобы получить оценку снизу, достаточно воспользоваться представлением функции φ в виде [6]

$$\varphi(\theta) = e^{-\theta}c + \psi(\theta),$$

где c — некоторая постоянная, а функция $\psi(\theta)$ на промежутке $[-h, 0]$ ортогональна функции $e^{-\theta}$:

$$\int_{-h}^0 e^{-\theta}\psi(\theta) d\theta = 0.$$

Используя это представление, получим, что

$$p(x, \varphi) = e^h x + Kc, \quad \|u\|_h^2 \geq Kc^2,$$

где $K = \frac{1}{2}(e^{2h} - 1)$. Значение функционала $v(x, \varphi)$ поэтому оценивается квадратичной по c функцией, которая имеет минимум:

$$v(x, \varphi) \geq 5(e^h x + Kc)^2 + e^{-h}Kc^2 \geq 5e^{2h} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{e^{-h}}{5K}} \right) x^2.$$

С другой стороны,

$$v(x, \varphi) \geq e^{-h}\|\varphi\|_h^2,$$

следовательно, в неравенстве (4) допустимо взять

$$m = \frac{1}{2} \min \left\{ e^{-h}, 5e^{2h} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{e^{-h}}{5K}} \right) \right\}.$$

Итак, выполнено условие Ляпунова — Красовского. Сформулируем соответствующее

Утверждение. Экспоненциальная устойчивость системы (1), замкнутой регулятором (3), гарантируется функционалом

$$v(x, \varphi) = 5 \left(e^h x + \int_0^h e^{h-\theta} \varphi(\theta - h) d\theta \right)^2 + \int_{-h}^0 e^\theta \varphi^2(\theta) d\theta.$$

Он обладает свойством (5) при $\gamma = 1$ и удовлетворяет неравенствам (4) при определённых выше значениях t и M .

Аналогичный результат справедлив и для систем большей размерности.

Литература

1. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестн. С.-Петерб. унта. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2005. Вып. 1. С. 110–117.
2. Smith O. J. M. Closer control of loops with dead time // Chemical Engineering Progress. 1957. Vol. 53, No 5. P. 217–219.
3. Manitius A. Z., Olbrot A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. AC-24, No 4. P. 541–553.
4. Krstić M. Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems. Boston: Birkhäuser, 2009. 466 p.
5. Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 315–327.
6. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.

УДК 517.977.5

Попков А. С., Баранов О. В.

Об оптимальном управлении вращательным движением вала электродвигателя

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

1. Введение. В данной работе рассматривается задача построения оптимального управления. Объектом управления выступает электрический двигатель — широко распространенное устройство для преобразования электрической энергии в механическую. Сегодня практически во всех сложных технических устройствах в быту, на производстве, в сфере транспорта и т. д. применяются электродвигатели различного типа. В качестве модели, описывающей процесс управления вращением вала электродвигателя, используется линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Для решения задачи был использован адаптивный метод, предложенный Р. Габасовым [2]. Данный метод позволяет находить оптимальное и субоптимальное управление в классе кусочно-постоянных функций для систем различного вида. На первом этапе необходимо свести исходную задачу оптимального управления к интервальной задаче линейного программирования (ИЗЛП). Адаптивный метод имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным симплекс-методом. Так, в частности, симплекс-метод хорошо работает с квадратными матрицами, в то время как в ИЗЛП часто встречаются матрицы, в которых число столбцов намного больше числа строк. Такие матрицы порождают множества допустимых решений (планов) в виде выпуклых многогранников с большим количеством вершин. В подобных случаях перебор базисных планов является нецелесообразным. Кроме того, в симплекс-методе основным объектом рассмотрения является сам базисный план — одна из вершин множества планов. В адаптивном же методе могут использоваться произвольные точки множества планов. В силу этого, метод Габасова работает с любыми предположениями специалистов, которые, как правило, не формулируются в виде базисного плана.

Попков Александр Сергеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexandr.popkoff@gmail.com, тел.: +7(952)270-70-11

Баранов Олег Владимирович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: o.baranov@spbu.ru, тел.: +7(904)602-03-99

Остановимся более подробно на методе.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу построения оптимального управления следующего вида:

$$\begin{aligned} c^T x(t^*) &\rightarrow \max, \\ \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, \\ x(t_*) &= x_0, \quad Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \leq L, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \text{rank } H = m < n, \quad t \in [t_*, t^*]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A(t)$, $b(t)$, $t \in [t_*, t^*]$ — кусочно-непрерывные $(n \times n)$ -матричная и n -мерная векторная функции, $c \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^m$, H — $(m \times n)$ -матрица, $L > 0$. Управление $u(t)$ будем искать в классе кусочно-постоянных функций с периодом квантования $h = (t^* - t_*)/N$, где N — некоторое натуральное число:

$$u(t) = u(t_* + (k-1)h) = u_k, \quad t \in [t_* + (k-1)h, t_* + kh), \quad k = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Покажем, как данная задача может быть сведена к ИЗЛП [3]. По формуле Коши имеем

$$x(t^*, t_*, x_0) = Y(t^*) \left(x_0 + \int_{t_*}^{t^*} Y^{-1}(\tau) b(\tau) u(\tau) d\tau \right), \quad (3)$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (1), нормированная в точке t_* . Подставим (3) в функционал качества:

$$c^T Y(t^*) x_0 + \int_{t_*}^{t^*} c^T Y(t^*) Y^{-1}(\tau) b(\tau) u(\tau) d\tau \rightarrow \max.$$

Первое слагаемое есть константа. Его можно не рассматривать, так как оно не изменяет характер стремления функции к максимуму. Согласно (2), получаем

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_* + (k-1)h}^{t_* + kh} c^T Y(t^*) Y^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau u_k \rightarrow \max.$$

Домножим теперь (3) на матрицу H слева:

$$Hx(t^*, t_*, x_0) = HY(t^*) \left(x_0 + \int_{t_*}^{t^*} Y^{-1}(\tau) b(\tau) u(\tau) d\tau \right).$$

С учетом (2) граничное условие задачи (1) даёт систему уравнений относительно u_k :

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_*(k-1)h}^{t_*+kh} HY(t^*)Y^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau u_k = g - HY(t^*)x_0.$$

Введём следующие обозначения:

$$d_k = \int_{t_*(k-1)h}^{t_*+kh} c^T Y(t^*)Y^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1, N}, \quad D = (d_1, \dots, d_N)^T,$$

$$v_k = \int_{t_*(k-1)h}^{t_*+kh} HY(t^*)Y^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1, N}, \quad V = (v_1, \dots, v_N),$$

$$U = (u_1, \dots, u_N)^T,$$

$$g_0 = g - HY(t^*)x_0, \quad g_0 \in \mathbb{R}^m.$$

Здесь U и D — N -мерные векторы, V — $(m \times N)$ -матрица.

Окончательно получаем интервальную задачу линейного программирования [2]:

$$D^T U \rightarrow \max,$$

$$VU = g_0, \tag{4}$$

$$-L \leq u_k \leq L, \quad k = \overline{1, N}.$$

Таким образом, задача оптимального управления (1) сводится к ИЗЛП (4).

3. Общий алгоритм адаптивного метода. Часто на практике параметры системы (1) известны неточно. В этом случае использование методов нахождения точного решения задачи не всегда оправдано. Более предпочтительным в таком случае является использование адаптивного метода. Кроме того, применение адаптивного метода не ведёт к увеличению размерности задачи, что неизбежно при сведении исходной задачи к канонической форме задачи линейного программирования, пригодной для решения симплекс-методом.

Следует отметить и ещё одну отличительную особенность адаптивного метода. С каждым базисным планом в симплекс-методе жёстко ассоциируется базис (специальное подмножество из индексов базисного плана). С помощью этих элементов составляется базисная матрица.

В адаптивном методе вместо базиса используется *опора*, составляемая из произвольного подмножества индексов строк и столбцов матрицы V . Опора совершенно не зависит от плана. В связи с этим, если в симплекс-методе при изменении базисного плана автоматически по определённым правилам меняется базис, то в методе Габасова план и опора не связаны, что позволяет менять их независимо друг от друга и более эффективно строить оптимальный план.

Как и симплекс-метод, адаптивный метод — двухфазный. В первой фазе метода происходит поиск допустимого плана (решения). Во второй фазе строится *оптимальный план*. Для этого с помощью введенной опоры находится *псевдоплан* — специальная точка, удовлетворяющая введенному в работах Р. Габасова *критерию оптимальности*. Далее находится точка пересечения отрезка, соединяющего допустимый план и псевдоплан, с границей области допустимых планов. Эта точка принимается за новый план, после чего определенным образом меняется опора, и процедура повторяется. Доказано, что за конечное число шагов данный процесс сходится к оптимальному решению.

4. Оптимальное управление электродвигателем. Рассмотрим задачу поворота вала электродвигателя постоянного тока на максимальный угол за заданное время. Динамика этого процесса описывается системой уравнений [1]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= u, & |u| &\leq b, & (5) \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_2(T) = 0, & x_1(T) &\rightarrow \max, \end{aligned}$$

где x_1 — угол поворота вала двигателя, u — приведённый вращающий момент (управление), T — заданное время окончания поворота. Требуется выбрать управление $u(t)$ так, чтобы в момент времени T скорость вращения вала была равна нулю, а угол поворота при этом был максимальным.

4.1. Численная реализация. Разработанный на основе адаптивного метода алгоритм решения задачи оптимального управления был реализован в среде программирования MATLAB. В качестве численного метода для решения задачи Коши был использован четырёхэтапный метод Рунге — Кутты пятого порядка с оценщиком погрешности второго порядка. Для вычисления определённого интеграла применялась квадратурная формула Симпсона.

Данные методы были реализованы самостоятельно (встроенные функции среды MATLAB не использовались), поэтому можно говорить о том, что использовалась именно среда программирования, а не математический пакет. Такой подход позволяет при необходимости легко перенести приложение из одной среды разработки в другую.

4.2. Результаты. На рис. 1–3 приведены результаты работы программы. В качестве параметров системы взяты значения $T = 10$, $b = 2,5$, $N = 30$.

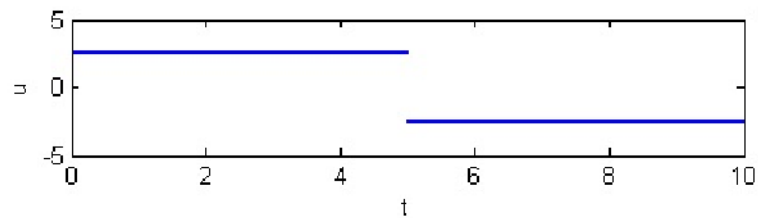


Рис. 1. Оптимальное управление

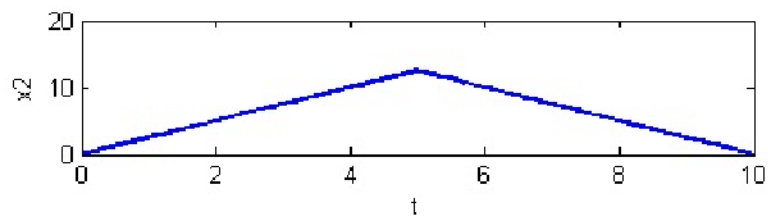


Рис. 2. Зависимость угловой скорости от времени

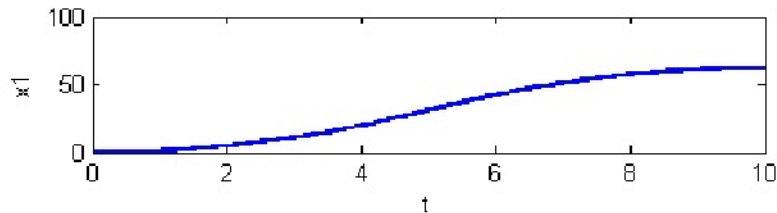


Рис. 3. Зависимость угла поворота от времени

5. Заключение. Метод Р. Габасова позволяет эффективно решать задачи оптимального управления для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведённые результаты для модели процесса управления электродвигателем совпадают при выбранных параметрах с аналитическим решением задачи, полученным в [1]. Следует также отметить, что для различных постановок задач оптимального управления (а именно, размерности вектора управления и типа минимизируемого функционала) необходимы оригинальные процедуры сведения к ИЗЛП с целью дальнейшего применения адаптивного метода. Разработка алгоритма сведения задачи с нескалярным управлением, а также попытка обобщить результаты, полученные Р. Габасовым для различных классов нелинейных систем, представляет значительный интерес для дальнейшего исследования.

Литература

1. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
2. Альсевич В. В., Габасов Р., Глушенков В. С. Оптимизация линейных экономических моделей. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 211 с.
3. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Вып. 40, № 6. С. 838–859.

УДК 531.36, 519.63

Слупко К. А.

Приближенный метод построения функционалов Ляпунова — Красовского для периодических дифференциально-разностных систем

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. Математическое моделирование динамики пучка заряженных частиц в ускорителях или поведения плазмы в современных токамаках с некоторыми упрощениями приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений. Линеаризация этих уравнений в окрестности заданных периодических решений и учет задержки сигнала в канале обратной связи позволяет сосредоточиться на изучении линейных нестационарных систем с запаздыванием и периодическими коэффициентами.

Один из основных методов для исследования устойчивости систем с запаздыванием — это метод функционалов Ляпунова, который описан в работе [2]. Одной из основных трудностей в применении функционалов является отсутствие вычислительных алгоритмов для соответствующих матриц Ляпунова. В [3, 4] предложен метод построения матрицы Ляпунова для линейной стационарной системы с запаздыванием.

В работе [1] показано, что квадратичный функционал Ляпунова — Красовского можно использовать для исследования асимптотической устойчивости и робастности решений периодических систем с запаздыванием.

В настоящей работе предлагается численный метод построения функционала Ляпунова — Красовского.

2. Получение матрицы Ляпунова. Для нахождения матрицы Ляпунова введем некоторые обозначения и определения.

2.1. Вспомогательные утверждения. Далее будут рассматриваться системы с запаздывающим аргументом следующего вида

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

Слупко Ксения Алексеевна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: slupko.kseniia@gmail.com, тел.: +7(905)283-70-11

Каждое решение системы определяется начальным моментом t_0 и начальной функцией $\varphi(t) \in PC([-h, 0], R^n): x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), -h \leq \theta \leq 0$.

Для рассматриваемой системы (1) метод функционалов основывается на теореме Красовского.

Теорема 1 [2]. Пусть известен функционал $V(t, x)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Существуют $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ такие, что

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2.$$

2. Существует $\beta > 0$ такое, что

$$\frac{dV(t, x_t(t_0, \varphi))}{dt} \leq -\beta \|x(t, t_0, \varphi)\|^2,$$

где $x(t, t_0, \varphi)$ и $x_t(t_0, \varphi)$ — решение и состояние системы (1) соответственно. Тогда система (1) асимптотически устойчива.

Второе условие теоремы равносильно существованию положительно-определенной функции $w(x)$ такой, что

$$\frac{dV(t, x_t(t_0, \varphi))}{dt} = -w(x(t, t_0, \varphi)) \quad (2)$$

вдоль решений системы (1).

2.2. Квадратичный функционал. Справедлива следующая

Теорема 2 [1]. Пусть система (1) экспоненциально устойчива, W — положительно-определенная $(n \times n)$ -матрица. Тогда функционал

$$\begin{aligned} V_0(t, x_t) = & x^T(t)U(t)x(t) + \\ & + 2x^T(t) \int_{-h}^0 U(t, \xi + h + t)A_1(\xi + h + t)x(t + \xi)d\xi + \\ & + \int_{-h}^0 x^T(\xi_1 + t)A_1^T(\xi_1 + h + t) \times \\ & \times \int_{-h}^0 U(\xi_1 + h + t, \xi_2 + h + t)A_1(\xi_2 + h + t)x(\xi_2 + t)d\xi_2 d\xi_1, \end{aligned}$$

где

$$U(t, \tau) = \int_t^{\infty} K^T(z, t) W K(z, \tau) dz, \quad (3)$$

удовлетворяет (2) на решениях системы (1).

Определение 1. Матрицу $U(t, \tau)$, определенную по формуле (3), будем называть матрицей Ляпунова для системы (1), ассоциированной с матрицей W .

Построенный функционал удовлетворяет второму условию теоремы Красовского, однако можно показать, что для него в общем случае не выполняется первое условие теоремы Красовского [1].

Чтобы удовлетворить и второму условию теоремы Красовского, рассмотрим три симметричные положительно-определенные матрицы W_0, W_1, W_2 . По ним построим матрицу

$$W = W_0 + W_1 + hW_2 \quad (4)$$

и рассмотрим положительно-определенный функционал

$$w(\varphi) = \varphi^T(0)W_0\varphi(0) + \varphi^T(-h)W_1\varphi(-h) + \int_{-h}^0 \varphi(\theta)^T W_2 \varphi(\theta) d\theta. \quad (5)$$

Тогда функционал

$$V(t, x_t) = V_0(t, x_t) + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)[W_1 + (h + \theta)W_2]x(t + \theta) d\theta, \quad (6)$$

где $V_0(t, x_t)$ — функционал из теоремы 2, построенный по матрице Ляпунова, ассоциированной с матрицей (4), удовлетворяет второму условию теоремы Красовского с матрицей (4). Также можно показать, что этот функционал удовлетворяет и оценкам из первого условия теоремы 1 [1].

2.3. Новое определение матрицы Ляпунова. Основная сложность в построении функционала (6) — найти матрицу Ляпунова, так как при ее определении через формулу (3) необходимо знать фундаментальную матрицу системы (1) на всей временной оси. Введем новое определение для матрицы $U(t, \tau)$.

Определение 2. Матрицей Ляпунова для системы (1) будем называть матрицу $U(t, \tau)$, удовлетворяющую при $\tau < t$ условиям

$$\frac{\partial U(t, \tau)}{\partial \tau} = -U(t, \tau)A_0(\tau) - U(t, \tau + h)A_1(\tau + h), \quad (7)$$

$$\begin{cases} U^T(t, \tau) = U(\tau, t), \\ \frac{dU(t, t)}{dt} = -W - (U(t, t)A_0(t) + [U(t, t)A_0(t)]^T) - \\ \quad - (U(t, t + h)A_1(t + h) + [U(t, t + h)A_1(t + h)]^T), \\ U(t + T, \tau + T) = U(t, \tau). \end{cases} \quad (8)$$

Справедливы следующие

Теорема 3 [1]. Если система (1) экспоненциально устойчива, то система (7), (8) имеет единственное решение.

Теорема 4 [1]. Если матрица $U(t, \tau)$ является решением системы (7), (8), то для соответствующего ей функционала (6) выполнено (2).

Следующая теорема связана с условием существования решения системы (7), (8).

Теорема 5 [1]. Пусть $e^{st}\varphi(t)$ и $e^{-st}\psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — периодические векторы такие, что $\varphi(t_0) \neq 0$ и $\psi(t_0) \neq 0$ — два решения исходной системы (1). Тогда существует W такая, что система (7), (8) не имеет решения.

В дальнейшем, для разрешимости системы (7), (8), предполагаем, что для системы (1) не выполняется условие теоремы 5.

3. Численный метод. Для решения системы (7), (8) введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} D(t) &= U(t, t), \quad U_1(t, \tau) = U(t, \tau), \quad U_2(t, \tau) = U^T(\tau + h, t)A_1(\tau + h), \\ U_3(t, \tau) &= U(t + h, \tau + h). \end{aligned}$$

Тогда система (7), (8) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1(t, \tau)}{\partial \tau} = -U_1(t, \tau)A_0(\tau) - U_2(t, \tau), \\ \frac{\partial U_2(t, \tau)}{\partial t} = -A_0^T(t)U_2(t, \tau) - A_1^T(t + h)U_3(t, \tau)A_1(\tau + h). \end{cases}$$

С граничными условиями

$$\begin{cases} U_1(t, t) = D(t), \\ U_3(t, \tau) = U_1(t + h, \tau + h), \\ U_2(t, t) = -0,5(W + D'(t)) + P(t) - 0,5(A_0^T(t)D(t) + D(t)A_0(t)), \\ U_2(t, 0) = U_1(t, T)A_1(h). \end{cases}$$

Здесь $P(t)$ — кососимметрическая матрица.

Таким образом, получена система уравнений в частных производных, в которой запаздывание отражено в граничных условиях. Для ее решения предлагается построить численный метод, аналогичный методу Рунге — Кутты третьего порядка. Для этого рассмотрим систему в общем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = f_1(\tau_1, \tau_2, U_1(\tau_1, \tau_2), U_2(\tau_1, \tau_2)), \\ \frac{\partial U_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = f_2(\tau_1, \tau_2, U_1(\tau_1, \tau_2), U_2(\tau_1, \tau_2)). \end{cases}$$

предполагая, что правые части по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

Будем строить расчетную схему следующим образом. Введем обозначения

$$\begin{cases} f_i^{ab} = f_i(\tau_1 + a\Delta, \tau_2 + b\Delta, U_1, U_2), \\ U_i^{ab} = U_i(\tau_1 + a\Delta, \tau_2 + b\Delta), \\ i = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Тогда расчетная схема

$$\begin{cases} U_1(\tau_1 + \Delta, \tau_2) = U_1^{10} = U_1^{11} + \Delta \sum_{i=1}^3 p_i k_i + \psi_1(\Delta), \\ U_2(\tau_1 + \Delta, \tau_2) = U_2^{10} = U_2^{00} + \Delta \sum_{i=1}^3 \tilde{p}_i l_i + \psi_2(\Delta), \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} k_i = f_1(\tau_1 + \alpha_i \Delta, \tau_2 + \beta_i \Delta, U_1^{00} + z_i(\Delta), U_2^{00} + d_i(\Delta)), \\ l_i = f_2(\tau_1 + \tilde{\alpha}_i \Delta, \tau_2 + \tilde{\beta}_i \Delta, U_1^{11} + \tilde{z}_i(\Delta), U_2^{11} + \tilde{d}_i(\Delta)). \end{cases}$$

Расчетная схема для первого уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^{10} \approx U_1^{11} + \Delta(-k_1 + \frac{3}{16}k_2 - \frac{3}{16}k_2), \\ k_1 = f_1(\tau_1 + \Delta, \tau_2 + \Delta, U_1^{11}, U_2^{11}), \\ k_2 = f_1(\tau_1 + \Delta, \tau_2 + 2\Delta, U_1^{11} + z_2(\Delta), U_2^{11} + d_2(\Delta)), \\ k_3 = f_1(\tau_1 + \Delta, \tau_2 - \frac{2}{3}\Delta, U_1^{11} + z_3(\Delta), U_2^{11} + d_3(\Delta)), \\ z_2 = \Delta f_1(\tau_1 + \Delta, \tau_2, U_1^{11}, U_2^{11}), \\ z_3 = -\frac{5}{3}\Delta f_1(\tau_1 + \Delta, \tau_2, U_1^{11} + \gamma_3(\Delta), U_2^{11} + \gamma_4(\Delta)), \\ \gamma_3 = -\frac{8}{15}\Delta k_1, \\ \gamma_4 = -\frac{8}{15}\Delta \left\{ \frac{1}{\Delta}(U_2^{22} - U_2^{11}) - 2f_2^{11} + f_2^{22} - \Delta \left[\frac{\partial f_2^{11}}{\partial \tau_1} + 2\frac{\partial f_2^{11}}{\partial \tau_2} \right] \right\}, \\ d_2 = -\frac{15}{8}\gamma_4, \\ d_3 = \frac{25}{8}\gamma_4. \end{array} \right.$$

Используя граничные условия, задаются значения на диагонали (метод неопределенных коэффициентов) и рассчитываются значения на остальной сетке.

Для несоизмеримых периода и запаздывания (в системе (1)) необходимо аппроксимировать функцию $U_3(\tau_1, \tau_2)$ с точностью $o(\Delta)$. Предположим, что задано число разбиений n . Найдем $\hat{n} \geq n$ такое, что $\|U(\tau_1 + \Delta\hat{n}, \tau_2 + \Delta\hat{n}) - U(\tau_1 + h, \tau_2 + h)\| \leq (\frac{T}{n})^2$. Эта задача имеет численное решение.

4. Пример. Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{pmatrix} -1 - \sin^2(t) & 1 - \cos(t)\sin(t) \\ -1 - \cos(t)\sin(t) & -1 - \cos^2(t) \end{pmatrix} x(t) + \\ & + \begin{pmatrix} 0,7 \sin(2t - 1) & 0,7 \cos(2t - 1) \\ -0,7 \cos(2t - 1) & -0,7 \sin(2t - 1) \end{pmatrix} x(t - 1) + \\ & + \begin{pmatrix} 0,49 \cos(2) & 0,49 \sin(2) \\ 0,49 \sin(2) & 0,49 \cos(2) \end{pmatrix} x(t - 2). \end{aligned}$$

Пусть $t_0 = 0$.

Применяя описанный выше алгоритм, найдем численное представление матрицы Ляпунова и построим соответствующий функционал. После ряда несложных вычислений получилась следующая

оценка на решение:

$$\|x(t, \varphi)\| \leq 19,73e^{-0,029t} \|\varphi\|_2.$$

5. Заключение. В данной работе рассмотрен вопрос применения метода функционалов Ляпунова — Красовского для анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем и предложен численный метод построения матрицы Ляпунова для систем с периодическими коэффициентами.

Также стоит отметить, что построенный метод можно распространить на системы с несколькими запаздываниями и на системы с распределенным запаздыванием.

Литература

1. Letyagina O. N., Zhabko A. P. Robust stability analysis of linear periodic system with time delay // International Journal of Modern Physics A, 2009. Vol. 24, No. 5. P. 893–907.
2. Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. С. 315–327.
3. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной: Функционалы полного типа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2005. Вып. 1. С. 110–117.
4. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной: Матрицы Ляпунова // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 200–209.
5. Зубов В. И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Известия ВУЗов. Математика. 1958. Вып. 6. С. 86–95.
6. Валеев К. Г., Султанбеков Т. С. Оценка роста решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с помощью функций Ляпунова // Методы сравнения и методы Ляпунова. Саранск: Мордовский гос. ун-т., 1990. С. 36–40.

УДК 514.113.5

Тамасян Г. Ш., Удот М. В.

Обобщенная точка Люиле

1. Постановка задачи. Пусть в \mathbb{R}^n задан симплекс Λ своими вершинами $x^j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n + 1$. Будем считать, что $\text{int } \Lambda \neq \emptyset$, т. е. векторы x^1, \dots, x^{n+1} — аффинно независимые.

Требуется найти точку $x^* \in \mathbb{R}^n$, для которой сумма квадратов расстояний до граней симплекса минимальна.

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим квадратную $((n + 1) \times (n + 1))$ -матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x^1 & \dots & x^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $L_k(x)$, $k = 1, \dots, n + 1$ определитель матрицы, полученный заменой k -го столбца в матрице M на столбец $(1, x_1, \dots, x_n)^T$. Несложно понять, что уравнение $L_k(x) = 0$ определяет k -ую грань симплекса Λ . Положим

$$V_k = \|\text{grad } L_k\|. \quad (1)$$

Будем считать, что симплекс Λ имеет положительную ориентацию [1], т. е. точки x^1, \dots, x^{n+1} заданы так, что $\det M > 0$. Тогда уравнение вида

$$\frac{1}{V_k} L_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n + 1 \quad (2)$$

задает нормированное уравнение гиперплоскости.

Таким образом расстояние от произвольной точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ до гиперплоскости (2) вычисляется по формуле $\frac{1}{V_k} |L_k(\bar{x})|$. Здесь модуль можно отбросить, если точки \bar{x} и x^k лежат по одну сторону гиперплоскости (2).

Тамасян Григорий Шаликович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: g.tamasyan@spbu.ru, тел.: +7(911)267-10-94

Удот Михаил Валерьевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: udot.mikhail@gmail.com, тел.: +7(904)648-35-76

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 12-01-00752, № 14-01-31521 мол_a

Обозначим через M_j матрицу, образованную из M заменой элементов $(j+1)$ -ой строки на единицы, $j = 1, \dots, n$. Очевидно, что $\det M_j = 0$. Разложим по $(j+1)$ -ой строке $\det M_j$, имеем

$$\det M_j = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{j+k+1} \det M_{kj} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $\det M_{kj}$ — минор, соответствующий элементу с индексом $(j+1, k)$. Введем обозначения

$$g_k = \begin{pmatrix} (-1)^{k+2} \det M_{k1} \\ \vdots \\ (-1)^{k+n+1} \det M_{kn} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (4)$$

Заметим, что $g_k = \text{grad } L_k(x)$ (см. (1)).

Утверждение 1. *Справедливо следующее равенство:*

$$\sum_{k=1}^{n+1} g_k = \mathbb{O}.$$

Здесь $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^n$ — нулевой вектор.

Доказательство следует из формул (4) и (3), а именно,

$$\sum_{k=1}^{n+1} g_k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+2} \det M_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+n+1} \det M_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det M_1 \\ \vdots \\ \det M_n \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

3. Решение задачи. Введем функцию (см. (2))

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{V_k^2} L_k^2(x).$$

Исходная задача теперь может быть сформулирована следующим образом:

$$F(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}.$$

Докажем, что данная экстремальная задача имеет единственное решение вида

$$x^* = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} V_k^2 x^k}{\sum_{k=1}^{n+1} V_k^2}. \quad (5)$$

Для этого покажем, что $F'(x^*) = \mathbb{O}$ и $F''(x^*)$ — положительно-определенная матрица, т. е. выполнены необходимое и достаточное условия экстремума.

Замечание 1. При $n = 2$ точка (5) является одной из замечательных точек треугольника, которая называется точкой Лемуана — Гребне [2–4].

Замечание 2. При $n = 3$ точка (5) называется первой точкой Лемуана [5].

Несложно проверить, что справедливо представление

$$L_k(x^*) = \frac{V_k^2}{\sum_{k=1}^{n+1} V_k^2} \det M. \quad (6)$$

Утверждение 2. Для функции $F(x)$ в точке x^* выполнено необходимое условие экстремума: $\text{grad } F(x^*) = \mathbb{O}$.

Доказательство следует из утверждения 1 и равенства (6), а именно,

$$\text{grad } F(x^*) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{V_k^2} L_k(x^*) \text{grad } L_k(x^*) = \frac{\det M}{\sum_{k=1}^{n+1} V_k^2} \sum_{k=1}^{n+1} g_k = \mathbb{O}.$$

Утверждение 3. Матрица $F''(x^*)$ является положительно-определенной.

Доказательство. Имеем

$$\text{grad } F(x) = \left(\frac{g_1}{V_1} \quad \dots \quad \frac{g_{n+1}}{V_{n+1}} \right) \begin{pmatrix} \frac{L_1(x)}{V_1} \\ \vdots \\ \frac{L_{n+1}(x)}{V_{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F''(x) = \begin{pmatrix} \frac{g_1}{V_1} & \cdots & \frac{g_{n+1}}{V_{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g_1^T}{V_1} \\ \vdots \\ \frac{g_{n+1}^T}{V_{n+1}} \end{pmatrix} = GG^T.$$

Покажем, что $\text{rank } G = n$. В силу положительной ориентации симплекса Λ определитель матрицы M положителен. Тогда существует обратная матрица и ее n последних столбцов образуют матрицу $(g_1 \ \dots \ g_{n+1})^T$. Разделим k -ую строку этой матрицы на V_k , $k = 1, \dots, n+1$, (см. (1)) получим матрицу $G^T = \begin{pmatrix} \frac{g_1}{V_1} & \cdots & \frac{g_{n+1}}{V_{n+1}} \end{pmatrix}^T$. Таким образом, $\text{rank } G = n$. Матрица $F'' = GG^T$ является матрицей Грама системы строк матрицы G , а тогда из свойств определителя Грама [6] имеем, что $F''(x^*) > 0$.

Утверждение 3 доказано.

4. Некоторые свойства обобщенной точки Люилье. Обозначим через d_k — расстояние от точки x^* (см. (5)) до k -ой грани симплекса Λ .

Утверждение 4. *Имеют место следующие равенства $\frac{d_k}{V_k} = K$,*

$$k = 1, \dots, n+1, \text{ где константа } K = \frac{n!V}{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} d_k^2}{\sum_{k=1}^{n+1} V_k^2}.$$

Доказательство. Заметим, что объем V симплекса Λ равен [7]

$$V = \frac{1}{n!} \det M. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$d_k = \frac{n!V}{n+1} V_k. \quad (8)$$

Тогда

$$\frac{d_k}{V_k} = \frac{n!V}{n+1} = K, \quad (9)$$

а также

$$\sum_{k=1}^{n+1} d_k^2 = \frac{(n!)^2 V^2}{\sum_{k=1}^{n+1} V_k^2}. \quad (10)$$

В силу (8) и (10) имеем

$$\sum_{k=1}^{n+1} d_k^2 = \frac{d_k}{V_k} n! V \quad \Rightarrow \quad \frac{d_k}{V_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} d_k^2}{n! V} = K. \quad (11)$$

Утверждение 4 доказано.

Обозначим через ξ_k проекцию точки x^* на k -ую грань симплекса Λ , $k = 1, \dots, n+1$.

Утверждение 5. *Справедлива формула $\xi_k = x^* - K g_k$.*

Доказательство. Уравнение прямой, проходящей через точку x^* и ортогональной к k -ой грани симплекса, имеет вид

$$x(t) = t g_k + x^*.$$

Требуется найти такое t_k , при котором $L_k(x(t_k)) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} L_k(t_k \operatorname{grad} L_k + x^*) &= \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^1 & \dots & x^{k-1} & t_k \operatorname{grad} L_k + x^* & x^{k+1} & \dots & x^{n+1} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ x^1 & \dots & x^{k-1} & t_k \operatorname{grad} L_k & x^{k+1} & \dots & x^{n+1} \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^1 & \dots & x^{k-1} & x^* & x^{k+1} & \dots & x^{n+1} \end{vmatrix} = \\ &= t_k \|\operatorname{grad} L_k\|^2 + L_k(x^*). \end{aligned}$$

С учетом (1), (6), (7) и (9) получим

$$t_k V_k^2 + \frac{n! V V_k^2}{\sum_{k=1}^{n+1} V_k^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_k = -\frac{n! V}{\sum_{k=1}^{n+1} V_k^2} = -K.$$

Утверждение 5 доказано.

Следствие. *Обобщенная точка Люиллье является центроидом «педального» симплекса $\Pi = \text{co}\{\xi_k, k = 1, \dots, n + 1\}$, т. е.*

$$x^* = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k.$$

Заключение. Решена задача поиска обобщенной точки Люиллье для заданного в многомерном пространстве симплекса. Получены аналитические формулы этой точки, суммы квадратов расстояний от нее до граней симплекса и координат вершин «педального» симплекса.

Литература

1. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 3. М.: МЦНМО, 2009. 192 с.
2. Ефремов Д. Д. Новая геометрия треугольника. Одесса: Типография бланкоиздательства М. Шпенцера, 1902. 351 с.
3. Mackay J. S. Early history of the symmedian point // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1892–1893. No 11. P. 92–103.
4. Зетель С. И. Задачи на максимум и минимум. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 224 с.
5. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии. М.: МЦНМО, 2010. 352 с.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
7. Утешев А. Ю. Геометрические приложения определителя [Электронный ресурс] // Записная книжка профессора Утешева. 2007. URL: <http://mpu.ru/vf4/dets/geometry> (дата обращения: 11.03.2014).

УДК 517.925.51

Фоминых А. В.

Точные штрафы в вариационной задаче с ограничениями в виде дифференциальных неравенств

Рекомендовано к публикации доцентом Карелиным В. В.

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\dot{x}_i \leq f_i(x, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

в которой $f = (f_1, \dots, f_n)$ — заданная вещественная вектор-функция из пространства $C_{[0, T]}^n$, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция фазовых переменных, $t \in [0, T]$. Предполагаем, что функция $f(x, t)$ является дифференцируемой по x , т. е. $\frac{\partial f}{\partial x}$ существует. Пусть для системы (1) задано начальное условие

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Поскольку в системе (1) из начальной точки (2) выходит целое семейство траекторий, можно поставить задачу выделения траекторий с заданными свойствами, например, таких, которые доставляют минимум некоторому функционалу. В данной статье такая задача исследуется с помощью аппарата точных штрафных функций [1, 2].

2. Постановка задачи. Пусть требуется найти такое решение x^* , удовлетворяющее системе (1) и начальному условию (2), которое доставляет минимум функционалу

$$I = \int_0^T f_0(x, \dot{x}, t) dt. \quad (3)$$

Здесь f_0 — скалярная вещественная функция, которую также будем считать дифференцируемой по x и по \dot{x} .

Фоминых Александр Владимирович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexfomster@mail.ru, тел.: +7(905)212-60-65

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 12-01-00752, 14-01-31521 мол_а

3. Сведение к задаче безусловной оптимизации. Введём обозначение $z(t) = \dot{x}(t)$, $t \in [0, T]$, и запишем ограничения (1), (2) в виде включения $z \in F(x, t)$.

Определим функционал

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(z), \quad (4)$$

где

$$\varphi_i(z) = \max \left\{ 0, \int_0^T z_i - f_i(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, t) dt \right\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Введём множества

$$\Omega = \{z \in C_{[0, T]}^n \mid \varphi(z) = 0\},$$

$$\Omega_\delta = \{z \in C_{[0, T]}^n \mid \varphi(z) < \delta\}.$$

Тогда

$$\Omega_\delta / \Omega = \{z \in C_{[0, T]}^n \mid 0 < \varphi(z) < \delta\}.$$

Нетрудно заметить, что $\varphi = 0$ при $z \in F(x, t)$ и $\varphi > 0$, когда $z \notin F(x, t)$.

Теперь можно составить функционал

$$\Phi(z) = I(z) + \lambda \varphi(z). \quad (5)$$

Здесь λ — достаточно большое положительное число. Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях Φ является точной штрафной функцией. Тогда задачу минимизации (3) при наличии ограничений (1), (2) можно свести к безусловной минимизации функционала (5).

4. Дифференциальные свойства функций φ и I . Рассмотрим функционал φ подробнее. Обозначим

$$\bar{\varphi}_i(z) = \int_0^T z_i - f_i(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, t) dt, \quad i = \overline{1, n}.$$

Введём индексные множества

$$I_0 = \{i = \overline{1, n} \mid \bar{\varphi}_i(z) = 0\},$$

$$I_- = \{i = \overline{1, n} \mid \overline{\varphi}_i(z) < 0\}.$$

$$I_+ = \{i = \overline{1, n} \mid \overline{\varphi}_i(z) > 0\}.$$

Сначала рассмотрим случай $z \in \Omega$ (в этом случае $|I_+| = 0$). Пусть $|I_0| = k$, где k может принимать значение от 1 до n , тогда $|I_-| = n - k$. Положим

$$z_\alpha = z(t) + \alpha v(t),$$

где $v \in C_{[0, T]}^n$, $\alpha > 0$. Найдём производную $\varphi'(z, v)$ функционала (4) по направлению v . Вычислим

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_i(z + \alpha v) &= \int_0^T z_i + \alpha v_i - f_i \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) + v(\tau) d\tau, t \right) dt = \\ &= \overline{\varphi}_i(z) + \alpha \int_0^T v_i(t) - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}, \int_0^t v(\tau) d\tau \right) dt + o(\alpha). \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}'_i(z, v) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\overline{\varphi}_i(z + \alpha v) - \overline{\varphi}_i(z)}{\alpha} = \int_0^T v_i(t) - \left(\int_t^T \frac{\partial f_i}{\partial x} d\tau, v(t) \right) dt = \\ &= \int_0^T \psi_i(t) v(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_i &= \left(- \int_t^T \frac{\partial f_i}{\partial x_1} d\tau, - \int_t^T \frac{\partial f_i}{\partial x_2} d\tau, \dots, - \int_t^T \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} d\tau, 1 - \int_t^T \frac{\partial f_i}{\partial x_i} d\tau, \right. \\ &\quad \left. - \int_t^T \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} d\tau, \dots, - \int_t^T \frac{\partial f_i}{\partial x_n} d\tau \right), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда можно записать

$$\varphi'_i(z, v) = \max_{w_i \in \partial \varphi_i} \int_0^T (w_i, v) dt,$$

$$\partial \varphi_i = \text{co}\{0, \psi_i\}, \quad i \in I_0.$$

При $i \in I_-$

$$\varphi'_i(z, v) = 0.$$

Наконец,

$$\varphi'(z, v) = \sum_{i \in I_0} \max_{w_i \in \partial \varphi_i} \int_0^T (w_i, v) dt.$$

Это равенство можно записать иначе

$$\varphi'(z, v) = \max_{\omega_i \in [0, 1]} \int_0^T \sum_{i \in I_0} (\omega_i \psi_i, v) dt, \quad i \in I_0. \quad (7)$$

Из равенства (7) заключаем, что при $z \in \Omega$ функционал φ является субдифференцируемым [4] и его субдифференциал выражается равенством

$$\partial \varphi = co \left\{ \sum_{i \in I_0} \omega_i \psi_i \mid \omega_i \in [0, 1], i \in I_0 \right\}, \quad (8)$$

в котором выражения для ψ_i , $i \in I_0$, берутся из равенства (6).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $z \notin \Omega$, т. е. $\varphi > 0$. В этом случае субдифференциал функции φ имеет вид

$$\partial \varphi = co\{0, \psi(t)\} + s(t),$$

$$\psi(t) = \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i \psi_i \mid \omega_i = 1, \bar{\varphi}_i(z) = 0, \omega_i = 0, \bar{\varphi}_i(z) \neq 0, i = \overline{1, n} \right\},$$

$$s(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \psi_i(t),$$

$$\begin{cases} \beta_i = 1, \bar{\varphi}_i(z) > 0, \\ \beta_i = 0, \bar{\varphi}_i(z) < 0, \end{cases}$$

причём множество I_+ не пусто.

Тогда производная по направлению может быть записана в виде

$$\varphi'(z, v) = \max_{w \in \partial \varphi} \int_0^T (w, v(t)) dt,$$

а каждый элемент $w \in \partial \varphi$ — представлен равенством

$$w = \sum_{i=1}^n \omega_i \psi_i(t) + s(t),$$

в котором

$$\begin{cases} \omega_i \in [0, 1], \bar{\varphi}_i(z) = 0, \\ \omega_i = 0, \bar{\varphi}_i(z) \neq 0, \end{cases}$$

где $i = \overline{1, n}$.

Найдём производную функционала I по направлению $v \in C_{[0, T]}^n$. Вычислим

$$\begin{aligned} I(z + \alpha v) &= \int_0^T f_0 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, z(t) + \alpha v(t), t \right) dt = \\ &= I(z) + \alpha \int_0^T \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}, \int_0^t v(\tau) d\tau \right) dt + \alpha \int_0^T \left(\frac{\partial f_0}{\partial z}, v(t) \right) dt + o(\alpha). \end{aligned}$$

Далее имеем

$$I'(z, v) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{I(z + \alpha v) - I(z)}{\alpha} = \int_0^T \left(\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z}, v(t) \right) dt.$$

Из последнего соотношения видно, что функционал I дифференцируем по Гато на промежутке времени $[0, T]$ и его «градиент» на множестве $C_{[0, T]}^n$ выражается по формуле

$$\nabla I = \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z}. \quad (9)$$

5. Необходимые условия минимума. Исследуем функционал (5) и получим необходимые условия минимума для рассматриваемой оптимизационной задачи.

Теорема 1. Пусть на интервале $[0, T]$ функции $\psi_i(t), i \in I_0$, линейно независимы. Тогда функционал (5) будет точной штрафной функцией.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Для того, чтобы точка x^* удовлетворяла ограничениям (1), (2) и доставляла минимум функционалу (3), необходимо, чтобы для любого $t \in [0, T]$

$$0_n \in \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda co \left\{ \sum_{i \in I_0} \omega_i \psi_i \mid \omega_i \in [0, 1], i \in I_0 \right\}. \quad (10)$$

Доказательство. По теореме 1 функционал (5) является точной штрафной функцией, поэтому существует такое число λ^* , что $\forall \lambda > \lambda^*$ задача минимизации функционала (3) при наличии ограничений (1), (2) эквивалентна задаче безусловной минимизации (5). Для того, чтобы x^* была точкой минимума (5), необходимо выполнение соотношения [5]

$$0_n \in \partial\Phi(x^*). \quad (11)$$

Поскольку при $z \in \Omega$ субдифференциал функции φ выражается соотношением (8), а функционал I дифференцируем и его градиент выписан в (9), то условие (11) запишется в виде (10).

Теорема доказана.

6. Заключение. В данной статье продемонстрирована возможность применения теории точных штрафных функций к задаче оптимизации интегрального функционала с ограничениями в виде дифференциальных неравенств. При некоторых дополнительных предположениях найдены необходимые условия минимума. Полученные результаты могут применяться при построении численных методов решения рассмотренной задачи.

Литература

1. Карелин В. В. Точные штрафы в задаче наблюдения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2008. Вып. 4. С. 3–7.
2. Тамасян Г. Ш. Численные методы в задачах вариационного исчисления для функционалов, зависящих от производных высшего порядка // Проблемы математического анализа. 2012. Вып. 67. С. 113–132.
3. Кузютин В. Ф., Зенкевич Н. А., Еремеев В. В. Геометрия. СПб.: Лань, 2003. 416 с.
4. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
5. Васильев Л. В., Демьянов В. Ф. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

УДК 517.929.4

Холинова А. А.

**Оценка области асимптотической устойчивости
решений однородных
дифференциально-разностных систем уравнений
запаздывающего типа**

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Зараник У. П.*

1. Введение. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом нашли широкое применение в иммунологии, химии, механике, экономике, биологии. В основном используются модели с постоянным запаздыванием, как наиболее изученные, для решения которых предложены модификации известных численных методов. Наиболее применяемыми являются метод шагов, метод Адамса, метод Рунге – Кутты.

В настоящей работе рассматривается однородная дифференциально-разностная система запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = g(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)), \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$; $\tau_m > \tau_{m-1} > \dots > \tau_1 > 0$ – постоянные запаздывания; элементы векторной функции $g(x_0, \dots, x_m)$ являются непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам однородными функциями порядка $\mu > 1$. Каждое решение $x(t, t_0, \varphi)$ системы (1) при $t \geq t_0$ определяется начальным моментом времени $t_0 \geq 0$ и начальной функцией $\varphi(\theta) \in PC([- \tau_m, 0], R^n)$, $\varphi(\theta) : [- \tau_m, 0] \rightarrow R^n$, с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \sup_{\theta \in [- \tau_m, 0]} \|\varphi(\theta)\|$, здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Из сделанных предположений следует, что рассматриваемая система имеет нулевое решение. Пусть нулевое решение вспомогательной системы без запаздывания

$$\dot{x}(t) = g(x(t), x(t), \dots, x(t)) \quad (2)$$

Холинова Анастасия Алексеевна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kholinova@gmail.com, тел.: +7(950)011-41-80

асимптотически устойчиво. Известно [1], что в этом случае нулевое решение системы (1) также асимптотически устойчиво, вообще говоря, не в целом. Обозначим через x_t при $t \geq t_0$ отрезок решения системы (1) $x_t = \{x(t + \sigma, t_0, \varphi), \sigma \in [-\tau_m, 0]\}$, а через $\dot{v}(x_t)|_{(1)}$ — производную функционала $v(x_t)$ вдоль решений системы (1). Введем множество функций

$$S_c(t) = \{x_t : \|x(t + \sigma)\| \leq \|x(t)\| = c, \sigma \in [-\tau_m, 0]\} \cap PC([t - \tau_m, t], R^n).$$

Теорема 1 [2]. *Если нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову, то для любой положительно-определенной и непрерывно дифференцируемой функции $w(x)$, удовлетворяющей в некоторой окрестности нуля условию $w(x) \leq a\|x\|^b$, где $a > 0$, $b > \mu$, существует непрерывный функционал $v(\varphi)$, $v(0) = 0$, определенный на множестве $\varphi \in PC([-\tau_m, 0], R^m)$ и такой, что*

1. $\dot{v}(x_t)|_{(1)} \leq -w(x(t))$;
2. $v(x_t) \geq v_1(c)$ на множестве $x_t \in S_c(t)$, причем $v_1(c)$ — непрерывная и положительно-определенная в некоторой окрестности нуля функция.

Теорема 2 [2]. *Если для положительно-определенной и непрерывно дифференцируемой функции $w(x)$, удовлетворяющей в некоторой окрестности нуля условию $w(x) \leq a\|x\|^b$, где $a > 0$, $b > \mu$, существует непрерывный функционал $v(\varphi)$, $v(0) = 0$, определенный на множестве $\varphi \in PC([-\tau_m, 0], R^m)$ и такой, что*

1. $\dot{v}(x_t)|_{(1)} \leq -w(x(t))$;
2. $v(x_t) \geq v_1(c)$ на множестве $x_t \in S_c(t)$, причем $v_1(c)$ — непрерывная и положительно-определенная в некоторой окрестности нуля функция,

то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пусть $v(x_t)$ — функционал, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Определим функцию $\alpha(c) = \inf_{x_t \in S_c(t)} v(x_t)$, и найдем величину \bar{c} — наименьшее из положительных чисел, для которых $\alpha(c) = 0$. Если таких чисел нет, то $\bar{c} = +\infty$. Положим $\bar{\alpha} = \sup_{0 < c < \bar{c}} \alpha(c)$. Через $A \subset PC([-\tau_m, 0], R^n)$ обозначим область асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Теорема 3 [2]. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Связная часть множества функций*

$$\{\varphi \in PC([- \tau_m, 0], R^n), v(\varphi) < \bar{\alpha}\},$$

включающая тождественно нулевую функцию, содержится в области A ;

2. $\{\varphi \in PC([- \tau_m, 0], R^n), v(\varphi) < 0\} \cap A = \emptyset$.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с одним запаздыванием

$$\dot{x}(t) = ax^3(t) + bx^3(t-h), \quad (3)$$

где h — положительное постоянное запаздывание, a, b — некоторые постоянные, причем $a + b < 0$, и поэтому решение этого уравнения асимптотически устойчиво при любом $h \geq 0$. В качестве функционала $v(x_t)$ возьмем

$$v(x_t) = x^2(t) + 2bx(t) \int_{-h}^0 x^3(t+\tau) d\tau + \int_{-h}^0 (P + Q\tau)x^6(t+\tau) d\tau, \quad (4)$$

где P, Q — некоторые постоянные.

Основной целью работы является построение оценки области асимптотической устойчивости решений уравнения (3), а также реализация алгоритма построения оценки области в пакете MATLAB.

2. Построение оценки области асимптотической устойчивости. Продифференцируем функционал (4) в силу уравнения (3), получим

$$\begin{aligned} \dot{v}(x_t) |_{(3)} = & 2(a+b)x^4(t) + 2b(ax^3(t) + bx^3(t-h)) \int_{-h}^0 x^3(t+\tau) d\tau + Px^6(t) + \\ & + (Q - P)x^6(t-h) - Q \int_{-h}^0 x^6(t+\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Не умаляя общности, будем считать $h = 1$. Оценивая правую часть равенства, получаем

$$\begin{aligned} \dot{v}(x_t) \leq & 2(a+b)x^4(t) + (P + |ab|)x^6(t) + (Q - P + b^2)x^6(t-1) + \\ & + (|ab| + b^2 - Q) \int_{-1}^0 x^6(t+\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Если положить $P = Q + b^2$ и $Q = |ab| + b^2$, то имеем оценку

$$\dot{v}(x_t) \leq 2(a+b)x^4(t) + 2(b^2 + |ab|)x^6(t).$$

Подставим полученные P и Q в функционал (4):

$$\begin{aligned} v(x_t) &= x^2(t) + 2bx(t) \int_{-1}^0 x^3(t+\tau) d\tau + \\ &+ \int_{-1}^0 (|ab| + 2b^2 + (|ab| + b^2)\tau) x^6(t+\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Вычислим $\alpha(c) = \inf_{x_t \in S_c} v(x_t) \geq c^2(1 - 2|b|c^2 - (0,5|ab| + 1,5b^2)c^4)$, следовательно, $\bar{c}^2 = \frac{\sqrt{2|ab| + 6b^2} - 2|b|}{|ab| + 3b^2}$ и $\bar{\alpha} = \sup_{0 < c < \bar{c}} \alpha(c)$ будет достигаться при $c = \hat{c}$, $\hat{c}^2 = \frac{\sqrt{6|ab| + 22b^2} - 2|b|}{3(|ab| + 3b^2)}$. Заметим также, что функционал $\dot{v}(x_t)$ заведомо отрицателен только на множестве $S_d(t)$, где $d^2 = -\frac{a+b}{b^2 + |ab|}$. Определим число $\beta = \min\{\hat{c}, d\}$ и, используя теорему 3, выпишем оценку области асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (3):

$$\{\varphi \in PC([-1, 0]), v(\varphi) < \beta^2(1 - 2|b|\beta^2 - (0,5|ab| + 1,5b^2)\beta^4)\} \subset A,$$

$$\{\varphi \in PC([-1, 0]), v(\varphi) < 0\} \cap A = \emptyset.$$

Для построения оценки области асимптотической устойчивости в плоскости параметров a и b из найденного значения для $\alpha(c)$ выразим параметр a через параметр b и $\alpha(c)$ соответственно:

$$|a| \geq \frac{\alpha(c) - c^2 + 2|b|c^4 + 1,5b^2c^6}{-0,5|b|c^6}.$$

Также потребуем выполнения условия $a + b < 0$.

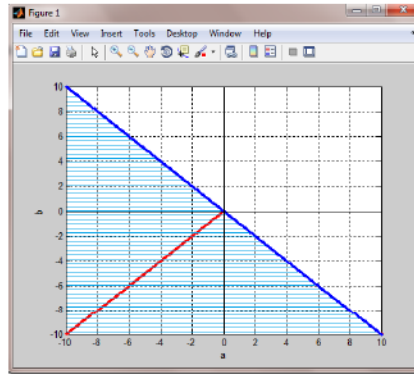


Рис. 1. Оценка области асимптотической устойчивости

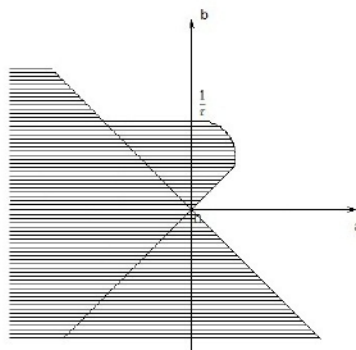


Рис. 2. Область асимптотической устойчивости

На рис. 1 представлена оценка области асимптотической устойчивости уравнения (3), построенная в пакете MATLAB. На рис. 2 представлена область асимптотической устойчивости уравнения (3), построенная методом Разумихина [3].

3. Заключение. Построена оценка области асимптотической устойчивости однородного дифференциального уравнения с одним запаздыванием, реализован алгоритм построения оценки области асимптотической устойчивости решений однородных дифференциально-разностных систем. Для рассматриваемого уравнения построена область асимптотической устойчивости, которая включает в себя построенную оценку.

Литература

1. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сиб. мат. Журнал. 2012. Т. 53, № 3. С. 495–508.
2. Александров А. Ю., Жабко А. П., Жабко И. А. Оценка области асимптотической устойчивости решений однородных дифференциально-разностных систем // Системы Управления и Информационные Технологии. 2014. № 1(55). С. 4–7.
3. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.

УДК 519.853.4

Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш.

Поиск наименьшего расстояния между эллипсоидами методом сопряженных гипогradientов

1. Введение. Данная статья продолжает исследования авторов в области вычислительной геометрии [1]. Основной аппарат этих исследований опирается на негладкий анализ [2] и теорию точных штрафных функций [3]. В работе рассматривается задача нахождения ближайших точек между двумя эллипсоидами. Предложен новый численный метод решения поставленной задачи.

2. Постановка задачи. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Требуется найти ближайшие точки между эллипсоидами Ω_1 и Ω_2 , где

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid h_k(x) = \frac{1}{2}x^T A_k x + x^T B_k + C_k = 0 \right\}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

A_k — постоянные симметричные $(n \times n)$ -матрицы, B_k — постоянные $(n \times 1)$ -вектор-столбцы, $C_k \in \mathbb{R}$ — константы.

Обозначим через x_k точку, принадлежащую эллипсоиду Ω_k , т. е. $h_k(x_k) = 0$ при $k = 1, 2$. Поставленную проблему можно решить как задачу условной оптимизации $\|x_1 - x_2\| \rightarrow \min_{\substack{x_1 \in \Omega_1 \\ x_2 \in \Omega_2}}$.

3. Точная штрафная функция. Обозначим через $z = [x_1, x_2]$. Введем функцию $f(z) = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2$ и множество

$$\Omega = \{z = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid h_1(x_1) = 0, h_2(x_2) = 0\}.$$

Пусть $\lambda \geq 0$ фиксировано. Введем функцию

$$\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z), \quad (2)$$

Чумаков Андрей Александрович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: andrew1991.spb@gmail.com, тел.: +7(904)646-88-72

Тамасян Григорий Шаликович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: g.tamasyan@spbu.ru, тел.: +7(911)267-10-94

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 12-01-00752, № 14-01-31521 мол_a

где

$$\varphi(z) = |h_1(x_1)| + |h_2(x_2)|.$$

Функция $\Phi_\lambda(z)$ называется *штрафной функцией*, а число λ — *штрафным параметром*. Доказано, что функция $\Phi_\lambda(z)$ является *функцией точного штрафа*.

Таким образом, задача минимизации функции $f(z)$ на множестве Ω сведена к задаче минимизации функции $\Phi_\lambda(z)$ на всем пространстве \mathbb{R}^{2n} при $\lambda > \lambda^*$, где λ^* — константа точного штрафа [3], для которой можно найти оценки.

В [1] описаны методы наискорейшего и гиподифференциального спуска. В следующем пункте представлен новый метод, базирующийся на идее сопряженных направлений.

4. Метод сопряженных гипогradientов. Пусть z_0 — некоторое начальное приближение. Будем строить последовательность $\{z_k\}$ по формулам

$$z_{k+1} = z_k - \beta_k W_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где

$$W_0 = G(z_0), \quad W_k = G(z_k) + \gamma_k W_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь $G(z) = \mu_1^* h_1'(x_1) + \mu_2^* h_2'(x_2) + f'(z)$, где

$$f'(z) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -(x_1 - x_2) \end{pmatrix}, \quad h_1'(x_1) = \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 \\ \mathbb{O}_n \end{pmatrix},$$

$$h_2'(x_2) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n \\ A_2 x_2 + B_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{O}_n = (0 \ \dots \ 0)^T.$$

Для определения μ_1^* и μ_2^* требуется решить систему линейных уравнений $D \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \eta$, где

$$D = \begin{pmatrix} h_1^2(x_1) + (h_1'(x_1), h_1'(x_1)) & h_1(x_1)h_2(x_2) \\ h_1(x_1)h_2(x_2) & h_2^2(x_2) + (h_2'(x_2), h_2'(x_2)) \end{pmatrix},$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \lambda\varphi(z)h_1(x_1) - (h_1'(x_1), f'(z)) \\ \lambda\varphi(z)h_2(x_2) - (h_2'(x_2), f'(z)) \end{pmatrix}.$$

Величина β_k определяется так же, как и в методе гиподифференциального спуска [1], т. е.

$$\min_{\beta \geq 0} \Phi_\lambda(z_k - \beta W_k) = \Phi_\lambda(z_k - \beta_k W_k),$$

а γ_k — по формуле

$$\gamma_k = \frac{(G(z_k), G(z_k) - G(z_{k-1}))}{(G(z_{k-1}), G(z_{k-1}))}. \quad (4)$$

5. Численные эксперименты. Были проведены массовые вычисления по сравнению эффективности двух вышеописанных алгоритмов в пакете MATLAB. Брались m пар эллипсоидов в n -мерном евклидовом пространстве при $n = 2, 3, 10, 100, 200$ и при $m = 10$. Эллипсоиды формировались с помощью функции генерирования псевдослучайных чисел. В приведенных ниже таблицах 1, 2 указано время T (в сек.). Все вычисления проводились с точностью до 10^{-5} .

Таблица 1. Метод гиподифференциального спуска

$m \backslash n$	2	3	10	100	200
10	0,0922	0,4187	2,0203	12,1137	26,6334

Таблица 2. Метод сопряженных гипогradientов

$m \backslash n$	2	3	10	100	200
10	0,0509	0,1240	0,5262	2,7587	6,5825

6. Заключение. В работе представлен новый метод решения поставленной проблемы. Разработано программное обеспечение в системе MATLAB, реализующий данный алгоритм. Из проведенных экспериментов следует, что метод сопряженных гипогradientов работает быстрее метода гиподифференциального спуска.

Литература

1. Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш. Методы нахождения наименьшего расстояния между эллипсоидами // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 94–99.
2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

УДК 517.518.826

Шуляк А. С.

Численное решение задачи чебышевской аппроксимации при наличии ограничений

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

1. Введение. В работе исследуется частный случай задачи чебышевской аппроксимации. Классическая задача чебышевской аппроксимации [1] заключается в нахождении полинома наилучшего приближения. Рассмотрим эту задачу при наличии ограничений на коэффициенты полинома.

2. Постановка задачи. Пусть задана таблица значений некоторой функции

$$y_k = y(t_k), \quad k \in [0, N],$$

где значения аргумента (узлы) упорядочены по возрастанию

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N.$$

Рассмотрим случай, когда $N > n$. Задача заключается в том, чтобы найти такой полином $P_n(A^*, t_k)$, который удовлетворяет условию

$$F(A^*) = \min_{A \in \Omega} F(A),$$

где $A = (a_0, \dots, a_n)^T \in R^{n+1}$, $F(A) = \max_{k \in [0, N]} |f(A, t_k)|$,

$$f(A, t_k) = P_n(A, t_k) - y_k, \\ P_n(A, t_k) = a_0 + a_1 t_k + \dots + a_n t_k^n,$$

при условии, что на вектор A наложены ограничения

$$\Omega = \left\{ A \in R^{n+1} \mid \|A\|^2 = \sum_{i \in [0, n]} a_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Шуляк Анастасия Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nastasha2006@mail.ru, тел.: +7(921)317-99-80

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 12-01-00752, № 14-01-31521 мол_a

3. Решение задачи. С помощью теории точных штрафов осуществим переход к задаче безусловной минимизации и выведем необходимое и достаточное условие минимума для новой функции.

3.1. Теоретическая часть. Рассмотрим точную штрафную функцию [2, 3]

$$\Phi_\lambda(A) = F(A) + \lambda\varphi(A), \quad (1)$$

$$\text{где } \varphi(A) = \max \left\{ \sum_{i \in [0, n]} a_i^2 - 1, 0 \right\}.$$

Поставленная задача условной минимизации функции F при достаточно больших λ эквивалентна задаче безусловной минимизации функции $\Phi_\lambda(A)$. Для того, чтобы решить эту задачу воспользуемся субдифференциальным исчислением [4].

Функции $F(A)$ и $\varphi(A)$ субдифференцируемы, так как являются функциями максимума гладких функций. Субдифференциал точной штрафной функции $\Phi_\lambda(A)$ имеет вид $\underline{\partial}\Phi_\lambda(A) = \underline{\partial}F(A) + \lambda\underline{\partial}\varphi$, где

$$\underline{\partial}\varphi(A) = \begin{cases} \{0_{n+1}\}, & \text{если } \sum_{i \in [0, n]} a_i^2 - 1 < 0, \\ \text{co} \{2(a_0, \dots, a_n)^T, 0_{n+1}\}, & \text{если } \sum_{i \in [0, n]} a_i^2 - 1 = 0, \\ \{2(a_0, \dots, a_n)^T\}, & \text{если } \sum_{i \in [0, n]} a_i^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

Построим субдифференциал функции $F(A)$. Для этого сделаем следующие преобразования

$$F(A) = \max \left\{ f(A, t_0), -f(A, t_0), \dots, f(A, t_N), -f(A, t_N) \right\}.$$

Введем вспомогательные функции

$$\begin{cases} \theta_{2k+1}(A, t_k) = f(A, t_k), \\ \theta_{2k+2}(A, t_k) = -f(A, t_k), \end{cases} \quad \forall k \in [0, N].$$

В итоге субдифференциал функции $F(A)$ будет иметь вид

$$\underline{\partial}F(A) = \text{co} \left\{ \sigma_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} T_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \mid k \in R(A) \right\},$$

где $\sigma_j = \text{sign } f(A, t_j)$, $T_j = (1, t_j, \dots, t_j^m)^T$, $j \in [0, N]$, $[m]$ — целая часть числа m ,

$$R(A) = \{k \in [1, 2N + 2] \mid \theta_k(A, t_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}) = F(A)\}.$$

Так как рассматриваемая функция $\Phi_\lambda(A)$ выпуклая, то необходимое и достаточное условие минимума имеет вид [4]

$$0_{n+1} \in \underline{\partial}\Phi_\lambda(A^*). \quad (2)$$

Применяя теорему Каратеодори [4], преобразуем условие минимума (2) для каждого вида $\underline{\partial}\varphi(A)$.

1. Пусть $\sum_{i \in [0, n]} a_i^2 - 1 < 0$, тогда $\underline{\partial}\varphi(A) = \{0_{n+1}\}$. Будем искать решение, которое удовлетворяет условиям:

$$\sum_{k \in J} \sigma_k \alpha_k T_k = 0_{n+1}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k \in J} \alpha_k = 1,$$

где $J \subset R(A)$, $|J| \leq n + 2$.

2. Пусть $\sum_{i \in [0, n]} a_i^2 - 1 = 0$, тогда $\underline{\partial}\varphi(A) = \text{co}\{2(a_0, \dots, a_n)^T, 0_{n+1}\}$.

Ищем решение, которое удовлетворяет условиям:

$$\sum_{k \in J} \sigma_k \alpha_k T_k + \mu A = 0_{n+1}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k \in J} \alpha_k = 1,$$

здесь $\mu \in [0, 2\lambda]$, $J \subset R(A)$, $|J| \leq n + 2$.

3. Пусть $\sum_{i \in [0, n]} a_i^2 - 1 > 0$, тогда $\underline{\partial}\varphi(A) = 2(a_0, \dots, a_n)^T$. В итоге получаем

$$\sum_{k \in J} \sigma_k \alpha_k T_k + 2\lambda A = 0_{n+1}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k \in J} \alpha_k = 1,$$

где $J \subset R(A)$, $|J| \leq n + 2$.

Утверждение. *Необходимое и достаточное условие минимума (2) эквивалентно выполнению условия:*

$$\min_{V \in \underline{\partial}\Phi_\lambda(A_0)} \|V\|^2 = \|V_0\|^2 = 0.$$

Здесь $\|V_0\|$ является минимальным расстоянием от $\underline{\partial}\Phi_\lambda(A_0)$ до вектора 0_{n+1} . Если оно равно нулю, то начало координат принадлежит субдифференциалу нашей функции.

3.2. Численная реализация. Для решения задачи минимизации функции (1) используем алгоритм:

1. Выбираем произвольную начальную точку A_0 . Пусть найдена точка A_k . Решаем задачу минимизации $\min_{V \in \partial \Phi_\lambda(A_k)} \|V\|^2 = \|V_k\|^2$ и находим $\|V_k\|$ с помощью метода условного градиента. Если $\|V_k\| < \varepsilon$ при заданном ε , то останавливаемся.
2. Если $\|V_k\| > \varepsilon$, то строим направлением наискорейшего спуска $g_k = -\frac{V_k}{\|V_k\|}$.
3. Решаем задачу одномерной минимизации $\min_{\gamma \geq 0} \Phi_\lambda(A_k + \gamma g_k) = \Phi_\lambda(A_k + \gamma_k g_k)$. Получаем точку $A_{k+1} = A_k + \gamma_k g_k$.

Вычисления проведены в пакете MATLAB. Требуется построить квадратичную аппроксимацию, т. е. $n = 2$. Зафиксируем $\varepsilon = 10^{-4}$, $\lambda = 30$. В качестве начальной точки выберем $A_0 = (0, 0, 0)^T$.

Пример 1. Пусть заданы узлы $(-1, 2)$, $(0, -1)$ и $(1, 2)$. На выходе программы получаем точку $A^* = (0, 0, 1)^T$, в которой выполняется необходимое и достаточное условие минимума (2).

В итоге получили полином наилучшего приближения за 2 шага (см. рис. 1):

$$P_2(A^*, t) = t^2.$$

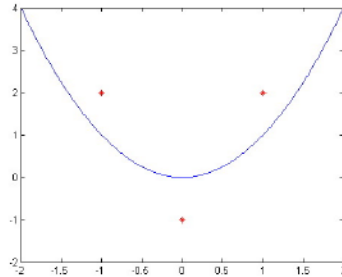


Рис. 1. Узлы аппроксимации и полином наилучшего приближения

Пример 2. Пусть заданы узлы $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ и $(4, -1)$. На 37-ом шаге получаем оптимальное решение (см. рис. 2):

$$P_2(A^*, t) = 0,5062 + 0,8399t - 0,1957t^2.$$

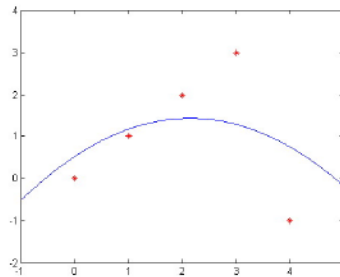


Рис. 2. Узлы аппроксимации и полином наилучшего приближения

4. Заключение. С помощью субдифференциального исчисления и метода точных штрафных функций получено необходимое и достаточное условие минимума задачи чебышевской аппроксимации при наличии ограничений. Также разработан алгоритм решения поставленной задачи и проведена его численная реализация.

Литература

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
2. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
3. Шуляк А. С. Задача чебышевской аппроксимации при наличии ограничений // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 100–103.
4. Демьянов В. Ф., Васильев П. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 385 с.

UDK 517.929.4

Shayakhmetova L. V.

Stabilization problem for a scalar equation with one state and two input delays

Recommended for publication by Prof. Kharitonov V. L.

1. Introduction. Stabilization of systems with input delay remains an actual problem despite of numerous papers dedicated to this problem because there are only few ones like [1] by A. Manitius and A. Olbrot, [2] by N. Bekiaris-Liberis and M. Krstic, [3] by V.L. Kharitonov, that deal with systems with simultaneous input and state delay. In this paper we present the case of a scalar equation with both two input and state delays.

In Section 2 the stabilization problem is stated and the exponential stability domain in the coefficients space for the considering equation is described. In Section 3 by the Cauchy formula we derive the stabilizing control law of the form of an integral equation. In Section 4 we study the characteristic function of the closed-loop system. It is shown that characteristic function consists of two multipliers. A condition on coefficients of the control law demanded for a negativity of real parts of the additional multiplier roots is obtained. An illustrative example is given in Section 5.

2. Problem formulation. Given a time-delay scalar equation of the form

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_0x(t) + a_1x(t-h) + b_1u(t-\tau_1) + b_2u(t-\tau_2), \quad (1)$$

where a_0, a_1, b_1, b_2 are real constants, and delays satisfy the inequalities

$$0 < h \leq \tau_1 < \tau_2. \quad (2)$$

Let $t_0 \geq 0$ be an initial time instant, and $\varphi : [-h, 0] \rightarrow R^n$ be an initial function. We assume that φ belongs to the space of piece-wise continuous functions defined on the segment $[-h, 0]$. Let $x(t, t_0, \varphi)$ stand for the solution of system (1) under the initial conditions $x(t_0 + \theta, t_0, \varphi) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Henceforth we write $x(t)$ instead of $x(t, t_0, \varphi)$.

Liliya V. Shayakhmetova – student, St.Petersburg State University; e-mail: lilia.v.shayakhmetova@gmail.com, phone: +7(953)345-12-23

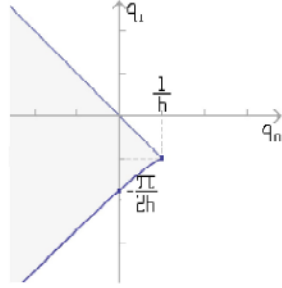


Fig. 1. The exponential stability domain

$$\frac{dx(t)}{dt} = (a_0 + f_0)x(t) + (a_1 + f_1)x(t - h) \quad (4)$$

is exponentially stable. The characteristic function of (4) has the form

$$q(s) = s - (a_0 + f_0) - (a_1 + f_1)e^{-sh}. \quad (5)$$

The problem is to find a control law such that equation (1) for $t \geq \tau_2$ coincides with (4). This problem can be solved, if we find the control law that satisfies the equality

$$b_1 u(t - \tau_1) + b_2 u(t - \tau_2) = f_0 x(t) + f_1 x(t - h), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

3. Fundamental solution. Cauchy formula. The key element needed to derive an explicit expression for the solution of equation (1) is the fundamental solution.

Definition. A function $k(t)$ is the fundamental solution of the system (1) if it satisfies the equation $\frac{dk(t)}{dt} = a_0 k(t) + a_1 k(t - h)$, $t \geq 0$, and initial conditions $k(t) = 0$ for $t < 0$, $k(0) = 1$.

For $\sigma \geq 0$ a solution of the equation (1) at the instant $t + \sigma$ is defined by the Cauchy formula [4, 6]

$$x(t + \sigma) = k(\sigma)x(t) + \int_{-h}^0 k(\sigma - \theta - h)a_1 x(t + \theta)d\theta \quad (7)$$

$$+ \int_t^{t+\sigma} k(t + \sigma - \xi)b_1 u(\xi - \tau_1)d\xi + \int_t^{t+\sigma} k(t + \sigma - \xi)b_2 u(\xi - \tau_2)d\xi, \quad t \geq 0.$$

We consider the equation of the form

$$\frac{dx(t)}{dt} = q_0 x(t) + q_1 x(t - h). \quad (3)$$

According to the D-division method the equation (3) is exponentially stable if the coefficient vector (q_0, q_1) lies in the domain shown on the Fig. 1 [4, 5].

Let the point (a_0, a_1) does not lie in the domain. We consider another point $(a_0 + f_0, a_1 + f_1)$ from the domain. Therefore, the equation

The equality (6) for the control law can be written as

$$b_1 u(t) + b_2 u(t + \tau_1 - \tau_2) = f_0 x(t + \tau_1) + f_1 x(t + \tau_1 - h). \quad (8)$$

Based on the Cauchy formula (7) and inequalities (2) we can find expressions for the right hand side of the equality (8):

$$\begin{aligned} b_1 u(t) + b_2 u(t + \tau_1 - \tau_2) &= (f_0 k(\tau_1) + f_1 k(\tau_1 - h))x(t) \quad (9) \\ + f_0 \int_{-\tau_1}^0 k(-\varphi) b_1 u(t + \varphi) d\varphi &+ f_1 \int_{-\tau_2}^{\tau_1 - \tau_2 - h} k(\tau_1 - \tau_2 - h - \gamma) b_2 u(t + \gamma) d\gamma \\ + f_0 \int_{-\tau_2}^{\tau_1 - \tau_2} k(\tau_1 - \tau_2 - \gamma) b_2 u(t + \gamma) d\gamma &+ f_1 \int_{-\tau_1}^{-h} k(-h - \varphi) b_1 u(t + \varphi) d\varphi \\ + f_0 \int_{-h}^0 k(\tau_1 - \theta - h) a_1 x(t + \theta) d\theta &+ f_1 \int_{-h}^0 k(\tau_1 - \theta - 2h) a_1 x(t + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

4. Characteristic equation. We need to make sure that control law (9) solves the given problem, i.e. the equation (1) under this control for $t \geq \tau_2$ coincides with (4).

To simplify our computation we make an additional restriction for the delays, namely,

$$0 < h \leq \tau_1 < \tau_2 \leq 2h, \quad (10)$$

and compute the fundamental solution of the equation (1) for $t \in [0, 2h]$:

$$k(t) = \begin{cases} e^{a_0 t}, & \text{for } t \in [0, h], \\ e^{a_0 t} + a_1 e^{a_0(t-h)}(t-h), & \text{for } t \in [h, 2h]. \end{cases} \quad (11)$$

Substituting (11) into (9) we obtain the control law that is described by an integral equation

$$\begin{aligned} b_1 u(t) + b_2 u(t + \tau_1 - \tau_2) &= [f_0 e^{a_0 \tau_1} + e^{a_0(\tau_1 - h)}(f_0 a_1(\tau_1 - h) \\ + f_1)]x(t) &+ b_1 \int_{-\tau_1}^{-h} e^{a_0(-\varphi - h)}(f_0 a_1(-\varphi - h) + f_1)u(t + \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& + f_0 b_1 \int_{-\tau_1}^0 e^{-a_0 \varphi} u(t + \varphi) d\varphi + f_0 b_2 \int_{-\tau_2}^{\tau_1 - \tau_2} e^{a_0(\tau_1 - \tau_2 - \gamma)} u(t + \gamma) d\gamma \\
& + b_2 \int_{-\tau_2}^{\tau_1 - \tau_2 - h} e^{a_0(\tau_1 - \tau_2 - h - \gamma)} (f_0 a_1 (\tau_1 - \tau_2 - h - \gamma) + f_1) u(t + \gamma) d\gamma \\
& + a_1 \int_{-h}^{\tau_1 - 2h} e^{a_0(\tau_1 - 2h - \theta)} (f_0 a_1 (\tau_1 - 2h - \theta) + f_1) x(t + \theta) d\theta \\
& + f_0 a_1 \int_{-h}^0 e^{a_0(\tau_1 - h - \theta)} x(t + \theta) d\theta.
\end{aligned}$$

By straightforward computation one can verify that for the control law (12) the characteristic function of the closed-loop system is of the form

$$\bar{q}(s) = (b_1 + b_2 e^{-s(\tau_2 - \tau_1)}) (s - (a_0 + f_0) - (a_1 + f_1) e^{-sh}). \quad (13)$$

Comparing (5) and (13) we note the multiplier $(b_1 + b_2 e^{-s(\tau_2 - \tau_1)})$. Therefore, the additional condition for this multiplier is needed for the exponential stability of the closed-loop system (1), (9).

Let $\zeta = \tau_2 - \tau_1$. It follows from (10) that $\zeta > 0$. Let $s = x + iy$, then all solutions of the equation $e^{s\zeta} = -\frac{b_2}{b_1}$ lie on the line $x = \frac{1}{\zeta} \ln \left| \frac{b_2}{b_1} \right|$, which is parallel to the imaginary axis. Since $\zeta > 0$, then for $x < 0$ we need $\ln \left| \frac{b_2}{b_1} \right| < 0$. We arrive at the following inequality for the coefficients of the control law (12):

$$|b_2| < |b_1|. \quad (14)$$

5. Example. We consider the time-delay equation of the form

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t-1) + u(t-1.5) + 0.5u(t-1.8). \quad (15)$$

One can see that inequalities (10), (14) for the delays and coefficients b_1, b_2 , respectively, hold, and the point $(0, 1)$ does not lie in the exponential stability domain, see Fig. 1. Let $f_0 = -1, f_1 = -1$, so

the point $(-1, 0)$ satisfies the exponential stability condition, and the equality (6) for the equation (15) has the form

$$u(t) + 0.5u(t - 0.3) = -x(t + 1.5) - x(t + 0.5).$$

The fundamental solution of the equation (15):

$$k(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } t \in [0, 1], \\ t, & \text{for } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

We obtain the following control law:

$$\begin{aligned} u(t) + 0.5u(t - 0.3) = & 0.5 \int_{-1.8}^{-1.3} \gamma u(t + \gamma) d\gamma + \int_{-1.5}^{-1} \varphi u(t + \varphi) d\varphi \quad (16) \\ & + 0.15 \int_{-1.8}^{-1.3} u(t + \gamma) d\gamma - 0.5 \int_{-1.8}^{-0.3} u(t + \gamma) d\gamma - \int_{-1.5}^0 u(t + \varphi) d\varphi \\ & - 2.5x(t) + \int_{-1}^{-1.5} \theta x(t + \theta) d\theta - 0.5 \int_{-1}^{-0.5} x(t + \theta) d\theta - \int_{-1}^0 x(t + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Since the closed-loop system (15), (16) is exponentially stable, all eigenvalues of the characteristic function $q_1(s) = (1 + 0.5e^{-0.3s})(s - e^{-s})$ of the closed-loop system have a negative real part.

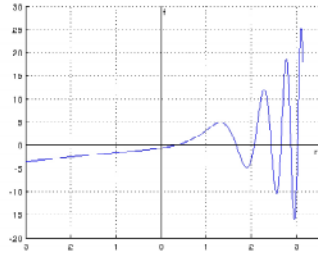


Fig. 2. Plot of the function $f(r)$

We define a distance between the imaginary axis and the nearest to it root of the characteristic equation. Function $q_1(s)$ consists of two multipliers, so we define the minimal distance for roots of the first multiplier, then for the second one. All roots of the equation $1 + 0.5e^{-0.3s} = 0$ lie on the line, which is parallel to the imaginary axis and located on the distance $r_1 = \frac{10}{3} \ln 2$ from it.

Now we consider the equation $s - e^{-s} = 0$. Let $s = z - r$, $r > 0$. Then $z^* = i\omega$ for the nearest to the imaginary axis root s^* , $Re(s^*) < 0$. We

arrive at equalities $r - e^r \cos \omega = 0$, $\omega + e^r \sin \omega = 0$. If we square both equalities, sum them, derive ω from the obtained equation and substitute it in the first equality, we will arrive at $r - e^r \cos(\sqrt{e^{2r} - r^2}) = 0$. The plot of the function $f(r) = r - e^r \cos(\sqrt{e^{2r} - r^2})$ is shown on Fig. 2. The intersection points of the plot of the function $f(r)$ with the $0r$ axis are solutions of the derived equation. The smallest one is $r_2 \approx 0.318131505204764$.

Therefore, since $r_1 > r_2$, the nearest to the imaginary axis root of the characteristic equation of the closed-loop system (15), (16) is located on the distance $r_2 \approx 0.318131505204764$ from it.

6. Conclusion. In this contribution a stabilizing control law is derived for the case of the scalar equation (1) with one state and two input delays. It is shown that this control law is described by an integral equation (9). An additional condition on coefficients of the control law demanded for the exponential stability of the closed-loop system is obtained.

References

1. Manitius A., Olbrot A. Finite spectrum assignment problem for system with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24, No 4. P. 541–553.
2. Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Stabilization of linear strict-feedback systems with delayed integrators // Automatica. 2010. Vol. 46, No 11. P. 1902–1910.
3. Kharitonov V. L. An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay // Automatica. 2014. Vol. 50, No 1. P. 211–217.
4. Bellman R. E., Cooke K. L. Differential Difference Equations. New York: Academic Press, 1963. 461 p.
5. Elsgolts L. E., Norkin S. B. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. Moscow: Science, 1973. 357 p.
6. Kharitonov V. L. Time-Delay Systems. Boston: Birkhäuser Boston, 2013. 311 p.

UDK 517.929.4

Zgonnikov A. V., Lubashevsky I. A.

Optimal feedback approximation of human open-loop control in virtual stick balancing

Recommended for publication by Prof. Smirnov N. V.

1. Introduction. Virtual stick balancing is often employed in studies on human control as a paradigmatic example of human-controlled processes [1, 2]. Understanding mechanisms of human control in this seemingly simple task may eventually enable us to better understand how humans control more complex entities [3]. The present study is devoted to analytical derivation of the formal law describing human control behavior in virtual stick balancing based on the assumption of rational, optimally acting operator.

The dynamics of the overdamped inverted pendulum controlled by a human operator can be described [2] by the equation

$$\tau\dot{\theta} = \theta - \frac{\tau}{l}v, \quad (1)$$

where θ is the angular deviation of the pendulum from the vertical axis, v is the velocity of the stick base controlled directly by the operator. Constant parameters τ and l characterize the physical properties of the stick and the environment.

2. Rational operator. As a zeroth-order approximation, we assume that the stick operator is perfectly rational, i.e., acts optimally in maintaining the stick upwards. The “quality” of the current state of the system in its motion near the equilibrium $v = 0$ and $\theta = 0$ is assumed to be measured by the function

$$F(v, \dot{v}, \theta) = \frac{\tau^2}{2l^2} (v^2 + \tau_m^2 \dot{v}^2) + \frac{\theta^2}{2\theta_m^2} \quad (2)$$

Here τ_m is the time scale specifying the relative weight of the cart acceleration \dot{v} in its contribution to the measure of the operator efforts in controlling the system dynamics. The coefficient θ_m has been introduced

Arkady V. Zgonnikov – PhD student, University of Aizu, Japan; e-mail: d8132101@u-aizu.ac.jp

to compare the efforts of the operator actions and the system deviation from the desired equilibrium.

A possible course of the future operator actions aimed at returning the system from the current state $v = 0$, $\theta(t) = \theta_0$ to the desired equilibrium $v = 0$, $\theta = 0$ is represented as a trial time dependence $v(t')$ for $t' \geq t$ of the cart motion. The integral measure of a given operator actions can be expressed as

$$\mathcal{F}\{v\} = \int_t^\infty \left[\frac{\tau^2}{2l^2} (v^2 + \tau_m^2 \dot{v}^2) + \frac{\theta^2}{2\theta_m^2} \right] dt' \quad (3)$$

where for a given $v(t')$ the time dependence $\theta(t')$ of the stick angle is determined by Eq. (1). Integral (3) quantifies the priority of possible operator actions. Assuming the operator to be strictly rational, i.e. able to predict and measure all the characteristics of system dynamics perfectly, the optimal control law can be found by solving the optimization problem

$$v_{\text{opt}} := \min_{v\{t'\}} \mathcal{F}\{v\} \quad (4)$$

subject to the system dynamics equation (1) and the initial and terminal conditions

$$v(t) = 0, \quad \theta(t) = \theta_0, \quad v(\infty) = 0, \quad \theta(\infty) = 0.$$

Problem (4) is reduced to a standard variational problem using the technique of Lagrange multipliers, namely,

$$v_{\text{opt}} := \min_{v\{t'\}, \theta\{t'\}, \mu\{t'\}} \int_t^\infty F_L(v, \dot{v}, \theta, \dot{\theta}, \mu) dt' \quad (5)$$

where

$$F_L(v, \dot{v}, \theta, \dot{\theta}, \mu) = F(v, \dot{v}, \theta) + \mu \left[\tau \dot{\theta} - \theta + \frac{\tau}{l} v \right] dt'. \quad (6)$$

The problem (5) is subjected to the same initial and terminal conditions. The main advantage of problem (5) is the possibility of treating the trial functions $v(t')$, $\theta(t')$, and $\mu(t')$ as independent variables. At the next step the Lagrange equation

$$\frac{\partial F_L}{\partial q} - \frac{d}{dt'} \frac{\partial F_L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{for } q = v, \theta, \mu$$

gives us the desired equations determining the optimal operator actions

$$\tau_m^2 \ddot{v} = v + \frac{l}{\tau} \mu, \quad (7a)$$

$$\tau \dot{\mu} = \frac{1}{\theta_m^2} \theta - \mu, \quad (7b)$$

$$\tau \dot{\theta} = \theta - \frac{\tau}{l} v. \quad (7c)$$

Assuming the time dependence of these variables to be of the form $e^{\lambda t'}$, the eigenvalue equation for the linear system (7) reads

$$(\tau_m^2 \lambda^2 - 1)(\tau^2 \lambda^2 - 1) = -\frac{1}{\theta_m^2}. \quad (8)$$

Equation (8) possesses the set of four roots specified by the expression

$$\lambda^2 = \frac{1}{2\tau_m^2 \tau^2} \left\{ (\tau_m^2 + \tau^2) \pm i \left[\frac{4\tau_m^2 \tau^2}{\theta_m^2} - (\tau_m^2 - \tau^2)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (9)$$

The time scales τ and τ_m characterize different aspects of the stick balancing. The former describes the stick fall without human control, whereas the latter characterizes the duration of open-loop fragments. As indicated by the experiments [2], both of them are of the same order. The parameter θ_m estimates the stick angles regarded by the operator as large enough to correct the stick position immediately. Keeping in mind the two comments we assume that

$$\tau_m \sim \tau \quad \text{and} \quad \theta_m \ll 1, \quad (10)$$

which enables us to simplify Exp. (9) and write

$$\lambda^2 \approx \pm \frac{i}{\tau \tau_m \theta_m}. \quad (11)$$

It immediately follows that the first couple of the eigenvalues $\lambda_{1,2}$, i.e., roots of Eq. (8) with negative real component, $\text{Re } \lambda < 0$, are specified by the expression

$$\lambda_{1,2} \approx \frac{1}{(2\theta_m \tau_m \tau)^{1/2}} (-1 \pm i). \quad (12)$$

The second couple of the eigenvalues $\lambda_{3,4}$ for which $\text{Re } \lambda > 0$ is

$$\lambda_{3,4} \approx \frac{1}{(2\theta_m \tau_m \tau)^{1/2}} (1 \pm i). \quad (13)$$

Using expressions (12), (13) and the governing equations (7), we can construct the eigenvectors for the given eigenvalues $\lambda_{1,2,3,4}$, which finalize the general analysis of all the possible extremals of functional (2) subject to the governing equation of the stick dynamics (1).

Within the accepted model the terminal conditions enable us to exclude from consideration the eigenvectors matching the eigenvalues $\lambda_{3,4}$ due to $\text{Re } \lambda_{3,4} > 0$. The exclusion of the eigenvalues $\lambda_{3,4}$ from consideration reduces the original temporal boundary value problem to a certain initial value problem. Indeed, now we can construct the desired solution using only the information about the system current state, $v(t) = 0$ and $\theta(t) = \theta_0$. In the case at hand the system dynamics is characterized only by two different eigenvalues $\lambda_{1,2}$ and their imaginary components are not equal to zero, $\text{Im } \lambda_{1,2} \neq 0$. Therefore the operator optimal actions $v_{\text{opt}}(t')$ ($t' > t$) can be described in terms of a certain dynamical system involving two variables v and θ and being irreducible to two independent one-dimensional systems. Let us represent the desired dynamical system in the form

$$\tau \dot{\theta} = \theta - \frac{\tau}{l} v, \quad (14a)$$

$$\tau_m \dot{v} = \frac{l}{\tau} \frac{\gamma_e}{\theta_m} \theta - \sigma_e v. \quad (14b)$$

Equation (14a) is inherited from the original problem (1) whereas Eq. (14b) is of the general form because the coefficients γ_e and σ_e are not determined yet. System (14) equivalently describes the operator optimal actions, provided that it possesses the same collection of eigenvalues, $\lambda_{1,2}$. The latter requirement immediately yields

$$\gamma_e \approx 1 \quad \text{and} \quad \sigma_e \approx \sqrt{\frac{2}{\theta_m} \frac{\tau_m}{\tau}}. \quad (15)$$

within condition (10). The solution of system (14) with the coefficients given by expression (15) and the initial conditions $v(t) = 0$ and $\theta(t) = \theta_0$ describes the operator optimal actions $v_{\text{opt}}(t')$ in the context of the optimization problem (4).

The system (14) can be treated as the equations governing the operator actions during the open-loop control fragments. In fact, it does not matter whether the strictly rational operator initially chooses the optimal strategy of the cart motion $v_{\text{opt}}(t')$ for $t' > t$ and then starts its implementation without further corrections or corrects the cart motion continuously. In both the cases the result is the same. Whence it follows, in particular, that the active operator behavior extends the system phase space increasing the number of phase variables. Namely, the phase space $\{\theta, v\}$ allowing for the operator actions comprises the angle θ between the stick and its upright position as well as the car velocity v as independent phase variables. At the same time, without the operator active behavior the over-damped stick dynamics is completely described within the one-dimensional phase space $\{\theta\}$.

In terms of the dimensionless variables u, t

$$u = \frac{\tau}{l}v \quad \text{and} \quad t \rightarrow \frac{t}{\tau} \quad (16)$$

the system (14) becomes

$$\dot{\theta} = \theta - u, \quad (17a)$$

$$\dot{u} = \gamma\theta - \sigma u, \quad (17b)$$

where the coefficients γ and σ are given by the expressions

$$\gamma = \frac{\tau}{\theta_m \tau_m} \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{2\gamma}. \quad (18)$$

3. Non-rational operator. Based on the derived control law of the perfectly rational operator (17), we construct the control law of the operator biased by the tendency to halt the active control over the system, e.g., due to the energy considerations [2]. The latter effect is reflected by the cofactor $\Omega(u) = \frac{u^2}{u^2 + \eta^2}$, where η is some constant parameter. The stochastic effects are captured by the white noise cofactor with constant amplitude, $\varepsilon\xi$. Finally, the model of the stick balancing by the human operator reads

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \theta - u, \\ \dot{u} &= \frac{u^2}{u^2 + \eta^2}(\gamma\theta - \sigma u) + \varepsilon\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

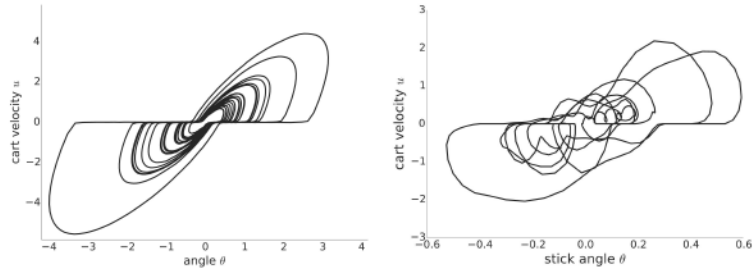



Figure 1. Left frame: phase trajectory generated by model (19) for parameter values $\gamma = 4.2$, $\sigma = 2.5$, $\eta = 0.09$, $\varepsilon = 0.03$. Right frame: phase trajectory produced by a human subject [2].

In Fig. 1 we compare the trajectory generated by the model to the experimentally obtained trajectory [2]. As one may observe, the model can capture the basic control pattern exhibited by the human subject.

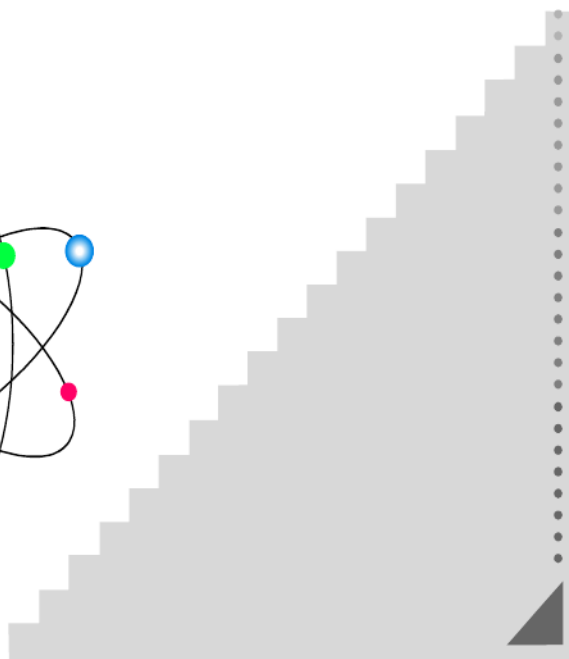
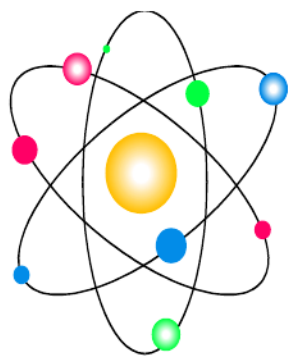
4. Conclusion. Based on the assumptions of the optimality of the operator's actions, we analytically derived the control law characterizing the actions of the human operator in virtual balancing of overdamped stick. The model using the derived control law was modified to account for the non-rational motives of the operator. The resulting model was compared to the previously obtained experimental data. The results demonstrate that the actions of the operator in the active control phase can be well approximated by the linear feedback optimizing certain cost function.

References

1. Bormann R., Cabrera J.-L., Milton J. G., et al. Visuomotor tracking on a computer screen—an experimental paradigm to study the dynamics of motor control // *Neurocomputing*. 2004. No 58, P. 517–523.
2. Zgonnikov A., Lubashevsky I., Kanemoto S., et al. To react or not to react? Intrinsic stochasticity of human control in virtual stick balancing // *arXiv: 1402.3022*, 2014. 18 p.
3. Wickens C. D., Hollands J. G. *Engineering psychology and human performance*. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 573 p.



*2. Математические
методы в механике и
физике*



УДК 577.3

Абдулина К. А., Старков В. Н.

Качественное исследование динамики лесной системы с учетом вырубki и вывоза

Лесные системы представляют собой сложнейшую совокупность взаимодействующих популяций, в частности, вредителей и деревьев. Вредители вызывают массовые повреждения деревьев. В результате снижается прирост и плодоношение растений, нарушаются возобновление и рост. Насекомые «портят» также и древесину срубленных деревьев, сложенных в штабеля.

Взаимодействие насекомых с деревьями описывается моделью, выражающей встречу «хищника» и «жертвы», т. е. на основе уравнений Лотки — Вольтерра [1].

Популяцию деревьев разобьем на два класса: живые (растущие) $G(t)$ и срубленные $M(t)$, добавив слагаемые, отвечающие за естественное влияние насекомых на биомассу леса. Модель с присутствием насекомых $N(t)$, повреждающих как живые, так и срубленные деревья, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = -\rho G - k_1 GN + h, \\ \frac{dM}{dt} = \rho G - k_2 MN - w, \\ \frac{dN}{dt} = -k_3 N + k_1 GN + k_2 MN - k_4 N^2, \end{cases} \quad (1)$$

где $-\rho G$ означает вырубку деревьев, $-k_1 GN$ — уничтожение живых деревьев насекомыми, h — посадка деревьев, $-k_2 MN$ — влияние насекомых на срубленные деревья, w — вывоз срубленных деревьев, $-k_3 N$ представляет собой смертность насекомых (естественную и искусственную), $-k_4 N^2$ означает конкуренцию среди насекомых.

Найдем стационарные точки системы, полагая правые части системы уравнений (1), равными нулю.

Обозначив $\Delta = \sqrt{k_3^2 + 4k_4(h-w)}$, выпишем решение

Абдулина Ксения Андреевна — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ksenya.abdulina@gmail.com, тел.: +7(905)231-97-34

Старков Владимир Николаевич — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vlad.stark@yandex.ru, тел.: +7(921)799-54-47

$$N_0 = \frac{\Delta - k_3}{2k_4}, \quad G_0 = \frac{2hk_4}{2\rho k_4 + k_1(\Delta - k_3)},$$

$$M_0 = \frac{2k_4(2\rho h k_4 - w(2\rho k_4 + k_1 k_3 - k_1 \Delta))}{k_2(\Delta - k_3)(2\rho k_4 - k_1 k_3 + k_1 \Delta)}.$$

Решая систему (1) при некотором наборе коэффициентов и начальных условий, выясним динамику популяций в лесной системе. Кроме того, рассмотрим расстояние от текущей точки фазового пространства (G, M, N) до точки покоя системы:

$$R = (G - G_0)^2 + (M - M_0)^2 + (N - N_0)^2.$$

Если расстояние увеличивается, то точка покоя не является устойчивой. Если расстояние убывает, то точка покоя устойчива.

Было рассмотрено несколько вариантов воздействия и построены соответствующие графики с помощью математического пакета Maple [2].

Случай, когда срубленные деревья вывозят, т. е. когда $w = const$, представлен на рис. 1.

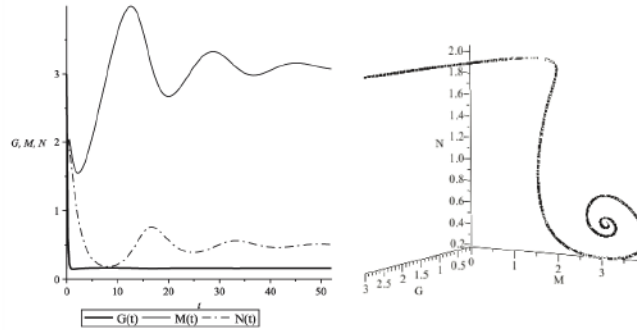


Рис. 1. Слева — динамика популяции деревьев (живых и срубленных) и насекомых при постоянном вывозе, справа — фазовая траектория системы

Видим, что лесная система стремится к точке покоя (G_0, M_0, N_0) .

В ряде случаев параметры системы не остаются неизменными, а являются некоторыми заданными функциями времени. Если нарушить состояние равновесия системы, то возникнут своеобразные колебания. С одной стороны, их нельзя назвать свободными, поскольку

система неавтономна и испытывает заданное внешнее воздействие в виде изменения параметра, а с другой стороны, они не являются вынужденными, так как внешнее воздействие не проявляется в виде заданной силы. Эти колебания называются параметрическими.

Исследуем динамику системы в случае изменения коэффициентов. Будем решать систему уравнений (1), подвергая коэффициенты ρ (коэффициент вырубki), w (вывоз срубленных деревьев) и k_3 (коэффициент смертности насекомых) ступенчатому изменению, моделируемому с помощью функции Хевисайда (рис. 2).

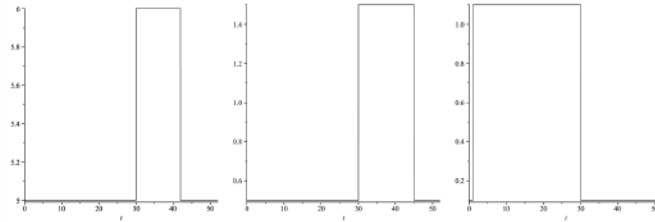


Рис. 2. Пример ступенчатых изменений коэффициентов вырубki деревьев (слева) $\rho(t) = 5 + 3(\eta(t - 30) - \eta(t - 42))$, вывоза деревьев (в центре) $w(t) = 0,5 + (\eta(t - 30) - \eta(t - 45))$ и смертности насекомых (справа) $k_3 = 0,1 + (\eta(t - 1) - \eta(t - 30))$

Исследуем влияние коэффициентов, меняя их последовательно.

Сначала рассмотрим влияние коэффициента вырубki при постоянных остальных коэффициентах. Далее рассмотрим влияние коэффициента вывоза и коэффициента смертности насекомых. В последнем случае рассмотрим влияние всех трех коэффициентов.

В первом случае график динамики популяции деревьев и насекомых, а также фазовая траектория системы будет иметь вид, представленный на рис. 3.

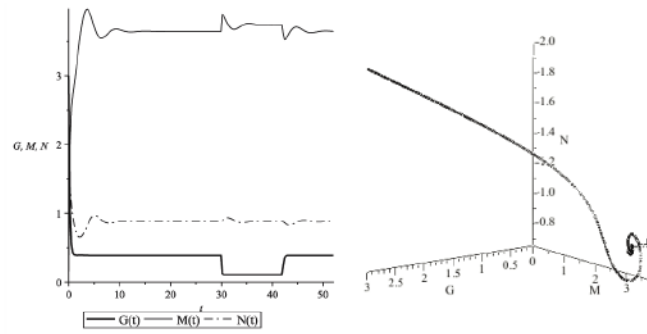


Рис. 3. Слева — динамика популяции деревьев обоих видов и насекомых при сезонной вырубке, справа — фазовая траектория системы

Теперь будем изменять коэффициент вывоза деревьев w . Результаты представлены на рис. 4.

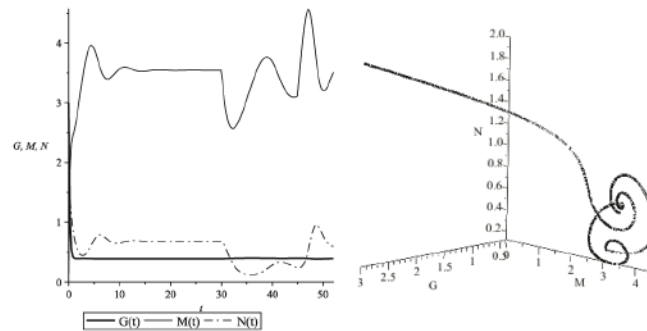


Рис. 4. Слева — динамика популяции деревьев обоих видов и насекомых при наличии сезонного вывоза, справа — фазовая траектория системы

Рассмотрим случай, когда изменению подвергается коэффициент k_3 смертности насекомых. Результаты влияния данного изменения представлены на рис. 5.

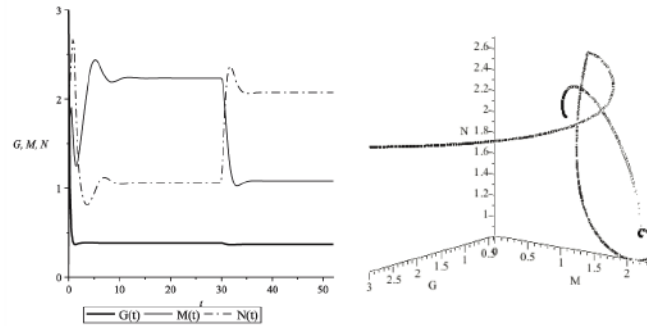


Рис. 5. Слева — влияние ступенчатого изменения коэффициента смертности насекомых, справа — фазовая траектория системы
Влияние изменения всех трех параметров представлено на рис. 6.

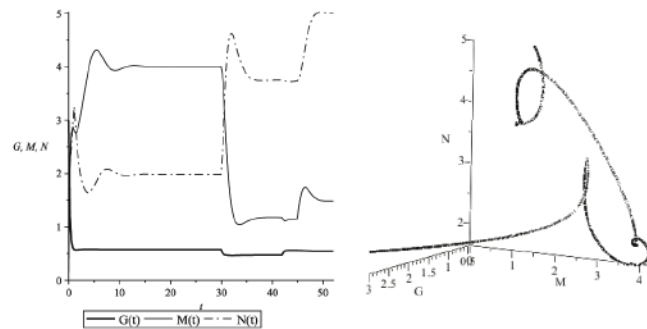


Рис. 6. Слева — динамика популяции деревьев и насекомых при воздействии изменения трех коэффициентов, справа — фазовая траектория системы
Видим, что во всех случаях лесная система с учетом двух типов деревьев и наличия вредителей после снятия возмущений приходит в состояние равновесия.

Литература

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 251 с.
2. Дьяконов В. Н. Maple 10, 11, 12, 13, 14 в математических расчетах. СПб.: Питер, 2011. 800 с.

УДК 621.384.6

Абдушукуров Д. В.

Параметрическое моделирование допусков на примере сложных динамических систем

Рекомендовано к публикации профессором Андриановым С. Н.

Введение. Системы управления пучками заряженных частиц представляют собой сложные динамические системы, моделирование которых является не простой, но очень востребованной задачей. Такие системы по своей природе являются высокоточными, сложными (имеют большое количество элементов). Свойство высокоточности накладывает особые ограничения на допуски в отклонениях настроек элементов и параметров системы управления пучками частиц. Такие отклонения часто приводят к возникновению ряда проблем [1, 2]. Также одним из главных условий, для моделирования является тот факт, что управление подобными системами невозможно осуществлять в реальном времени, а возможно лишь от сеанса к сеансу. Данное условие накладывает определенные ограничения на процесс и методы моделирования. В данной работе рассмотрен подход формирования математического аппарата, с помощью которого в аналитической форме, используя линейное приближение, возможно будет описать элементы системы с учетом возможных их отклонений, основанный на матричном представлении дифференциальных уравнений.

Решение задачи. Систему формирования пучка представим в виде

$$\mathbb{R}_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}(s_i | s_{i-1}), \quad (1)$$

где $\mathbb{R}(s_i | s_{i-1})$ — матрицанты (матрицы перехода), порождаемые системой управления на участке $[s_{i-1}, s_i]$. Подобное кусочно-гладкое представление полностью соответствует физике задачи и позволяет вычислять $\mathbb{R}(s_i | s_{i-1})$ для произвольных управляющих элементов.

Абдушукуров Дмитрий Вячеславович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: dmitriy.abdu@gmail.com, тел.: +7(911)793-97-73

Решение задачи определения допустимых отклонений параметров системы управления пучками частиц от нормальных значений, основанное на методе матричного формализма, подробно описан в [3]. Этот метод был выбран по причине того, что он носит чисто алгебраический характер, что позволяет, используя достаточно простые манипуляции, распараллеливать решения. Следует уточнить, что причины отклонений параметров могут иметь различное происхождение. Их можно разделить на несколько групп: отклонение реальных характеристик от номинальных у элементов управления, а также погрешности в их установке. Другим видом отклонений являются отклонения, возникающие в процессе эксплуатации. Исходя из характера вышеизложенных изменений параметров, можно сделать предположение о случайной природе их возникновения. Что очень упрощает математические вычисления и не противоречит физическому смыслу.

Введем функционал $\mathcal{J}[\xi]$, который соответствует физическому критерию качества, и $[\xi] = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$ — вектор параметров, определяющих функционирование всей системы. Оптимальное значение функционала \mathcal{J}^{opt} будет обеспечено при $\mathcal{J}^{opt} = \mathcal{J}[\xi^{opt}]$, где ξ^{opt} — оптимальное значение вектора параметров. Рассмотрим вектор относительных отклонений для компонент вектора ξ : $\delta\xi_k = (\xi_k - \xi_k^{opt})/\xi_k^{opt}$. Тогда в приближении малости подобных отклонений в линейном приближении (в предположении малости $\delta\xi_k$, $k = \overline{1, m}$) можно записать

$$\delta\mathcal{J}[\delta\xi] = \sum_{i=1}^m \frac{\partial (\mathcal{J}/\mathcal{J}^{opt})}{\partial (\xi_i/\xi_i^{opt})} \delta\xi_i + \mathcal{O}(\|\delta\xi\|).$$

Введем вектор \mathbf{A} с компонентами $\mathbf{A}_i = \partial (\mathcal{J}/\mathcal{J}^{opt}) / \partial (\xi_i/\xi_i^{opt})$, тогда

$$\delta\mathcal{J}[\delta\xi] = \sum_{i=1}^m A_i \delta\xi_i = \mathbf{A}^* \delta\xi, \quad A_i = \{\mathbf{A}\}_i, \quad \delta\xi = (\delta\xi_1, \dots, \delta\xi_m)^T. \quad (2)$$

Заметим что с физической точки зрения необходимо для $\delta\xi_k$, $k = \overline{1, m}$ предположить следующие свойства:

1. Математическое ожидание каждой случайной величины $\delta\xi_k$ равно нулю, т. е. $E(\delta\xi_k) = 0 \quad \forall k$.
2. Независимость случайных величин $\delta\xi_k$: $E(\delta\xi_k \delta\xi_j) = 0$.

3. Для всех $\delta\xi_k$ определены дисперсии $D(\delta\xi_k) = \sigma_k^2(\delta\xi)$ или максимально возможные отклонения $\Delta\xi_k$: $|\delta\xi_k| \leq \Delta\xi_k$.

Среди возможных отклонений (см., например, [3]) следует упомянуть следующие: сдвиги ε_x и ε_y элемента параллельно оптической оси системы в x и y направлениях; наклоны линзы относительно оптической оси на угол α_x в $\{x, s\}$ -плоскости и на угол α_y в $\{y, s\}$ -плоскости; поворот линз на угол α_0 вокруг оптической оси; отклонение δk в фокусирующих силах линз; относительное отклонение длины линзы δL ; относительный сдвиг вдоль оптической оси системы относительно некоторого оптимального положения δd . Величина δd может быть рассмотрена как относительное отклонение длины для дрейфового промежутка (т.е. линзы с $k = 0$). Например, в простом прямолинейном канале, состоящим из N элементов, разделенных промежутками, надо исследовать влияние $7N + 1$ параметров указанного типа. Это можно осуществить двумя методами [3].

Первый метод. Основан на численном алгоритме вычисления частных производных и их использовании для определения допусков. С учетом наших предположений из (1) вычислим центральную дисперсию функционала

$$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^{2N+1} \sum_{j=1}^{m(k)} A_j^k \xi_k^j,$$

где $m(k) = 6$ для управляющего элемента (для определенности) и $m(k) = 1$ для свободного от поля промежутка, ξ_k^j — случайная величина, описывающая «ошибку» типа j на k -ом промежутке разбиения. Введем общий вектор ошибок $\eta = \{\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_2^6, \dots\}^T$ и вектор \mathbf{A} , построенный из соответствующих коэффициентов A_j^k . Тогда для дисперсия

$$D\mathcal{J} = \sigma_{\mathcal{J}}^2 = \mathbf{A}^T \mathfrak{S} \mathbf{A}, \quad \mathfrak{S} = \langle \eta \eta^T \rangle,$$

где $\langle \cdot \rangle$ — оператор усреднения с соответствующей функцией распределения. Вводя вектор \mathfrak{Z} согласно правилу $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{S}$ (в частности, $\sqrt{\{\mathfrak{S}\}_{kk}}$ — среднеквадратичное отклонение для η_k), получаем уравнение для эллипсоида в пространстве переменных η :

$$\mathfrak{Z}^* \widehat{\mathbf{A}} \mathfrak{Z} = 1, \quad \widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} / D\mathcal{J}.$$

Нетрудно видеть, что

$$s_k = \max \mathfrak{Z}_k = \sigma_{\mathcal{J}} / \{\mathbf{A}\}_{kk}.$$

Для величины Δ_k , ограничивающей интервал изменения случайной ошибки η_k , имеем

$$\Delta_k^{max} = \max \Delta_k = \frac{1}{\alpha_k} \frac{\sigma_{\mathcal{J}}}{\{\mathbb{A}\}_{kk}}. \quad (3)$$

Здесь α_k — числовые коэффициенты, зависящие от вида функции распределения случайной величины η_k . Вычисляя величины s_k и $\Delta_k^{max} \forall k$, получаем предельные значения (в том или ином смысле) для случайных величин η_k , характеризующих максимально возможные при заданном отклонении функционала от оптимального значения допуски на параметры системы управления. Из приведенных равенств видно, что основная нагрузка ложится на вычисление элементов вектора \mathbf{A} , состоящего из частных производных функционала по параметрам системы. Способы их вычисления можно найти в [4].

Второй метод. Основан на символьном вычислении явной зависимости отклонения функционала от его оптимального значения как функции параметров. При этом в основе метода лежат алгебраические свойства матриц, входящих в описание динамической модели, что позволяет строить явные соотношения между возмущениями дифференциальных уравнений движения для указанных выше типов и соответствующими матрицантами. Изложим кратко основные идеи метода и приведем соответствующие равенства.

Для использования в полной мере алгебраических методов запишем линейные уравнения движения в несколько ином виде, а именно:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbb{P}^{11} \mathbf{X}, \quad (4)$$

где \mathbf{X} — например, вектор с координатами $X_1 = x$, $X_2 = y$, $X_3 = x'$, $X_4 = y'$. Матрица \mathbb{P}^{11} для квадрупольных линз, например, имеет вид

$$\mathbb{P}^{11} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} \\ \mathbb{A} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = k^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где k^2 — например, приведенный (нормированный) градиент линзы. Используя экспоненциальное представление для матрицанта уравнения (4) и предполагая, что матрица системы \mathbb{P}^{11} претерпевает возмущение $\Delta \mathbb{P}^{11}$, вызванное указанными выше ошибками, можно записать

$$\Delta \mathbb{R}^{11} = \exp(\mathbb{P}^{11} + \Delta \mathbb{P}^{11}) - \exp \mathbb{P}^{11}.$$

Для вычислений воспользуемся специальным видом матрицы

$$\Delta_{\mathbb{P}^{11}} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \Delta_{\mathbb{A}^{11}} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что для указанных типов искажений матрица $\Delta_{\mathbb{A}^{11}}$ имеет различные виды [3]. Рассмотрим случай поворота линзы вокруг оптической оси на угол α . Для такого случая матрица

$$\Delta_{\mathbb{A}^{11}} = k^2 \begin{pmatrix} 1 - \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -1 + \cos \alpha \end{pmatrix};$$

Представляя, как обычно, матрицу $\Delta_{\mathbb{R}^{11}}$ в блочном виде, получаем

$$\Delta_{\mathbb{R}^{11}} = \frac{1}{2k^2} \begin{pmatrix} C_-(\alpha) & \frac{1}{k}S_-(\alpha) \\ -kS_+(\alpha) & C_-(\alpha) \end{pmatrix} \otimes \Delta_{\mathbb{A}^{11}}. \quad (5)$$

Формулу (5) можно переписать в виде

$$\Delta_{\mathbb{R}^{11}} = \frac{1}{2k^2} [(\mathbb{E} \otimes \mathbf{L}_+^*) \mathbb{R}^{11}(\varphi) (\mathbb{E} \otimes \mathbf{L}_-)] \otimes \Delta_{\mathbb{A}^{11}}, \quad \mathbf{L}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Закключение. В современных ионно-оптических системах проблема определения допусков, а также выявления влияния ошибок различного характера, в настоящее время является актуальной по причине создания новейших установок по всему миру и модернизации имеющихся. Нормальную работоспособность таких установок невозможно обеспечить без учета этих влияний. Два предложенных подхода, с одной стороны, достаточно легко реализуются программным образом, а с другой, позволяют получать объективную и достоверную информацию о влиянии тех или иных искажений на характеристики пучка (в терминах введенного функционала \mathcal{J}). Если первый метод достаточно традиционен, то второй (с использованием кронекеровых операций) позволяет получать точные оценки без «розыгрыша» случайных отклонений оптимальных параметров на основе только алгебраических операций над матрицантами, в том числе и в символьном виде. В частности, это позволит реализовать метод передаточных функций для восстановления «входного сигнала» (в нашем случае вектора ошибок установки).

Литература

1. Carneiro J. P., Lebedev V., Nagaitsev S. et al. Beam loss due to misalignments, RF jitter and mismatch in the fermilab project-X 3 GeV CW linac // Proc. of IPAC. 2012. New Orleans. [Электронный ресурс]: URL:<http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2012/papers/thppp056.pdf> (дата обращения: 13.03.2014).
2. Lavine T. L., Seeman J. T., Atwood W. B., et al. Beam determination of quadrupole misalignments and beam position monitor biases in the SLC linac // Proc. of LINAC. 1988. Williamsburg. [Электронный ресурс]: URL:<http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/188/papers/th3-50.pdf> (дата обращения: 12.03.2014).
3. Андрианов С. Н. Динамическое моделирование систем управления пучками частиц. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2002. 376 с.
4. Андрианов С. Н. Определение допусков на параметры корпускулярно-оптических систем // Вопросы механики и процессов управления. Вып. 11. Теория систем управления. Л., 1985. С. 12–15.

УДК 621.384.6

Алцыбеев В. В., Скуднова И. С.

Об одном методе расчета параметров ускорителя с трубками дрейфа

Рекомендовано к публикации профессором Овсянниковым Д. А.

1. Введение. Постоянный интерес к линейным ускорителям связан с их эффективным использованием как в фундаментальных исследованиях, так и в практических областях: в медицине и технике — радиационная терапия, стерилизация медицинского оборудования, изготовление различных изотопов химических элементов, улучшение свойств полимерных материалов. В настоящее время высокую практическую значимость имеют ускорители с фокусировкой ускоряющим полем, проблемам проектирования которых посвящено много работ [1–4]. Одним из типов таких структур является ускоритель с переменнo-фазовой фокусировкой (ПФФ). Структура с ПФФ представляет собой цилиндрический резонатор с установленными трубками дрейфа, в котором возбуждаются электромагнитные колебания типа Н.

Обычно первым этапом при проектировании ускорителя является определение его основных параметров с помощью несложных математических моделей. На данном этапе высокую эффективность показали подходы математической теории управления и оптимизации динамики пучков [5–10]. Так, при разработке резонатора с трубками дрейфа, в первую очередь некоторым образом выбирается закон изменения фазы синхронной частицы [11–13], некоей виртуальной частицы, скорость которой совпадает с фазовой скоростью волны ускоряющего поля. Данный закон определяет основные характеристики динамики пучка и может быть использован в последующих стадиях разработки ускорителя. Следующим этапом встает задача расчета геометрических параметров резонатора — длин и радиусов трубок дрейфа, параметров установки держателей и т. д.

Алцыбеев Владислав Владимирович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: altsybeyev@gmail.com, тел.: +7(905)274-53-94

Скуднова Ирина Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: irishayouji@rambler.ru, тел.: +7(904)644-37-39

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, тема № 9.38.673.2013

В работе предлагается алгоритм расчета основных параметров ускорителя с трубками дрейфа по заданному закону изменения синхронной фазы, а также приводятся результаты численного моделирования динамики пучка в ускорителе дейтронов с переменнo-фазовой фокусировкой в поле стоячей волны.

2. Постановка задачи. Назовем ускоряющим периодом, или ячейкой в Н-резонаторе область резонатора между серединами двух соседних трубок дрейфа (рис. 1).

Координатой L_{z_i} на оси Oz отметим начало i -го ускоряющего периода, а D_i – его центральную точку. Будем рассматривать задачу определения длин $L_i = L_{z_{i+1}} - L_{z_i}$ по заданной последовательности синхронных фаз на границе каждого периода φ_{s_i} , $i = \overline{1, N}$.

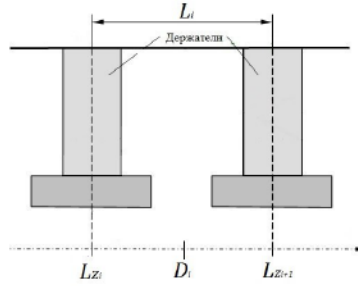


Рис. 1. Схема ускоряющего периода

3. Итерационный алгоритм расчета длин ускоряющих периодов. Продольную компоненту поля вдоль оси z на k -ом периоде можно аппроксимировать с помощью уравнения стоячей волны (1)

$$\begin{aligned}
 E_i(z, t) &= (-1)^i E_m \cos\left(\frac{\pi(z - D_i)}{L_i}\right) \cos(\omega t + \varphi_0) = \\
 &= (-1)^i \frac{E_m}{2} \left[\cos\left(\pi \frac{(D_i - z)}{L_i} + \omega t + \varphi_0\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(\pi \frac{(z - D_i)}{L_i} + \omega t + \varphi_0\right) \right], \quad (1)
 \end{aligned}$$

где E_m — амплитуда напряженности ускоряющего поля, ω — цикли-

ческая частота ускоряющего поля, φ_0 — начальная фаза колебаний. Поскольку при движении частиц основной вклад в их ускорение будет вносить только первое слагаемое в выражении для поля (1), фазу частицы можно определить как

$$\varphi = \frac{\pi(D_i - z)}{L_i} + \omega t + \varphi_0. \quad (2)$$

Рассмотрим изменение фазы частицы за один ускоряющий период. Из (2) в начале i -го периода в момент времени t_i

$$\varphi_i = \omega t_i + \frac{\pi}{2} + \varphi_0.$$

В начале следующего периода в момент времени t_{i+1}

$$\varphi_{i+1} = \omega t_{i+1} - \frac{\pi}{2} + \varphi_0.$$

Введем переменную $\tau = ct/\lambda$. Тогда время $T_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, за которое частица пролетает i -ый ускоряющий период, равно

$$T_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i + \pi}{2\pi}, \quad (3)$$

Будем считать, что движение частиц происходит вблизи оси Oz и продольная скорость незначительно отличается от полной. Тогда на i -ом периоде движение синхронной частицы описывается уравнением

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \lambda \alpha_{st} (1 - \beta_s^2)^{\frac{3}{2}} \cos\left(2\pi\tau + \varphi_{s_i} - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{L_i} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

с начальными данными

$$z(0) = 0, \quad \frac{dz}{d\tau}(0) = \beta(0)\lambda, \quad (5)$$

где λ — длина ускоряющей волны, β_s — приведенная скорость частицы, $\alpha_{st} = eE_m \lambda / m_0 c^2$ — параметр амплитуды ускоряющего поля.

Построим итерационный процесс нахождения L_i следующим образом:

1. Начальным приближением выбираем $L_i^0 = \beta_0 \lambda / 2$.
2. Интегрируем систему (4), (5) от 0 до T_i , определяемого уравнением (3).

3. На k -ой итерации определяем $L_i^k = z(T_i, L_i^{k-1})$.
4. При достижении необходимой точности $|L_i^k - L_i^{k-1}| < \varepsilon$ завершаем процесс.

Результаты расчета длин периодов по данному алгоритму для последовательности синхронных фаз ускорителя дейтронов с ПФФ на 14 МэВ, предложенной в работе [11], представлены на рис. 2.

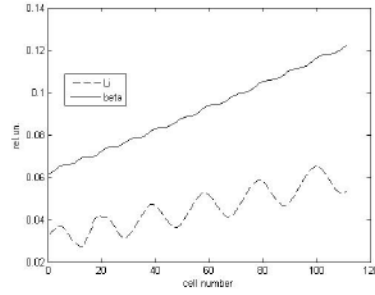


Рис. 2. Скорость синхронной частицы и длины периодов

4. Моделирование динамики пучка. Произведем оценку основных параметров пучка в поле стоячей волны, определяемом рассчитанной последовательностью L_i . Движение частиц можно описать с помощью модели

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \\
 \frac{d\gamma}{d\xi} &= \alpha_{st} \cos\left(\frac{\pi(\xi - D_i)}{L_i}\right) \cos\varphi, \\
 \frac{d\rho}{d\xi} &= \eta, \\
 \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{\alpha_{st}\gamma\rho \sin\left(\frac{\pi(\xi - D_i)}{L_i}\right) \cos\varphi}{2L_i(\gamma^2 - 1)}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\xi = z/\lambda$ — приведенная продольная координата, γ — фактор Лоренца, $\rho = r/\lambda$ — приведенный радиус частицы, η — расходимость радиуса.

Результаты расчета динамики пучка в ускорителе [11] представлены на рис. 3.

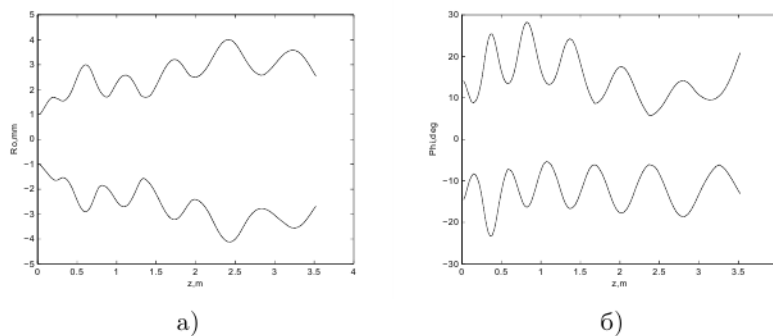


Рис. 3. Результаты расчета: а) огибающие радиальных траекторий, б) огибающие фазовых траекторий

5. Выводы. Предложен метод расчета длин ускоряющих периодов в резонаторе с трубками дрейфа. Сравнение результатов моделирования динамики пучка с расчетами в эквивалентной бегущей волне, полученными в [11], отражают работоспособность данного подхода.

Литература

1. Свистунов Ю. А., Зуев Ю. В., Овсянников А. Д., Овсянников Д. А. Разработка малогабаритного ускорителя дейтронов для нейтронного генератора на энергию 1 МэВ // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 49–59.
2. Bondarev B., Durkin A., Ivanov Y. et al. The LIDOS.RFQ.Designer development // Proc. of the IEEE Particle Accelerator Conference. 2001. Vol. 4. P. 2947–2949.
3. Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov A. D., Antropov I. V., Kozynchenko V. A. BDO-RFQ code and optimization models // Proc. of the 2nd Intern. Conference «Physics and Control». 2005. P. 282–288.

4. Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Chung S.-L. Optimization of a radial matching section // Intern. J. of Modern Physics. A. 20 February 2009. Vol. 24, iss. 5. P. 952–958.
5. Алцыбеев В. В. Математическая модель оптимизации динамики пучков в гибридных системах // Материалы XV конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». 2013. С. 328–332.
6. Овсянников А. Д. Управление программным и возмущенными движениями // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2006. Вып. 4. С. 111–124.
7. Овсянников А. Д. Управление пучком заряженных частиц с учетом их взаимодействия // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2009. Вып. 2. С. 82–92.
8. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
9. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
10. Овсянников Д. А., Дривотин О. И. Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2003. 174 с.
11. Ovsyannikov D. A., Altsybeyev V. V. Mathematical optimization model for alternating-phase focusing (APF) linac // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. Iss. 4 (86). P. 93–96.
12. Ovsyannikov D. A., Altsybeyev V. V. Optimization of APF accelerators // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. Iss. 6 (88). P. 119–122.
13. Алцыбеев В. В. Об одной задаче оптимизации динамики пучка // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2014. Вып. 1. С. 15–23.

УДК 539.194

Андреева Т. А.

Колебательные спектры цианобифенилов

Рекомендовано к публикации доцентом Бедринной М. Е.

1. Постановка задачи. Современные методы квантовой химии позволяют описать различные физико-химические свойства систем с точностью, сравнимой с данными экспериментальных методов. Колебательные спектры молекул являются важной характеристикой вещества, позволяют идентифицировать молекулярные структуры. Полный набор найденных колебательных частот необходим для вычисления термодинамических функций образования из простых веществ. В настоящей работе рассмотрены ассоциаты молекулы цианобифенила ЦБ5 (димеры, тримеры), найдены комплексы с наиболее выигрышной энергетической структурой в вакууме и определены частоты нормальных колебаний исследованных систем [1, 2]. Молекулы цианобифенилов ЦБ5 широко используются в качестве жидких кристаллов. Экспериментальное и теоретическое исследование жидкокристаллической фазы вещества представляет значительный интерес. При исследовании мезотропной жидкокристаллической фазы цианобифенила ЦБ5 методами инфракрасной спектроскопии наблюдается частота в области 2252 см^{-1} со сложным контуром. В связи с этим можно предположить, что данная полоса состоит из нескольких полос, соответствующих различным значениям частот колебаний. В работе вычислены значения частот нормальных колебаний как для отдельных молекул ЦБ5, так и ее димеров и тримеров.

2. Математическая модель. Для вычисления колебательных частот необходимо иметь равновесную геометрическую структуру систем, полученную путем оптимизации. Оптимизация геометрии — процедура, заключающаяся в поиске конфигурации, соответствующей глобальному минимуму энергии молекулы. Диагонализация матрицы вторых производных полной энергии по координатам в точке равновесия, которые являются силовыми постоянными молекулы, дает частоты нормальных колебаний. Сила записывается как градиент потенциальной энергии, взятой с обратным знаком. В качестве

Андреева Татьяна Анатольевна — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: andreeva_t90@mail.ru, тел.: +7(911)098-70-61

координат могут использоваться как декартовы координаты (x, y, z) , так и внутренние координаты — длины связей и углы. Стационарная точка найдена, когда энергия $\nabla E = 0$. Матрица вторых производных потенциальной энергии по атомным координатам (координатам ядер) называется матрицей Гессе или гессианом. Она имеет следующий вид:

$$H(E) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 E}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Диагонализация матрицы Гессе позволяет вычислить колебательные частоты и интенсивности инфракрасного спектра (ИК). Поверхность потенциальной энергии можно представить разложением в ряд Тейлора до второго порядка в окрестности стационарной точки $(x_1^{(st)}, \dots, x_n^{(st)})$:

$$E(x_1, \dots, x_n) = E(x_1^{(st)}, \dots, x_n^{(st)}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij}(E)(x_i - x_i^{(st)})(x_j - x_j^{(st)}).$$

Диагонализация матрицы Гессе приводит к задаче на собственные значения:

$$\varepsilon_k l_j^{(k)} = \sum_{i=1}^n H_{ij} l_i^{(k)},$$

где собственные значения $\varepsilon_k = m\omega_k^2$, а ω_k — частоты колебаний. Собственные векторы $l^{(k)}$ задают нормальные координаты

$$q_k = \sum_{i=1}^n l_i^{(k)}(x_i - x_i^{(st)}),$$

$$E(x_1, \dots, x_n) = E(x_1^{(st)}, \dots, x_n^{(st)}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k q_k^2.$$

Точки минимума достигаются, если ω_k — вещественное число и $\varepsilon_k > 0$.

3. Результаты расчетов. Проведены расчеты геометрической структуры распределения электронной плотности и частот колебаний методами функционала электронной плотности [3] с гибридными потенциалами B3LYP, M06, M062X, M06L [4, 5] с использованием валентно-расщепленных базисных функций 6-31G.

Качественно методы передают одни и те же структуры димеров и тримеров. Длина C-N связи меняется незначительно, но в зависимости от метода изменяется минимальное расстояние между структурами (см. таблицу 1).

Таблица 1. Минимальные расстояния $R(\text{Å})$ между молекулами в ассоциатах

Название	B3LYP	M06	M062X	M06L
<i>DimerI</i>	2,35	2,28	2,30	2,28
<i>DimerIII</i>	2,56	2,49	2,55	2,53
<i>DimerIV</i>	3,21	2,99	2,94	2,94
<i>DimerV</i>	2,49	2,79	2,79	2,28
<i>TrimerI</i>	2,46	2,24	2,29	2,30
<i>TrimerII</i>	2,33	2,24	2,28	2,37
<i>TrimerIII</i>	2,36	2,26	2,42	2,27
<i>TrimerV</i>	2,64	2,52	2,38	2,30

На рис. 1 представлена геометрическая структура *DimerI*.

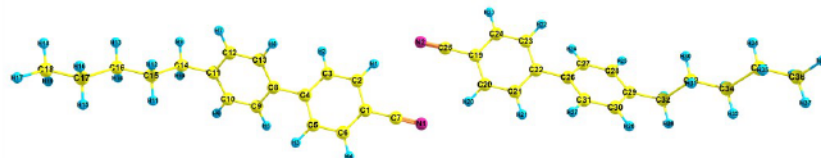


Рис. 1. Димер цианобифенила СВ5

В зависимости от того, как ориентируются димеры, ассоциаты обладают различным дипольным моментом. Величина дипольного момента определяет отклик реактивного поля. В таблице 2 приведены дипольные моменты для некоторых димеров и тримеров.

Таблица 2. Дипольные моменты ассоциатов ЦБ5 $D(Debay)$

Название	ВЗЛР	М06	М062X	М06L
<i>DimerI</i>	$X = -0,033$ $Y = -0,052$ $Z = 0,365$ $Tot = 0,371$	$X = 0,042$ $Y = 0,106$ $Z = 0,194$ $Tot = 0,225$	$X = -0,0004$ $Y = -0,001$ $Z = 0,535$ $Tot = 0,535$	$X = -0,009$ $Y = 0,037$ $Z = 0,654$ $Tot = 0,655$
<i>DimerIII</i>	$X = 6,629$ $Y = 6,745$ $Z = -0,269$ $Tot = 9,468$	$X = 0,119$ $Y = 3,874$ $Z = -1,509$ $Tot = 4,159$	$X = 0,114$ $Y = 3,902$ $Z = -1,533$ $Tot = 4,194$	$X = 0,088$ $Y = 4,227$ $Z = -1,611$ $Tot = 4,524$
<i>DimerIV</i>	$X = -12,262$ $Y = -0,474$ $Z = -0,061$ $Tot = 12,271$	$X = -11,611$ $Y = 0,239$ $Z = -0,462$ $Tot = 11,623$	$X = -11,466$ $Y = 0,389$ $Z = -0,143$ $Tot = 11,474$	$X = -12,433$ $Y = 0,199$ $Z = -0,209$ $Tot = 12,436$
<i>DimerV</i>	$X = -1,852$ $Y = -3,784$ $Z = 0,138$ $Tot = 4,215$	$X = -0,837$ $Y = 1,726$ $Z = -0,101$ $Tot = 1,921$	$X = 0,551$ $Y = 0,209$ $Z = -1,473$ $Tot = 1,586$	$X = 0,003$ $Y = 1,412$ $Z = 0,0005$ $Tot = 1,412$
<i>TrimerII</i>	$X = 0,844$ $Y = 6,084$ $Z = -1,651$ $Tot = 6,361$	$X = -1,078$ $Y = -4,753$ $Z = 3,731$ $Tot = 6,138$	$X = 0,861$ $Y = 4,891$ $Z = -1,543$ $Tot = 5,2001$	$X = 4,587$ $Y = -2,998$ $Z = 1,390$ $Tot = 5,654$
<i>TrimerIII</i>	$X = -4,638$ $Y = -5,244$ $Z = -0,811$ $Tot = 7,048$	$X = 6,836$ $Y = 0,817$ $Z = -0,074$ $Tot = 6,885$	$X = 4,211$ $Y = 1,862$ $Z = -0,371$ $Tot = 4,619$	$X = -4,951$ $Y = 2,957$ $Z = -0,597$ $Tot = 5,797$
<i>TrimerV</i>	$X = -0,003$ $Y = -1,191$ $Z = -0,286$ $Tot = 1,224$	$X = 0,904$ $Y = -2,148$ $Z = 1,784$ $Tot = 2,935$	$X = -3,846$ $Y = -0,161$ $Z = 1,271$ $Tot = 4,055$	$X = 2,173$ $Y = -1,309$ $Z = 2,046$ $Tot = 3,259$

Все вычисленные частоты нормальных колебаний положительны. Отсутствие мнимых частот в спектре свидетельствует о том, что для всех исследуемых равновесных структур ассоциатов достигнут глобальный минимум энергии. В таблице 3 представлены значения частот для димеров и тримеров цианобифенила ЦБ5.

Таблица 3. Частоты нормальных колебаний ассоциатов, cm^{-1}

Название, частота	B3LYP	M06	M062X	M06L
<i>Dimer I, C7 – N1</i>	2295	2269	2376	2269
<i>Dimer I, C25 – N2</i>	2293	2272	2377	2272
<i>Dimer III, C7 – N1</i>	2297	2298	2365	2263
<i>Dimer III, C25 – N2</i>	2293	2296	2361	2261
<i>Dimer IV, C7 – N1</i>	2296	2305	2368	2265
<i>Dimer IV, C25 – N2</i>	2294	2301	2365	2269
<i>Dimer V, C7 – N1</i>	2295	2298	2359	2272
<i>Dimer V, C25 – N2</i>	2293	2297	2364	2270
<i>Trimer II, C7 – N1</i>	2295	2296	2360	2266
<i>Trimer II, C25 – N2</i>	2294	2305	2370	2265
<i>Trimer II, C43 – N3</i>	2290	2303	2367	2260
<i>Trimer III, C7 – N1</i>	2294	2299	2361	2266
<i>Trimer III, C25 – N2</i>	2297	2303	2369	2260
<i>Trimer III, C43 – N3</i>	2296	2305	2366	2263
<i>Trimer V, C7 – N1</i>	2296	2302	2369	2272
<i>Trimer V, C25 – N2</i>	2296	2301	2365	2261
<i>Trimer V, C43 – N3</i>	2295	2295	2361	2262

Валентное колебание C-N связи является характеристическим по частоте и по форме. На рис. 2 представлен колебательный спектр структуры *Dimer I*.

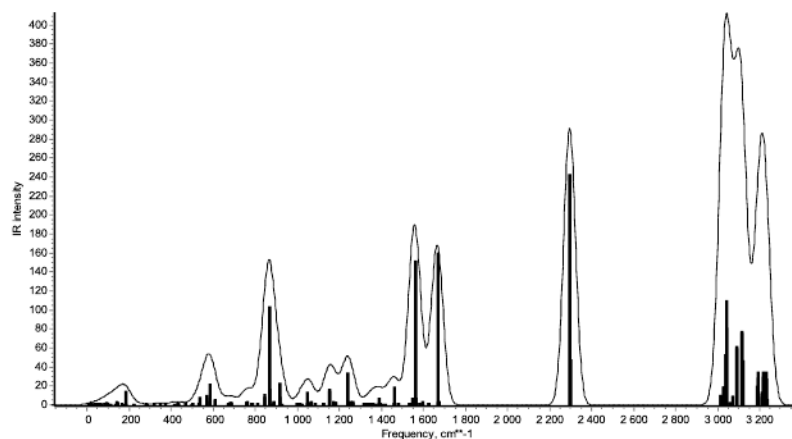


Рис. 2. Колебательный спектр димера цианобифенила ЦБ5

В связи с этим, частоту этого колебания удобно использовать как характеристику образующихся в жидкокристаллической фазе ассоциатов. Частоты в ИК-спектре в области 1600 см^{-1} соответствуют колебаниям ароматических колец, а высокочастотная область в районе 3000 см^{-1} — валентным колебаниям С-Н связей.

Литература

1. Андреева Т. А., Бедрина М. Е. Моделирование механизма взаимодействия молекул в жидкокристаллической фазе // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 483–487.
2. Андреева Т. А. Анализ гибридных потенциалов метода функционала электронной плотности // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 135–141.
3. Wolfram Koch, Max C. Holthausen. A chemist's guide to density functional theory. Second Edition. Germany, 2001. 306 p.
4. Yan Zhao, Donald G. Truhlar. The M06 suite of density functionals for main group thermochemistry, thermochemical kinetics, noncovalent interactions, excited states, and transition elements: two new functionals and systematic testing of four M06-class functionals and 12 other functionals // Theor. Chem. Account. 2008. USA. P. 215–241.
5. Yan Zhao, Donald G. Truhlar. Density functionals with broad applicability in chemistry // Accounts of chemical research. 2008. Vol. 41, No 2. P. 157–167.

УДК 539.3

Башканкова Е. А., Греков М. А.

Метод возмущений в задаче об упругой плоскости с эллиптическим включением

1. Введение. В работе [1] метод возмущений был применен при решении задачи об упругой плоскости с эллиптическим отверстием, форма которого мало отличается от круговой. Благодаря наличию точного решения этой задачи, удалось установить погрешность первого приближения при вычислении коэффициента концентрации напряжений. Результаты, полученные в [1], позволяют использовать метод возмущений для решения более сложной задачи определения напряженно-деформированного состояния в окрестности упругого включения, для которой точного аналитического решения не существует.

2. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу линейной теории упругости для области с включением. Пусть матрице соответствует область Ω_1 , включению — Ω_2 . Упругие свойства каждой области $\Omega_k, k = 1, 2$, определяются коэффициентом Пуассона ν_k и модулем сдвига μ_k . Считаем, что общая граница Γ представляет собой эллипс (рис. 1), который мало отличается от окружности единичного радиуса и в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2 имеет параметрическое представление

$$x_1 = (1 + \varepsilon) \cos \varphi, \quad x_2 = (1 + m\varepsilon) \sin \varphi. \quad (1)$$

Здесь ε — малый параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$, $|m| < 1$, φ — полярный угол.

Введем комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$. Тогда в комплексной плоскости уравнение общей границы (1) представляется в виде

$$z = \zeta = s(1 + \varepsilon f(s)), \quad s = e^{i\varphi},$$

Башканкова Екатерина Александровна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ekaterina.bashkankova91@gmail.com, тел.: +7(911)900-82-58

Греков Михаил Александрович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: magrekov@mail.ru, тел.: +7(921)748-06-08

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-00260

где

$$f(s) = \frac{1}{2} (1 + m + (1 - m) s^{-2}).$$

Предполагаем, что на границе контакта двух сред Γ выполнены условия идеального сцепления

$$\Delta \sigma_n(\zeta) = \sigma_n^+ - \sigma_n^- = 0, \quad \Delta u_n(\zeta) = u_n^+ - u_n^- = 0, \quad (2)$$

а на бесконечности заданы напряжения σ_{ij} и угол поворота ω

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{ij}(z) = \sigma_{ij}^\infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \omega(z) = \omega^\infty,$$

Здесь $\sigma_n = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$, $u = u_1 + iu_2$; σ_{nn}, σ_{nt} — нормальное и касательное напряжения, действующие на площадке с нормалью n ; u_1, u_2 — компоненты вектора перемещений в системе координат x_1, x_2 . В формуле (2) введены обозначения $\sigma^\pm = \lim_{z \rightarrow \zeta \in \Gamma} \sigma_{ij}(z)$, $u^\pm = \lim_{z \rightarrow \zeta \in \Gamma} u(z)$.

Знак «-» берется

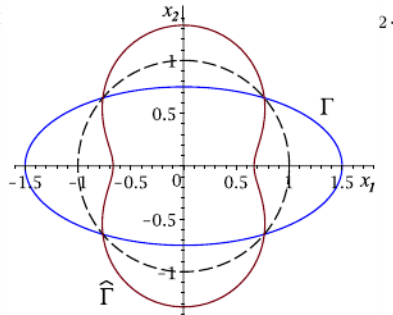


Рис. 1. Граница включения Γ и граница $\hat{\Gamma}$, симметричная кривой Γ относительно единичной окружности, при $\epsilon = 0,5$, $m = -0,5$

3. Основные соотношения. Согласно [2] для каждой области Ω_k связь напряжений и перемещений с комплексными потенциалами $\Phi_k(z)$, $\Upsilon_k(z)$ может быть записана в виде единой формулы

$$G(z, \eta_k) = \eta_k \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + \left[\frac{1}{\bar{z}^2} \left(\Upsilon_k \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) + \overline{\Phi_k(z)} \right) + \left(z - \frac{1}{\bar{z}} \right) \overline{\Phi_k'(z)} \right] e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega_k, \quad (3)$$

где $G(z, \eta_k) = \sigma_n(z)$ при $\eta_k = 1$ и $G(z, \eta_k) = -2\mu_k du/dz$ при $\eta_k = -\alpha_k$; $\alpha_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$ при плоском напряженном состоянии, $\alpha_k = 3 - 4\nu_k$ при плоской деформации; α — угол между осями t и x_1 .

На границе контакта соотношение (3) принимает вид

$$G(\zeta, \eta_k) = \eta_k \Phi_k(\zeta) + \overline{\Phi_k(\zeta)} - \frac{1}{s^2} \left[\frac{1}{\bar{\zeta}^2} \left(\overline{\Phi_k(\zeta)} + \Upsilon_k \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right) + \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \overline{\Phi_k'(\zeta)} \right] \frac{1 + \bar{\delta} + \bar{s}\bar{\delta}'}{1 + \delta + s\delta'}. \quad (4)$$

Здесь $\Phi_k(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Phi_k(z)$ при $z \in \Omega_k$ и $\Upsilon_k(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Upsilon_k(z)$ при $z \in \widehat{\Omega}_k$. Функции $\Phi_k(z)$, $k = 1, 2$, голоморфны в соответствующих областях Ω_k , $\Upsilon_k(z)$ — в областях $\widehat{\Omega}_k = \{z : \bar{z}^{-1} \in \Omega_k\}$ с границей $\widehat{\Gamma}$ (рис. 1); $\delta(s) = \varepsilon f(s)$.

В уравнении (4) $\zeta \in \Gamma$, а $\bar{\zeta}^{-1} \in \widehat{\Gamma}$, причем $\Gamma = \widehat{\Gamma}$ только при $\varepsilon = 0$, т. е. в случае кругового включения. В общем случае при $0 < \varepsilon \ll 1$ кривые Γ и $\widehat{\Gamma}$ представляют собой малое возмущение единичной окружности. В связи с этим для нахождения функций $\Phi_k(z)$, $\Upsilon_k(z)$ и решения задачи в целом можно применить метод возмущений, который сводится к разложению искомых функций по степеням малого параметра ε

$$\Phi_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_{kn}(z), \quad \Upsilon_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Upsilon_{kn}(z), \quad (5)$$

а их предельных значений на соответствующих границах — в ряды Тейлора в окрестности окружности $|z| = 1$

$$\Phi_{kn}(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(s)s)^m}{m!} \Phi_{kn}^{(m)}(s), \quad (6)$$

$$\Upsilon_{kn} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(\bar{s})\bar{s})^m}{m!} \frac{d^m}{d\bar{s}^m} \Upsilon_{kn} \left(\frac{1}{\bar{s}} \right).$$

Кроме того, другие функции, входящие в (4), также разлагаем в степенные ряды по малому параметру ε (см. [1]).

Из соотношений (2) и определения функции G следует

$$m_1 G^+(\zeta, \eta_2) - m_2 G^-(\zeta, \eta_1) = 0, \quad (7)$$

где $m_k = 1$, $k = 1, 2$, при $\eta_1 = \eta_2 = 1$ и $m_k = \mu_k$ при $\eta_k = -\varkappa_k$.

Подставив (4) в (7) с учетом разложений (5), (6) и собрав в полученном равенстве коэффициенты при ε^n , $n = 0, 1, \dots$, приходим для каждого приближения к двум независимым задачам Римана — Гильберта о скачке голоморфной функции

$$\begin{aligned}\Sigma_n^+(s) - \Sigma_n^-(s) &= q_n(s), \quad |s| = 1, \\ V_n^+(s) - V_n^-(s) &= r_n(s), \quad |s| = 1.\end{aligned}$$

Здесь $\Sigma_n^\pm = \lim_{|z| \rightarrow 1 \mp 0} \Sigma_n(z)$, $V_n^\pm = \lim_{|z| \rightarrow 1 \mp 0} V_n(z)$, q_n, r_n — известные функции, зависящие при $n > 0$ от всех предыдущих приближений, а функции $\Sigma_n(z), V_n(z)$ вводятся следующим образом

$$\Sigma_n(z) = \begin{cases} \Upsilon_{1n}(z) + \Phi_{2n}(z), & |z| < 1, \\ \Upsilon_{2n}(z) + \Phi_{1n}(z), & |z| > 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$V_n(z) = \begin{cases} \mu_2 \Upsilon_{1n}(z) - \mu_1 \varkappa_2 \Phi_{2n}(z), & |z| < 1, \\ \mu_1 \Upsilon_{2n}(z) - \mu_2 \varkappa_1 \Phi_{1n}(z), & |z| > 1. \end{cases} \quad (9)$$

Значения для комплексных потенциалов в каждом приближении получаем из (8), (9) по формулам

$$\Phi_{kn}(z) = \frac{\mu_k \Sigma_n(z) - V_n(z)}{\mu_k + \mu_l \varkappa_k}, \quad \Upsilon_{kn}(\bar{z}^{-1}) = \frac{\mu_k \varkappa_l \Sigma_n(\bar{z}^{-1}) - V_n(\bar{z}^{-1})}{\mu_l + \mu_k \varkappa_l}. \quad (10)$$

Здесь $z \in \Omega_k$, $l = 3 - k$, $k = 1, 2$.

4. Решение в первом приближении. В качестве значений комплексных потенциалов в нулевом приближении будем использовать решение задачи для кругового включения, полученное в [3]

$$\Upsilon_{10}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{\mu_1(\varkappa_2 - 1)b_0 + (\mu_1 \varkappa_2 + \mu_2 \varkappa_1)D_1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} + \overline{D_2} \bar{z}^2,$$

$$\Phi_{10}(z) = D_1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1} \frac{\overline{D_2}}{z^2}, \quad |z| > 1,$$

$$\Upsilon_{20}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{(\mu_2 \varkappa_1 - \mu_1)b_0 + 2\mu_2 \varkappa_1 D_1 + \mu_2(\varkappa_1 - 1)\overline{D_2} \bar{z}^2}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1},$$

$$\Phi_{20}(z) = \frac{(\mu_2 - \mu_1)b_0 + \mu_2(\varkappa_1 + 1)D_1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}, \quad |z| < 1,$$

где

$$4D_1 = \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + i \frac{8\mu_1}{\varkappa_1 + 1} \omega^\infty, \quad 2D_2 = \sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty,$$

а b_0 определяется из уравнения

$$(\mu_1 - \mu_2) b_0 - (\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2) \bar{b}_0 = \mu_2 (1 + \varkappa_1) D_1.$$

Для краткости будем использовать обозначения

$$\Phi_{10}(z) = D_1 + x \bar{D}_2 \bar{z}^{-2}, \quad \Upsilon_{10}(\bar{z}^{-1}) = c_1 + \alpha D_1 + \bar{D}_2 \bar{z}^2,$$

$$\Upsilon_{20}(\bar{z}^{-1}) = c_2 + \beta D_1 + y \bar{D}_2 \bar{z}^2, \quad \Phi_{20}(z) = c_3 + \gamma D_1.$$

Таким образом, решая соответствующие задачи Римана — Гильберта и используя формулы (10), получим значения искомого комплексных потенциалов Φ_{k1}, Υ_{k1} в первом приближении

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(z) &= 3xb \bar{D}_2 z^{-4} + \\ &+ \left((1 - \gamma) D_1 + \bar{D}_1 + 2 \frac{a}{b} \bar{D}_2 + b_0 (1 + \tau x) \right) bxz^{-2}, \quad z \in \Omega_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11}(z) &= 5bx D_2 z^4 + (\alpha - (1 + \tau x) \beta + 2(1 - \gamma)) b D_1 z^2 + \\ &+ (3(1 - \gamma(1 + \tau x)) b \bar{D}_1 + 6ax D_2 + bc_1 - (1 + \tau x) bc_2) z^2 + bx D_2 + \\ &+ (\beta(1 + \tau x) - \alpha + 3(1 - \gamma)) a D_1 + 2(1 - \gamma(1 + \tau x)) a \bar{D}_1 - ac_1 + \\ &+ (2x(1 - \gamma) + y(1 + \tau x) - 1) b \bar{D}_2 + (1 + \tau x) ac_2, \quad z \in \hat{\Omega}_1, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(z) &= -2bc_3 z^2 + \tau x (\beta D_1 + 3\gamma \bar{D}_1 + c_2 + 3\bar{c}_3) bz^2 - 3ac_3 + \\ &+ (2\gamma - \tau y) bx \bar{D}_2 + \tau x (2\gamma a \bar{D}_1 - \beta a D_1 + 2a \bar{c}_3 - ac_2), \quad z \in \Omega_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{21}(z) &= ((1 - x - \gamma) b \bar{D}_1 + 3(\beta - 2y) a \bar{D}_2) z^{-2} + \\ &+ \frac{1 - \gamma}{\tau} (\gamma D_1 + c_3) bz^{-2} - b \bar{c}_3 z^{-2}, \quad z \in \hat{\Omega}_2. \end{aligned}$$

Здесь $a = (1 + m)/2$, $b = (1 - m)/2$, $\tau = (\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1)/(\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2)$.

Для задачи с эллиптическим отверстием следует положить в (11) $\mu_2 = 0$. Тогда при $\omega^\infty = 0$

$$\Phi_{11}(z) = \Phi_{el}^1(z) = 3k_2 \bar{D}_2 z^{-4} + 2(k_1 \bar{D}_2 + k_2 D_1) z^{-2},$$

$$\Upsilon_{11}(z) = \Upsilon_{ell}^1(z) = 5bD_2z^4 + 6(bD_1 + aD_2)z^2 + 4aD_1 + bD_2 + b\overline{D_2},$$

что совпадает с решением, полученным в [1].

5. Заключение. Методом возмущений в данной работе получены выражения для комплексных потенциалов в первом приближении (11). Подстановка (11) вместе с нулевым приближением в равенство (3) позволит в дальнейшем исследовать особенности напряженно-деформированного состояния окрестности эллиптического включения для тех случаев, для которых первое приближение, согласно [1], дает практически точные результаты.

Литература

1. Башканкова Е. А., Греков М. А. Метод возмущений в задаче об упругой плоскости с эллиптическим отверстием // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 148–153.
2. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001. 192 с.
3. Греков М. А. Совместная деформация кругового включения и матрицы // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. 2010. Вып. 2. С. 126–134.

УДК 539.3

Вакаева А. Б., Греков М. А.

Исследование напряженно-деформированного состояния упругого тела с почти круговыми дефектами

1. Введение. Характерными концентраторами напряжений в материалах и элементах конструкций являются различного рода отверстия или включения (группы отверстий или включений). Так, Н. И. Мухелишвили в работе [1] получил точное решение для задачи с круговым отверстием. Однако на практике отверстие считается круговым с некоторой погрешностью, что затрудняет поиск точного решения. В связи с этим целесообразно применение метода возмущений, который позволяет оценить влияние погрешности на напряженно-деформированное состояние вблизи отверстия и, в частности, на концентрацию напряжений.

Данное исследование является продолжением работы [2], в которой был получен алгоритм нахождения любого приближения. Цель работы — получить результаты для других форм границы, а также решить задачу с помощью пакета конечно-элементного анализа ANSYS и провести сравнение напряженно-деформированного состояния методом возмущений и методом конечных элементов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую плоскость комплексного переменного $z = re^{i\theta}$ с отверстием, форма которого мало отличается от круга единичного радиуса. В общем случае считаем, что на границе отверстия Γ действуют нормальные σ_{nn} и касательные σ_{nt} усилия

$$\sigma_{nn} + i\sigma_{nt} = p(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma,$$

Вакаева Александра Борисовна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vakaeva.alexandra@gmail.com, тел.: +7(921)796-50-60

Греков Михаил Александрович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: magrekov@mail.ru, тел.: +7(921)748-06-08

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-00260

а на бесконечности заданы напряжения σ_{ij} в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2 ($z = x_1 + ix_2$) и угол поворота ω

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\infty = s_{ij}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \omega = 0.$$

Граница отверстия Γ определяется соотношением

$$z \equiv \zeta = \rho e^{i\theta} = (1 + \varepsilon f(\theta)) e^{i\theta},$$

где $|f| \leq 1$, ε — малый параметр, равный максимальному отклонению границы отверстия от единичной окружности, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$.

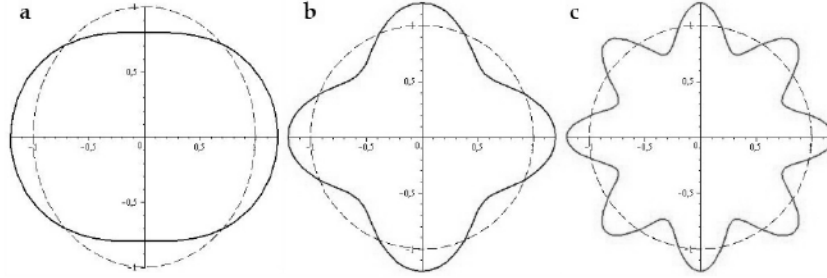


Рис. 1. Границы криволинейных отверстий, определяемые функцией $f(\theta) = \cos k\theta$ при $k = 2, 4, 8$ (соответственно a, b, c)

На рис. 1 кривые построены при $f(s) = \frac{s^k + s^{-k}}{2} = \cos k\theta$, их максимальное отклонение от единичной окружности $\varepsilon = 0,2$. Для сравнения на рис. 1 приведена также граница кругового отверстия единичного радиуса, для которого известно точное решение соответствующей краевой задачи.

3. Метод возмущений. Для решения задачи используем комплексные потенциалы Гурса — Колосова и метод Мусхелишвили [1]. Согласно [1, 3] вектор напряжений $\sigma = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$ на площадке с нормалью \mathbf{n} выражается через две голоморфные вне отверстия (область Ω) функции Φ, Ψ при помощи равенства

$$\sigma = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \left[z\Phi'(z) + \overline{\Psi(z)} \right] \frac{d\bar{z}}{dz},$$

где $dz = |dz|e^{i\alpha}$, $d\bar{z} = \overline{dz}$, α — угол между площадкой и осью x_1 .

Следуя [1], введем новую функцию $\Upsilon(z)$, голоморфную в конечной области $D = \{z : \bar{z}^{-1} \in \Omega\}$ с границей $\tilde{\Gamma}$, которая симметрична кривой Γ относительно единичной окружности,

$$\Upsilon(z) = -\overline{\Phi(\bar{z}^{-1})} + z^{-1}\overline{\Phi'(\bar{z}^{-1})} + z^{-2}\overline{\Psi(\bar{z}^{-1})}, \quad \bar{z}^{-1} \in \Omega.$$

Осуществим предельный переход при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$, $z \in \Omega$ и, как показано в [2], получим краевое условие, которому должны удовлетворять функции Φ и Ψ :

$$p(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\rho' - i\rho}{\rho' + i\rho} \left[\frac{1}{\zeta^2} \left(\overline{\Phi(\zeta)} + \Upsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right) + \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \overline{\Phi'(\zeta)} \right] \bar{s}^2, \quad (1)$$

где $\Phi(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Phi(z)$ при $z \in \Omega$, $\Upsilon(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Upsilon(z)$ при $z \in D$, $s(\theta) = e^{i\theta}$.

Так как форма границы зависит от малого параметра ε , то функции $\Phi(z)$, $\Upsilon(z)$ также должны зависеть от этого параметра, и их можно представить в виде сходящихся степенных рядов по ε [4]

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_n(z), \quad \Upsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Upsilon_n(z).$$

Как показано в [2], получим разложения для всех функций в (1) при $\zeta \in \Gamma$. Тогда в нулевом и первом приближениях приходим к следующим выражениям:

$$q_0(s) = -p(s), \quad q_1(s) = -p'(s) - \bar{s}f(\bar{s}) \frac{d\Upsilon_0(\bar{s}^{-1})}{d\bar{s}} + sf(s)\Phi_0'(s) + 2(f(s) - if_\theta'(s)) \left(\overline{\Phi_0(s)} + \Upsilon_0(\bar{s}^{-1}) \right) - 2\bar{s}f(s)\overline{\Phi_0'(s)}.$$

Для случая границы отверстия, определяемой функцией $f(\theta) = \cos k\theta$ при $k > 2$ (рис. 1), выражения для комплексных потенциалов примут вид

$$\begin{aligned} \Upsilon_0(z) &= \Phi_0(z) = C + C_2 z^{-2}, \\ \Phi_1(z) &= \frac{(k+1)C_2}{z^{k+2}} + \frac{(k-3)\overline{C_2}}{z^{k-2}} + \frac{2(k-1)C}{z^k}, \\ \Upsilon_1(z) &= (k-1)C_2 z^{k-2} + (k+3)\overline{C_2} z^{k+2} + 2(1+k)C z^k. \end{aligned}$$

Тогда выражение для окружного напряжения на границе

$$\begin{aligned} \sigma_{tt} = & \sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + 2(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) \cos 2\theta - 4\sigma_{12}^{\infty} \sin 2\theta + \\ & + 2(k-1)\varepsilon(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) \cos k\theta + 2\varepsilon \operatorname{Re}[\overline{C_2}((k-4)s^{2-k} + ks^{2+k}) + \\ & + C_2((k+1)s^{-(2+k)} + (k-3)s^{k-2})], \quad (2) \end{aligned}$$

где $4C = \sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}$, $2C_2 = \sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} - 2i\sigma_{12}^{\infty}$.

4. Численные результаты решения задачи методом возмущений.

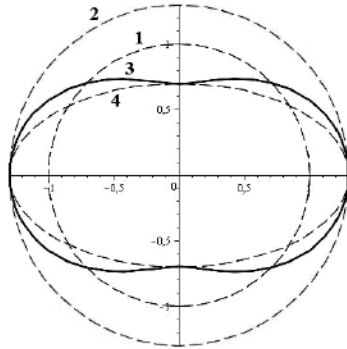


Рис. 2. Границы отверстий при $\varepsilon = 0,3$

В работе [2] были получены численные результаты распределения окружных напряжений σ_{tt} вдоль границы отверстия $f(\theta) = \cos 2\theta$ (кривая 3 на рис. 2). Для сравнения точного решения задачи с эллиптическим отверстием (кривая 4 на рис. 2) при одноосном растяжении перпендикулярно большой оси эллипса и приближенного с отверстием $f(\theta) = \cos 2\theta$ приведем таблицу.

Таблица. Коэффициенты концентрации напряжений для эллипса (K^{el}) и криволинейного отверстия (K^a) в зависимости от параметра ε

ε	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
(K^a)	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0
(K^{el})	3,44	4	4,7	5,67	7

Как и следовало ожидать, значения коэффициента K^a меньше соответствующих значений коэффициента K^{el} (см. рис. 2).

На рис. 3 представлены распределения окружных напряжений вдоль границы $f(\theta) = \cos k\theta$ при $k = 4$, полученные по формуле (2) при различных значениях малого параметра ε . Из рис. 3 следует, что чем больше ε , тем больше максимальные значения напряжений σ_{tt} . Совершенно естественно, что эти значения превышают также соответствующие значения для кругового отверстия радиуса $1 + \varepsilon$.

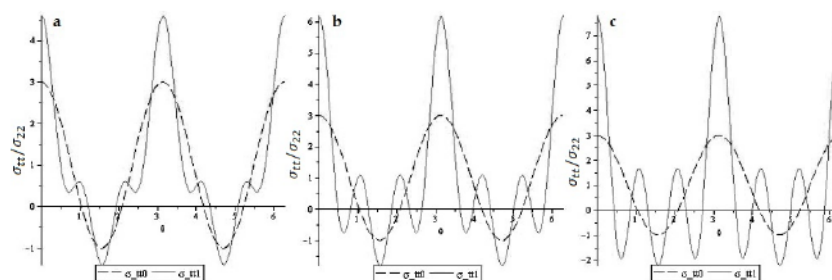


Рис. 3. Зависимость напряжений σ_{tt} от полярного угла θ для функции $f(\theta) = \cos 4\theta$ при $\varepsilon = 0, 1; 0, 2; 0, 3$ (соответственно a, b, c)

5. Результаты решения задачи в пакете конечно-элементного анализа ANSYS и выводы. Для построения модели в пакете конечно-элементного анализа ANSYS используем элемент конструкции plane183 — пластина, состоящая из восьмиузловых элементов. Конструкция от материала не зависит, коэффициент Пуассона равен 0,3, в силу симметрии можно рассматривать четверть конструкции. Так как напряжения действуют на бесконечности, размеры пластины должны быть достаточно велики по сравнению с дефектом, а именно, в пять и более раз больше. При рассмотрении различных вариантов разбиений было получено, что для достижения результатов с минимальной погрешностью требуется использовать равномерную сетку. Ключевые точки для построения этой сетки выбираем при отношении 1:10 радиуса отверстия и самой пластины, по границе пластины с интервалом 0,05, само отверстие разбиваем произвольно. Данное разбиение оптимально для достижения результатов с погрешностью в 1–2%. Увеличивая интервал или изменяя размеры пластины, в зависимости от формы отверстия, может варьироваться погрешность сходимости решения методом конечных элементов к аналитическому решению.

Рассмотрим случай границы $\cos 2\theta$ при $\varepsilon = 0, 3$. Методом возмущений получено, что коэффициент концентрации напряжений примерно равен 4,2. На различных разбиениях сетки получаем сходимость к аналитическому решению с погрешностью в 1–2% (рис. 4).

Таким образом, в работе методом возмущений построено решение

задачи о напряженно-деформированном состоянии упругой плоскости с криволинейным отверстием, близким к круговому. В первом приближении рассмотрены различные формы дефектов. В пакете конечно-элементного анализа ANSYS построено решение, близкое к найденному, методом возмущений с погрешностью в 1–2%, что позволяет сделать вывод о достаточно хорошем первом приближении.

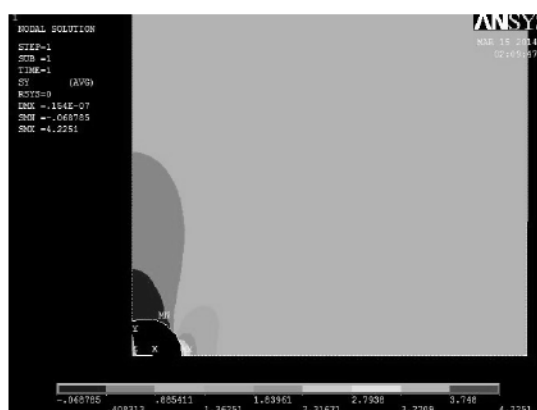


Рис. 4. Окружные напряжения у границы отверстия $f(\theta) = \cos 2\theta$ при $\varepsilon = 0,3$

Литература

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Вакаева А. Б., Греков М. А. Метод возмущений в задаче о криволинейном отверстии в упругой плоскости // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 159–164.
3. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 192 с.
4. Греков М. А., Макаров С. Н. Концентрация напряжений у слабо искривленного участка поверхности упругого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 6. С. 53–61.

УДК 524.7-333

Громов А. О.

Оценка параметров для обобщенно-изотермической модели Галактики

Рекомендовано к публикации доцентом Осипковым Л. П.

1. Введение. Для звездных систем, в частности, для нашей Галактики, построено множество моделей. Одной из важных проверок на их состоятельность является возможность аппроксимировать с их помощью реальные звездные системы.

Рассмотрим одну из моделей распределения масс в звездных системах. Одним из преимуществ такой модели является то, что она построена при предположении о существовании третьего квадратичного по скоростям интеграла движения в виде

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2v_\theta^2 + z_0^2(v_z^2 - 2\Phi^*),$$

где R, z — цилиндрические координаты, v_R, v_θ, v_z — компоненты скорости в цилиндрической системе координат, z_0 — постоянная с размерностью длины, а функция $\Phi^*(R, z)$ связана с осесимметричным потенциалом $\Phi(R, z)$ следующим образом:

$$\begin{cases} z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} = z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \end{cases}$$

Такие модели впервые были предложены Г. Г. Кузминым [1, 2]. Их преимущество в том, что, не выходя за рамки теории стационарной Галактики, они позволяют объяснить наблюдаемую в окрестности Солнца трехосность распределения скоростей.

Потенциал таких моделей является штеккелевским, а значит допускает разделение переменных в уравнении Гамильтона — Якоби. Благодаря этому возможно решить задачу нахождения орбит в квадратурах.

Громов Анатолий Олегович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: granat08@yandex.ru, тел.: +7(905)213-63-28

2. Обобщенно-изотермическая модель. При построении модели выбирался потенциал, который в экваториальной плоскости совпадает с обобщенно-изотермическим, предложенным в [3]

$$\Phi = \Phi_0 \ln \left(1 + \frac{\beta}{w(R)} \right),$$

где Φ_0 — масштабный параметр, $\beta \in [0, +\infty)$ — структурный параметр, а функция $w(R)$ определяется как

$$w^2(R) = 1 + \varkappa^2 R^2.$$

Здесь \varkappa — масштабный параметр модели.

Кроме того, в [3] показано, что ход плотности в моделях с таким потенциалом хорошо аппроксимирует эмпирический профиль де Воккера.

Используя теорию построения моделей с третьим квадратичным интегралом, можно распространить потенциал с экваториальной плоскости на все пространство, а также получить выражение для пространственной плотности. Построение модели, изучение ее свойств, а также построение проекций видимой плотности изложены в работах [4–6].

3. Оценка параметров модели. Задача состоит в оценке параметров \varkappa , β и Φ_0 так, чтобы полученная модель звездной системы наиболее хорошо аппроксимировала наблюдательные данные о нашей Галактике. С помощью выбора значений этих параметров можно регулировать некоторые свойства модели.

Для оценки параметров будем пользоваться сравнением модельной кривой круговой скорости с наблюдательными данными о вращении Галактики, приведенными в работе [7]. Для построения модельной кривой используем формулу для круговой скорости

$$v_R^2 = -R \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (1)$$

Имея 150 значений круговых скоростей на различных расстояниях, полученных в результате наблюдений нейтрального водорода [7], выберем параметры модели так, чтобы построенная кривая вращения как можно лучше согласовывалась с этими значениями. Для оценки параметров воспользуемся методом наименьших квадратов.

Необходимо минимизировать значение функции

$$L = \sum_{i=1}^{150} (v_R(R_i) - v_i)^2 ,$$

где $v_R(R_i)$ — значения круговых скоростей, вычисленных по формуле (1) в точках R_i , а v_i — значения круговых скоростей, полученные в результате наблюдений, в этих точках.

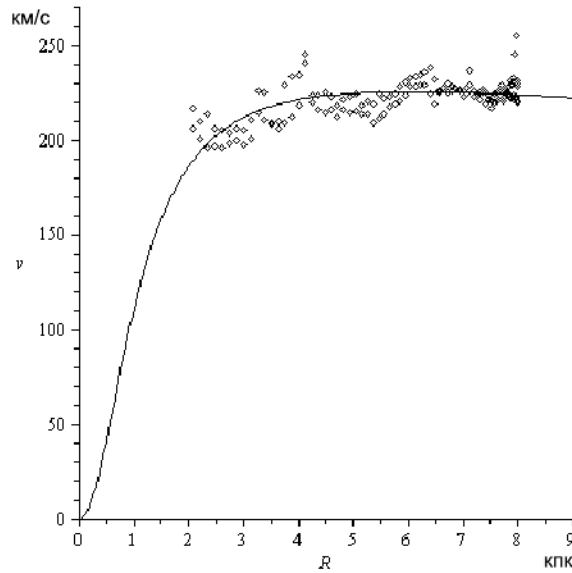


Рис. 1. Сравнение модельной кривой вращения с наблюдательными данными

Было найдено, что минимум функции L достигается при $\alpha = 0,91 \text{ кпк}^{-1}$, $\beta = 7,8$, $\Phi_0 = 249,7 \text{ км}^2\text{с}^{-2}$, а следовательно, при этих значениях обобщенно-изотермическая модель лучше всего аппроксимирует распределение массы в нашей Галактике. Сравнение модельной кривой вращения при оптимальных параметрах с наблюдательными данными представлено на рис. 1, где сплошная кривая — модельная кривая вращения, а точками обозначены наблюдательные значения круговых скоростей.

Среднее отклонение модельной кривой от наблюдательных данных вычислялось по формуле

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{150} |v_R(R_i) - v_i|}{150}.$$

Оказалось, что оно составляет $\varepsilon = 5,7\text{км/с}$ или 2,6% от среднего значения наблюдаемых круговых скоростей.

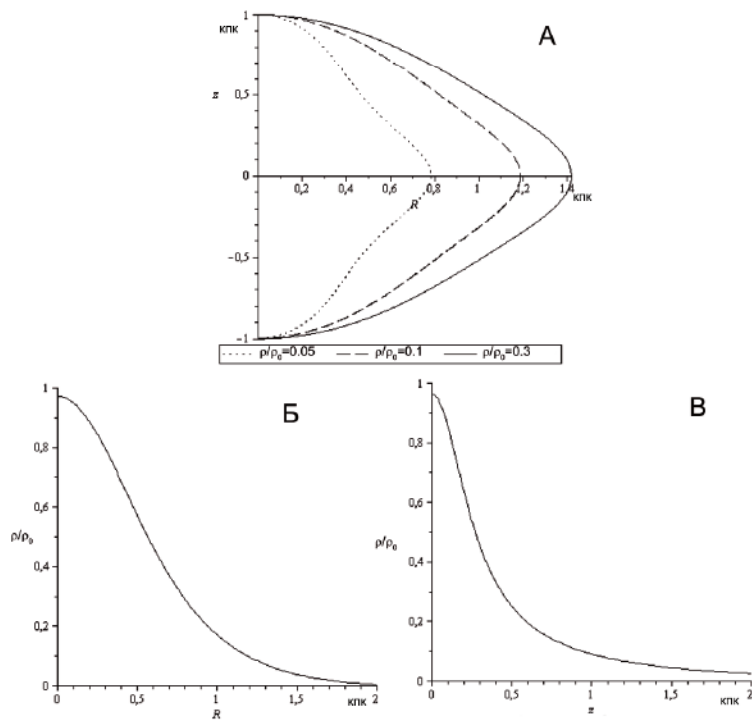


Рис. 2. А — эквиденситы, Б — ход плотности в экваториальной плоскости, В — ход плотности на оси симметрии

Таким образом, можно заключить, что обобщенно-изотермическая модель может с большой степенью точности согласовываться с наблюдательными данными о нашей Галактике.

4. Обобщенно-изотермическая модель Галактики. Для построения обобщенно-изотермической модели Галактики подставим полученные значения параметров \varkappa, β, Φ_0 в выражение для пространственной плотности, которое приведено в работах [4, 5]. Будем полагать $z_0 = 1$, что позволяет сравнить результаты с полученными значениями параметров с результатами, полученными в [4, 6]. В результате были построены эквиденситы (кривые равной плотности), а также графики хода плотности в экваториальной плоскости и на оси симметрии, которые представлены на рис. 2. Плотность, как и в работах [4–6], дается в единицах центральной плотности при значениях параметров $\beta = 1, \varkappa = 1 \text{ кпк}^{-1}, \Phi_0 = 1 \text{ км}^2 \text{ с}^{-1}$, которая обозначается ρ_0 . Это позволяет сравнить результаты с полученными ранее. Отметим, что в более ранних работах приоритет отдавался более малым значениям параметров, и как результат получились несколько отличные от полученных в данной работе эквиденситы.

Отметим, что эквиденситы получились эллипсоподобными и более схожи с эквиденситами предельной (при $\beta \rightarrow \infty$) модели Яффе [6]. Это объясняется тем фактом, что оценка параметра β получилась сравнительно большой.

Кроме того, ход плотности на оси симметрии и в экваториальной плоскости монотонно убывает, что является физически правдоподобным.

5. Заключение. Вычислены оценки параметров обобщенно-изотермической модели звездных систем для нашей Галактики, опираясь на наблюдательные данные о нейтральном водороде. Построены графики распределения плотности для этих параметров. В работах [4–6] фигурирует также параметр z_0 , но задача его оценки отлична от рассмотренной в данной работе. Поэтому оценка значений z_0 — одна из следующих задач.

Литература

1. Кузмин Г. Г. Третий интеграл движения звезд и динамика стационарной Галактики // Публикации Тартуской астрономической обсерватории. 1952. Т. 32. С. 332–368.
2. Кузмин Г. Г. Модель стационарной Галактики, допускающая трехосное распределение скоростей // Астрон. журнал. 1956. Т. 33. С. 27–45.

3. Кузмин Г. Г., Велтманн Ю.-И. К., Теньес П. Л. Квази-изотермические модели сферических звездных систем // Публикации Тартуской астрофиз. обсерватории. 1986. Т. 51. С. 232–242.
4. Громов А. О. Штеккелевские изотермические модели галактик // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 125–129.
5. Громов А. О. Проекция плотности для моделей звездных систем с обобщенно-изотермическим потенциалом // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 187–192.
6. Громов А. О. Новые штеккелевские модели галактик // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. 2013. № 221. С. 129–134.
7. Nikiforov I. I. Galactic constant and rotation from two kinematically distinguishable gaseous subsystems: HI and CO // Кинематика и физика небесных тел. Приложение. 1999. № 2. С. 29–44.

УДК 539.3

Доманская Т. О., Мальков В. М.

Нелинейная задача о сосредоточенной силе на межфазной границе двух полуплоскостей

1. Введение. Рассматривается плоская задача нелинейной теории упругости (плоская деформация и плоское напряженное состояние) для двухкомпонентной плоскости при действии сосредоточенной силы на межфазной линии. Механические свойства описываются моделью полуплинейного материала. Использование этой модели позволило применить теорию комплексных функций и получить общее аналитическое решение краевой задачи. Исходя из этого решения, построена асимптотика напряжений и перемещений в окрестности точки приложения силы.

2. Общие соотношения. В данной работе используются уравнения обобщенной плоской деформации и плоского напряженного состояния для полуплинейного материала [1].

Уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций плоской задачи в комплексной форме имеют вид

$$\begin{aligned}(s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 &= 0, \\ (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где s_{ij} — компоненты тензора номинальных напряжений, g_{ij} — компоненты градиента деформации, $i, j = 1, 2$.

Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ и комплексную функцию напряжений $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$. Уравнения (1) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$\begin{aligned}s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, & s_{22} - is_{21} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, & g_{22} - ig_{12} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}.\end{aligned}\tag{2}$$

Доманская Татьяна Олеговна — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: tanyath57@gmail.com, тел.: +7(911)958-87-00

Мальков Вениамин Михайлович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vmmalkov@apmath.spbu.ru, тел.: +7(812)428-42-35

Комплексные функции $\zeta(z, \bar{z})$ и $\sigma(z, \bar{z})$ находятся из закона упругости и граничных условий задачи.

Закон упругости для полулинейного материала [1]

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + ig_{21}) + \lambda(g_{22} - ig_{12}) + k e^{i\omega}, \\ s_{22} - is_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - ig_{12}) + \lambda(g_{11} + ig_{21}) + k e^{i\omega}, \\ s_{33} &= \lambda[(g_{11} + g_{22}) \cos \omega + (g_{21} - g_{12}) \sin \omega] + k + 2\mu\lambda_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где λ, μ — параметры Ляме, $k = \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu$. Угол ω , характеризующий поворот элемента среды, вычисляется по формуле [2]

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{g_{21} - g_{12}}{g_{11} + g_{22}} = \frac{s_{12} - s_{21}}{s_{11} + s_{22}}.$$

Подставив в первое и второе соотношения (3) выражения (2), получим систему уравнений для функций $\sigma(z, \bar{z})$ и $\zeta(z, \bar{z})$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = -2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (4)$$

Константа c зависит от рассматриваемой задачи. Нужно учесть, что при плоской деформации $\lambda_3 = 1$, $k = -2(\lambda + \mu)$. В случае плоского напряженного состояния λ_3 и k являются функциями, определяемыми из условия $s_{33} = 0$ и третьего уравнения в (3),

$$\lambda_3 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{2\nu}{1 - \nu} \frac{\partial \zeta}{\partial z} e^{-i\omega}, \quad k = -2\mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \lambda \frac{2\nu}{1 - \nu} \frac{\partial \zeta}{\partial z} e^{-i\omega}.$$

Для указанных задач получим соответственно

$$c = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad c = \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

где ν — коэффициент Пуассона. Решение уравнений (4) имеет вид

$$2\mu\zeta = \frac{1}{1 + c} [\varphi(z) - \overline{\psi(z)} - f(z, \bar{z})],$$

$$\sigma = \frac{1}{1 + c} [c\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + f(z, \bar{z})],$$

здесь $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические функции комплексной переменной z ,

$$f(z, \bar{z}) = -2\mu c \int e^{i\omega} dz,$$

где

$$e^{i\omega} = \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|} = \frac{|\varphi'(z)|}{\varphi'(z)} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(z)}}.$$

Выразим напряжения через функцию $\zeta(z, \bar{z})$

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right) + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \\ s_{22} - is_{21} &= 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right) - 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Задача о сосредоточенной силе. Получим решение нелинейной задачи о сосредоточенной силе на межфазной линии двухкомпонентной плоскости. Пусть в начале координат приложена внешняя сила с компонентами F_1 и F_2 , обозначим $F = F_1 + iF_2$. Предполагается, что на бесконечности напряжения и поворот отсутствуют. Условия на линии раздела двух полуплоскостей имеет вид

$$\begin{aligned} [s_{22} - is_{21}]^+ - [s_{22} - is_{21}]^- &= -iF\delta(t), \\ [g_{11} + ig_{21}]^+ - [g_{11} + ig_{21}]^- &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

На основании уравнений (6) введем две новые комплексные функции, аналитические во всей плоскости, кроме линии раздела материалов,

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{c_2}{1+c_2}\varphi_2'(z) - \frac{1}{1+c_1} \left(\bar{\psi}_1'(z) + q_1(z) \right), \quad z \in S_2, \\ r(z) &= \frac{1}{2\mu_2(1+c_2)}\varphi_2'(z) + \frac{1}{2\mu_1(1+c_1)} \left(\bar{\psi}_1'(z) + q_1(z) \right), \quad z \in S_2. \end{aligned}$$

Для нижней полуплоскости комплексные функции $h(z)$ и $r(z)$ получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств.

При плоской деформации

$$c_2 = \frac{1}{1-2\nu_2}, \quad c_1 = \frac{1}{1-2\nu_1},$$

а при плоском напряженном состоянии

$$c_2 = \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}, \quad c_1 = \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}.$$

Функция $q(z)$ для соответствующей полуплоскости вычисляется по формуле

$$q(z) = k \left(\sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\bar{\varphi}'(z)}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\varphi}''(z)}{(\bar{\varphi}'(z))^{3/2}} \int \sqrt{\varphi'(z)} dz \right).$$

Для функций $h(z)$ и $r(z)$ из условия (6) получим граничную задачу [3]

$$[h(t)]^+ - [h(t)]^- = p(t), \quad [r(t)]^+ - [r(t)]^- = 0,$$

решение которой имеет вид

$$h(z) = -\frac{F}{2\pi} \frac{1}{z} + h(\infty), \quad h(\infty) = \frac{2\mu_1 c_1}{1+c_1} + \frac{2\mu_2 c_2}{1+c_2},$$

$$r(z) = r(\infty).$$

Используя это решение, найдем следующие функции

$$\varphi_2'(z) = -\frac{\mu_2(c_2+1)}{\mu_2 c_2 + \mu_1} \frac{F}{2\pi} \frac{1}{z} + 2\mu_2, \quad \varphi_1'(z) = -\frac{\mu_1(c_1+1)}{\mu_1 c_1 + \mu_2} \frac{F}{2\pi} \frac{1}{z} + 2\mu_1,$$

$$\bar{\psi}_1'(z) + q_1(z) = \frac{\mu_1 c_1 + \mu_2}{\mu_2 c_2 + \mu_1} (-\varphi_1'(z) + 2\mu_1) + k_1,$$

$$\bar{\psi}_2'(z) + q_2(z) = \frac{\mu_2 c_2 + \mu_1}{\mu_1 c_1 + \mu_2} (-\varphi_2'(z) + 2\mu_2) + k_2,$$

$$e^{i\omega} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\bar{\varphi}'(z)}} = \sqrt{\frac{(z-F_0)\bar{z}}{(\bar{z}-\bar{F}_0)z}},$$

$$f(z, \bar{z}) = k \int e^{i\omega} dz = k p(z) \sqrt{\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{F}_0}},$$

$$q(z) = k \left[\sqrt{\frac{z-F_0}{z-\bar{F}_0}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{F}_0}{z-\bar{F}_0} \frac{p(z)}{\sqrt{(z-\bar{F}_0)z}} \right],$$

$$p(z) = \sqrt{z^2 - F_0 z} - F_0 \ln \left(\frac{\sqrt{z-F_0} + \sqrt{z}}{\sqrt{-F_0}} \right),$$

$$F_0 = \frac{\mu_2(c_2 + 1)}{\mu_2 c_2 + \mu_1} \frac{F}{4\mu_2 \pi}, \quad z \in S_2; \quad \bar{F}_0 = \frac{\mu_1(c_1 + 1)}{\mu_1 c_1 + \mu_2} \frac{F}{4\mu_1 \pi}, \quad z \in S_1.$$

Напряжения будем вычислять по формулам (5), предварительно найдя функции

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{1 + c_2} \left[\frac{z - F_0}{z} + c_2 \sqrt{\frac{(z - F_0)\bar{z}}{(\bar{z} - \bar{F}_0)z}} \right], \quad z \in S_2,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = \frac{c_2}{1 + c_2} \left[\frac{\bar{z} - F_0}{\bar{z}} - \sqrt{\frac{\bar{z} - F_0}{\bar{z} - \bar{F}_0}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{F}_0}{\bar{z} - \bar{F}_0} \frac{p(z) - p(\bar{z})}{\sqrt{(\bar{z} - \bar{F}_0)z}} \right], \quad z \in S_2.$$

Функции для нижней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств.

Построим асимптотические разложения функций при $z \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{1 + c_2} \left(-F_0 \frac{1}{z} + 1 + c_2 \alpha \right) + O(z^2), \quad z \in S_2,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = \frac{c_2}{1 + c_2} \left(-F_0 \frac{1}{\bar{z}} + \beta \right) + O(z^2), \quad z \in S_2,$$

Асимптотические разложения нижней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств. Где обозначено

$$\alpha = \left(1 - \frac{z}{2F_0} + \frac{\bar{z}}{2\bar{F}_0} \right) \sqrt{\frac{F_0}{\bar{F}_0}} e^{-i\theta},$$

$$\beta = 1 - \sqrt{\frac{F_0}{\bar{F}_0}} + \frac{1}{2} \bar{z} \left(\frac{1}{F_0} - \frac{1}{\bar{F}_0} \right) \sqrt{\frac{F_0}{\bar{F}_0}} + \frac{1}{3} \frac{z\sqrt{\bar{z}} - \bar{z}\sqrt{z}}{\sqrt{F_0 \bar{F}_0 \bar{z}}}.$$

Асимптотические разложения напряжений в этой точке

$$s_{11} + i s_{12} = -\frac{2\mu_2 c_2}{1 + c_2} \left[F_0 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) - 1 + \alpha - \beta \right] + O(z^2),$$

$$s_{22} - i s_{21} = -\frac{2\mu_2 c_2}{1 + c_2} \left[F_0 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right) - 1 + \alpha + \beta \right] + O(z^2),$$

Асимптотические разложения нижней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств.

Разложения текущих координат в окрестности точки приложения силы при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$\zeta = -\frac{1}{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_1} \frac{F}{4\pi} (\ln z + c_2 \ln \bar{z}) + O(1), \quad z \in S_2.$$

Формула для нижней полуплоскости получается циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правой части равенства.

4. Выводы. Для модели полулинейного материала получено точное аналитическое решение нелинейной задачи о действии сосредоточенной силы на линии раздела полуплоскостей двухкомпонентной плоскости. Построены асимптотические разложения напряжений и перемещений в окрестности точки приложения силы. Показано, что все условные (номинальные) напряжения имеют особенность типа $1/r$ при $r \rightarrow 0$. Напряжения других видов будут иметь асимптотические разложения другого типа, в частности, раньше было показано [4], что истинные напряжения Коши не имеют особенности в задаче о действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости. Перемещения имеют логарифмическую особенность типа $\ln r$ при $r \rightarrow 0$.

Литература

1. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоские задачи о сосредоточенных силах для полулинейного материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 83–96.
2. Мальков В. М. Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. 276 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 708 с.
4. Доманская Т. О., Мальков В. М. Плоская задача Мичела для полулинейного материала // Научное творчество XXI века: Сб. трудов по итогам VII Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (31 октября, 2013 г.) / под ред. Я. А. Максимова. Красноярск: Научно-инновационный центр, 2013. С. 306–312.

УДК 519.62

Дорофеева А. А., Еремин А. С.

Решение дифференциальных уравнений с переменными запаздываниями функционально-непрерывными методами Рунге — Кутты

1. Введение. Во многих математических моделях динамика процесса зависит не только от текущего состояния, но и от предыстории его развития. Наибольшее распространение такие модели получили в биологии и медицине при моделировании развития популяций, распространения инфекций, болезни и иммунологического ответа в отдельном организме, динамике лекарств, а также в изучении социально-экономических процессов. Они известны как модели с запаздыванием. Аналитическое решение таких задач в общем случае представляет большие трудности. Приближенный результат можно получить с помощью численных методов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (ДУ) с дискретными запаздываниями

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_k)) \quad (1)$$

с заданными функциями истории

$$\varphi_i: [-\tau_i, t_0], \quad i = \overline{1, k}.$$

В том случае, когда все запаздывания τ_i постоянны, можно выбрать шаг одношагового метода меньше минимального из них. Тогда все запаздывающие решения $y(t - \tau_i)$ надо будет вычислять только на уже пройденных шагах. Для их нахождения традиционно используется интерполяция по уже вычисленным значениям, либо с помощью непрерывных методов Рунге — Кутты (НРК) [1, 2], либо с использованием сплайнов. Последний подход реализован в процедурах решения ДУ с запаздываниями в пакете MATLAB.

Дорофеева Анастасия Александровна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: drofa_tortilla@mail.ru, тел.: +7(911)142-48-55

Еремин Алексей Сергеевич — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ereminh@gmail.com, тел.: +7(921)871-89-37

Однако в случае переменных запаздываний ($\tau_i = \tau_i(t, y(t))$) для применения этой стратегии зачастую приходится слишком сильно уменьшать шаг, что ведет к необоснованному увеличению вычислительных затрат, а при исчезающих задержках ($\tau_i = 0$ при некоторых t и $y(t)$) достаточно уменьшить шаг вообще невозможно. Процедура `ddesd` из MATLAB, рассчитанная на решение уравнений с переменными запаздываниями, управляет длиной шага только исходя из требований на локальную точность метода (т. е. не стремится сделать шаг меньше запаздываний). Ситуацию, когда запаздывание становится меньше длины шага, будем называть в этой работе *недолётом*. По-английски устоялся термин *overlapping*, для которого, к сожалению, не удаётся подобрать изящного перевода. Мотивация термина *недолёт* такова, что из t вычитается слишком маленький τ , словно снаряд не долетает до цели — начала совершаемого шага. В случае *недолёта* метод, применяемый в данной процедуре, становится полностью неявным, и приближение к решению ищется с помощью итерационной процедуры, что повышает вычислительные затраты на совершение одного шага, в общем случае — значительно.

2. Функционально-непрерывные методы Рунге — Кутты (ФНРК). При длине шага меньше запаздывания можно применять любые НРК как неявные, так и явные. Но при *недолёте* из-за необходимости применять интерполяцию по еще невычисленным значениям (например, решению в конце шага) любые методы становятся полностью неявными. Это приводит к росту времени решения.

В статье [3] предложены явные методы РК, для которых эта проблема решена. На каждом этапе совершаемого шага значения запаздывающего решения в точках, принадлежащих совершаемому шагу, вычисляются с помощью интерполяции лишь по уже найденным функциям этапов k_i . Это позволяет сохранить явность и другие структурные особенности применяемого метода. Такие методы получили название ФНРК. Следует отметить, что хотя в [3] даны теоретические результаты, практическая реализация методов и их сравнение с имеющимися ранее не проводилась.

Не ограничивая общности, но существенно упрощая запись, рассмотрим уравнение (1) с одним переменным запаздыванием. Пусть совершено уже n шагов от t_0 до t_n . Решение на шаге длиной h_n

$$y(t_n + h_n) \approx y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i k_i^{(n)}, \quad (2)$$

$$k_i^{(n)} = f \left(t_n + c_i h_n, y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j^{(n)}, w_i(\nu_i) \right),$$

где $\nu_i = t_n + c_i h_n - \tau_i$, $\tau_i = \tau_i \left(t_n + c_i h_n, y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j^{(n)} \right)$, а приближение к решению в этой точке

$$w_i(\nu_i) = \begin{cases} \varphi(\nu_i), & \nu_i \leq t_0, \\ y_m + h_m \sum_{i=1}^s b_i \left(\frac{\nu_i - t_m}{t_{m+1} - t_m} \right) k_i^{(m)}, & t_m < \nu_i \leq t_{m+1}, \\ h_m = t_{m+1} - t_m, & m = \overline{0, n-1}, \\ y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \left(\frac{\nu_i - t_n}{h_n} \right) k_j^{(n)}, & \nu_i > t_n. \end{cases}$$

Если нужно определить решение левее точки t_0 , то используется история; если искомое решение попадает на m -й шаг, то производится интерполирование по всем $k_i^{(m)}$; если же оно оказывается на текущем шаге n , то интерполируем только по уже вычисленным $k_i^{(n)}$.

Параметры метода c_i , b_i , $b_i(\vartheta)$, a_{ij} , $a_{ij}(\vartheta)$ удобно представлять в виде так называемой таблицы Бутчера [1]. В отличие от обычных методов РК мы расширяем таблицу для записи параметров $a_{ij}(\vartheta)$ и $b_i(\vartheta)$.

За счет правильного выбора параметров $a_{ij}(\vartheta)$ удается сохранить порядок метода и в случае *недолёта*. Также, как видно из схемы, она является явной, и на каждом шаге совершается одно и то же количество действий независимо от соотношения длины шага и запаздывания. Это существенно упрощает применение метода по сравнению с подходом, используемым в `ddesd`.

Стоит также упомянуть, что контроль локальной погрешности в `ddesd` осуществляется с помощью оценки невязки (на что тратится два дополнительных вычисления правой части). Такой подход часто не оправдывает себя, и многие вычислители отдадут предпочтение

оценке контрольного члена с помощью вложенных методов. В метод (3) вложен метод-оценщик второго порядка (4). И вообще, методы из [3] содержат внутри себя вложенные методы всех меньших порядков. Это позволяет проводить контроль погрешности без дополнительных затрат.

$$\begin{array}{c|ccc|cccc}
 c_i & a_{ij} & & & a_{ij}(\vartheta) & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 1 & 1 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & \\
 \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \vartheta - \frac{1}{2}\vartheta^2 & \frac{1}{2}\vartheta^2 & 0 & 0 & \\
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \vartheta - \frac{1}{2}\vartheta^2 & \frac{1}{2}\vartheta^2 & 0 & 0 & \\
 \hline
 b_i & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & b_i(\vartheta) & \vartheta - \frac{3}{2}\vartheta^2 + \frac{2}{3}\vartheta^3 & 0 & 2\vartheta^2 - \frac{4}{3}\vartheta^3 - \frac{1}{2}\vartheta^2 + \frac{2}{3}\vartheta^3
 \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{c|ccc|cccc}
 & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \vartheta - \frac{1}{2}\vartheta^2 & \frac{1}{2}\vartheta^2 & 0 & 0
 \end{array} \quad (4)$$

3. Результаты практических вычислений. Наиболее распространенные методы решения ДУ в MATLAB (`ode23`, `dde23`) используют вложенную пару методов третьего и второго порядков с четырьмя этапами. Реализуем на MATLAB пару (3), (4). К сожалению, процедура `dde23` решает ДУ только с постоянными запаздываниями. Поэтому за неимением другого конкурента рассмотренный выше метод сравнивается с процедурой четвертого порядка `ddesd`.

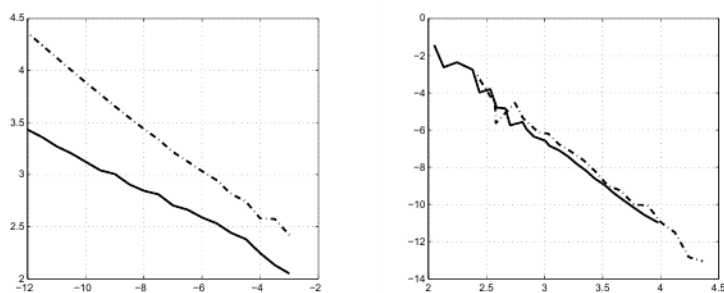


Рис. 1. Сравнение расчётов для задачи (5)

Было рассмотрено три примера из [4], для которых известно аналитическое решение или контрольное значение решения в некоторой точке. Все эти примеры неизбежно приводят к *недолёту*, по крайней мере, на начальных шагах. На рис. 1–3 представлены зависимость глобальной погрешности от количества обращений к правой части (слева) и от требования на локальную погрешность на каждом шаге или на невязку для `ddesd` (справа) в двойной логарифмической шкале для соответствующего примера. Сплошной линией представлены результаты метода (3), штриховой — `ddesd`.

Пример 1. ДУ с двумя запаздываниями

$$\begin{cases} y'(t) = y\left(t - \frac{1}{10}\right) y(t^2), & 0 \leq t \leq 1, \\ Y(t) = 1, & t < 0, \\ Y(0) = 2. \end{cases} \quad (5)$$

Решение проводилось на интервале $[0, 1]$. Контрольным решением является значение $y(1) = 67,981879379380$.

Пример 2. Начальная задача для ДУ с запаздыванием

$$y'(t) = y\left(\frac{t}{(1+2t)^2}\right)^{(1+2t)^2}, \quad t \geq 0, \quad Y(0) = 1. \quad (6)$$

Аналитическое решение $y(t) = e^t$ при $t \geq 0$. Решение проводилось на отрезке $[0, 10]$.

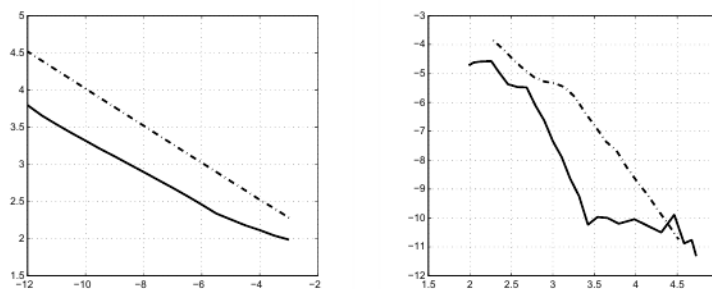


Рис. 2. Сравнение расчётов для задачи (6)

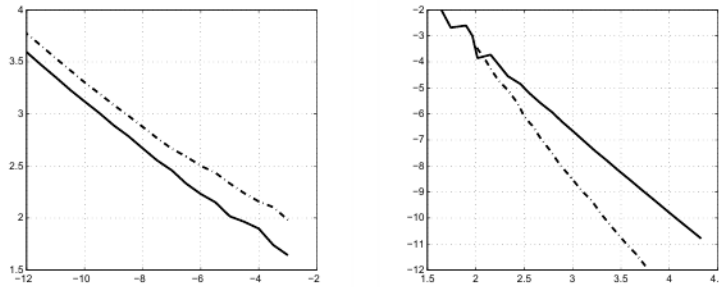


Рис. 3. Сравнение расчётов для задачи (7)

Пример 3. ДУ с запаздыванием, зависящим от решения,

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)y(\ln(y(t)))}{t}, & t \geq 1, \\ Y(t) = 1, & t \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Аналитическое решение $y(t) = t$ при $1 \leq t \leq e$ и $y(t) = e^{\frac{t}{e}}$ при $e \leq t \leq e^2$. Решение проводилось на отрезке $[1, e^2]$.

4. Заключение. Рассмотренный метод показал себя практически применимым и в некоторых задачах был не хуже метода четвёртого порядка. Кроме того, его особенности позволят более эффективно решать задачу обработки точек разрыва производных. Используя ту же идею можно разработать и другие методы, сохраняющие свою структуру при *недолёте*, например, диагонально-явные РК.

Литература

1. Хайрер Э., Нёрсетт С. П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Том 1. М.: Мир, 1990. 512 с.
2. Bellen A., Zennaro M. Numerical methods for delay differential equations. Oxford: Oxford University Press, 2003. 413 p.
3. Maset S., Torelli L., Vermiglio R. Runge–Kutta methods for retarded functional differential equations // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2005. Vol. 15, No 8. P. 1203–1251.
4. Paul C. A. H. A test set of functional differential equations // NA Report No 243. Dept. of Maths, Univ. of Manchester. 1994. 42 p.

УДК 514.853

Ежакова Т. Р.

Построение вычислительного эксперимента в гидродинамике на основе метода крупных частиц

Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.

1. Введение. Эксперимент всегда являлся одной из важнейших частей любого исследования. В настоящее время почти любой натурный эксперимент требует больших ресурсных и финансовых затрат, поэтому его постепенно вытесняет вычислительный эксперимент. Основным способом моделирования в гидродинамике является дискретизация уравнений в частных производных.

Движение вязкой жидкости описывается уравнением Навье – Стокса [1]

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v \right] = -\text{grad} p + \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad} \text{div} v, \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, v – скорость, p – давление, η и ζ – коэффициенты вязкости.

Аналитическое решение уравнения (1) вызывает значительные затруднения и является одной из знаменитых проблем тысячелетия. Существенным осложнением при рассмотрении этого уравнения является незамкнутость. Для борьбы с этим приходится вводить дополнительные условия. В практических расчетах используется дискретизация уравнения, что в совокупности с дискретизацией дополнительных условий приводит к потере физического смысла самой задачи.

2. Метод крупных частиц. Вычислительный эксперимент требует развития существующих методов с целью распараллеливания вычислительных потоков. Основой для новых методов может послужить *метод крупных частиц* [2]. Для его описания следует сначала рассмотреть *метод частиц в ячейках*. Он сочетает в себе преимущества лагранжева и эйлерова подходов. Область решения разбивается неподвижной фиксированной в пространстве (эйлеровой) расчетной

Ежакова Татьяна Руслановна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: t.r.ezhakova@gmail.com, тел.: +7(921)761-24-74

сеткой, а сплошная среда представляется дискретной моделью. Рассматривается совокупность частиц фиксированной массы (лагранжева сетка частиц), которые движутся через эйлерову сетку ячеек. Частицы служат для определения параметров самой жидкости (энергии, массы, скорости), а ячейки — для определения параметров поля (давления, плотности, температуры). Главным недостатком этого метода является то, что из-за дискретного представления сплошной среды конечным числом частиц в ячейке параметры течений так же определяются дискретным образом. Такие скачки приводят к появлению в решениях автоколебаний и вычислительной неустойчивости. Возникают трудности с областями, где мало частиц. Теряется значительное количество информации. Однако простым увеличением количества частиц эту проблему не решить. В результате получим увеличение размерности задачи и, как следствие, трудности с реализацией алгоритма.

Для модернизации алгоритма имело смысл сохранить эйлерово-лагранжев подход, но при этом учесть непрерывность потока. Будем рассматривать вместо частиц поток массы через границы эйлеровых ячеек. Таким образом, вместо совокупности частиц в ячейках, рассматривается масса всей ячейки — *крупная частица*.

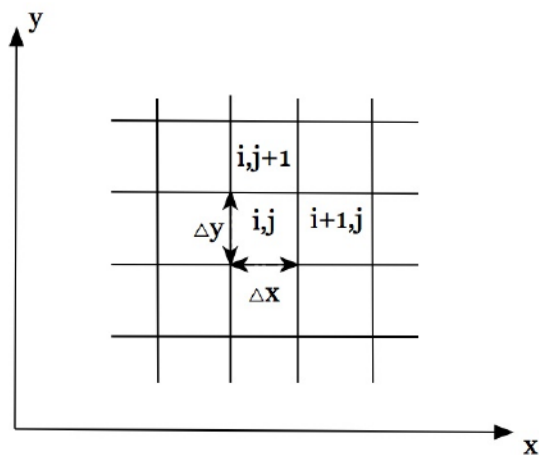


Рис. 1. Структура расчетной сетки

Метод крупных частиц можно разделить на три этапа:

1. Эйлеров этап. Рассмотрение изменения за время Δt импульса и энергии крупной частицы, заключенной внутри данной эйлеровой ячейки (см. рис. 1).
2. Лагранжев этап. Рассмотрение перемещения ячеек относительно жидкости.
3. Заключительный этап. Определение в новый момент времени окончательных значений параметров потока.

Таким образом, моделирующая среда заменяется системой из N частиц, которые распределены в начальный момент времени по ячейкам эйлеровой сетки в координатном пространстве в соответствии с начальными данными. Изменение системы за время Δt отслеживается по следующей схеме: изучается изменение внутреннего состояния ячеек, в предположении, что они неподвижны, затем рассматривается смещение всех частиц с пересчетом сетки (без изменения внутреннего состояния подсистем).

На каждом этапе в данном методе получаем конечно-разностные уравнения для законов сохранения. Разделение метода на этапы позволяет считать отдельно каждый поток (одна частица). При операциях метода крупных частиц используется аппарат тензорной математики.

3. Построение численного эксперимента. Опишем вышеуказанные три этапа, используя тензоры [3–5].

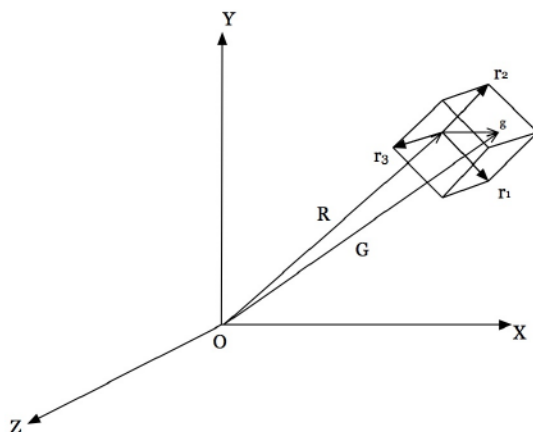


Рис. 2. Локальная и абсолютная системы координат

Будем использовать следующие обозначения: \hat{r} — тензор формы крупной частицы, ${}^+\vec{R}$ — координаты точки в следующий момент времени в абсолютной системе координат, ${}^+\vec{V}$ — полная скорость частицы в следующий момент времени в абсолютной системе координат, \vec{F} — вектор массовых сил, $\check{\rho}$ — тензор плотности частицы, \hat{v} — тензор локальных скоростей.

Тензорные объекты являются базисами внутри частицы жидкости (см. рис. 2).

$$\hat{r} = \left\{ \begin{array}{ccc} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{array} \right\},$$

$$\check{r} = \hat{r}^{-1}.$$

Рассмотрим точку g (см. рис. 2). Пусть $\vec{G} = \mathbf{G}$ — ее радиус-вектор в абсолютной системе координат. Тогда в локальной системе координат ее радиус-вектор определяется соотношением

$${}^<_r\vec{G} = \vec{G} \check{r}.$$

1. Эйлеров этап. Определение состояния частицы в следующий момент времени по полю скорости. Новое поле узловых точек

$${}^+\vec{R} = \vec{R} + \vec{V}t + \vec{F} + {}^<_M \frac{t^2}{2},$$

где ${}^<_M$ — новое поле внутренних свойств ${}^<_M = \check{\rho} (\hat{r} + \hat{v} t)$.

2. Лагранжев этап. Новое поле скорости

$${}^+\vec{V} = \vec{V} + {}^<_M^{-1} \vec{F} t.$$

3. Заключительный этап. Принимаем совокупность полученных на предыдущих этапах значений за текущие. Таким образом, получаем новую сетку, на которой можно повторить вычисления.

4. Заключение. Метод имеет ряд преимуществ по сравнению с обычными сеточными методами [6]. Разрешение меняться со временем позволяет частице автоматически подстраивать себя к локальным условиям. Еще одним преимуществом является гарантия сохранения массы, внутренней энергии и количества движения, а разделение на этапы (независимые физические процессы) необходимо для возможности распараллеливания вычислений.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 736 с.
2. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 391 с.
3. Готман А. Ш. Тензорное исчисление. Новосибирск: Новосибирская государственная академия водного транспорта, 2007. 129 с.
4. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1982. 384 с.
5. Храмушин В. Н. Трехмерная тензорная математика вычислительных экспериментов в гидромеханике. Владивосток: ДВО РАН, 2005. 212 с.
6. Monaghan J. J, An introduction to SPH // Computer Physics Communications. 1988. Vol. 48. P. 88–96.

УДК 536.01, 073.3

Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И., Лебедев Т. В.

Моделирование процесса оледенения морского газопровода

При проектировании морских газопроводов большой протяженности в северных морях, в которых температура воды близка к температуре фазового перехода, возникает необходимость в расчете нарастания слоя льда на внешней поверхности газопровода. Дело в том, что по мере прохождения даже подогретого газа по протяженному трубопроводу температура газа становится отрицательной, что может вызвать оледенение и повысить плавучесть газопровода. С аналогичной проблемой сталкиваются проектировщики газопроводов, пересекающих реки в Западной Сибири. В общем случае необходимо решать нестационарную трехмерную существенно нелинейную сопряженную задачу о турбулентном течении газа в протяженной цилиндрической трубе, имеющей несколько слоев обшивки и возможный слой льда. Отметим, что внешние условия обтекания трубы донными течениями (или течением реки) достаточно сложные.

Существенно, что в подобных задачах имеет место разномасштабность процессов как по пространственным переменным r, z (в цилиндрической системе координат), так и по времени. Тепловые процессы в радиальном направлении происходят на длинах порядка нескольких десятков сантиметров, а заметные изменения термодинамических характеристик вдоль оси газопровода — на длинах порядка нескольких десятков километров. Время установления теплового равновесия между газом и окружающей средой в каждом сечении намного меньше, чем время нарастания слоя льда при характерной разнице температур газа и окружающей воды в несколько градусов. Подобные задачи исследовались в работах [1–6]. В работе [7] обоснован переход к одномерной постановке задачи, при которой характеристики потока являются функциями только координаты вдоль

Ермолаева Надежда Николаевна – старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: n.ermolaeva@spbu.ru, тел.: +7(812)428-42-35

Курбатова Галина Ибрагимовна – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: g.kurbatova@spbu.ru, тел.: +7(812)428-42-35

Лебедев Тимофей Витальевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ltv1910@gmail.com, тел.: +7(812)428-42-35

оси z и времени. При этом процессы теплообмена с внешней средой учитываются интегрально, с помощью введения в уравнение баланса энергии слагаемого типа объемного источника (стока) внутренней энергии.

Обозначим, следуя [6], $\omega(z)$ — объемную плотность выделения (поглощения) внутренней энергии за единицу времени в области Ω , ограниченной двумя сечениями газопровода, отстоящими друг от друга на расстоянии δz . Величину $\omega(z)$ можно выразить через q_w — радиальную составляющую вектора плотности потока тепла на внутренней поверхности газопровода в z -ом сечении:

$$\int_{\Omega} \omega dv = - \oint_{S_{\Omega}} \bar{q} \bar{n} ds,$$

$$\int_{\Omega} \omega dv \approx \omega(z) \pi R^2 \delta z.$$

Тепловые условия на внешней поверхности газопровода на масштабах δz можно считать неизменными, поэтому

$$\forall \xi \in [z, z + \delta z], \quad q_w(\xi) = q_w(z) \rightarrow$$

$$\oint_{S_{\Omega}} \bar{q} \bar{n} ds = \int_0^{2\pi} \int_z^{z+\delta z} q_w(\xi) R d\xi d\Theta = 2\pi R \delta z q_w \rightarrow \quad (1)$$

$$\omega(z) \pi R^2 \delta z = -2\pi R \delta z q_w \rightarrow$$

$$\omega(z) = -\frac{2q_w}{R}.$$

В этом случае уравнение для полной энергии газового потока записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \right) = -\frac{2q_w}{R} + \rho u g \cos \alpha(z). \quad (2)$$

Обозначения приведены ниже. Уравнение (2) должно быть дополнено уравнениями неразрывности, движения, состояния и калорическим уравнением [8] связи внутренней энергии с температурой и плотностью газа в потоке при соответствующих задаче начальных и граничных условиях.

Модель остается незамкнутой, пока не найдено выражение для величины теплового потока q_w (1), которая зависит от геометрических и теплофизических характеристик обшивки газопровода, от толщины слоя льда $\delta_i(z, t)$ и от условий обтекания на внешней поверхности цилиндра. В установившемся режиме δ_i может быть рассчитано по итерационной процедуре, предложенной в [6]. Приведем общую математическую модель I указанных процессов для установившихся режимов.

$$\begin{aligned}
\frac{d(\rho u)}{dz} &= 0, \\
\frac{d}{dz}(\rho u^2 + p) &= -\frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \\
\frac{d}{dz} \left(\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \right) &= -\frac{2q_w}{R} + \rho u g \cos \alpha(z), \\
e &= \varepsilon + u^2/2, \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(\rho, T), \\
q_w &= \frac{(T - T_*)\lambda_i}{R_i \left(A + \ln \left(\frac{R_i}{R_2} \right) \right)}, \\
R_1 &= R + \delta_1, \quad R_2 = R_1 + \delta_2, \quad R_i = R_2 + \delta_i, \\
A &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \ln \left(\frac{R_1}{R} \right) + \frac{\lambda_i}{\lambda_2} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right), \\
\frac{(T - T_*)\lambda_i}{A + \ln \left(\frac{R_i}{R_2} \right)} &= \frac{(T^* - T_*)\lambda_w}{\ln \left(\frac{R_i + \delta_*}{R_i} \right)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь u, ρ, p, T — скорость, плотность, давление и температура газа соответственно, являющиеся функциями координаты z , направленной вдоль оси трубопровода; $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $e = e(z)$ — массовые плотности внутренней и полной энергии соответственно; R — внутренний радиус трубопровода; $\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2$ — коэффициенты теплопроводности и толщины слоев обшивки (они могут быть функциями z , т. е. на разных участках конструкция обшивки может быть различной); R_2 — внешний радиус газопровода; g — ускорение силы тяжести; $\alpha(z)$ — угол между направлением вектора силы тяжести и осью трубопровода в z -ом сечении; λ — коэффициент гидравлического сопротивления (рассчитываемый, например, по формуле Коулбрука — Уайта); T^* — температура окружающей воды, в общем случае — функция

от z ; T_* — температура фазового перехода вода-лед; λ_i, λ_w — теплопроводности льда и воды соответственно.

Система уравнений модели I должна быть дополнена соответствующими задаче граничными условиями.

Величина δ_* , входящая в уравнение (3), содержит в себе информацию о величине эффективного теплового пограничного слоя в жидкости, обтекающей границу льда. Она должна определяться из решения внешней задачи обтекания газопровода. Оценка величины δ_* приведена в [6]. Она базируется на известных исследованиях динамических и тепловых пограничных слоев обтекания цилиндра, обобщенных в виде степенных зависимостей числа Нуссельта от чисел Рейнольдса, Прандтля, Грасгофа и Эккерта.

Проведенные расчеты показали, что установившаяся толщина льда существенно зависит от значения δ_* при заданных T, T_*, T^* . В таблице приведены рассчитанные величины δ_i (в см) в зависимости от значения δ_* (в см) при следующих параметрах задачи, характерных для морского газопровода в Баренцевом море:

$$T_* = 271[K], \quad T = 268[K], \quad T^* = 272[K],$$

$$\lambda_i = 2,3 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м К}} \right], \quad \lambda_w = 0,56 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м К}} \right], \quad R = 0,51[\text{м}],$$

$$\delta_1 = 0,04[\text{м}], \quad \delta_2 = 0,12[\text{м}], \quad R_2 = 0,67[\text{м}].$$

Таблица. Зависимость между величинами δ_* и δ_i

δ_*	1,62	1,63	1,65	1,7	1,8	1,85	2,0
δ_i	0,026	0,11	0,29	0,7	1,6	2,03	3,31

Уравнение (3) позволяет решить обратную задачу, а именно, найти по экспериментальным данным δ_i величину δ_* — толщину эффективного теплового пограничного слоя воды при обтекании газопровода, характерную для исследуемых задач.

Для нестационарной задачи равенство тепловых потоков на фазовой границе вода-лед (3) должно быть заменено условием Стефана [9]. В приближении квазиустановившихся процессов, для которых допустимо считать распределение температуры в слоях обшивки газопровода близким к стационарному, условие Стефана приводит к

следующему уравнению относительно радиуса газопровода с учетом слоя льда $R_i(t) = R_2 + \delta_i(t)$:

$$\frac{(T - T_*)\lambda_i}{R_i A + R_i \ln\left(\frac{R_i}{R_2}\right)} - \frac{(T^* - T_*)\lambda_w}{R_i \ln\left(\frac{R_i + \delta_*}{R_i}\right)} = Q \rho_i \frac{\partial R_i}{\partial t}. \quad (4)$$

где Q — скрытая теплота плавления льда, ρ_i — плотность морского льда. Математическая модель II нестационарных процессов оледенения морского газопровода в северных морях имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u^2 + p) &= -\frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho u \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\right) &= -\frac{2q_w}{R} + \rho u g \cos \alpha(z), \\ e &= \varepsilon + u^2/2, \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(\rho, T), \\ q_w &= \frac{(T - T_*)\lambda_i}{R_i \left(A + \ln\left(\frac{R_i}{R_2}\right)\right)}, \\ R_1 &= R + \delta_1, \quad R_2 = R_1 + \delta_2, \quad R_i = R_2 + \delta_i, \\ A &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \ln\left(\frac{R_1}{R}\right) + \frac{\lambda_i}{\lambda_2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right), \\ \frac{(T - T_*)\lambda_i}{R_i A + R_i \ln\left(\frac{R_i}{R_2}\right)} - \frac{(T^* - T_*)\lambda_w}{R_i \ln\left(\frac{R_i + \delta_*}{R_i}\right)} &= Q \rho_i \frac{\partial R_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Модель II является замкнутой, так как в последнее уравнение модели входит температура газа T , которая рассчитывается из системы уравнений баланса массы, импульса и энергии. В свою очередь, в уравнение энергии входит величина теплового потока q_w , которая является функцией $\delta_i(z, t)$. Рассмотрение возможных подходов к итерационной процедуре решения этой сопряженной задачи выходит за рамки настоящей работы.

Литература

1. Васильев О. Ф., Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. Неизотермическое течение газа в трубах. Новосибирск: Наука, 1978. 128 с.
2. Селезнев В. Е., Алешин В. В., Прялов С. Н. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов. Под ред. В.Е. Селезнева. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: МАКС Пресс, 2009. 436 с.
3. Мансуров М. Н., Черний В. П. Современные методы проектирования и расчета морских трубопроводов // Наука и техника в газовой промышленности. 2005. № 4. С. 50–57.
4. Курбатова Г. И., Филиппов Б. В., Филиппов В.Б. Неизотермическое турбулентное течение сжимаемого газа // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 3. С. 92–108.
5. Груничева Е. В., Курбатова Г. И., Попова Е. А. Нестационарное неизотермическое течение смеси газов по морским газопроводам // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 4. С. 141–153.
6. Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В. и др. Модели морских газопроводов. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2005. 156 с.
7. Курбатова Г. И., Попова Е. А. Проблемы учета профиля скорости в расчетах турбулентных течений в трубах // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2007. Вып. 2. С. 18–28.
8. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Анализ подходов к моделированию термодинамических процессов в газах при высоких давлениях // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2013. Вып. 2. С. 35–44.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

УДК 517.977

Жданов К. Е.

Оптимальное управление эволюцией частицы со спином $1/2$ в магнитном поле

Рекомендовано к публикации профессором Андриановым С. Н.

1. Постановка задачи. Рассмотрим квантовую систему, состоящую из одной частицы со спином $1/2$, которая находится в постоянном магнитном поле \vec{B} , ориентированном по оси Oz . Данная квантовая система является двухуровневой в том смысле, что есть два базисных состояния, которые можно наблюдать на опыте: состояние $|+\rangle$ — z -компонента спина равна $\hbar/2$, состояние $|-\rangle$ — z -компонента спина равна $-\hbar/2$. Рассматриваемая система представляет собой одну из простейших физических моделей квантового бита (кубита) квантового компьютера.

Задача заключается в том, чтобы наложить дополнительное изменяющееся в плоскости xOy магнитное поле таким образом, чтобы перевести систему из начального состояния в момент $t = 0$ в желаемое состояние за фиксированное время T , но с минимальными затратами энергии на данный переход. В тематике квантовых вычислений эта задача соответствует применению к кубиту логической операции (гейта), которая определяется конечным состоянием.

В настоящей статье применяется метод построения оптимального решения из статьи [1] и решается поставленная задача для двух конкретных начальных и конечных состояний.

Следует отметить, что в таком простейшем случае (одна частица) решения будут записаны в достаточно простом аналитическом виде. Но если, например, приложить управляющее поле только по оси Ox , то вид решений усложнится — они уже будут выражаться через эллиптические функции Якоби [1]. В случае рассмотрения системы из нескольких частиц с учетом взаимодействия между ними и взаимодействия с окружением, предпочтительно искать оптимальное решение адаптивными алгоритмами [2] и приближенными методами, так как взаимодействие с окружением делает невозможным точную реализацию желаемого конечного состояния.

Жданов Константин Евгеньевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: jkemail@mail.ru, тел.: +7(981)764-43-59

2. Формализация задачи. Рассмотрим квантовую систему, состоящую из одной частицы со спином $1/2$, которая находится в постоянном магнитном поле \vec{B}_z , ориентированном по оси Oz и в магнитном поле $\vec{B} = (u_x, u_y, 0)$, изменяющемся в плоскости xOy . Состояние квантовой системы описывается в каждый момент времени t вектором $|\psi(t)\rangle$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . В данном случае пространство \mathcal{H} — двумерное. Состояния в начальный момент времени и в момент времени t связаны через соотношение $|\psi(t)\rangle = \mathbf{X}(t)|\psi(0)\rangle$, где $\mathbf{X}(t)$ — унитарный оператор эволюции системы.

Запишем уравнение для унитарной матрицы эволюции $\mathbf{X}(t)$ (в базисе $|-\rangle, |+\rangle$) частицы со спином $1/2$ в магнитном поле [1]

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = -\frac{\gamma B_z}{2} \mathbf{S}_z \mathbf{X}(t) - \frac{\gamma u_x(t)}{2} \mathbf{S}_x \mathbf{X}(t) - \frac{\gamma u_y(t)}{2} \mathbf{S}_y \mathbf{X}(t), \quad (1)$$

где управление $u_x(t)$ — x -компонента поля, управление $u_y(t)$ — y -компонента поля, B_z — z -компонента поля, которая является постоянной, γ — гиромагнитный фактор системы, а матрицы

$$\mathbf{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

называются матрицами Паули.

Задача состоит в том, чтобы найти управления, переводящие систему (1) из состояния \mathbf{X}^0 в состояние \mathbf{X}^e за фиксированное время T , и минимизирующие функционал энергии

$$J(u_x, u_y) = \int_0^T (u_x^2(t) + u_y^2(t)) dt. \quad (2)$$

Если принять величину $-\gamma B_z t/2$ за новое время t , а величины $u_x(t)/B_z$, $u_y(t)/B_z$ — за новые управления $u_x(t)$, $u_y(t)$, то получим

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{S}_z \mathbf{X}(t) + u_x(t) \mathbf{S}_x \mathbf{X}(t) + u_y(t) \mathbf{S}_y \mathbf{X}(t),$$

где \mathbf{X} принадлежит группе Ли $SU(2)$ унитарных (2×2) -матриц с единичным определителем, а \mathbf{S}_x , \mathbf{S}_y , \mathbf{S}_z принадлежат алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ косоэрмитовых (2×2) -матриц с нулевым следом.

Для систем вида

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \left(\mathbf{A} + \sum_{k=1}^2 \mathbf{B}_k u_k(t) \right) \mathbf{X}(t) \quad (3)$$

разработан следующий критерий управляемости.

Теорема 1 [1]. *Рассмотрим систему (3), подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ с генераторами $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ и соответствующую ей подгруппу Ли \mathcal{G}_B . Тогда множество состояний, достижимых из единичной матрицы за произвольное время, совпадает с \mathcal{G}_B .*

Для данного конкретного случая $\mathcal{G}_B = SU(2)$, следовательно, любое состояние достижимо за произвольное время.

Для поиска кандидатов на оптимальность воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 2 [1]. *Пусть дана система (3), начальное условие $\mathbf{X}(t^0) = \mathbf{X}^0$, функционал (2) и управление $\mathbf{u}^0(t) = (u_1^0(t), u_2^0(t))$, которому соответствует решение $\mathbf{X}(t)$ такое, что $\mathbf{X}(t^0) = \mathbf{X}^0$ и $\mathbf{X}(t^e) = \mathbf{X}^e$. Если $\mathbf{u}^0(t)$ минимизирует функционал (2), то существует такая постоянная матрица $\mathbf{M} \in \mathfrak{su}(2)$ и константа $\psi_0 \geq 0$ не равные нулю одновременно, что управление $\mathbf{u}^0(t)$ минимизирует функцию Гамильтона*

$$H(\mathbf{M}, \psi_0, \mathbf{X}, \mathbf{u}) = \left\langle \mathbf{M}, \mathbf{X}^* \left(\mathbf{A} + \sum_{i=1}^2 u_i(t) \mathbf{B}_i \right) \mathbf{X}(t) \right\rangle + \frac{1}{2} \psi_0 (u_1^2(t) + u_2^2(t)),$$

где $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^*) = -\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ — скалярное произведение.

В [1] показано, что управления $u_x^0(t) = \bar{M} \cos(\omega t + \bar{\varphi})$, $u_y^0(t) = \bar{M} \sin(\omega t + \bar{\varphi})$ являются оптимальными, а константы ω , \bar{M} и $\bar{\varphi}$ выбираются так, чтобы получить в момент T нужное состояние. Оптимальное решение для матрицы $\mathbf{X}(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega t + \bar{\varphi}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega t + \bar{\varphi}}{2}} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -i\frac{b}{a} \sin(at) + \cos(at) & -i\frac{\bar{M}}{a} \sin(at) \\ -i\frac{\bar{M}}{a} \sin(at) & i\frac{b}{a} \sin(at) + \cos(at) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{i\frac{\bar{\varphi}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\bar{\varphi}}{2}} \end{pmatrix} \times \mathbf{X}^0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $b = (2 - \omega)/2$, $a = \sqrt{b^2 + \bar{M}^2}$.

В [1] решена эта задача для начального и конечного состояний вида

$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^e = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

для произвольной фазы φ . Это квантовый гейт NOT. Он действует на базисные состояния следующим образом

$$\mathbf{X}^e|0\rangle = -e^{-i\varphi}|1\rangle, \quad \mathbf{X}^e|1\rangle = e^{i\varphi}|0\rangle.$$

Далее рассмотрим другие начальные и конечные состояния системы и решим для них задачу оптимального управления.

2.1. Задача 1. Будем переводить систему из состояния \mathbf{X}^0 в момент $t = 0$ в состояние \mathbf{X}^e за время T , где

$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^e = \begin{pmatrix} e^{i\psi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\psi_2} \end{pmatrix}.$$

Из (4) следует, что для выполнения условия $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}^e$ необходимо, чтобы $\sin(aT) \neq 0$ и $i \sin(aT)b/a + \cos(aT) = 0$. Это влечет $b = 0$ и $\cos(aT) = 0$. Следовательно, $\omega = 2$ и $\overline{M}T = aT = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, \dots$ Так же находим

$$-ie^{i(\overline{\varphi}-\varphi+\frac{\omega T}{2})}\frac{\overline{M}}{a}\sin(aT) = e^{i\psi_1}, \quad ie^{i(\overline{\varphi}-\varphi+\frac{\omega T}{2})}\frac{\overline{M}}{a}\sin(aT) = e^{i\psi_2},$$

откуда имеем $\psi_2 = -\psi_1$ и $e^{i(\overline{\varphi}-\varphi+T+\frac{n\pi+1}{2})} = e^{i\psi_1}$. Значение $J(u) = \overline{M}^2 T = (2n + 1)^2 \pi^2 / (4T)$ минимально при $n = 0$ и равно $J(u) = \pi^2 / (4T)$. Можно достичь значений фазы конечного состояния $\psi_1 = \overline{\varphi} - \varphi + T + \pi/2$.

Таким образом, можно перевести систему из состояния \mathbf{X}^0 в состояние \mathbf{X}^e за время T с минимальной затратой энергии $\pi^2 / (4T)$ с помощью магнитного поля $u_x^0(t) = \cos(2t + \overline{\varphi})\pi / (2T)$, $u_y^0(t) = \sin(2t + \overline{\varphi})\pi / (2T)$, где частота $\omega = 2$ в немасштабированном времени равна $\omega = -\gamma B_z$ и называется резонансной.

2.2. Задача 2. Начальное и конечное состояния возьмем в виде

$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\psi_1} & e^{i\psi_2} \\ e^{i\psi_3} & e^{i\psi_4} \end{pmatrix}.$$

После подстановки этих значений в (4) получим

$$e^{-i\frac{\omega T}{2}} \left(-i\frac{b}{a} \sin(aT) + \cos(aT) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi_1}, \quad (5)$$

$$-ie^{-i(\frac{\omega T}{2} + \bar{\varphi})} \frac{\bar{M}}{a} \sin(aT) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi_2}, \quad (6)$$

$$-ie^{i(\frac{\omega T}{2} + \bar{\varphi})} \frac{\bar{M}}{a} \sin(aT) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi_3}, \quad (7)$$

$$e^{i\frac{\omega T}{2}} \left(i\frac{b}{a} \sin(aT) + \cos(aT) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi_4}. \quad (8)$$

Если взять комплексное сопряжение от уравнений (7) и (8), и сравнить с (5) и (6), то $\psi_4 = -\psi_1$, $\psi_3 = \pi - \psi_2$.

Из (6) имеем $\sin(aT) = e^{i(\frac{\omega T}{2} + \bar{\varphi} + \psi_2 + \pi/2)} a / (\sqrt{2} \bar{M})$. Это вещественное число, значит, $\omega T/2 + \bar{\varphi} + \psi_2 = (2k - 1)\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Из выражения для $\sin(aT)$ следует, что $|\sin(aT)| \geq 1/\sqrt{2}$. Значит, либо $-1 \leq \sin(aT) \leq -1/\sqrt{2}$, либо $1/\sqrt{2} \leq \sin(aT) \leq 1$. Будем предполагать $aT \in [\pi/4, 3\pi/4]$, т. е. при заданном T будем искать управление с минимально возможным a . В этом случае $\sin(aT) > 0$ и k должно быть четным числом.

Подставим полученное выражение для $\sin(aT)$ в (5) и найдем $\cos(aT) = e^{i(\omega T/2 + \bar{\varphi} + \psi_2)} (e^{i(\psi_1 - \psi_2 - \bar{\varphi})} - b/\bar{M}) / \sqrt{2}$. Так же проделаем с (8), учтем равенство $\omega T/2 + \bar{\varphi} + \psi_2 = (2k - 1)\pi/2$ и сравним с выражением для $\cos(aT)$ из (5). Получим $b/\bar{M} = \cos(\psi_1 - \psi_2 - \bar{\varphi})$ и $\cos(aT) = (-1)^k \sin(\psi_1 - \psi_2 - \bar{\varphi})/\sqrt{2}$. Отсюда можно выразить aT , и тогда

$$a = \frac{1}{T} \arccos \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sin(\bar{\varphi} + \psi_2 - \psi_1) \right).$$

Можно найти и значения для b и \bar{M} . Функционал энергии

$$J = \frac{1}{T} \frac{\left(\arccos \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sin(\bar{\varphi} + \psi_2 - \psi_1) \right) \right)^2}{1 + \cos^2(\bar{\varphi} + \psi_2 - \psi_1)}.$$

Чтобы найти минимальное значение $J(x)$ по $\bar{\varphi}$, приравняем производную $\partial J/\partial \bar{\varphi}$ к нулю. Здесь $x = \psi_2 - \psi_1 + \bar{\varphi}$. После некоторых преобразований имеем $\cos(\psi_2 - \psi_1 + \bar{\varphi}) = 0$. Это дает значения $\bar{\varphi}_l^* = (2l + 1)\pi/2 + \psi_1 - \psi_2$, $l = 0, \pm 1, \dots$

Видно, что $J(x+2\pi) = J(x)$, поэтому рассмотрим $J(x)$ в точках $\bar{\varphi}_l^*$ из отрезка $[0, 2\pi]$: $J(\pi/2) = 9\pi^2/(16T)$ и $J(3\pi/2) = \pi^2/(16T)$. Минимум $J(x)$ будет достигнут при $\bar{\varphi}_n^* = (4n+3)\pi/2 + \psi_1 - \psi_2$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Тогда $J(\bar{\varphi}_n^*) = \pi^2/(16T)$, $\omega = 2$, $\bar{M} = \pi/(4T)$. Учитывая, что $\omega T/2 + \bar{\varphi}_n^* + \psi_2 = (4s-1)\pi/2$, получим $T = 2(s-n-1)\pi - \psi_1$. Из условий $\bar{\varphi}_n^* \geq 0$, $2\pi \geq \psi_1 \geq 0$, $2\pi \geq \psi_2 \geq 0$, $T > 0$ следует $n > 0$, $s > 0$, $s > n+1$. Минимальное время T для перевода системы в желаемое состояние достигается при $s = n+2$ и равно $T^* = 2\pi - \psi_1$. Через промежутки времени длиной 2π (начиная с T^*) система вновь окажется в желаемом состоянии.

В результате можно получить следующее конечное состояние за время $T^* = 2\pi - \psi_1$

$$\mathbf{X}^e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\psi_1} & e^{i\psi_2} \\ -e^{-i\psi_2} & e^{-i\psi_1} \end{pmatrix}.$$

При $\psi_1 = \pi/2$ и $\psi_2 = \pi/2$ это преобразование Адамара:

$$\mathbf{X}^e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

3. Заключение. Рассмотрена задача оптимального управления частицей со спином $1/2$ с помощью управляющего магнитного поля и решены две конкретные задачи по переводу этой квантовой системы из одного состояния в другое при минимальных затратах энергии. Частица со спином $1/2$ может служить физической реализацией кубита, над которым можно производить логические операции с минимальными затратами энергии на управление.

Литература

1. Д'Алессандро Д., Дале М. Оптимальное управление двухуровневыми квантовыми системами // Управление молекулярными и квантовыми системами / под ред. Фрадкова Л.А., Якубовского О.А., пер. с англ. Макаровой И.А. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 245–276.
2. Grace M., Brif C., Rabitz H. et al. Optimal control of quantum gates and suppression of decoherence in a system of interacting two-level particles // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2007. № 40 (9). С. 103–125.

УДК 519.6

Кобышев С. С.

Нормирующий коэффициент для приближенного вычисления континуального интеграла

Рекомендовано к публикации профессором Богданов А. В.

1. Введение. В работе описаны одни из способов приближенного вычисления континуального интеграла. В данный момент не существует универсального алгоритма, поэтому рассматривается один из способов. Изначально континуальные интегралы рассматривают в задачах квантовой физики, но их применение гораздо шире, они могут использоваться при прогнозировании и анализе финансового рынка [1, 2]. В этом случае задача упрощается, так как множество, по которому ведется интегрирование, является дискретным.

Задача — рассмотреть известные методы приближенного вычисления континуального интеграла и предложить новый алгоритм, удобный для программной реализации с учетом возможности параллельных вычислений.

2. Континуальный интеграл. К вычислению суммы по траекториям подойдем таким же способом, как и в интеграле Римана. Разобьем $[t_a, t_b]$ на отрезки длины ε и каждому t_i поставим в соответствие x_i . Соединяя результирующие точки отрезками, получим траекторию. Сумму по всем траекториям можно определить, вычислив кратный интеграл по всем x_i , $t_0 = t_a$, $t_N = t_b$, $x_0 = x_a$, $x_N = x_b$, $\varepsilon = t_{i+1} - t_i$. Получим выражение [3, 4]

$$K(a, b) \sim \int \dots \int \varphi[x(t)] dx_1 \dots dx_{N-1},$$

где $K(a, b)$ — амплитуда перехода из x_a в момент времени t_a в x_b в момент времени t_b . Функция $\varphi[x(t)]$ — вклад от каждой траектории в отдельности. Уменьшая ε , получим более точное значение, однако рассмотрение данного процесса в качестве предела вызывает затруднения. Постоянно уменьшая ε , получим различные значения суммы для каждого ε и в этом случае предела не существовало бы. Для

Кобышев Сергей Сергеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: Kobyshev.sergey@gmail.com, тел.: +7(908)897-08-57

того, чтобы получить искомое приближение и перейти к пределу, введем некоторый нормирующий множитель, зависящий от ε .

К сожалению, в данный момент не существует подобного множителя в общем случае, поэтому введем ограничение: пусть лагранжиан L частицы массы m , движущейся в поле с потенциалом $V(x, t)$ имеет вид

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x, t).$$

Нормирующий множитель в этом случае равен A^{-N} [3], где

$$A = \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$K(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int \dots \int e^{i/\hbar S[a, b]} \frac{dx_1}{A} \dots \frac{dx_{N-1}}{A}.$$

Здесь

$$S[a, b] = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt$$

есть действие по перемещению частицы из точки x_a в момент времени t_a , в точку x_b в момент времени t_b [3–5].

3. Вывод нормирующего множителя. При дальнейшем рассмотрении проблемы приближения континуальных интегралов будем считать, что выполняется свойство

$$S[1, 3] = S[1, 2] + S[2, 3].$$

Для доказательной базы необходимо введение понятия волновой функции [3]

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_1, t_1; x_2, t_2) \psi(x_1, t_1) dx_1.$$

Для получения дифференциального уравнения относительно ψ применим это соотношение, рассматривая ситуацию, когда $t_2 - t_1 = \varepsilon$. Исходя из этого, можно записать [3]

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \exp \left\{ \varepsilon \frac{i}{\hbar} L \left(\frac{x-y}{\varepsilon}, \frac{x+y}{\varepsilon} \right) \right\} \psi(y, t) dy.$$

Ограничимся случаем одномерного движения частицы под воздействием силы с потенциалом $V(x, t)$. Перепишем предыдущее соотношение:

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \left(\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m(x-y)^2}{2\varepsilon} \right\} \right) \times \\ \times \left(\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \varepsilon V \left(\frac{x+y}{2}, t \right) \right\} \right) \psi(y, t) dy$$

В показатель первой экспоненты входит величина $\frac{(x-y)^2}{\varepsilon}$. При увеличении разности y и x эта величина тоже будет увеличиваться и, соответственно, частота колебаний будет увеличиваться. Область колебаний первого множителя дает малый вклад из-за слабого изменения других величин. Существенный вклад дают значения y , близкие к x . В этом случае произведем замену $y = x + \nu$ при условии, что ν мало. После подстановки в предыдущее выражение имеем

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{im\nu^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} V \left(x + \frac{\nu}{2}, t \right) \right\} \times \\ \times \psi \left[(x + \nu), t \right] d\nu.$$

Теперь разложим ψ в степенной ряд, рассматривая лишь слагаемые порядка ε . Это обеспечит сохранение второго порядка по ν . При этом заменим $\varepsilon V \left[\left(\frac{x + \nu}{2} \right), t \right]$ на $\varepsilon V(x, t)$, так как возникающая ошибка более высокого порядка малости, чем ε .

$$\psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{im\nu^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x, t) \right) \times \\ \times \left(\psi(x, t) + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) d\nu. \quad (1)$$

Если в правой части оставить лишь основной член, то получим произведение функции $\psi(x, t)$ на интеграл

$$\frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{im\nu^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} d\nu = \frac{1}{A} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В итоге имеем

$$\psi(x, t) = \frac{1}{A} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для справедливости равенства при $\varepsilon \rightarrow 0$, необходимо

$$A = \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Значение A должно быть таким, чтобы равенство выполнялось с точностью до членов нулевого порядка по ε , в противном случае предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ существовать не будет. Для вычисления необходимы два интеграла [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{im\nu^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} \nu d\nu = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{im\nu^2}{2\hbar\varepsilon} \right\} \nu^2 d\nu = \frac{i\hbar\varepsilon}{m}.$$

Подставив в формулу (1) значения этих интегралов, получим

$$\psi + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V \psi - \frac{\hbar\varepsilon}{2im} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Введем ограничение на точность до первой степени ε , тогда функция ψ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t)\psi.$$

Это уравнение Шредингера для движения частицы в одном измерении. Аналогичным образом можно вывести уравнение Шредингера для трехмерного движения частицы в поле с потенциалом V .

4. Расчетная формула. Применим данный подход. Распишем формулу для приближенного вычисления континуального интеграла для свободной частицы с $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$. Используя нормирующий множитель, перепишем ядро в виде

$$K(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int \dots \int \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \right\} dx_1 \dots dx_n.$$

Проинтегрируем по каждой из переменных перейдя к пределу, получим:

$$K(a, b) = \left(\frac{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)} \right\}.$$

Таким образом имеем конкретную формулу для подсчета, которую в дальнейшем можно использовать для программной реализации приближенного подсчета континуального интеграла.

5. Заключение. Предложен подход к получению нормирующего коэффициента для вычисления континуального интеграла. Выражение для коэффициента получено с использованием предположения о свойствах действия рассматриваемой системы. Достоверность полученного выражения в случае одномерного движения показана посредством вывода уравнения Шредингера для волновой функции. Рассмотрен пример вычисления ядра $K(a, b)$ в случае свободной частицы. Данный подход может быть распространен на случаи двумерного и трехмерного движения.

Литература

1. Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976. 191 с.
2. Belal E. V. Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 316 с.
3. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 407 с.
4. Богданов А. В. Модели столкновения и релаксации в динамике реальных газов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук (рукопись). Л.: Ленингр. гос. ун-т, 1981. 411 с.
5. Хир К. Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы. М.: Мир, 1976. 600 с.
6. Фейнман Р. Ф., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 382 с.
7. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 419 с.

УДК 621.384.6

Козынченко В. А., Бойко А. А.

Об одном методе учёта взаимодействия заряженных частиц в линейных ускорителях

1. Введение. При моделировании динамики интенсивных пучков заряженных частиц в линейных ускорителях с использованием метода крупных частиц большое значение имеет учёт кулоновского взаимодействия между частицами. Одним из методов расчета кулоновского поля пучка является расчет парного взаимодействия модельных частиц. Кулоновская сила, действующая со стороны пучка на модельную частицу, представляется как сумма сил парного взаимодействия частиц пучка. В качестве модельных частиц часто принимаются равномерно заряженные шары [1]. Этот метод позволяет получить хорошие результаты при использовании большого количества частиц и требуют значительных затрат времени. В некоторых линейных ускорителях, в частности, в ускорителях с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой, пучок заряженных частиц является квазипериодическим набором сгустков заряженных частиц. В таких ускорителях, в целях экономии времени расчета динамики пучка, целесообразно моделировать динамику только одного сгустка. Для расчета внутреннего поля пучка необходимо не только вычислять кулоновские силы внутри одного сгустка, но и учитывать влияние частиц остальных сгустков.

При расчете кулоновского поля пучка с использованием формулы парного взаимодействия крупных частиц возможно вычисление кулоновских сил для нескольких сгустков. Это позволяет учесть влияние на сгусток, по которому рассчитываются параметры динамики пучка влияние кулоновского поля остальной части пучка. Однако, такой подход требует существенного увеличения времени расчета внутреннего поля. Для экономии времени предлагается рассчитывать кулоновские силы внутри одного сгустка с использованием фор-

Козынченко Владимир Александрович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vladkoz@mail.ru, тел.: +7(812)428-47-25

Бойко Андрей Александрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: reasunta@gmail.com, тел.: +7(812)428-47-25

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, НИР № 9.38.673.2013

мулы парных взаимодействий, а влияние кулоновского поля остальной части пучка учитывать, используя аналитический метод, основанный на решении краевой задачи для уравнения Пуассона.

2. Метод учёта взаимодействия заряженных частиц, учитывающий периодичность пучка. Моделируется кулоновская сила пучка, действующая на частицы сгустка, содержащего K модельных частиц. Напряжённость, характеризующая действие кулоновского поля пучка на i -ую частицу данного сгустка, определяется по формуле

$$E_i = \sum_{j=1}^K \frac{F_{ij}}{q} + E_{0i},$$

где q — заряд модельной частицы; напряжённость E_0 характеризует влияние остальной части пучка. Сила, действующая на i -ый шар со стороны j -го вычисляется следующим образом [1]:

$$F_{ij} = \begin{cases} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2b)^2} \left(\frac{2b}{|r_{ij}|}\right)^3 \frac{r_{ij}}{2b}, & |r_{ij}| \geq 2b, \\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2b)^2} \left(2\left(\frac{|r_{ij}|}{2b}\right)^3 - 9\left(\frac{|r_{ij}|}{2b}\right) + 8\right) \frac{r_{ij}}{2b}, & 0 \leq |r_{ij}| < 2b. \end{cases}$$

Здесь r_{ij} — радиус-вектор, соединяющий центры i -го и j -го шаров и направленный от i -го шара к j -му; b — радиус шара; $|r_{ij}|$ — расстояние между центрами i -го и j -го шаров.

Для определения E_{0i} в точке расположения i -ой частицы рассчитывается напряжённость, создаваемая бесконечной периодической системой сгустков, построенной по следующему правилу. В качестве периода указанной системы рассмотрим отрезок длины $3L$, где L — текущий пространственный период пучка. Поместим на отрезках $[0, L]$ и $[2L, 3L]$ одинаковые сгустки, взаимное расположение частиц в которых совпадает с взаимным расположением частиц в центральном сгустке. Сделаем это, «уберем» модельные частицы с отрезка $[L, 2L]$, чтобы влияние частиц центрального сгустка не было учтено дважды. При расчете E_{0i} будем полагать, что пучок представляет собой бесконечную последовательность периодических повторений описанного сегмента длиной $3L$. Считаем также, что модельный периодический пучок неограниченный и периодический по продольной координате. Будем полагать, что он находится в соосной круглой металлической трубе радиуса a и обладает азимуталь-

ной симметрией. Будем моделировать пучок в виде набора кольцевых цилиндрических соосных слоев. Каждый слой неоднороден по продольной координате, в каждом поперечном сечении плотность слоя считается постоянной. Вектор напряженности кулоновского поля пучка вычисляется как сумма векторов напряженностей каждого слоя по формуле

$$E_{0i} = \sum_{i=0}^N E^i,$$

где E^i — вектор напряженности кулоновского поля i -го кольцевого слоя, N — число кольцевых слоев, нулевой слой — цилиндрический осевой слой. Данная модель [2] позволяет учесть продольную и поперечную неоднородность модельного пучка при расчете его кулоновского поля.

Введем цилиндрическую систему координат (z, θ, r) , ось Oz которой совпадает с осью симметрии трубы. Предположим, что кольцевой слой обладает азимутальной симметрией, т. е. координаты и скорости частиц не зависят от полярного угла θ . Будем считать, что плотность объёмного заряда внутри кольцевого цилиндра есть периодическая функция продольной координаты z , постоянная в поперечном сечении. В этом случае потенциал $u(z, r)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(z, r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u(z, r)}{\partial z^2} = f(z, r),$$

где

$$f(z, r) = -\frac{\rho(z, r)}{\varepsilon_0}, \quad \rho(z, r) = \begin{cases} 0, & r \leq R_1, \quad r > R_2, \\ \frac{\tau(z)}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}, & R_1 < r \leq R_2, \end{cases}$$

$\tau(z)$ — заряд пучка, приходящийся на единицу длины, и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(z, a) &= 0 \quad \forall z \in R, \quad \frac{\partial u(z, r)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad \forall z \in R, \\ u(z, r) &= u(z + 3L, r) \quad \forall z \in R, \quad \forall r \in [0, a], \\ \frac{\partial u(z, r)}{\partial z} \Big|_{z=p} &= \frac{\partial u(z, r)}{\partial z} \Big|_{z=p+3L} \quad \forall z \in R, \quad \forall r \in [0, a]. \end{aligned}$$

Функции $u(z, r)$, $\partial u(z, r)/\partial r$, $\partial u(z, r)/\partial z$ будем полагать непрерывными при $r = R_1$ и $r = R_2$. Введем обозначения:

$$u(r) = \begin{cases} \eta(r), & 0 < r \leq R_1, \\ \nu(r), & R_1 < r \leq R_2, \\ w(r), & R_2 < r \leq a. \end{cases}$$

Исходя из предположения о периодичности пучка по продольной координате, функцию $f(z, r)$ будем полагать периодической по z с периодом $3L$. Для моделирования функции $f(z, r)$ введем на оси Oz сетку $S = \{z_i = hi, h = 3L/N_z, i = \overline{0, N_z}\}$, где N_z — количество узлов сетки. Определим функцию заряда пучка, приходящегося на единицу длины, $\tau(z)$ в узлах сетки S , исходя из расположения модельных частиц. Рассчитаем значения функции $f(z, 0)$ в узлах сетки S . Будем моделировать функцию $f(z, r)$ тригонометрическим полиномом, значения которого в узлах сетки S совпадают с известными величинами $f_i = f(z_i, 0)$:

$$f(z, r) = \frac{1}{2}f_0^c + \sum_{k=1}^M (f_k^c(r) \cos(\omega_k z) + f_k^s(r) \sin(\omega_k z)),$$

где $\omega_k = \frac{2\pi k}{3L}$, $M = \frac{N_z-1}{2}$,

$$f_k^c(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r \leq R_1, \\ f_k^c, & R_1 < r \leq R_2, \\ 0, & R_2 < r \leq a, \end{cases} \quad f_k^s(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r \leq R_1, \\ f_k^s, & R_1 < r \leq R_2, \\ 0, & R_2 < r \leq a, \end{cases}$$

$$f_0^c = \frac{2}{N_z} \sum_{i=0}^{N_z-1} f_i, \quad f_k^c = \frac{2}{N_z} \sum_{i=0}^{N_z-1} f_i \cos \frac{2\pi ki}{N_z}, \quad f_k^s = \frac{2}{N_z} \sum_{i=0}^{N_z-1} f_i \sin \frac{2\pi ki}{N_z}.$$

Тогда выражения для продольной и поперечной компонент вектора напряженности кулоновского поля цилиндрического аксиально-симметричного пучка с учетом неоднородности и периодичности плотности заряда по продольной координате будут иметь вид [2]

$$E_z(z, r) = -\frac{\partial u(z, r)}{\partial z} = \sum_{k=1}^M \omega_k (u_k^c(r) \sin \omega_k z - u_k^s(r) \cos \omega_k z),$$

$$E_r(z, r) = -\frac{1}{2} \frac{du_0^c(r)}{dr} - \sum_{k=1}^M \left(\frac{du_k^c(r)}{dr} \cos \omega_k z + \frac{du_k^s(r)}{dr} \sin \omega_k z \right),$$

где функции $u_k^c(r)$, $u_k^s(r)$, $\frac{du_0^c(r)}{dr}$, $\frac{du_k^c(r)}{dr}$ и $\frac{du_k^s(r)}{dr}$ вычисляются по формулам:

$$u_0^c(r) = \begin{cases} \frac{f_0^c}{4} \left(2(R_1^2 - R_2^3) \ln \frac{R_2}{a} + 2R_1^2 \ln \frac{R_1}{R_2} + R_2^2 - R_1^2 \right), & 0 \leq r \leq R_1, \\ \frac{f_0^c}{4} \left(2(R_1^2 - R_2^3) \ln \frac{R_2}{a} - 2R_1^2 \ln R_2 + R_2^2 - r^2 + 2R_1^2 \ln r \right), & R_1 \leq r \leq R_2, \\ \frac{f_0^c}{2} (R_1^2 - R_2^3) \ln \frac{r}{a}, & R_2 \leq r \leq a, \end{cases}$$

$$u_k^c(r) = \begin{cases} f_k^c C_3 I_0(\omega_k r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ f_k^c \left(\frac{1}{\omega_k^2} + C_1 I_0(\omega_k r) + C_2 K_0(\omega_k r) \right), & R_1 \leq r \leq R_2, \\ f_k^c (C_5 I_0(\omega_k r) + C_6 K_0(\omega_k r)), & R_2 \leq r \leq a, \end{cases}$$

$$u_k^s(r) = \begin{cases} f_k^s C_3 I_0(\omega_k r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ f_k^s \left(\frac{1}{\omega_k^2} + C_1 I_0(\omega_k r) + C_2 K_0(\omega_k r) \right), & R_1 \leq r \leq R_2, \\ f_k^s (C_5 I_0(\omega_k r) + C_6 K_0(\omega_k r)), & R_2 \leq r \leq a. \end{cases}$$

$$\frac{du_0^c(r)}{dr} = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_1, \\ -\frac{f_0^c r}{2} + \frac{R_1^2 f_0^c}{2r}, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ \frac{f_0^c}{2r} (R_1^2 - R_2^3), & R_2 \leq r \leq a, \end{cases}$$

$$\frac{du_k^c(r)}{dr} = \begin{cases} f_k^c \omega_k C_3 I_1(\omega_k r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ f_k^c \omega_k (C_1 I_1(\omega_k r) + C_2 K_1(\omega_k r)), & R_1 \leq r \leq R_2, \\ f_k^c \omega_k (C_5 I_1(\omega_k r) + C_6 K_1(\omega_k r)), & R_2 \leq r \leq a, \end{cases}$$

$$\frac{du_k^s(r)}{dr} = \begin{cases} f_k^s \omega_k C_3 I_1(\omega_k r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ f_k^s \omega_k (C_1 I_1(\omega_k r) + C_2 K_1(\omega_k r)), & R_1 \leq r \leq R_2, \\ f_k^s \omega_k (C_5 I_1(\omega_k r) + C_6 K_1(\omega_k r)), & R_2 \leq r \leq a. \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{I_1(\omega_k R_1)}{\omega_k^2 (K_0(\omega_k R_1) I_1(\omega_k R_1) + K_1(\omega_k R_1) I_0(\omega_k R_1))},$$

$$C_1 = C_2 \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\omega_k^2 \alpha \gamma}, \quad C_3 = \frac{C_1 I_1(\omega_k R_1) - C_2 K_1(\omega_k R_1)}{I_1(\omega_k R_1)},$$

$$\alpha = \frac{I_0(\omega_k R_2)}{\gamma} - \frac{I_1(\omega_k R_2)}{(I_1(\omega_k R_2) K_0(\omega_k a) + I_0(\omega_k a) K_1(\omega_k R_2))},$$

$$\beta = \frac{K_1(\omega_k R_2)}{(I_1(\omega_k R_2) K_0(\omega_k a) + I_0(\omega_k a) K_1(\omega_k R_2))} - \frac{K_0(\omega_k R_2)}{\gamma},$$

$$\gamma = I_0(\omega_k R_2) K_0(\omega_k a) - I_0(\omega_k a) K_0(\omega_k R_2),$$

$$C_5 = \frac{K_0(\omega_k a) (C_1 I_1(\omega_k R_2) - C_2 K_1(\omega_k R_2))}{I_1(\omega_k R_2) K_0(\omega_k a) + I_0(\omega_k a) K_1(\omega_k R_2)}, \quad C_6 = C_5 \frac{I_0(\omega_k a)}{K_0(\omega_k a)}.$$

Здесь I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя, K_0, K_1 — модифицированные функции Ганкеля. Для вычисления напряженности кулоновского поля, создаваемого центральным цилиндрическим слоем, нужно положить в формулах для E_z и E_r внутренний радиус кольца равным нулю, $R_1 = 0$.

3. Заключение. По результатам численных экспериментов предложенный метод позволяет существенно ускорить вычисление кулоновского поля пучка заряженных частиц с использованием формулы парных взаимодействий равномерно заряженных шаров.

Литература

1. Овсянников Д. А., Егоров Н. В. Математическое моделирование систем формирования электронных и ионных пучков. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1998. 267 с.
2. Козынченко В. А. Моделирование взаимодействия в неоднородном аксиально-симметричном пучке заряженных частиц // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2012. Вып. 3. С. 48–58.

УДК 517.958, 539.3

Костырко С. А., Чепинога С. В.

Напряженное состояние пленочного покрытия со слабо искривленной свободной и межфазной поверхностью

1. Введение. В связи с бурным развитием микро- и нанoeлектроники в последнее время наблюдается повышенный интерес к развитию тонкопленочных технологий. Так, комбинируя материалы, можно создавать приборы с уникальными оптическими, электрическими, магнитными и механическими свойствами [1]. Однако, наличие поверхностных дефектов в тонкопленочных структурах, в частности, искривление свободной и межфазной поверхности, не только ухудшает функциональные свойства приборов, но и порождает локальный рост напряжений. При достаточно больших напряжениях несоответствия, а также при действии внешней нагрузки это может привести к зарождению трещин и дислокаций, развитию процесса отслоения. Для предотвращения образования подобного рода повреждений в ходе производства и эксплуатации приборов на основе тонкопленочных покрытий необходимо четкое понимание механизмов, к ним приводящих.

2. Постановка задачи. Рассмотрим пленочное покрытие с искривленной внешней и внутренней (межфазной) границей, находящееся в условиях плоской деформации. Это позволяет перейти к формулировке соответствующей плоской задаче теории упругости для двухкомпонентной полуплоскости Ω комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$, состоящей из полуограниченной области Ω_2 и полосы Ω_1 переменной толщины. Будем считать, что на межфазной и свободной поверхности пленки задано малое возмущение, которое в плоскости $x_3 = const$ определяется следующими уравнениями

$$z_1 = x_1 + i[h_0 + \varepsilon f(x_1)], \quad z_1 \in \Gamma_1, \quad (1)$$

Костырко Сергей Алексеевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: sergey.kostyrko@gmail.com, тел.: +7(921)406-47-62

Чепинога Сергей Викторович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: brasenia239@gmail.com, тел.: +7(911)737-61-86

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-00260

$$z_2 = x_1 + i\varepsilon f(x_1), \quad z_2 \in \Gamma_2, \quad (2)$$

где $h_0 = \text{const}$ — толщина пленки; $f(x_1)$ — непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом λ , удовлетворяющая условиям $\max |f(x_1)| = \lambda$, $|f'(x_1)| < 1/\varepsilon$. Таким образом, максимальное отклонение точек межфазной и свободной поверхности пленки от плоскости $x_2 = h_0$ и $x_2 = 0$ равно $A = \varepsilon\lambda$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Определим краевые условия для решения задачи о нахождении полей напряжений и перемещений в пленочном покрытии под действием внешней нагрузки. В общем случае на границе Γ_1 действует усилие

$$q(x_1) = q(x_1 + \lambda), \quad \int_{x_1 - \lambda/2}^{x_1 + \lambda/2} q(t) dt = -iP, \quad P = P_1 + iP_2. \quad (3)$$

Здесь P_1 и P_2 — компоненты главного вектора сил, действующих на участке границы Γ_1 в пределах одного периода. Функция $q(z_1)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду на Γ_1 .

Будем считать, что на межфазной границе Γ_2 отсутствуют разрывы вектора перемещений u и вектора напряжений σ

$$\Delta u(z_i) = u^+ - u^- = 0, \quad \Delta \sigma(z_i) = \sigma^+ - \sigma^- = 0, \quad (4)$$

где $u^\pm = \lim_{z \rightarrow z_i \pm i0} u(z)$, $\sigma^\pm = \lim_{z \rightarrow z_i \pm i0} \sigma(z)$, $z_i \in \Gamma_i$, $u = u_1 + iu_2$, $\sigma = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$; u_1 и u_2 — компоненты вектора перемещений вдоль осей x_1 и x_2 ; σ_{nn} и σ_{nt} — нормальное и касательное усилия на площадке с нормалью \mathbf{n} . Орты \mathbf{n} и \mathbf{t} образуют правую систему координат.

Условия на бесконечности определяются соотношениями

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} (\sigma_{22} - i\sigma_{12}) = \sigma_{22}^{2\infty} - i\sigma_{12}^{2\infty} = -i\frac{P}{\lambda}, \quad (5)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \omega = \omega_2^\infty, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{11} = \sigma_{11}^{2\infty},$$

где ω — угол поворота материальной частицы.

3. Метод суперпозиции. Как и в [2, 3], в соответствии с методом суперпозиции [4], представим решение $\sigma(z)$, $u(z)$ поставленной

задачи в виде суммы решений, используя следующее унифицированное выражение

$$G(z, \eta_k) = G^1(z, \eta_k)\delta_{k1} + G^2(z, \eta_2), \quad z \in \Omega_j \quad (6)$$

$$G^i(z, \eta_j) = \begin{cases} \sigma^i(z), & \eta_j = 1, \\ -2\mu_j \frac{du^i}{dz}, & \eta_j = -\kappa_j, \end{cases} \quad z \in \Omega_j, \quad i, j = \overline{1, 2},$$

где $\varkappa_j = (3 - 4\nu_j)$ при плоской деформации, $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ при плоском напряженном состоянии; ν_j, μ_j — коэффициент Пуассона и модуль сдвига среды Ω_j , соответственно; δ_{k1} — символ Кронекера.

Величины $\sigma^1(z), u^1(z)$ — усилие и перемещение в однородной полубесконечной области D с упругими свойствами полосы Ω_1 . На криволинейной границе этой области действуют некоторые неизвестные самоуравновешенные усилия $p(x_1)$

$$\sigma^1(z_1) = p(x_1), \quad z_1 \in \Gamma_1, \quad (7)$$

удовлетворяющие условию периодичности. Считаем, что на бесконечности напряжения и угол поворота равны нулю (*задача 1*).

Величины $\sigma^2(z), u^2(z)$ — усилие и перемещение, возникшие в двухкомпонентной плоскости $D_1 \cup D_2$ с криволинейной межфазной границей Γ_2 , на которой имеют место скачки усилий $\Delta\sigma^2 = \sigma^{2+} - \sigma^{2-}$ и перемещений $\Delta u^2 = u^{2+} - u^{2-}$ при условиях (5) на бесконечности (*задача 2*). Стоит отметить, что упругие свойства областей D_k совпадают с упругими свойствами соответствующих сред $\Omega_k, k = \overline{1, 2}$.

Учитывая соотношения (6), выражения для скачков находим из граничных условий (4):

$$\Delta\sigma^2 = -\sigma^1(z_2), \quad \Delta u^2 = -u^1(z_2), \quad z_2 \in \Gamma_2.$$

Предельный переход в соотношении (6) при $z \rightarrow z_1 \in \Gamma_1$ с учетом граничных условий (3) и (7) приводит к граничному уравнению, которому должна удовлетворять неизвестная функция p :

$$p(x_1) + \sigma^2(z_1) = q(x_1), \quad z_1 \in \Gamma_1. \quad (8)$$

Таким образом, исходная задача сводится к решению уравнения (6), в котором $\sigma^2(z_1)$ — функционал, зависящий от неизвестной функции $p(x_1)$.

4. Интегральное уравнение n -го приближения. Согласно [4, 5], усилие $\sigma^i(z)$ и перемещение $u^i(z)$ в задачах 1 и 2 связаны потенциалами Гурса — Колосова по следующей формуле

$$G^i(z, \eta_j) = \eta_j \Phi_j^i(w_i) + \overline{\Phi_j^i(w_i)} - \left(\Upsilon_j^i(\overline{w_i}) + \overline{\Phi_j^i(w_i)} - (w_i - \overline{w_i}) \overline{\Phi_j^{i'}(w_i)} \right) e^{-2i\alpha},$$

где α — угол между направлением площадки (вектором \mathbf{t}) и осью x_1 , Φ_1^1, Υ_1^1 — функции голоморфные в $D = \{z : x_1 \in R^1, x_2 < h_0 + \varepsilon f(x_1)\}$ и $B = \{z : x_1 \in R^1, x_2 > h_0 - \varepsilon f(x_1)\}$, соответственно; Φ_k^2 голоморфны в области D_k , Υ_k^2 — в $B_k = \{z : \bar{z} \in D_k\}$, $k = \overline{1, 2}$, $w_1 = z + i(\varepsilon f(x_1) - h_0)$, $w_2 = z + i\varepsilon f(x_1)$.

Следуя методу возмущений [2, 3], представим комплексные потенциалы Φ_i^j, Υ_i^j , неизвестную функцию p , а также функцию $e^{-2i\alpha}$ при фиксированном значении α в виде рядов по степеням малого параметра ε . Тогда граничное уравнение (8) в каждом приближении метода возмущений приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функций p_n с известной правой частью

$$p_n(x_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x_1, t) p_n(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(x_1, t) \overline{p_n(t)} dt = F_n(x_1), \quad (9)$$

где

$$K_1(x_1, t) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{M_1}{t - \zeta} - \frac{M_2}{t - \bar{\zeta}} + \frac{8h_0^2 M_1}{(t - \bar{\zeta})^3} \right],$$

$$K_2(x_1, t) = -\frac{M_1 h_0}{\pi} \left[\frac{1}{(t - \zeta)^2} + \frac{1}{(t - \bar{\zeta})^2} \right],$$

$$M_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}, \quad M_2 = \frac{\mu_2 \varkappa_1 - \mu_1 \varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}, \quad \zeta = x_1 + 2ih_0$$

Заметим, что в случае, когда на поверхности пленки отсутствуют внешние усилия, т. е. $q(x_1) = \sigma_{22}^{2\infty} = \sigma_{12}^{2\infty} = 0$, уравнение (9) имеет

только нулевое решение $p_0(x_1) = 0$. Тогда значение комплексных потенциалов в нулевом приближении равно

$$\Phi_{10}^1(z) = \Upsilon_{10}^1(z) = 0, \quad \Phi_{k0}^2(z) = \Upsilon_{k0}^2 = \sigma_{11}^{k\infty}/4.$$

Они, как и следовало ожидать, отвечают однородному напряженно-деформированному состоянию пленочной системы с прямолинейной внутренней и внешней границей

$$\sigma_{11}(z) = \begin{cases} \frac{\mu_1(1+\varkappa_2)}{\mu_2(1+\varkappa_1)}\sigma_{11}^{2\infty}, & z \in \Omega_1, \\ \sigma_{11}^{2\infty}, & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

Учитывая периодичность рельефа свободной (1) и межфазной поверхности (2), а также нагрузки q (3), решение интегрального уравнения (9) будем искать в виде ряда Фурье

$$p_n(x_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{kn} J_k(x_1), \quad J_k(x_1) = \exp(b_k x_1), \quad b_k = 2\pi i k / \lambda$$

Тогда, согласно [3], коэффициенты

$$C_{kn} = \frac{D_{km} X_{-k} - \overline{D_{km}} Y_k}{X_k X_{-k} - Y_k Y_{-k}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

где

$$F_m(x_1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_{km} J_k(x_1), \quad D_{km} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} F_m(t) J_{-k} dt,$$

$$X_k = 1 + (M_2 - 4h_0^2 b_k^2 M_1) J_k(-2ih_0),$$

$$Y_k = 2ih_0 M_1 b_k J_k(-2ih_0), \quad k < 0,$$

$$X_k = 1 + M_1 J_k(2ih_0), \quad Y_k = -2ih_0 M_1 b_k J_k(2ih_0), \quad k > 0.$$

5. Заключение. Таким образом, получен алгоритм определения напряженно-деформированного состояния пленочного покрытия со

слабо искривленной межфазной и свободной поверхностью в любом приближении метода возмущений. В дальнейшем предполагается детально проанализировать влияние как физических, так и геометрических параметров задачи на концентрацию напряжений вблизи искривленных границ и сравнить с результатами, полученными в работах [7, 8].

Литература

1. Freund L. B., Suresh S. Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution. Cambridge University Press, 2003. 820 p.
2. Vikulina Yu. I., Grekov M. A., Kostyrko S. A. Model of film coating with weakly curved surface // Mechanics of solids. 2010. Vol. 45, No 6. P. 778–788.
3. Grekov M., Kostyrko S. A film coating on a rough surface of an elastic body // J. Appl. Math. Mech. 2013. Vol. 77. P. 79–90.
4. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001. 192 с.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. Dundurs J. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. Vol. 36, No 3. P. 650–652.
7. Пронина Ю. Г. Краевая дислокация и сосредоточенная сила в упругой полуплоскости с отверстиями и краевыми вырезами. // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2012. Вып. 4. С. 120–124.
8. Пронина Ю. Г. Периодическая задача о точечных воздействиях в упругой полуплоскости с отверстиями // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2009. Вып. 3. С. 118–128.

УДК 517.958, 539.3

Костырко С. А., Шувалов Г. М.

Образование дефектов поверхности многослойного пленочного покрытия при диффузионных процессах

1. Введение. Использование пленочных покрытий является одной из основных стратегий при решении многочисленных инженерных задач: пленочные структуры позволяют повысить стойкость к окислению и диффузии, температуру плавления и микротвердость основного материала. Интерес к таким покрытиям также стимулируется бурно развивающимися исследованиями в области композиционных материалов. Хорошо известно, что многослойные пленочные структуры, состоящие из различных чередующихся слоев, зачастую обладают принципиально новыми механическими, оптическими, электрическими и магнитными свойствами, которые не характерны для однородных пленок. Здесь особое значение приобретают вопросы прочности соединения материалов, обладающих различными упругими свойствами. Одной из основных причин ослабления прочности соединения является наличие поверхностных дефектов, в частности, шероховатости на поверхности пленки. Так, в работе [1] показано, что образование рельефа поверхности гетероэпитаксиальной пленки приводит к появлению дополнительных контактных напряжений, которые отсутствуют в случае плоской поверхности.

2. Постановка задачи. Будем считать, что под действием интенсивного нагрева приповерхностного слоя происходит образование регулярных структур на поверхности многослойной пленочной системы вследствие совместного действия поверхностной и объемной диффузии. Форма потери устойчивости захватывает лишь приповерхностный слой, толщина которого пренебрежимо мала по сравнению с линейными размерами пленки. Диффузионный процесс также локализован лишь в данном приповерхностном слое.

Костырко Сергей Алексеевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: sergey.kostyrko@gmail.com, тел.: +7(921)406-47-62

Шувалов Глеб Михайлович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: shuvalov.gleb@gmail.com, тел.: +7(921)387-58-63

Работа выполнена в рамках проекта РНФ № 14-01-00260

В качестве модели многослойного пленочного покрытия толщины $h_f = \sum_{i=1}^N h_i$, осажденного на подложку толщины $h_s \gg h_f$ и находящегося в условиях плоской деформации, рассмотрим неоднородную упругую полуплоскость $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N+1} \Omega_i$ с прямолинейными межфазными границами Γ_j

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \{z : H_{i+1} < \text{Im } z < H_i, \quad \text{Re } z \in \mathbb{R}^1\}, \\ H_N &= h_N, \quad H_{N+1} = 0, \quad H_i = H_{i+1} + h_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ \Omega_{N+1} &= \{z : \text{Im } z < 0, \quad \text{Re } z \in \mathbb{R}^1\}, \\ \Gamma_j &= \{z : z \equiv z_j = x_1 + iH_j\}, \quad j = \overline{2, N+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть на Γ_j отсутствуют разрывы вектора перемещений u и вектора напряжений σ

$$\begin{aligned} \Delta u(z_j) &= u^+ - u^- = 0, \quad \Delta \sigma(z_j) = \sigma^+ - \sigma^- = 0, \\ u^\pm &= \lim_{z \rightarrow z_j \pm iH_j} u(z), \quad \sigma^\pm = \lim_{z \rightarrow z_j \pm iH_j} \sigma(z), \quad z_j \in \Gamma_j. \end{aligned} \quad (2)$$

Принимая во внимание результаты экспериментальных исследований, морфологию поверхности будем описывать посредством произвольной периодической функции

$$h(x_1, t) = H_1 + g(x_1, t), \quad (3)$$

где $g(x_1, t) = g(-x_1, t) = g(x_1 + \lambda, t)$.

В силу того, что эволюционная задача решается нами в геометрически линейной постановке, на коэффициенты разложения функции $g(x_1, t)$ в ряд Фурье накладываем следующие ограничения

$$g(x_1, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(t) \cos kx_1, \quad \max_n |A_n(t)| / \lambda = \varepsilon \ll 1 \quad \forall t, \quad (4)$$

здесь $k = 2\pi n / \lambda$ — волновое число.

При решении задачи будем учитывать поверхностное напряжение. Считаем, что равновесное состояние поверхности описывается

обобщенным законом Лапласа — Юнга. В двумерном случае при отсутствии внешней нагрузки это условие было получено в [2]. В силу малости искривления будем считать, что с изменением рельефа поверхностное напряжение σ_s так же, как и поверхностная энергия γ , остаются постоянными.

В подложке Ω_{n+1} действует постоянное продольное напряжение σ_{N+1} , при этом все остальные напряжения и угол поворота ω на бесконечности равны нулю:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^\infty - i\sigma_{12}^\infty &= 0, \quad \sigma_{11}^\infty = \sigma_{N+1}, \quad \omega^\infty = 0, \\ \sigma_{ij}^\infty &= \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{ij}, \quad \omega^\infty = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \omega. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Эволюционное уравнение. Следуя работам [3, 4], будем считать, что эволюция напряженной криволинейной поверхности пленки происходит под воздействием поверхностной диффузии, определяемой производной химического потенциала вдоль поверхности, и объемной диффузией, связанной с изменением напряжений вдоль криволинейной поверхности и капиллярным эффектом. При этом в выражении для химического потенциала пренебрегаем температурными слагаемыми и в качестве полной энергии системы рассматриваем сумму упругой энергии деформации и поверхностной энергии. Как сказано выше, диффузионный процесс локализован вблизи искривленной поверхности, поэтому для вычисления скорости движения точек поверхности помимо потока массы вдоль искривленной поверхности использовался поток массы по нормали к поверхности

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x_1, t)}{\partial t} &= K_s \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[U(x_1, t) - \gamma \frac{\partial^2 h(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] + \\ &+ K_v k \left[\gamma \frac{\partial^2 h(x_1, t)}{\partial x_1^2} + \Delta P(x_1, t) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) введены следующие обозначения: $K_s = D_s C_s \Omega^2 / k_b T$, $K_v = D_v C_v \Omega / k_b T$, где Ω — атомный объем, D_s — коэффициент поверхностной самодиффузии, C_s — концентрация поверхностных дефектов, k_b — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, D_v — коэффициент самодиффузии вакансий, C_v — концентрация вакансий в пленке с плоской поверхностью.

Как и в работах [2–4], процесс поверхностной потери устойчивости напряженного твердого тела рассматривается в квазистатической постановке. В силу чего для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) композита строится решение статической задачи теории упругости при фиксированном значении времени. При этом используется метод разложения по малому параметру, описанный в [1], где в качестве малого параметра ε выступает отношение максимальной амплитуды к длине периода возмущения. При возникновении приповерхностных дефектов произвольной конфигурации можно использовать идеи, предложенные в [5].

Следуя указанному методу, вариацию гидростатического напряжения $\Delta P(x_1, t)$ на поверхности в результате возмущения, а также упругую энергию деформации $U(x_1, t)$ криволинейной поверхности находим из решения задачи теории упругости для многокомпонентной полуплоскости Ω (1) под действием продольных усилий (5) на искривленной верхней границе Γ_1 (3), где задано поверхностное напряжение σ_s .

4. НДС многослойного пленочного покрытия со слабо искривленной поверхностью. В соответствии с принципом суперпозиции [6] представим решение поставленной задачи (1)–(5), а именно, вектор перемещений $u = u_1 + iu_2$ и вектор усилий $\sigma = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$ в точке комплексной плоскости $z = x_1 + ix_2$, в следующем виде

$$G(z) = \begin{cases} G_i^i(z) + G_i^{i+1}(z), & z \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ G_{N+1}^{N+1}(z), & z \in \Omega_{N+1}, \end{cases} \quad (7)$$

$$G_j^i(z, \eta_j) = \begin{cases} \sigma^i(z), & \eta_j = 1, \\ -2\mu_j \frac{du^i}{dz}, & \eta_j = -\kappa_j, \end{cases} \quad z \in \Omega_j, \quad i, j = \overline{1, N+1}, \quad (8)$$

где $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ при плоской деформации, $\kappa_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$ при плоском напряженном состоянии; ν_j, μ_j — коэффициент Пуассона и модуль сдвига среды Ω_j соответственно.

Величины σ^1, u^1 — векторы напряжений на фиксированной площадке и перемещений, возникших в точке z полуплоскости D_1 с упругими свойствами полосы Ω_1 при действии на криволинейной границе Γ_1 неизвестной самоуравновешенной нагрузки $p(z_1)$.

Векторы напряжений σ^i и перемещений u^i — решение задачи для двух соединенных полуплоскостей $D_{i-1} \cup D_i$ с упругими свойствами

сред Ω_{i-1} и Ω_i , $i = \overline{2, N+1}$, соответственно, под действием усилий на бесконечности

$$\lim_{\text{Im}z \rightarrow \pm\infty} \sigma_{11}(z) = \sigma_{11}^{j\infty}, \quad z \in \Omega_j,$$

при наличии неизвестных скачков усилий $\Delta\sigma^i$ и Δu^i перемещений на прямолинейной границе раздела Γ_i . Напряжения $\sigma^i(z)$ и перемещения $u^i(z)$ можно выразить по единой формуле через комплексные потенциалы Гурса – Колосова Φ_j^i, Υ_j^i [1]

$$\begin{aligned} G_j^i(z, \eta_j) = & \eta_j \Phi_j^i(w_i) + \overline{\Phi_j^i(w_i)} - \left(\Upsilon_j^i(\overline{w_i}) + \overline{\Phi_j^i(w_i)} - \right. \\ & \left. - (w_i - \overline{w_i}) \overline{\Phi_j^{i'}(w_i)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega_j, \end{aligned} \quad (9)$$

где $w_1 = z + i(\varepsilon\lambda f(x_1) - H_1)$, $w_i = z + iH_i$, $\alpha = \widehat{(x_1, t)}$, $j = \overline{i-1, i}$.

В соответствии с методом возмущений [1] представим функции Φ_j^i, Υ_j^i и p , а также функцию $e^{-2i\alpha}$ при фиксированном значении $\alpha = \alpha_1$ в виде ряда по степеням малого параметра ε . Тогда граничные условия приводят к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода (СИУФ), состоящей из $2N - 2$ уравнений относительно неизвестных функций $\Delta\sigma^i$ и Δu^i .

Поскольку форма свободной границы определяется выражением (4), решение задачи в каждом приближении будем искать в виде рядов Фурье. Тогда СИУФ в каждом приближении на основании свойств интеграла типа Коши сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов Фурье, где в качестве свободных членов выступают коэффициенты разложения известных функций $H_{1n}^i(x_1), H_{2n}^i(x_1)$.

С учетом полученного решения СЛАУ выражения (7)–(9) позволяют определить НДС многослойной пленочной системы в любом приближении, а, следовательно, и вариацию гидростатического напряжения $\Delta P(x_1, t)$ на поверхности в результате возмущения вместе с упругой энергией деформации $U(x_1, t)$ криволинейной поверхности. Тогда, принимая во внимание разложение (4), интегрирование уравнения (6) при условии $A_n(0) = a_n$ приводит к следующей зависимости амплитуды каждой гармоники возмущения от времени, физических и геометрических параметров задачи

$$\ln \left(\frac{A_n(t)}{a_n} \right) = P_n(\lambda; h_1 \dots h_N; \mu_1 \dots \mu_{N+1}; \nu_1 \dots \nu_{N+1}; K_s, K_v; \sigma_s, \sigma_{11}^\infty) t.$$

5. Заключение. Таким образом, в рамках представленного исследования на основе уравнений термодинамики и линейной теории упругости построена физико-механическая модель формирования дефектов поверхности при совместном действии объемной и поверхностной диффузии. В качестве основного соотношения получена зависимость амплитуды каждой гармоники возмущения от времени, физических и геометрических параметров задачи. В дальнейшем предполагается изучить полученное выражение для случая двухслойного $N = 2$ пленочного покрытия, используя первое приближение $n = 1$ в методе разложения по малому параметру.

Литература

1. Vikulina Yu. I., Grekov M. A., Kostyrko S. A. Model of film coating with weakly curved surface // *Mechanics of solids*. 2010. Vol. 45, No 6. P. 778–788.
2. Греков М. А., Костырко С. А. Устойчивость плоской формы пленочного покрытия при поверхностной диффузии // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления*. 2007. Вып. 1. С. 46–54.
3. Греков М. А., Костырко С. А. Формирование рельефа поверхности пленочного покрытия при поверхностной и объемной диффузии // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия*. 2008. Вып. 1. С. 106–113.
4. Костырко С. А. Влияние формы возмущения на устойчивость плоской поверхности пленочного покрытия при диффузионных процессах // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия*. 2011. Вып. 3. С. 101–111.
5. Пронина Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления*. 2009. Вып. 2. С. 104–114.
6. Греков М. А., Костырко С. А. Многослойное пленочное покрытие под действием периодической системы поверхностных сосредоточенных сил // *Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова*. 2010. Т. 53. С. 29–36.

УДК 536.715

Костюкова А. В., Павловский В. А.

Динамика истечения реальных газов из резервуаров

Постановка задачи. Процесс истечения сжатых газов из резервуаров высокого давления очень распространен в различных отраслях промышленности. Для приближённых расчётов таких процессов часто используют упрощённую одномерную схему течения. Модель одномерного потока предполагает, что все физические характеристики газового потока зависят только от одной продольной координаты и времени. Схема течения показана на рис. 1.

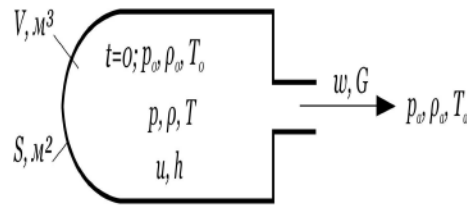


Рис. 1. Схема истечения

В сосуде объёмом V с площадью боковой поверхности S находится реальный газ — природный газ с начальными параметрами p_0, ρ_0, T_0 . При истечении газа из отверстия площадью F в окружающую среду с параметрами p_a, ρ_a, T_a параметры газа в сосуде меняются, их текущие значения — p, ρ, T .

Характер течения зависит от значения параметра давления

$$\beta = \frac{p_a}{p}.$$

Он изменяется с течением времени от значения $\beta = \frac{p_a}{p_0}$, которое мало, до $\beta = 1$, когда истечение заканчивается. Режим течения зависит

Костюкова Антонина Владимировна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: Antonikostiukova@mail.ru, тел.: +7(911)175-85-15

Павловский Валерий Алексеевич — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: v.a.pavlovsky@gmail.com, тел.: +7(921)973-82-54

от соотношения между значением параметра β и критическим значением

$$\beta_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Для природного газа показатель адиабаты можно считать равным $k = 1,3$, что даёт $\beta_{\text{кр}} = 0,5457$. Начальная масса газа $m_0 = V\rho_0$.

Различают два режима истечения. Значения скорости истечения w и массового расхода G для разных режимов течения будут следующие:

а) критический режим, $\beta \leq \beta_{\text{кр}}$:

$$w = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho}}, \quad (1)$$

$$G = c_d F \sqrt{k p \rho} \sqrt{\left[\frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}. \quad (2)$$

б) докритический режим, $\beta \geq \beta_{\text{кр}}$:

$$w = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}, \quad (3)$$

$$G = c_d F \sqrt{\frac{2k}{k-1} p \rho} \left(\frac{p_a}{p} \right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_a}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (4)$$

Коэффициент расхода c_d , входящий в формулы (2) и (4), зависит от особенностей отверстия $c_d \cong 0,95$. Система уравнений для нахождения неизвестных p, ρ, T будет состоять из трёх уравнений — баланса массы, энергии и уравнения состояния:

$$\begin{cases} V \frac{d\rho}{dt} = -G, \\ V \frac{d\rho u}{dt} = -Gh, \\ p = \hat{h} \frac{\rho T}{1 - b\rho} - \frac{a\rho^2}{(1 + b\rho)T^{0.5}}. \end{cases} \quad (5)$$

Первое уравнение системы (5) — уравнение баланса массы. Оно характеризует уменьшение плотности в сосуде по мере истечения.

Второе — уравнение энергии, которое характеризует уменьшение внутренней энергии в сосуде за счёт оттока энтальпии. Третье уравнение системы — термическое уравнение состояния, его для природных газов удобно брать в форме уравнения Редлиха — Квонга [1, 2].

В уравнении Редлиха — Квонга для природного газа:

$$\hat{h} = 502,9 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \text{К}}, \quad a = 12297,58 \frac{\text{м}^3 \text{К}^{0,5}}{\text{с}^2 \text{кг}}, \quad b = 1,833 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}. \quad (6)$$

В уравнении энергии системы (5) фигурируют величины внутренней энергии и энтальпии вытекающего газа. Используя дифференциальные уравнения термодинамики и уравнение Редлиха — Квонга, для них можно записать следующие выражения:

$$u = c_v T - \frac{3}{2} \frac{a}{b \sqrt{T} \ln(1 + b\rho)}, \quad (7)$$

$$h = c_v T - \frac{3}{2} \frac{a}{b \sqrt{T} \ln(1 + b\rho)} + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2}. \quad (8)$$

Здесь a и b — постоянные Редлиха — Квонга, для природного газа их величины даны в выражениях (6), изохорная теплоёмкость для этого газа может быть принята равной:

$$c_v \cong 1750 \frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}.$$

Величина ω в формуле (8) берётся в зависимости от режима истечения либо по выражению (1) для критического, либо по (3) для докритического режима.

Расчёты. Возьмём природный газ с показателем адиабаты $k = 1,3$. Пусть $V = 28,872 \text{ м}^3$, площадь отверстия $F = 0,000785 \text{ м}^2$, коэффициент расхода $c_d = 0,9$. Параметры газа: $p_0 = 25 \text{ МПа}$, $\rho_0 = 203,3 \text{ кг/м}^3$, $T_0 = 293$, $p_a = 6 \text{ МПа}$, $\rho_a = 1,564 \text{ кг/м}^3$, $T_a = 253$.

Расчёты выполнены численными методами, используя пакет прикладных программ MATLAB. При интегрировании систем дифференциальных уравнений применялся метод Рунге — Кутты четвёртого порядка с постоянным шагом. Результаты представлены на рис. 2.

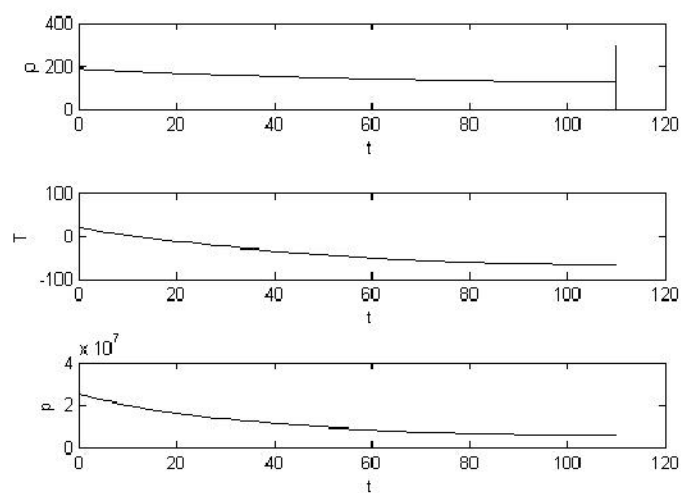


Рис. 2. Результаты для конечного давления в 60 атм.

Литература

1. Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В. и др. Модели морских газопроводов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 156 с.
2. Annamalai K., Puri J. K. Advanced tehermodynamics engineering. Чаp. 7. London: CRC Press, 2002. 312 с.
3. Павловский В. А. Введение в термодинамику реальных газов. СПб.: ФГУП Крыловский государственный научный центр, 2013. 230 с.

УДК 537.533.2

Краснова А. А., Никифоров К. А.

Модель структуры поверхности автоэлектронного эмиттера

1. Введение. Постановка задачи. Объектом исследования является автоэлектронный эмиттер в виде тонкого острия с монокристаллом на вершине [1]. Основная цель — построить модель расположения атомов поверхности на вершине эмиттера.

Плотность атомной упаковки, расположение и размеры наружных кристаллографических граней — это важные характеристиками структуры поверхности, которые являются критическими для процессов автоэлектронной эмиссии, адсорбции, нагревания, полевого испарения и т. п. Информация о размерах граней поверхности позволяет судить не только об усилении внешнего электрического поля, вызывающего эмиссию, но и о площади контактирующей поверхности с адсорбируемыми частицами [2]. Плотность и структура атомной упаковки, в свою очередь, определяют стабильность и устойчивость поверхности, а также важнейшую характеристику поверхности — работу выхода электронов.

В соответствии с поставленной целью необходимо выбрать форму поверхности, аппроксимирующую острие автоэлектронного эмиттера, и рассчитать атомную структуру поверхности эмиттера на основе выбранной аппроксимирующей формы и заданного типа кристаллической решетки.

2. Аппроксимация формы эмиттера. В сканирующем электронном микроскопе (СЭМ) были получены микрофотографии острий (рис. 1), изготовленных в учебно-научной лаборатории «Физического моделирования управляющих полей и систем заряженных частиц» СПбГУ. Аппроксимация формы эмиттера выбиралась из поверхностей вращения второго порядка: параболоида вращения, полости двуполостного гиперboloида вращения и вытянутого эллип-

Краснова Анна Александровна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: njusik1@yandex.ru, тел.: +7(981)847-60-43

Никифоров Константин Аркадьевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: knikiforov@cc.spbu.ru, тел.: +7(921)631-57-00

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00150 и частично СПбГУ, грант № 9.38.673.2013

соида вращения. Обоснование такого выбора заключается в легкости решения краевой задачи для уравнения Лапласа, описывающей распределение электрического поля в диодной системе с автоэлектронным эмиттером, с граничными условиями в виде поверхностей вращения второго порядка [1].

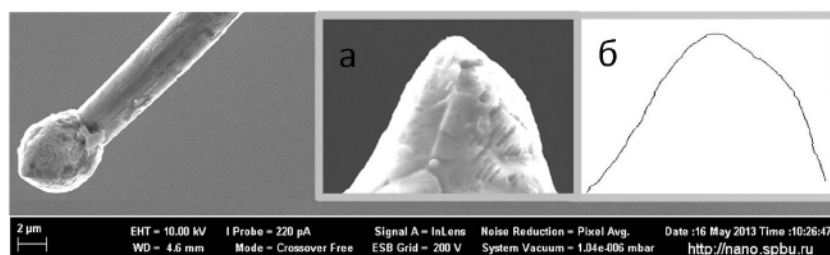


Рис. 1. СЭМ-изображение исследуемого острья эмиттера: а) детализированное изображение вершины; б) профиль вершины, полученный с помощью фильтра Собела

Задача цифровой обработки изображений состояла в выделении профиля на СЭМ-изображении (рис. 1) экспериментального острья-эмиттера с целью последующей аппроксимации его формы. Производилась сегментация цифрового полутонного СЭМ-изображения с использованием фильтра Собела, реализованного в пакете Image Processing Toolbox среды MATLAB [3].

Задача нелинейной регрессии решалась с целью выбора вида и значений параметров оптимальной аппроксимирующей поверхности вращения второго порядка. Использовался метод Левенберга — Марквардта с программной реализацией в MATLAB (пакет Statistics Toolbox).

3. Модель наноструктуры поверхности кристалла. Кристалл, по определению, характеризуется периодически расположенными одинаковыми узлами. Поэтому удобно связать со структурой кристалла набор точек, периодически расположенных в пространстве, причем окружение каждой из точек оказывается одинаковым. Эта точечная пространственная решетка является геометрической абстракцией, и реальный кристалл получится, если в каждую точку

решетки поместить одинаковую (базисную) группу атомов. Точечная решетка кристалла может быть построена с помощью упаковки в стопки одинаковых элементарных ячеек бок о бок друг с другом в трех направлениях.

Построение модели расположения поверхностных атомов состояло из двух этапов. На первом этапе использовалась модель «тонкой оболочки», на втором — «локального атомного окружения» [4–7].

Этап 1 состоял в локализации поверхностных атомов. Выделялись атомы (эквидистантные), лежащие в некотором приповерхностном слое на заданном расстоянии d от геометрической поверхности, определяющей форму кристалла (рис. 2).

Этап 2 заключался в выявлении поверхностных атомов. Атомы приповерхностного слоя анализировались на неполное число ближайших соседей и выявлялись атомы, которые по количеству порванных связей значительно отличаются от атомов в объеме и поэтому относятся к поверхности.

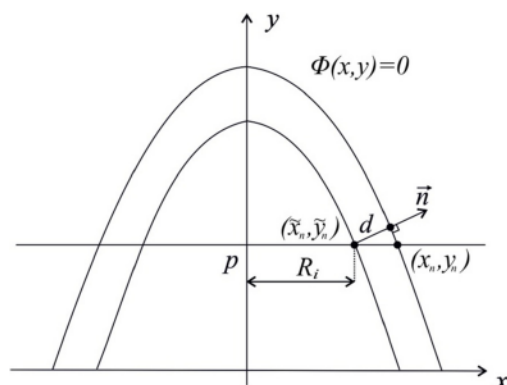


Рис. 2. Модель «тонкой оболочки»

4. Задача об эквидистанте. Главной задачей построения координат атомов, расположенных на поверхности выбранной формы (эллипсоид, параболоид, гиперболоид), являлось нахождение внутреннего радиуса R_i тонкого приповерхностного слоя для каждой кристаллографической аксиальной плоскости p (рис. 2). Два указанных параметра являются цилиндрическими координатами точки

эквидистанты, т. е. кривой, равноудаленной от образующей поверхности вращения.

Форма эквидистанты в общем случае отличается от формы образующей и уже не является кривой второго порядка. Для решения задачи необходимо найти на образующей точку и нормаль в ней такие, что точка, находящаяся на известном расстоянии d вдоль нормали в глубине эмиттера попадает на заданную высоту p . Выражения для координат (x_n, y_n) этой точки нормали задаются формулами

$$\begin{cases} \tilde{y}_n = p = y_n - d \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y} |_{(x_n, y_n)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} |_{(x_n, y_n)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} |_{(x_n, y_n)}\right)^2}}, \\ \tilde{x}_n = R_i = x_n + d \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} |_{(x_n, y_n)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} |_{(x_n, y_n)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} |_{(x_n, y_n)}\right)^2}}, \\ \Phi(x, y) = 0, \end{cases}$$

в которых дробь появляется из выражения для нормали, p и d — заданные величины, R_i , x_n , y_n — искомые, $\Phi(x, y) = 0$ — уравнение образующей. Решение данной системы производилось методом бисекций с реализацией в среде MATLAB.

5. Заключение. В результате работы выбрана гиперboloидальная форма, наилучшим образом аппроксимирующая поверхность острия вольфрамового эмиттера (рис. 1), ось которого совпадает с кристаллографическим направлением (110) (индексы Миллера в объемно-центрированной кубической решетке).

Рассчитанная структура приповерхностного слоя толщиной $d = 1$ параметр решетки показана с двух ракурсов на рис. 3, на котором изображена одна из симметричных половин. Были найдены координаты 72660 узлов решетки на поверхности 200 атомных аксиальных слоев. Из рис. 3 видно, что форма атомных граней и ступеней вдали от оси вращения не является круговой — это отличительная особенность, которая не наблюдается в случае полусферического острия [5].

Авторы выражают благодарность ассистенту В. В. Трофимову, изготовившему экспериментальные образцы острий. Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ» и аналитического оборудования Междисциплинарного ресурсного центра по направлению «Нанотехнологии» СПбГУ.

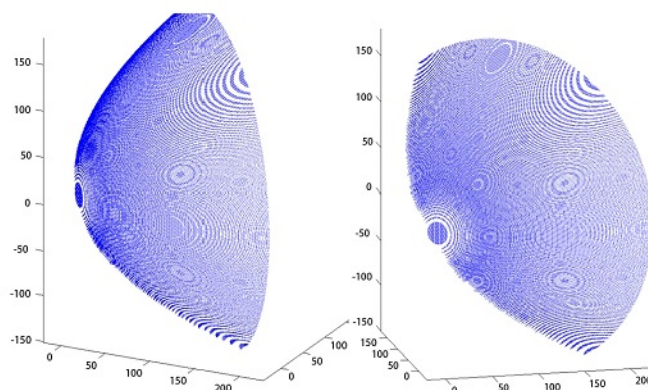


Рис. 3. Структура поверхности кристалла гиперболоидальной формы с объемно-центрированной кубической решеткой. Ось вращения совпадает с кристаллографическим направлением (110). Единицы измерения по координатным осям выражены в параметрах решетки

Литература

1. Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронная эмиссия. Принципы и приборы. М.: Интеллект, 2011. 704 с.
2. Plsek J., Hruby P., Nikiforov K., Knor Z. Properties of physisorbed water layers on gold revealed in a FEM study // Applied Surface Science. 2005. Vol. 252, iss. 5. P. 1553–1560.
3. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. М.: Техносфера, 2006. 621 с.
4. Eaton H. C., Lee L. The simulation of images in the field ion microscope: Specimens of arbitrary crystal structure and orientation // Journal of Applied Physics. 1982. Vol. 2. P. 988–994.

5. Никифоров К. А., Егоров Н. В., Чэ-Чоу Шен. Реконструкция поверхности полевого электронного эмиттера // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009. С. 100–106.
6. Никифоров К. А., Егоров Н. В. Моделирование структуры поверхности и численный расчет плотности тока полевого эмиссионного металлического катода // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2006. Вып 2. С. 39–45.
7. Никифоров К. А., Краснова А. А. Моделирование структуры поверхности монокристаллического острья // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики: Материалы научно-практической internet-конференции. Ульяновск: SIMJET, 2013. С. 111–115.

УДК 537

Листрукова А. В., Виноградова Е. М.

Математическое моделирование эмиссионной системы

1. Введение. Развитие нано- и микроэлектроники, а также других сфер науки, тесно связано с общим развитием фундаментальных и прикладных наук таких, как математическое моделирование, физики поверхности и т. д. В последние годы значительно вырос интерес к явлению полевой электронной эмиссии и к исследованию свойств самих полевых эмиттеров. В основе расчета электронно-оптических систем лежит задача нахождения потенциала электростатического поля, которое создается системой электродов. В случае канонических областей, для которых применим метод разделения переменных, данная задача может иметь аналитическое решение [1–3].

2. Математическая постановка задачи. Рассмотрим диодную систему с полевым острием, схематическое изображение которой приведено на (рис. 1) в цилиндрических координатах. Пусть R_1 , z_2 — границы области, L — длина острия.

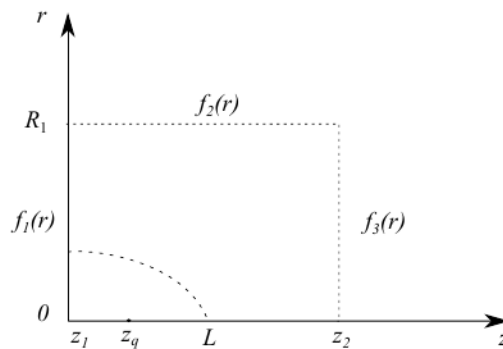


Рис. 1. Схематическое изображение системы

Листрукова Анна Валерьевна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: listrukova@rambler.ru, тел.: +7(911)719-53-92

Виноградова Екатерина Михайловна – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vincat2008@yandex.ru, тел.: +7(911)170-79-61

В рассматриваемой системе без учёта острия уравнение Лапласа и граничные условия имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$U(z_1, r) = f_1, \quad r \in [0, R_1],$$

$$U(z_2, r) = f_3, \quad r \in [1, R_1], \quad (2)$$

$$U(z, R_1) = f_2, \quad r \in [z_1, z_2].$$

Распределение потенциала в общем случае представляет собой решение граничной задачи для уравнения Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho(r, z)}{\varepsilon_0}, \quad (3)$$

$$U(r, z_1) = f_1(r),$$

$$U(r, z_2) = f_3(r),$$

$$U(R_1, z) = f_2(z), \quad (4)$$

$$U(r, z)|_{r_0(z)} = 0.$$

3. Решение. Для решения задачи заменим влияние острия на распределение потенциала влиянием точечного заряда q , расположенного на оси системы в точке $(0, z_q)$. Общее решение $U(r, z)$ граничной задачи (3), (4) можно представить в виде суммы общего решения $U_1(r, z)$ однородного уравнения Лапласа с заданными граничными условиями (2) и частного решения $U_2(r, z)$ уравнения Пуассона с однородными граничными условиями (3). Решив граничную задачу (1), (2), в общем случае получим

$$\begin{aligned}
U_1(r, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(B_k \sin \left(\frac{\pi k (z - z_1)}{z_2 - z_1} \right) \right) \frac{I_0 \left(\frac{\pi k}{z_2 - z_1} r \right)}{I_0 \left(\frac{\pi k}{z_2 - z_1} R_1 \right)} + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_n (z - z_1)}{R_1} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_n (z_2 - z_1)}{R_1} \right)} + D_n \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_n (z_2 - z)}{R_1} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_n (z_2 - z_1)}{R_1} \right)} \right) J_0 \left(\frac{\gamma_n}{R_1} r \right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Коэффициенты рядов (5) представляют собой коэффициенты разложения граничных условий по собственным функциям

$$\begin{aligned}
U(r, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_0 \left(\frac{\gamma_n}{R_1} r \right) = f_1(r), \\
U(r, z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0 \left(\frac{\gamma_n}{R_1} r \right) = f_3(r), \\
U(R_1, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin \left(\frac{\pi k (z - z_1)}{z_2 - z_1} \right) = f_2(z).
\end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты в (5) имеют явный вид

$$B_k = f_2 \frac{z_2 - z_1}{\pi k} ((-1)^{k+1} + 1), \quad D_n = \frac{2f_1}{J_1(\gamma_n)}, \quad C_n = \frac{2f_3}{J_1(\gamma_n)}.$$

Решение уравнения Пуассона (3) с однородными граничными условиями имеет вид [4, 5]

при $z < z_q$

$$U_2(r, z) = \frac{q}{\varepsilon_0 \pi R_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{R_1} (z_2 - z_q) \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{R_1} (z_2 - z_1) J_0 \left(\gamma_n \frac{r}{R_1} \right)}{\gamma_n \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{R_1} (z_2 - z_1) J_1^2(\gamma_n)}, \tag{6}$$

при $z > z_q$

$$U_2(r, z) = \frac{q}{\varepsilon_0 \pi R_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{R_1} (z_q - z_1) \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{R_1} (z - z_1) J_0 \left(\gamma_n \frac{r}{R_1} \right)}{\gamma_n \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{R_1} (z_2 - z_1) J_1^2(\gamma_n)}. \tag{7}$$

Для $U_1(r, z)$ и $U_2(r, z)$ дают общее решение $U(r, z)$ граничной задачи (3), (4). Формулы (5)–(7)

$$U(r, z) = U_1(r, z) + U_2(r, z).$$

Распределение потенциала можно представить через осевое распределение $U_0(z) = U(0, z)$ при $r = 0$ [6]

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{U_0^{(2n)}(z)}{2^{2n} (n!)^2} r^{2n}.$$

4. Результаты и выводы. Для конкретных значений параметров построены графики зависимости потенциала от r и z в общем случае (см. рис. 2), с осевым распределением (см. рис. 3) и соответственно их разность (см. рис. 4).

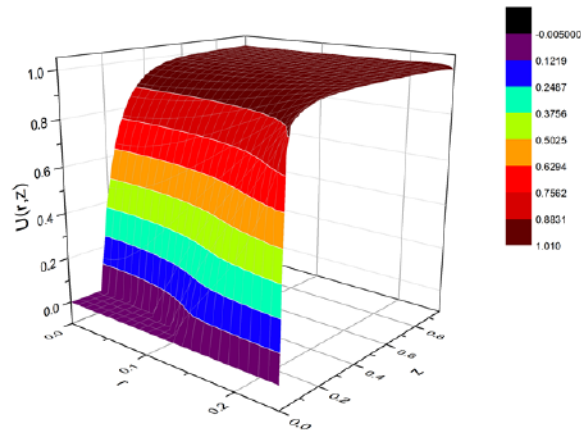


Рис. 2. Распределение потенциала $U(r, z)$

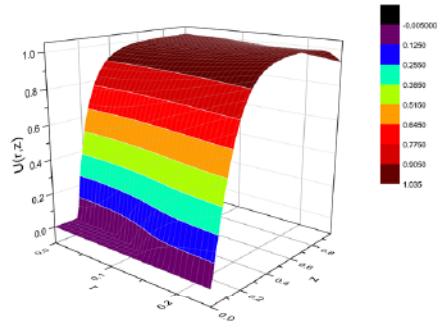


Рис. 3. Распределение потенциала через осевое распределение $U_0(z) = U(0, z)$

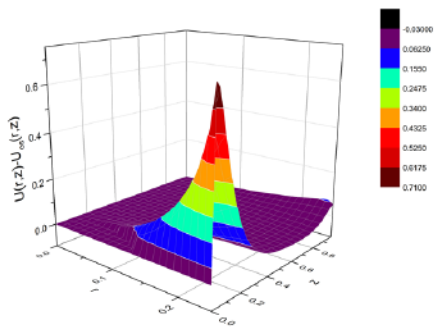


Рис. 4. Разность решений $U(r, z)$ и потенциала представленного через осевое распределение

Из рис. 4 видно, что распределение потенциала $U(r, z)$ при $r < 0,25$ в общем случае более соответствует граничным условиям, чем в случае с осевым распределением потенциала. Данные графики достаточно хорошо совпадают в области, близкой к поверхности острия.

Литература

1. Виноградова Е. М., Егоров Н. В. К расчету диодной пушки на основе полевого электронного катода // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 3. С. 369–371.
2. Виноградова Е. М., Егоров Н. В. Математическое моделирование электронной пушки на основе полевого электронного катода // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, вып. 2. С. 251–256.
3. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Баранов Р. Ю. Расчет электростатического поля системы соосных аксиально-симметричных электродов // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 2. С. 212–217.
4. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Телевной Д. С. Расчет триодной полевой эмиссионной системы с модулятором // Журнал технической физики. 2014. Т. 84, № 2. С. 139–144.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
6. Виноградова Е. М. Математическое моделирование электронно-оптических систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 110 с.

УДК 519.632.4

Маринаки М.

Об одной задаче оптимизации дизайна магнитного сцепления

Рекомендовано к публикации доцентом Страутиньшом У.

1. Введение. В данной статье рассматривается задача оптимизации дизайна бесконтактного магнитного сцепления, содержащего постоянные магниты прямоугольной формы. Впервые конструкция с магнитами такой формы была рассмотрена в [1].

Анализ подобных задач, как правило, включает в себя следующие процедуры [2]: после введения основного ограничения на формы магнитов (секторы, прямоугольники и т. п.) вводится вектор параметров и конструируется функционал, зависящий от параметров и характеристик магнитного поля.

В данной статье в качестве параметров выбраны три величины: ширина прямоугольника (постоянного магнита), угол поворота и количество постоянных магнитов. Оптимизируемая величина: вращающий момент.

Для нахождения максимума соответствующего функционала применен метод роя частиц. Идея о применении сдвига сетки с целью уменьшения времени вычислений, предложенная в [2], адаптирована к ситуации с прямоугольными магнитами.

2. Геометрия и постановка задачи. Геометрия задачи изображена на рис. 1.

Рассмотрим уравнения Максвелла для стационарного случая.

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{B} — магнитная индукция, \mathbf{M} — намагниченность и μ — магнитная постоянная.

Маринаки Максимс — аспирант, Латвийский университет; e-mail: maksims.marinaki@lu.lv, тел.: +371-26859470

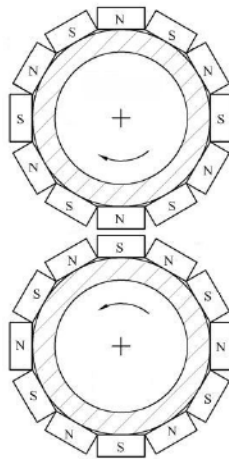


Рис. 1. Магнитное сцепление

В двух измерениях зададим вариант уравнений Максвелла (1) для векторного потенциала. Для этого приняв, что присутствует лишь z -компонента потенциала \mathbf{V}_m и плотности тока \mathbf{J} :

$$\mathbf{V}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix},$$

а также условие $\nabla \cdot V_m = 0$, получается система:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla V_m \right) = J, \quad \Omega, \quad (2)$$

$$n \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla V_m \right) = 0, \quad \partial\Omega. \quad (3)$$

Выбор краевых условий на искусственно заданной границе $\partial\Omega$ вокруг конструкции не имеет большого значения; в данном случае выбраны натуральные краевые условия (3). Основное влияние на решение оказывает правая часть в уравнении Пуассона (2). Она задается в форме $\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{M} \right)$ в областях, соответствующих постоянным магнитам на рис. 1. В остальных областях, $J = 0$.

Подобный подход применен при определении вращающего момента. В трех измерениях он задается в виде

$$\tau = \int_{\Omega_1} \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r}.$$

Для $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix}$ в декартовых координатах, приняв за начало координат центр нижней окружности, имеем

$$\tau = \int_{\Omega_1} (Jx B_x + Jy B_y) dx dy.$$

За область Ω_1 в данном случае выбирается область самого нижнего магнита верхней части конструкции (1).

Отсюда получаем задачу оптимизации:

$$\frac{\tau}{|\Omega_1(\mathbf{p})|} \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$b_{l_d} \leq p_d \leq b_{u_d}, \quad d = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

где $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} n \\ w \\ \alpha \end{pmatrix}$ — вектор параметров (соответственно, количество постоянных магнитов, ширина прямоугольников и угол поворота), b_{l_d} , b_{u_d} — нижняя и верхняя грани. Различаются два варианта определения расстояния g между верхней и нижней частями конструкции. Вариант

$$g_1 = 2r + 2w + (n - 1)(r + w) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)$$

был предложен в [1]. Еще одна функция сконструирована из соображений минимизации расстояния (в экстремальном случае, $g = \varepsilon$ — фиксированная величина):

$$g_2 = r + w + \sqrt{(r + w)^2 + \left(\frac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right)^2} + \varepsilon.$$

За r обозначен радиус окружности. В ходе численного эксперимента рассмотрены оба случая.

3. Численные методы решения задачи. Таким образом,

- для нахождения полей V_m и \mathbf{B} применен метод конечных элементов (линейные элементы);
- для оптимизации функционала применен метод роя частиц. Ввиду заданных величин \mathbf{b}_u , \mathbf{b}_l , требуется ограничить действия метода. Как известно [2], алгоритм подразумевает модификацию дискретных скоростей и положений частиц в направлении лучших состояний \mathbf{g} и \mathbf{p} в зависимости от параметров \mathbf{w} , \mathbf{c} и \mathbf{r} :

$$v_d^i(k+1) = w^i v^i(k) + c_1 r_1 (p_d^i - x_d^i(k)) + c_2 r_2 (g_d - x_d^i(k)), \quad (6)$$

$$x_d^i(k+1) = x_d^i(k) + v_d^i(k+1), \quad (7)$$

где $k = \overline{1, K}$, $d = \overline{1, D}$, $i = \overline{1, I}$, где K — количество итераций, D — размерность задачи, I — количество частиц.

Для соблюдения ограничений \mathbf{b}_l , \mathbf{b}_u , сконструированы дополнительные действия:

$$\begin{aligned} x_d^i + v_d^i < b_{l_d} \vee x_d^i + v_d^i > b_{u_d} &\Rightarrow v_d^i := -v_d^i, \\ x_d^i + v_d^i < b_{l_d} &\Rightarrow v_d^i := b_{l_d} - x_d^i, \\ x_d^i + v_d^i > b_{u_d} &\Rightarrow v_d^i := b_{u_d} - x_d^i; \end{aligned}$$

- метод сдвига сетки [2]. Здесь формулируются вспомогательные проблемы относительно смещения $\mathbf{r} := \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = 0, \quad \Omega, \quad (8)$$

$$\mathbf{r} = 0, \quad \Gamma_1, \quad (9)$$

$$\mathbf{r} = \Delta R, \quad \Gamma_2. \quad (10)$$

Применяя данный метод, не возникает необходимость конструировать новую сетку на каждом шаге численного метода оптимизации. За Γ_1 обозначена неподвижная область границы, за Γ_2 — подвижная. Величина ΔR задана в форме $A\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ — аффинная трансформация, соответствующая изменению параметров.

4. Численный эксперимент. Зададим ограничения $b_l = (3; 0,1; 0)^T, b_u = (14; 0,3; 90)^T$.

При заданной функции g_1 получен результат $p_1^* \approx (6; 0,3; 15,4)^T$, (рис. 2).

При заданной функции g_2 получен результат $p_2^* \approx (10; 0,3; 45,7)^T$, (рис. 3).

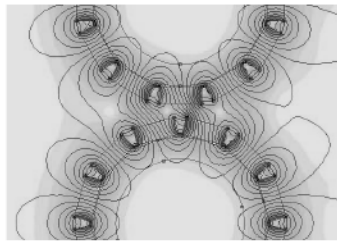


Рис. 2. Оптимальный дизайн, соответствующий g_1 , количество итераций — 204

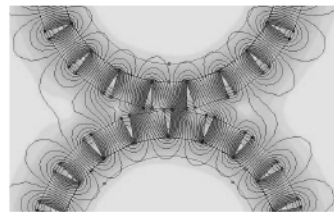


Рис. 3. Оптимальный дизайн, соответствующий g_2 , количество итераций — 747

5. Заключение. Оптимальный дизайн конструкции найден для двух разных ситуаций. При нахождении решения задачи ввиду большого количества необходимых итераций была важна конструкция вспомогательных проблем (8)–(10), так как последнее значительно снизило время вычислений. Исследование можно продолжить, рассматривая, например, конструкции с непрямоугольными постоянными магнитами и задачи большей размерности.

Литература

1. Wu Y. C., Wang C. W. Transmitted torque analysis of a magnetic gear mechanism with rectangular magnets // Applied mathematics and information sciences. 2013. Vol. 7. P. 245–250.
2. Niu S., Chen N., Ho S. L., Fu W. N. Design optimization of magnetic gears using mesh adjustable finite-element algorithm for improved torque // IEEE transactions on magnetics. 2012. Vol. 48, No 11. P. 4156–4159.

УДК 519.635.8

Михеев С. А., Кривовичев Г. В.

Исследование устойчивости трехслойных разностных схем решения системы кинетических уравнений

1. Введение. В работе продолжается исследование построенной в [1] трехслойной схемы с центральными разностями, а также рассматриваются схемы с направленными разностями. Для исследования устойчивости используется метод фон Неймана. Показано, что использование специальных аппроксимаций конвективных членов кинетических уравнений позволяет получать наибольшие по площади области устойчивости в пространстве параметров.

2. Трехслойные схемы. Система кинетических уравнений, полученная после дискретизации в пространстве скоростей уравнения Бхатнагара — Гросса — Крука в случае решетки $D2Q9$, в безразмерных переменных имеет следующий вид [2]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\tau}(f_i - f_i^{(eq)}), \quad (1)$$

где $f_i = f_i(t, \mathbf{r})$, $i = \overline{1, 9}$, — безразмерные функции распределения, соответствующие частицам со скоростями \mathbf{v}_i , $\mathbf{r} = (x, y)$ — вектор безразмерных пространственных переменных, t — безразмерное время, τ — безразмерное время релаксации, $f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t, \mathbf{r}))$ — функции, аппроксимирующие равновесные функции распределения Максвелла, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_9)$. Векторы \mathbf{v}_i задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (1, 0), & \mathbf{v}_3 &= (0, 1), & \mathbf{v}_4 &= (-1, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, -1), \\ \mathbf{v}_6 &= (1, 1), & \mathbf{v}_7 &= (-1, 1), & \mathbf{v}_8 &= (-1, -1), & \mathbf{v}_9 &= (1, -1). \end{aligned}$$

Рассмотрим равномерную сетку с шагом h по пространственным переменным и с шагом Δt по времени. В [1] была предложена трехслойная схема, в которой все производные, входящие в (1), аппроксимировались с помощью центральных разностных производных. В

Михеев Сергей Андреевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: helps2@ Rambler.ru, тел.: +7(921)337-88-37

Кривовичев Герасим Владимирович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gera1983k@bk.ru, тел.: +7(905)230-88-53

настоящей работе построим схемы, тоже используя при аппроксимации производной по времени центральные разности:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t} \approx \frac{f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j - \Delta t, \mathbf{r}_{kl})}{2\Delta t},$$

а при аппроксимации производных по пространственным переменным направленные разности первого порядка:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx R_{ix}^1 = \begin{cases} \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{h}, & v_{ix} \geq 0, \\ \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{h}, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx R_{iy}^1 = \begin{cases} \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{h}, & v_{iy} \geq 0, \\ \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{h}, & v_{iy} < 0, \end{cases}$$

и направленные разности второго порядка:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx R_{ix}^2 = \begin{cases} \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-2l})}{2h}, & v_{ix} \geq 0, \\ -\frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+2l})}{2h}, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx R_{iy}^2 = \begin{cases} \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-2})}{2h}, & v_{iy} \geq 0, \\ -\frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+2})}{2h}, & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Приведем модифицированную трехслойную схему с центральными разностями из [1]:

$$\begin{aligned} f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = & \tilde{f}_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - v_{ix} \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k-1l})) - \\ & - v_{iy} \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl-1})) - \\ & - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}))), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tilde{f}_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = 0,5(f_i(t_{j-1/2}, \mathbf{r}_{kl}) + f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}))$.

Аналогичные схемы построим для представленных выше случаев направленных разностей. Схему, заданную (2), будем называть ЦР-схемой, схемы с направленными разностями — НР1- и НР2-схемами. В указанных схемах производные по пространственным переменным

аппроксимируются отдельно друг от друга. По аналогии с [2], рассмотрим схемы, основанные на единой аппроксимации члена $\mathbf{v}_i \nabla f_i$. Исследуем три схемы, использующие аппроксимации вида

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i \approx \frac{1}{2h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i h) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)), \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i \approx \frac{1}{h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)), \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i \approx \frac{1}{2h} (3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h)). \quad (5)$$

Проделив аналогичные преобразования для построения модифицированных схем, как и в [1], получим схемы, аналогичные (2), построенные с использованием (3)–(5), которые назовем М1-, М2- и М3-схемами соответственно.

3. Постановка задачи об исследовании устойчивости. По аналогии с [3], исследуем устойчивость только по начальным условиям. Рассматриваются стационарные пространственно однородные режимы течения в неограниченной области, для которых такие безразмерные макровеличины, как плотность ρ и скорость \mathbf{u} являются постоянными. Значения функций $f_i^{(eq)}$ в этом случае тоже являются постоянными: $f_i^{(eq)} = \bar{f}_i^{(eq)} = C_i = const$ [3]. Исследуются два режима течения: $u_x = U = const, u_y = 0$ (режим 1) и $u_x = u_y = U = const$ (режим 2) при предположении, что $\rho = 1$.

Проведем все типовые выкладки для схемы ЦР. По аналогии с [3], будем искать решение в виде

$$f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \bar{f}_i^{(eq)} + \delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}),$$

где $\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})$ суть отклонения относительно невозмущенного решения $\bar{f}_i^{(eq)}$. Исследуем устойчивость по линейному приближению с помощью метода фон Неймана. При его применении задача об исследовании устойчивости невозмущенных решений системы (2) сведется к задаче исследования устойчивости нулевого решения системы разностных уравнений вида

$$F_i \left(t_{j-1/2} + \frac{3\Delta t}{2} \right) = \frac{1}{2} (F_i(t_{j-1/2}) + F_i(t_{j-1/2} + \Delta t)) +$$

$$+ \sum_{m=1}^9 G_{im} F_m(t_{j-1/2} + \Delta t), \quad (6)$$

где сеточные функции F_i используются в соотношениях [3]: $\delta f_m(t_{j-1/2}, \mathbf{r}_{kl}) = F_i(t_{j-1/2}) \exp(\mathbf{i} \Theta \mathbf{r}_{kl}^T)$, где $\mathbf{i}^2 = -1$, $\Theta = (\theta_x, \theta_y)$, $\theta_x \in [-\pi, \pi]$, $\theta_y \in [-\pi, \pi]$.

Выражения для коэффициентов G_{im} в (6) для схемы (2) имеют вид

$$G_{im} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{i} \Delta t}{h} (v_{ix} \sin(\theta_x h) + v_{iy} \sin(\theta_y h)) - \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}(\bar{\mathbf{r}}^{(eq)})}{\partial f_m}, & m = i, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}(\bar{\mathbf{r}}^{(eq)})}{\partial f_m}, & m \neq i. \end{cases}$$

Вводя новые переменные

$$S_i(t_{j-1/2}) = F_i(t_{j-1/2}), \quad i = \overline{1, 9},$$

$$S_i(t_j) = F_{i-9}(t_{j-1/2} + \Delta t/2), \quad i = \overline{10, 18},$$

$$S_i(t_{j-1/2}) = F_{i-18}(t_{j-1/2} + \Delta t), \quad i = \overline{19, 27},$$

получим, что (6) сведется к двухслойной схеме

$$S_i(t_{j-1/2} + \Delta t/2) = \sum_{m=1}^{27} A_{im} S_m(t_{j-1/2}), \quad (7)$$

где A_{im} задают матрицу следующей структуры:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{9 \times 9} & \mathbf{E}_{9 \times 9} & \mathbf{O}_{9 \times 9} \\ \mathbf{O}_{9 \times 9} & \mathbf{O}_{9 \times 9} & \mathbf{E}_{9 \times 9} \\ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{9 \times 9} & \mathbf{O}_{9 \times 9} & \mathbf{K}_{9 \times 9} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{K} = \frac{1}{2} \mathbf{E} + \mathbf{G}$, \mathbf{O} и \mathbf{E} есть нулевая и единично-диагональная матрицы, блок \mathbf{G} образован величинами G_{im} . Линейные приближения остальных разностных схем сводятся к типовой системе разностных уравнений с различными выражениями для компонент блока \mathbf{G} .

Таким образом, задача об исследовании устойчивости невозмущенного решения (2) сведена к задаче об исследовании устойчивости нулевого решения (7). Оно является асимптотически устойчивым, если все собственные значения матрицы \mathbf{A} лежат в единичном круге.

При всех принятых допущениях собственные значения являются функциями параметров θ_x , θ_y , U , Δt , h и τ . Для упрощения будем

рассматривать параметр Куранта $\gamma = v\Delta t/h$, где $v = 1$ есть модуль безразмерной характерной скорости частиц.

Исследовались области устойчивости на плоскости (τ, U) при различных значениях γ . Для построения областей и вычисления их площадей область изменения параметров (τ, U) разбивалась равномерной сеткой из 100×100 узлов. Считалось, что ее узел входит в область устойчивости, если при фиксированных значениях τ и U для всех значений θ_x, θ_y собственные значения по модулю не превосходили единицы. Область изменения θ_x и θ_y разбивалась равномерной сеткой из 100×100 узлов. Параметр U полагался изменяющимся от 0 до 1, параметр τ — от 0 до 100.

4. Области устойчивости схем. В таблицах 1, 2 представлены значения площадей областей устойчивости для представленных схем при $\gamma = 0,1; 0,25; 0,5$ в случаях обоих режимов.

Таблица 1. Площади областей устойчивости схем в случае режима 1

γ	Схема ЦР	Схема НР1	Схема НР2	Схема М1	Схема М2	Схема М3
0,1	54,127	61,167	54,423	54,129	61,168	56,066
0,25	53,617	0	0	54,137	60,310	0
0,5	0	0	0	53,719	0	0

Таблица 2. Площади областей устойчивости схем в случае режима 2

γ	Схема ЦР	Схема НР1	Схема НР2	Схема М1	Схема М2	Схема М3
0,1	51,872	57,035	51,219	50,587	54,882	52,546
0,25	51,668	0	0	52,178	54,250	0
0,5	0	0	0	52,413	0	0

Необходимо отметить, что площади областей устойчивости для случая режима 1 больше, чем для случая режима 2. Площади для схемы НР1 больше, чем площади для схем ЦР и НР2, которые близки по величине. В то же время, при $\gamma = 0,25$ площади областей устойчивости для схем НР1 и НР2 равны нулю, тогда как в случае схемы ЦР область устойчивости не является пустой.

Ситуация со схемами М1–М3, построенными с использованием специальной аппроксимации члена $\mathbf{v}_i \nabla f_i$, оказалась иной — при $\gamma = 0,1$ площади областей устойчивости схем ЦР и М1, а также схем НР1 и М2 практически равны друг другу. Для схемы М3 при этом же значении γ площадь немного увеличивается. При $\gamma = 0,25$ для схемы М2, по сравнению с НР1, имеем ненулевую площадь области устойчивости.

При исследовании схемы M1 было обнаружено, что при возрастании γ в случаях обоих режимов площадь увеличивается, причем немонотонным образом, в случае режима 1 имея максимальное значение при $\gamma = 0,75$, в случае режима 2 — при $\gamma = 0,4$. Но при приближении к $\gamma = 1$ площадь начинает уменьшаться, и сама область при таком значении γ является уже пустым множеством. Соответствующие результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3. Площади областей устойчивости схемы M1

γ	0,125	0,2	0,4	0,75	0,8	0,9
Реж. 1	54,137	57,729	62,443	69,911	64,167	6,5708
Реж. 2	51,607	52,728	53,341	52,699	52,617	4,1730

5. Заключение. В работе проведено исследование устойчивости трехслойных конечно-разностных схем в случае, когда производная по времени аппроксимируется с использованием центральной разностной производной. Показано, что наибольшие по площади области устойчивости могут быть получены при использовании специальной аппроксимации члена $\mathbf{v}_i \nabla f_i$.

Литература

1. Михеев С. А., Кривовичев Г. В. Трехслойная конечно-разностная схема для решения системы кинетических уравнений Больцмана с дискретными скоростями // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 262–267.
2. Sofonea V., Sekerka R. F. Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // Journal of Computational Physics, 2003. No 184. P. 422–434.
3. Кривовичев Г. В. Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование, 2012. Т. 13. С. 332–340.

УДК 537.2

Никифоров К. А., Сайфуллин М. Ф., Трофимов В. В.

Исследование краевых эффектов по электрическому полю массива автоэлектронных эмиттеров

1. Введение. Стандартные механизмы генерации электронных пучков в катодах, которые используются во многих приложениях, основаны на явлениях фото- и термоэмиссии. Альтернативную технологию представляют матричные автоэлектронные катоды, в которых электроны эмитируются с энергиями, близкими к уровню Ферми. Такие катоды характеризуются потенциально более низкой кинетической энергией поперечного движения электронов в пучке, что в основном определяется конфигурацией силовых линий электрического поля. Существует два основных типа автоэлектронных эмиттеров: одиночные катоды в виде эмиссионного острия и многоэмиттерные системы, состоящие из массива эмиттеров, расположенных в периодической решетке. На рис. 1 представлены результаты измерений эмиссионного тока из массива лезвийных эмиттеров цилиндрической формы в атмосфере при низком напряжении в импульсном режиме и в условиях сверхвысокого вакуума при высоком напряжении в стационарном режиме [1]. В [2, 3] показано, что в конфигурации плоского-параллельного диода усиление электрического поля на краю массива играет отрицательную роль по дестабилизации эмиссионного тока и предложена модель диода плоско-сферического, в которой краевые эффекты плоской подложки массива скомпенсированы сферической формой анода. В настоящей работе представлены экспериментальные результаты измерений автоэлектронного тока данного массива эмиттеров на сферическом аноде (см. вставку на рис. 1). Кроме того, целью работы является исследование методами математического

Никифоров Константин Аркадьевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: knikiforov@cc.spbu.ru, тел.: +7(921)631-57-00

Сайфуллин Марат Фанилович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: smartin92@mail.ru, тел.: +7(921)449-44-72

Трофимов Василий Валерьевич – ассистент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vavtr@mail.ru, тел.: +7(921)410-60-50

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00150 и частично СПбГУ, грант № 9.38.673.2013

моделирования краевых эффектов в распределении электрического поля над рабочей поверхностью массива автоэлектронных эмиттеров: эффекты усиления электрического поля на острой кромке цилиндрического эмиттера, а также на краю подложки массива.

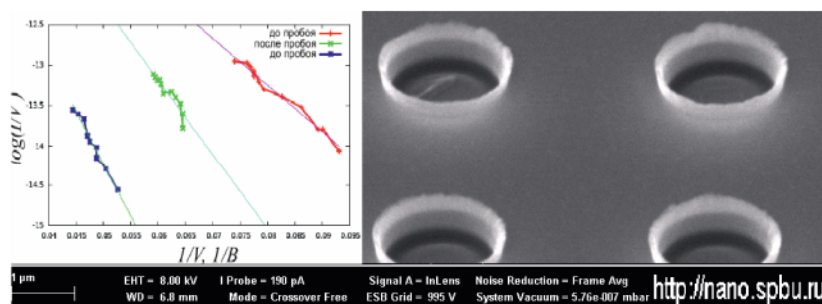


Рис. 1. Автоэлектронная матрица с цилиндрическими эмиттерами. На вставке: экспериментальные вольтамперные характеристики

2. Усиление поля на кромке эмиттера. В микромасштабе картина поля определяется микроразмерными геометрическими параметрами цилиндрических эмиттеров — их диаметром и высотой. На этом этапе задача моделирования состоит в определении расстояния, на котором прикладываемое однородное поле начинает заметно возмущаться из-за наличия эмиттерных выступов на плоской подложке матрицы.

Необходимо решить краевую задачу для уравнения Лапласа (1), описывающую распределение электростатического потенциала в замкнутой области, соответствующей геометрии ячейки массива эмиттеров (рис. 2 слева). При этом с учетом осевой симметрии целесообразно использовать цилиндрическую систему координат и двумерную постановку задачи. В цилиндрической системе уравнение Лапласа переписывается в следующем виде ($\partial/\partial\theta = 0$, θ — угловая координата):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Граничное условие на левой границе Γ_l (рис. 2) — условие Неймана равенства нулю нормальной производной от электростатического

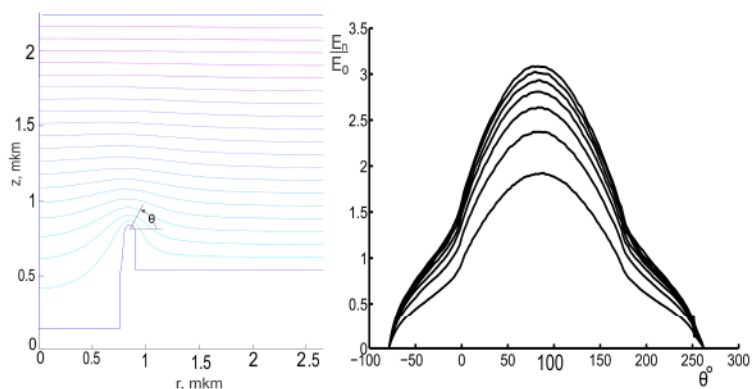


Рис. 2. Ячейка массива эмиттеров (показана половина сечения в цилиндрических координатах, ось вращения - слева). Изображены лезвие эмиттера и эквипотенциальные линии (с шагом 1 В) микромасштабного распределения электрического поля. Справа: угловое распределение коэффициента усиления поля на краю лезвия. Постоянное поле $E_0 = 1,43 \cdot 10^7$ прикладывалось на расстояниях 0,2–1,4 мкм с шагом 0,2 мкм (нижняя линия соответствует 0,2 мкм, верхняя линия соответствует 1,4 мкм)

потенциала

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{\Gamma_i} = 0,$$

так как данная граница является осью симметрии системы. Условия типа Дирихле

$$\varphi \Big|_{\Gamma_i} = \varphi_i = const$$

накладываются на все остальные границы Γ_i вычислительной области с соответствующими значениями потенциала. Данная задача численно решалась методом конечных элементов с использованием линейных треугольных конечных элементов и адаптивной триангуляцией, реализованных в пакете MATLAB PDE Toolbox [4, 5].

В результате получено, что коэффициент усиления поля (рис. 2, справа) зависит от расстояния, на котором поле прикладывается к выступающей острой кромке цилиндрического микроэмиттера. С увеличением этого расстояния данная зависимость ослабляется и на

расстоянии, примерно в 6 раз большем высоты эмиттерного микровыступа, становится пренебрежимо малой. На рис. 2 справа показаны графики отношения величины напряженности поля на поверхности цилиндрического эмиттера к модулю напряженности прикладываемого на различных расстояниях однородного электрического поля.

3. Краевые эффекты на границе массива. Макромасштабное распределение поля массива эмиттеров конической формы было рассчитано с использованием пакета COMSOL Multiphysics, сопряженного со средой MATLAB через систему LiveLink. Краевая задача типа Дирихле для уравнения Лапласа решалась в трехмерной постановке в декартовых координатах. Вычислительная область ограничивалась сферой большого радиуса с нулевым значением электростатического потенциала, в центре которой располагалась система, показанная слева на рис. 3. Радиус сферы был выбран так, чтобы его изменения не оказывали значительное влияние на решение задачи. Распределение электростатического потенциала вблизи электродов показано справа на рис. 3.

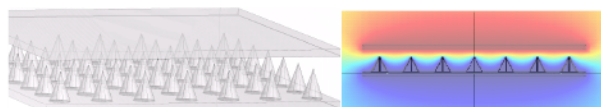


Рис. 3. Плоско-параллельный диод с массивом эмиттеров конической формы и распределение электростатического потенциала с краевой неоднородностью на границе электродов

Было установлено, что зависимость напряженности поля (а значит, и тока эмиссии) на поверхности эмиттеров от величины расстояния между ними в центре массива более слабая, чем на краю массива. На рис. 4 представлено распределение поля на вершине крайнего эмиттера в зависимости от величины отступа от края подложки массива (зашумленность кривых в данном случае связана со степенью детализации адаптивной сетки метода конечных элементов, которая выбрана компромиссным образом между точностью решения и временем численного счета). Увеличение отступа приводит к ослаблению поля.

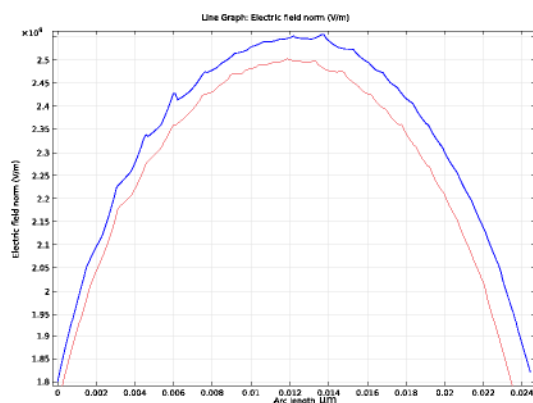


Рис. 4. Распределение напряженности электрического поля на вершине крайнего в массиве конического эмиттера в случае двух расстояний до края подложки массива. Верхняя линия — расстояние в половину параметра решетки массива, нижняя линия — расстояние увеличено на 3 мкм

4. Заключение. Данное исследование включает в себя микро- и макромасштабное моделирование распределения электрического поля на рабочей поверхности массива цилиндрических и конических автоэлектронных эмиттеров. Вместе с модельным подходом по изучению краевых эффектов в этом распределении, приведены также экспериментальные измерения величины интегрального эмиссионного тока в системе, конфигурация которой по результатам моделирования улучшена по стойкости к воздействию краевых эффектов. Вольтамперные характеристики эмиссионного плоско-сферического диода с массивом автоэлектронных цилиндрических эмиттеров демонстрируют увеличенный диапазон рабочих напряжений по сравнению с плоско-параллельной конфигурацией.

Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ» и оборудования Междисциплинарного Ресурсного Центра СПбГУ по направлению «Нанотехнологии».

Литература

1. Nikiforov K. A., Antonova L. I., Egorov N. V., Trofimov V. V., Makeev V. V., Ogurtsov O. F. Non-gated field emission array as low-energy electron source: experiment and simulation // Proceedings of RUPAC2012, Saint-Petersburg, Russia. 2012. P. 218–220.
2. Никифоров К. А., Сайфуллин М. Ф. Разработка плоско-сферического диода с автоэмиссионным матричным катодом // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 274–278.
3. Никифоров К. А., Сайфуллин М. Ф. Разработка плоско-сферического диода с автоэлектронным матричным катодом // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики: Материалы научно-практической internet-конференции. Ульяновск: SIMJET, 2013. С. 115–120.
4. Никифоров К. А., Егоров Н. В. Моделирование эмиссионных процессов в среде MATLAB // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2013. Вып. 2. С. 127–134.
5. Nikiforov K. A., Egorov N. V. Program complex for vacuum nanoelectronics finite element simulations // Proceedings of RUPAC2012, Saint-Petersburg, Russia. 2012. P. 409–411.

УДК 532.581

**Оскирко А. Д., Перегудин С. И., Холодова С. Е.,
Широбоков М. В.**

МГД-волны с учетом эффектов динамики магнитного поля

Целью исследования является редукция системы уравнений с частными производными, моделирующей возмущение в слое идеальной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, ограниченном поверхностями, изменяющимся в пространстве и во времени, с учетом инерционных сил.

Для полученных в результате редукции уравнений построены решения, описывающие распространение волн малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали слое и в узком длинном канале.

Если электропроводная жидкая среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамическом движении в ней возникают электрические токи. Эти токи изменяют магнитное поле. Но на токи в магнитном поле действуют силы, способные изменить характер движения среды. Следовательно, гидродинамическое движение и электромагнитные явления взаимосвязаны. Эта связь описывается совместной системой уравнений поля и уравнений движения жидкости. Согласно работам известного шведского физика и астрофизика Г. Альфвена связь между электромагнитными и гидродинамическими явлениями возрастает с увеличением линейного масштаба явления. Для крупномасштабных явлений эта связь может быть достаточно сильной. В частности, это относится, например, к недрам звезд и жидкому ядру Земли [1].

Вопросам о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости посвящены работы [2–6], в которых рассматривалась мо-

Оскирко Антон Дмитриевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: oskirich@gmail.com, тел.: +7(812)428-71-59

Перегудин Сергей Иванович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: peregudinsi@yandex.ru, тел.: +7(812)428-71-59

Холодова Светлана Евгеньевна – доцент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет точной механики, информационных технологий, механики и оптики; e-mail: kholodovase@yandex.ru, тел.: +7(812)232-97-04

Широбоков Михаил Владимирович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: misher-fsh@yandex.ru, тел.: +7(812)428-71-59

дель, построенная в приближении быстрого вращения. В рамках этой теории в уравнении движения пренебрегается силой инерции. В результате отфильтровываются инерциальные, альфвеновские волны и волны Россби. Кроме того, в пределе быстрого вращения скорость \mathbf{v} находится неоднозначно, а с точностью до слагаемого, представляющего собой геострофическую скорость. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что геострофическая скорость не удовлетворяет магнитострофическому уравнению. Для преодоления указанных трудностей привлекаются вязкие силы и пренебрегается вязкостью, когда это допустимо.

В работе [7] исследовалась задача о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости в слое между плоскостями $z = 0$, $z = d$ в магнитострофическом приближении с учетом вязких сил.

В данном исследовании предполагается, что границы слоя не являются постоянными, а представляют собой поверхности, изменяющиеся в пространстве и во времени; кроме того, в уравнении движения учитываются инерционные силы.

Рассмотрим тонкий вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ слой электропроводной несжимаемой жидкости, ограниченный снизу подвижным дном, заданным относительно отсчетного уровня $z = 0$ поверхностью $z = -h_B(x, y, t)$, с неизвестной функцией $h_B(x, y, t)$, а сверху — известной поверхностью $-Z(x, y)$. Ось вращения жидкости совпадает с осью z , т. е. $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Основные уравнения магнитной гидродинамики рассматриваемой задачи в проекциях на координатные оси имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{b^2}{2\mu} \right) + 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] - g\mathbf{k} + \frac{1}{\mu\rho} \langle \mathbf{b}, \nabla \mathbf{b} \rangle, \\ \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \langle \mathbf{b}, \nabla \rangle \mathbf{v} &= \lambda \Delta \mathbf{b}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \end{aligned}$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости жидкости, p — давление, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, b_x, b_y, b_z — компоненты магнитной индукции поля, $\lambda = \frac{1}{\sigma\mu}$, μ — магнитная проницаемость, σ — электропроводность среды, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения слоя.

В результате преобразования исходной системы уравнений, описывающей исследуемый динамический процесс, и редукции ее к одному скалярному уравнению для функции $\xi(x, y, t)$ можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Любое решение $\mathbf{v}(x, y, t)$, $\mathbf{b}(x, y, t)$, $\eta(x, y, t)$ задачи о малых возмущениях в слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, удовлетворяющее необходимым условиям гладкости, представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(x, y, t) &= \mu\rho\mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2)\tilde{\mathbf{b}}, \quad \eta = \frac{1}{g}\mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2)\tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta} = \mathcal{D}_t\tilde{\eta}, \\ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & \alpha \\ -\alpha & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_x + \mathcal{D}\tilde{b}_x \\ \tilde{\eta}_y + \mathcal{D}\tilde{b}_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} = \mathcal{D}(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \mu\rho\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) - \mathcal{D}^2 & \alpha\mu\rho\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) \\ -\alpha\mu\rho\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) & \mu\rho\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) - \mathcal{D}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}, \\ \tilde{\eta}(x, y, t) &= (\mathcal{F}^2 + (\alpha\mathcal{D}^2)^2)\xi(x, y, t), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathcal{D}_t\tilde{\mathbf{b}}, \\ \mathcal{F} &= \mu\rho(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2)\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) - \mathcal{D}^2\mathcal{D}_t, \quad \mathcal{D} = b_{0x}\frac{\partial}{\partial x} + b_{0y}\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

где функция $\xi(x, y, t)$ является решением уравнения

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2)^2 \left(\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \mathcal{D}_t - \frac{\mathcal{D}^2}{\mu\rho} \right) \Delta_2 \xi = \frac{b_{z0} - b_{z0}^{(e)}}{(\mu\rho)^2 H_0}. \quad (1)$$

Замечание. Верно и обратное утверждение: любое решение уравнения (1) порождает решение системы, моделирующей малые возмущения в тонком слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, если построенные по формулам, представленным выше, функции \mathbf{v} , \mathbf{b} , η удовлетворяют в рассматриваемой области условиям гладкости.

При рассмотрении свободных линейных колебаний вращающегося слоя электропроводной жидкости в бесконечно протяженном по горизонтали слое и в узком длинном канале уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_m} \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} - \frac{b_{0y}^2}{\mu\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] A \zeta = \frac{b_{z0}(x, y, t) - b_{z0}^{(e)}(x, y, t)}{b_{0y}(\mu\rho)^2 H_0(x, y)},$$

где $A = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right)^2$ – дифференциальный оператор, $\zeta = \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 y}$.

Проведем дальнейший анализ для случая постоянной невозмущенной глубины слоя.

Для частоты σ имеются две четко разделяющиеся ветви. Первый тип колебаний — инерционная волна. В них существенную роль играют инерция и кориолисова сила. Частота инерционных волн вещественна, эти волны устойчивы. Второй тип колебаний — магнитные волны. Их частота — комплексна. Но в силу того, что мнимая часть частоты σ отрицательная, магнитные волны неустойчивость также не обнаруживают.

Таким образом, диффузия магнитного поля способствует его затуханию, в то время как в случае замороженного поля наблюдается установившийся во времени процесс, т. е. индуцированное магнитное поле может существовать сколь угодно длительное время.

В частности, при неограниченном росте магнитного числа Рейнольдса получаем известное дисперсионное соотношение для волны Альфвена.

Литература

1. Альвен Г., Фельтхаммар К. Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967. 260 с.
2. Busse F. H. A model of the geodynamo // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1975. No 21. P. 437–459.
3. Busse F. H. Generation of planetary by convection // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1976. No 12. P. 350–358.
4. Zhang K.-K., Busse F. H. Finite amplitude convection and magnetic field generation in a rotating spherical shell // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1988. No 44. P. 33–54.
5. Zhang K.-K., Busse F. H. Convection driven magnetohydrodynamic dynamos in rotating spherical shell // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1989. No 49. P. 97–116.
6. Zhang K.-K., Busse F. H. Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1990. No 59. P. 208–222.
7. Eltayeb I. A., Kumar S. Hydromagnetic convective instabilities of a rotation self-gravitation fluid sphere containing a uniform distribution of heat sources // *Proc. Roy. Soc. London.* 1977. A 353. P. 145–162.

УДК 539.3

Седова О. С., Хакназарова Л. А.

Расчет напряжений в толстостенном сферическом элементе с наружной выемкой

Рекомендовано к публикации профессором Прониной Ю. Г.

1. Введение. Известно, что прочность и долговечность изделий в значительной мере зависят от наличия дефектов и их параметров. Надёжность конструкций в большой степени зависит от геометрии их элементов. Экспериментально и теоретически было доказано, что при наличии выемок, трещин, разрезов или коррозионных питтингов коэффициенты концентрации напряжений вблизи таких дефектов существенно возрастают [1–4], что может приводить к преждевременному разрушению. В связи с этим при расчетах конструкций необходимо учитывать наличие геометрических неидеальностей.

В данной статье исследуется толстостенная сферическая оболочка под действием равномерного внутреннего давления, на внешней поверхности которой имеется сферическая выемка (технологически обусловленная или появившаяся в процессе эксплуатации, например, коррозионная). Ряд задач о сфере без геометрических дефектов при различных условиях эксплуатации решен аналитически [5–7]. При нарушении сферической симметрии получение замкнутых выражений становится весьма затруднительным, поэтому, как правило, расчеты проводятся с использованием численных методов. Некоторые задачи для тонких сферических оболочек с дефектами под давлением решались в работах [8–10]. В настоящей работе представлены результаты расчетов для толстостенной сферы с выемкой, выполненных с помощью пакета ANSYS.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейно упругую толстостенную сферическую оболочку под действием внутреннего давления p . Внутренний радиус оболочки обозначим через r , внешний — R .

Седова Ольга Сергеевна – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ag.olya.sedova@gmail.com, тел.: +7(911)159-23-94

Хакназарова Лина Адисоновна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: haknazarova.l@gmail.com, тел.: +7(931)366-28-91

Работа выполнена в рамках проекта РНФ № 14-11-00138

Работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ»

Радиус выемки обозначим через δ , глубину выемки — h . Необходимо определить коэффициенты концентрации напряжений в окрестности выемки при различных соотношениях глубины выемки, её радиуса кривизны и толщины сферы.

3. Построение модели. Введём декартову прямоугольную систему координат. Пусть центр сферической оболочки совпадает с началом координат. Краевая выемка моделируется погружением сферы радиуса δ на глубину h таким образом, что центр указанной сферической поверхности меняет положение в пределах от точки $(0, R + \delta - h, 0)$ до точки $(0, R, 0)$, согласно рис. 1.

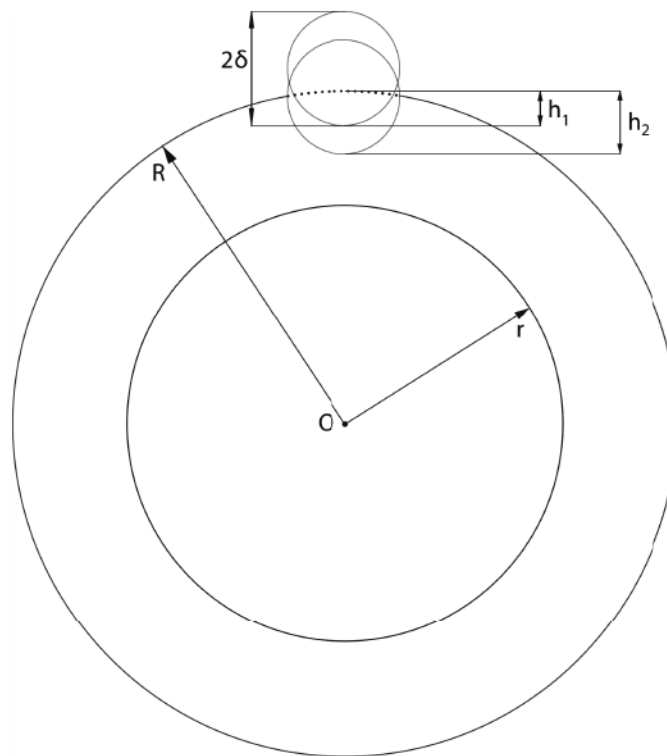


Рис. 1. Модель сферической оболочки с выемкой

Для анализа напряженного состояния введем начальный и приведенный коэффициенты концентрации напряжения. За начальный коэффициент концентрации напряжения α обозначим отношение окружного напряжения σ_h в нижней центральной точке выемки (в точке А, см. рис. 2а) к окружному напряжению σ_R на поверхности идеальной сферы (т. е. сферы без дефектов) с внешним радиусом R (напряжение в точке В, рис. 2б). Приведенным коэффициентом концентрации α' назовем отношение окружного напряжения σ_h в нижней точке выемки к окружному напряжению σ_{R-h} идеальной сферы, внешний радиус которой равен $R - h$ (напряжение в точке С, рис. 2в). Таким образом

$$\alpha = \sigma_h / \sigma_R, \quad \alpha' = \sigma_h / \sigma_{R-h}.$$

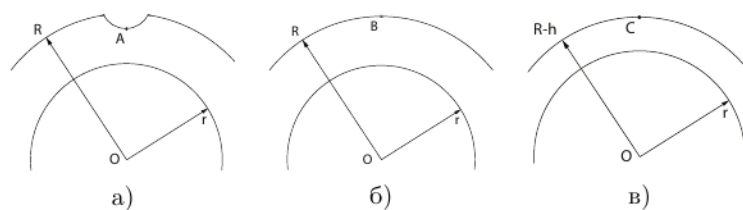
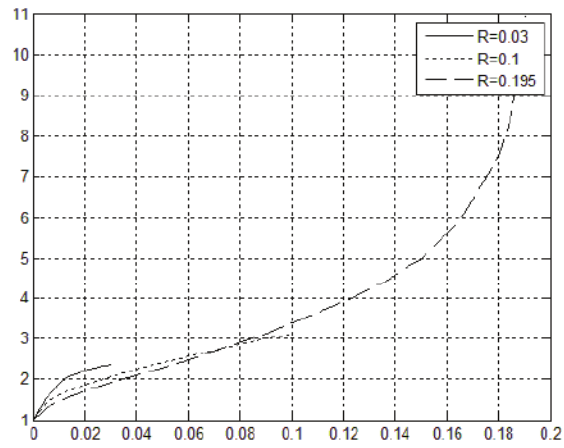


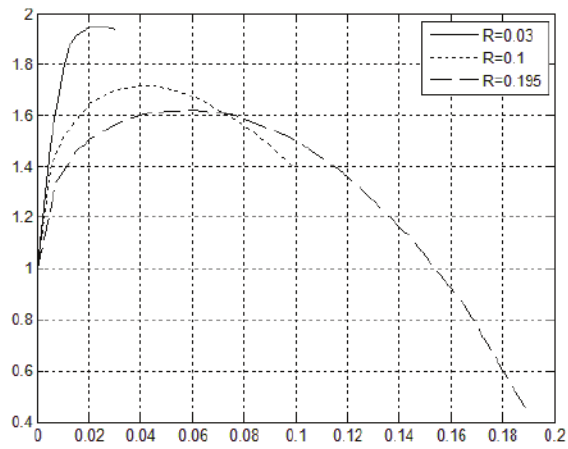
Рис. 2. Точки расчёта окружных напряжений

4. Примеры расчётов и анализ результатов. Приведём примеры расчётов для следующих числовых значений параметров. Внутренний и внешний радиусы сферы $r = 0,8$ условных единиц (у. е.) и $R = 1$ у. е. соответственно, глубина выемки h изменяется в пределах $0 \leq h \leq \delta$. В качестве условных единиц могут приниматься любые единицы измерения длины. Внутреннее давление $p = 1$ МПа принято за условную единицу измерения напряжения. Модуль Юнга сферического элемента $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

На рис. 3 представлены значения коэффициентов концентрации напряжений α и α' для различных радиусов кривизны δ и глубины выемок h при фиксированных размерах сферического элемента. По оси абсцисс откладывается глубина выемки h (при фиксированном δ), по оси ординат — значение соответствующего коэффициента концентрации напряжений α или α' . Сплошные кривые соответствуют радиусу кривизны выемки $\delta = 0,3$, пунктирные кривые и точки — значениям $\delta = 0,1$, $\delta = 0,195$. Кривые, соответствующие $\delta = 0,3$ и



а)



б)

Рис. 3. Графики коэффициентов концентрации напряжений: а) начальный коэффициент α , б) приведённый коэффициент α'

$\delta = 0,1$ обрываются при значениях h , равных радиусу выемки δ , как максимально возможных.

Как и следовало ожидать, начальный коэффициент концентрации напряжений α с увеличением глубины выемки возрастает (рис. 3а). Неожиданным оказался тот факт, что кривые для приведённого коэффициента α' после достижения точки максимума убывают с ростом глубины выемки (рис. 3б). Для исследования этого явления были вычислены напряжения на внутренней поверхности сферы непосредственно под выемкой. Оказалось, что падение коэффициента концентрации в вершине выемки объясняется перераспределением напряжения по толщине элемента. При достаточно больших радиусах кривизны и глубинах выемок происходит выпучивание части оболочки под выемкой. В то же время напряжения на внутренней поверхности сферического элемента становятся даже отрицательными, однако в этом нет противоречия, так как известно, что потенциальная энергия деформации зависит от квадратов напряжений.

Как видно из рис. 3, при относительно небольшой глубине выемки h уменьшение её радиуса кривизны приводит к повышению обоих коэффициентов концентрации α и α' .

Литература

1. Викулина Ю. И., Греков М. А., Костырко С. А. Модель пленочного покрытия со слабо искривленной поверхностью // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2010. № 6. С. 16–28.
2. Греков М. А., Костырко С. А. Пленочное покрытие на шероховатой поверхности упругого тела // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, № 1. С. 113–128.
3. Пронина Ю. Г. Краевая дислокация и сосредоточенная сила в упругой полуплоскости с отверстиями и краевыми вырезами // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика и астрономия. 2012. Вып. 4. С. 120–124.
4. Пронина Ю. Г. Периодическая задача о точечных воздействиях в упругой полуплоскости с отверстиями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2009. Вып. 3. С. 118–128.

5. Гасратова Н. А. Решение некоторых классических пространственных задач теории упругости в напряжениях // Молодой ученый. 2014. № 3 (62). С. 1–6.
6. Даль Ю. М., Пронина Ю. Г. Деформация шаровой поры в нелинейно-упругом теле // Известия РАН. Сер. физическая. 2006. Т. 70, № 9. С. 1341–1343.
7. Пронина Ю. Г. Равномерная механохимическая коррозия поллой сферы из идеального упругопластического материала под действием постоянного давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика и астрономия. 2009. Вып. 1. С. 113–122.
8. Kushnir R. M., Nykolysyn T. M., Rostun M. I. Limiting equilibrium of a spherical shell nonuniform across the thickness and containing a surface crack // Material Science. 2007. Vol. 43, No 3. P. 291–299.
9. Carpinteri A., Brighenti R., Vantadori S. Notched shells with surface cracks under complex loading // International journal of mechanical sciences. 2006. Vol. 48, No 6. P. 638–649.
10. Delale F., Erdogan F. Effect of transverse shear and material orthotropy in a cracked spherical cap // Int. J. Solids Structures. 1979. Vol. 15, No 12. P. 907–926.

УДК 539.193

Сорокина В. А., Никифоров К. А.

Исследование *ab initio* плотности тока полевой электронной эмиссии углеродной нанотрубки

1. Введение. Связь плотности тока с волновой функцией.

В квантовой механике состояние системы однозначно описывается волновой функцией, квадрат модуля которой имеет смысл плотности вероятности нахождения микрочастицы в некоторой точке пространства. Волновая функция может быть определена из уравнения Шрёдингера (стационарного) $H\psi = E\psi$, где ψ — волновая функция системы, H — оператор Гамильтона, E — полная энергия системы. Однако в случае многоэлектронных систем, наиболее часто встречающихся в реальности, его интегрирование затруднительно вследствие очень сложного вида гамильтониана. Потому уравнение Шрёдингера на практике решается с использованием приближённых методов.

Как известно, волновая функция изменяется в пространстве и времени в соответствии с законом сохранения [1]. Сформулируем его, найдя производную по времени от плотности вероятности. Для этого запишем уравнение Шрёдингера

$$\frac{1}{2m}\Delta\psi + U(r, t) = i\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

сопряжённое к нему, и вычтем, предварительно умножив на ψ^* и ψ соответственно. Получим

$$-\frac{1}{2m}(\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*) = i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right),$$

$$\nabla\left(\frac{1}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\right) + \frac{\partial\psi^*\psi}{\partial t} = 0,$$

Сорокина Вероника Андреевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ansonika@mail.ru; тел. 8(911)949-37-79

Никифоров Константин Аркадьевич — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: knikiforov@cc.spbu.ru; тел. 8(921)631-57-00

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00150 и частично СПбГУ, грант № 9.38.673.2013

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = 0.$$

Последнее выражение имеет форму закона сохранения плотности вероятности, где $\operatorname{div} \mathbf{j}$ — удельная мощность источников в поле вектора \mathbf{j} . Вектор \mathbf{j} есть плотность потока вероятности, или, по аналогии с законом сохранения, плотность электрического тока, поскольку масса и заряд микрочастицы неразделимы.

Таким образом, эмиссионный ток связан с волновой функцией следующим образом:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2mi}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (1)$$

2. Постановка задачи. Целью работы является определение плотности тока полевой электронной эмиссии открытой углеродной нанотрубки хиральности (5,5) через волновую функцию системы по формуле (1). Расчёт произведён с помощью неэмпирического метода функционала электронной плотности, базирующегося на вариационном подходе — нахождении решения путём минимизации функционала; волновая функция сформирована методом молекулярных орбиталей.

Вычисления из первых принципов (проведённые без привлечения экспериментальных данных) являются более трудоёмкими, но и более последовательными и точными. Метод молекулярных орбиталей, исходящий из предположения, что состояние электронов в молекуле (аналогично атомному) может быть описано совокупностью молекулярных электронных орбиталей со своим набором молекулярных квантовых чисел, обеспечивает наиболее адекватное описание химического строения [3].

Сам метод функционала электронной плотности в настоящее время является наиболее эффективным и универсальным подходом для расчёта конденсированных систем. Он позволяет рассчитать электронную структуру без нахождения волновой функции (поиск которой затруднителен), но с использованием электронной плотности, всегда зависящей только от трёх пространственных переменных и имеющей физический смысл [3].

3. Метод функционала электронной плотности. Электронная плотность может быть получена через волновую функцию инте-

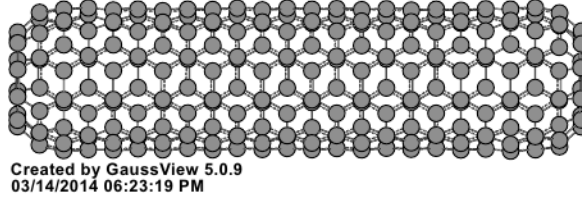


Рис. 1. Углеродная нанотрубка (5,5)

гированием по всем пространственным координатам, кроме одной:

$$\rho(r) = n \int \dots \int |\psi(r_1, \dots, r_n)|^2 dr_2 \dots dr_n.$$

Теоретической основой метода функционала электронной плотности являются теоремы Кона — Хоэнберга, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между плотностью основного состояния электронной подсистемы, находящейся во внешнем потенциале, и волновой функцией [4]. Теоремы обосновывают переход к электронной плотности, но не дают способа построения этого функционала.

Запишем выражение для полной энергии квантовой системы:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \Delta_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{z_j}{r_{ij}} + \sum_{i=1}^n \sum_{k>i}^n \frac{1}{r_{ik}} + \sum_{j=1}^p \sum_{l>j}^p \frac{z_j z_l}{r_{jl}}.$$

Последнее слагаемое, отвечающее энергии межъядерного отталкивания, в приближении Борна — Оппенгеймера [2] постоянно. Энергия притяжения электронов к ядрам и кулоновская энергия отталкивания электронов через электронную плотность выражаются следующим образом:

$$E_{ne}[\rho(r)] = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \int \psi_i(r) \frac{z_j}{r} \psi_i(r) dr = - \sum_{j=1}^p \int \frac{z_j}{r} \rho(r) dr,$$

$$\begin{aligned} J_{ij}[\rho(r)] &= \frac{1}{2} \iint |\psi_i(r_1)|^2 \frac{1}{r_1 - r_2} |\psi_j(r_2)|^2 dr_1 dr_2 = \\ &= \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(r_1)\rho(r_2)}{r_1 - r_2} dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Идея метода функционала электронной плотности состоит в разделении функционала кинетической энергии на две части: соответствующей системе невзаимодействующих электронов (вычисленной точно) и поправочного корреляционного члена. Для нахождения полной энергии следует найти только вид обменно-корреляционного функционала, включающего погрешность такого представления и учитывающего обменное взаимодействие электронов. Как правило, обменно-корреляционный функционал ищут в виде

$$E_{xc}[\rho] = E_x[\rho] + E_c[\rho] = \int \rho(r)\varepsilon_x(\rho(r))dr + \int \rho(r)\varepsilon_c(\rho(r))dr.$$

В данном случае выбран гибридный функционал Бекке, Ли, Янга и Парра [5], относящийся к методам градиентной коррекции, в котором обменная и корреляционная энергии связаны не только с плотностью, но и с её производными.

4. Схема решения уравнений Кона — Шэма. Задачу решения уравнения Шрёдингера, являющегося дифференциальным, можно свести к задаче на экстремум функционала, которым является среднее значение оператора Гамильтона (энергии) на классе функций, имеющих смысл волновых (непрерывных с первыми производными, ограниченных и обладающих интегрируемостью квадрата модуля). Это приводит к системе уравнений Кона — Шэма

$$\sum_{m=1}^n (K_{im} - \varepsilon_i S_{im})c_{im} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $K_{im} = \int \psi_n^* H \psi_k dV$ — матричные элементы гамильтониана, $S_{im} = \int \psi_n^* \psi_k dV$ — матричные элементы интегралов перекрытия функций.

Наименьший из корней уравнения $|K_{im} - \varepsilon_i S_{im}| = 0$ соответствует энергии основного состояния, остальные корни представляют энергии возбуждённых состояний.

Для вычисления энергии необходимо знать функцию плотности, которую можно получить из орбиталей. Но они, в свою очередь, ищутся через решение уравнения Шрёдингера, в котором фигурирует гамильтониан. Следовательно, требуется самосогласованное итерационное решение. После выбора некоторого начального распределения электронной плотности, вычисления обменно-корреляционной

энергии, получения орбиталей и более близкого распределения электронной плотности необходимо повторять процедуру до достижения критерия сходимости.

5. Вычисления. Начало вычислений предполагает формирование пробной волновой функции — задание базисного набора. Волновая функция системы или молекулярная орбиталь, говоря в терминах одноимённого метода, может быть представлена как сумма атомных орбиталей. Такая форма представления называется методом линейной комбинации атомных орбиталей:

$$\psi_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \chi_j.$$

Именно базисные атомные функции χ_i определяют точность такой аппроксимации, поэтому их выбор не может быть произвольным. Базисные функции должны наиболее точно описывать истинную волновую функцию, давать хорошее приближение возле ядер и на больших расстояниях от них, допускать аналитическое вычисление интегралов и не превышать некоторого количества, значительно затрудняющего вычисления или делающего их невозможными.

Для расчёта характеристик конечных тел применяют орбитали Слэтера и Гаусса [5].

В данном случае использован базис, характеризующийся описанием орбиталей остова шестью примитивными гауссовыми функциями, валентных s и p орбиталей — тремя и одной функцией соответственно; в целом атомная орбиталь имеет слэтеровский тип.

Для рассматриваемой углеродной нанотрубки (Рис. 1) процедура самосогласования заняла 17 циклов. Полученное значение полной энергии $E = -9143,164$ а. е.

6. Заключение. Уникальные электрические и механические свойства углеродных нанотрубок делают их привлекательными для использования в качестве полевых эмиттеров. Коэффициенты базисных функций, найденные из условия минимума полной энергии, позволяют получить волновую функцию системы, а, следовательно, и плотность тока эмиссии по формуле (1).

Авторы выражают благодарность доценту М. Е. Бедринной за предоставление входных данных (координат атомов нанотрубки).

Исследования были проведены с использованием ресурса «Вычислительный центр СПбГУ».

Литература

1. *Левич В. Г.* Курс теоретической физики. Том II. М.: Наука, 1971. 912 с.
2. *Мартинсон Л. К., Смирнов Е. В.* Квантовая физика. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 528 с.
3. *Сатанин А. М.* Введение в теорию функционала плотности. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2009. 64 с.
4. *Фёдоров А. С., Сорокин П. Б., Аврамов П. В., Овчинников С. Г.* Моделирование свойств, электронной структуры ряда углеродных и неуглеродных нанокластеров и их взаимодействия с лёгкими элементами. Новосибирск: СО РАН, 2006. 344 с.
5. *Хартри Д.* Расчёты атомных структур. М.: ИИЛ, 1960. 256 с.

УДК 537.2

Телевный Д. С., Виноградова Е. М.

Расчет диодной системы на основе полевого эмиттера с диэлектрической подложкой

Введение. Электрическое поле является одной из главных характеристик полевых эмиссионных устройств. Анализ электрического поля предоставляет важные сведения для проектирования специальных высокоточных приборов. На сегодняшний день широко применяются системы, в которых источником электронов является полевой эмиттер. За счет малого радиуса кривизны под действием сильного электрического поля происходит процесс эмиссии электронов с поверхности металлического острия в вакуум [1, 2]. Подобного рода устройства могут состоять из диэлектрических включений в качестве креплений и изоляции электродной конфигурации. Диэлектрический слой может использоваться для защиты эмиттеров от выгорания и бросков тока [3].

Физическая постановка задачи. Рассматривается цилиндрическая диодная система (рис. 1), состоящая из плоской подложки ($z = 0$), полевого острия длиной L и плоского анода ($z = z_2$). Внутренняя область системы заполнена двумя диэлектриками (граница диэлектриков $z = z_1$) с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . Полевое острие моделируется с помощью заряженной нити конечной длины. На катоде задан нулевой потенциал, анод имеет потенциал V_1 . Требуется найти распределение потенциала во внутренней области системы на основе полевого острия и установить влияние диэлектрической подложки на эмиссионные характеристики.

Математическая постановка задачи. Функция распределения электростатического потенциала удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U(r, z) = -\frac{\rho(r, z)}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

Телевный Денис Сергеевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: televniy-d@yandex.ru, тел.: +7(960)261-85-30

Виноградова Екатерина Михайловна – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vincat2008@yandex.ru, тел.: +7(911)170-79-61

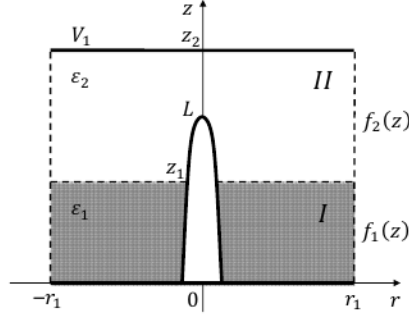


Рис. 1. Схематическое изображение диодной системы

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
 U(r, 0) &= 0, & 0 \leq r \leq r_1, \\
 U(r, z_1) &= V_1, & r_1 \leq r \leq r_1, \\
 U(r_1, z) &= f_1(z), & 0 \leq z \leq z_1, \\
 U(r_1, z) &= f_2(z), & z_1 \leq z \leq z_2,
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$f_1(z) = V_1 \frac{z\varepsilon_2}{z_2\varepsilon_1 + z_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}, \quad f_2(z) = V_1 \frac{z\varepsilon_1 + z_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{z_2\varepsilon_1 + z_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)},$$

где $\rho(r, z)$ — объемная плотность заряда, моделирующая полевой эмиттер.

Плотность заряда $\rho(r, z)$ заменяется системой кусочно-постоянных зарядов ρ_s , $s = \overline{1, N}$. Каждый заряд ρ_s распределен в малом объеме, заполняя цилиндр

$$r \leq \delta_s, \quad \zeta_{s-1} < z \leq \zeta_s$$

постоянным зарядом нити τ_s , так что

$$\tau_s = \pi \rho_s \delta_s^2, \tag{3}$$

где $\zeta_0 = 0$, $z_N = z_0$ — длина заряженной нити. Функция $\rho(r, z)$ в правой части уравнения Пуассона для граничной задачи (1), (2) задается следующим образом:

$$\rho(r, z) = \begin{cases} \rho_s, & r \leq \delta_s, \quad \zeta_s \leq z \leq \zeta_{s-1}, \\ 0, & r > \delta_s, \quad \text{или } z > \zeta_N. \end{cases}$$

Решение задачи. Разобьем область задачи на две ячейки. Ячейка I ограничена плоскостями $z = 0$ и $z = z_1$, ячейка $II - z = z_1$ и $z = z_2$. Решение граничной задачи (1), (2) можно представить как сумму решения уравнения Лапласа $U^L(r, z)$ с неоднородными граничными условиями без учета заряженной нити и решения уравнения Пуассона $U^P(r, z)$ с однородными граничными условиями с учетом влияния заряженной нити.

Решение первой задачи находится с помощью метода разделения переменных. В процессе решения используется метод переопределения рядов, который заключается в разложении граничных условий в ряды Фурье — Бесселя, что позволяет избавиться от коэффициентов на границах ячеек с известными значениями потенциала. В результате функции распределения потенциала без учета заряженной нити для двух ячеек имеют вид [2]

$$U_I^L(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\text{sh}(\lambda_n z)}{\text{sh}(\lambda_n z_1)} J_0(\lambda_n r) + f_1(z), \quad \lambda_n = \frac{\beta_n}{r_1}, \quad (4)$$

$$U_{II}^L(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\text{sh}(\omega_n(z_2 - z))}{\text{sh}(\omega_n(z_2 - z_1))} J_0(\omega_n r) + f_2(z), \quad \omega_n = \frac{\gamma_n}{r_1}, \quad (5)$$

где β_n и γ_n — корни функции Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0(r)$.

Для решения задачи с учетом влияния заряженной нити решение представляется в виде [4]

$$U_I^P(r, z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1}{\beta_n} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\text{sh}(\lambda_n z_1)} \left[\text{sh}(\lambda_n(z_1 - z)) \times \right. \\ \left. \times \int_0^z \text{sh}(\lambda_n \eta) \varphi(\eta) d\eta + \text{sh}(\lambda_n z) \int_z^{z_1} \text{sh}(\lambda_n(z_1 - \eta)) \varphi(\eta) d\eta \right], \quad z \leq z_1, \quad (6)$$

$$U_{II}^P(r, z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1}{\gamma_n} \frac{J_0(\omega_n r)}{\text{sh}(\omega_n(z_2 - z_1))} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\operatorname{sh}(\omega_n(z_2 - z)) \int_{z_1}^z \operatorname{sh}(\omega_n(\eta - z_1)) \varphi(\eta) d\eta + \right. \\ & \left. + \operatorname{sh}(\lambda_n(z - z_1)) \int_z^{z_0} \operatorname{sh}(\lambda_n(z_2 - \eta)) \varphi(\eta) d\eta \right], \quad z_1 < z \leq z_0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U_{II}^P(r, z) = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1 J_0(\omega_n r)}{\gamma_n} \frac{\operatorname{sh}(\omega_n(z_2 - z))}{\operatorname{sh}(\omega_n(z_2 - z_1))} \times \\ & \times \int_{z_1}^{z_0} \operatorname{sh}(\omega_n(\eta - z_1)) \varphi(\eta) d\eta, \quad z_0 < z \leq z_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varphi(\eta) = -\frac{\tau_s}{\pi \varepsilon_0 r_1^2 J_1^2(\gamma_n)}$, $\zeta_{s-1} < \eta < \zeta_s$, $s = \overline{1, N}$.

Складывая функции (4), (6) и (5), (7), (8), получим полные решения уравнения Пуассона для областей *I* и *II*. Для определения коэффициентов a_n , b_n , τ_s^I , τ_s^{II} используется непрерывность нормальной производной вектора электрического смещения на границе раздела диэлектриков и система точек аппроксимации формы полевого эмиттера.

$$\varepsilon_1 \frac{\partial U_I(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_{II}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} U_I(r, z) &= 0, \quad 0 < z \leq z_1, \\ U_{II}(r, z) &= 0, \quad z_1 < z \leq z_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Численный эксперимент. На основе теоретических расчетов написана программа, которая решает систему линейных алгебраических уравнений, построенных с помощью (9), (10). Для численного эксперимента принимаются параметры: $r_1 = 0,0003$ см, $z_1 = 0,0005$ см, $z_2 = 0,002$ см, $L = 0,001$ см, $r_0 = 10^{-6}$ см, $V_1 = 500$ В, $N = 70$, $\varepsilon_2 = 1$.

На рис. 2а представлены значения зарядов нити без диэлектрика ($\varepsilon_1 = 1$) и с учетом диэлектрической подложки ($\varepsilon_1 = 10$). На рис. 2б — распределение потенциала на оси системы для $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_1 = 10$.

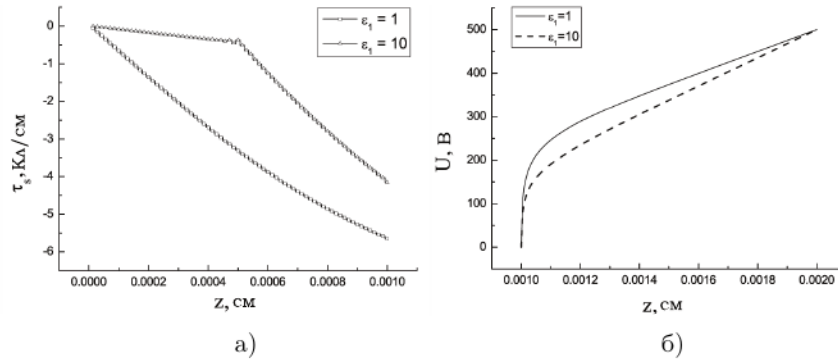


Рис. 2. а) значения заряда нити для $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_1 = 10$; б) распределение потенциала на оси системы для $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_1 = 10$

На рис. 3 представлены эквипотенциальные линии распределения потенциала в системе без диэлектрика (рис. 3а) и с влиянием диэлектрической подложки (рис. 3б). Из графиков видно выполнение граничных условий и искажение распределения потенциала, вызванное присутствием диэлектрика.

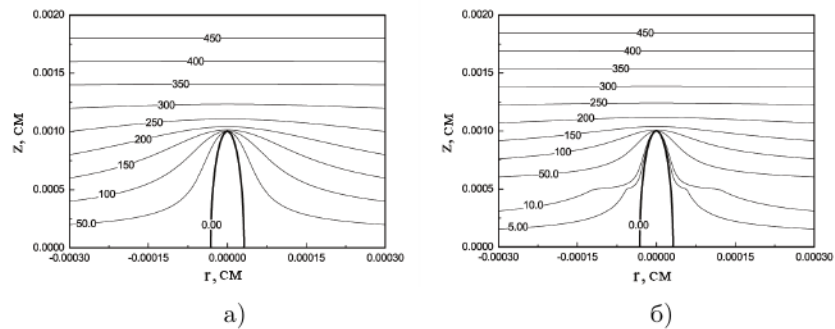


Рис. 3. Эквипотенциальные линии распределения потенциала во всей системе: а) $\epsilon_1 = 1$; б) $\epsilon_1 = 10$

На рис. 4а изображен график значений напряженности поля E_0 на вершине острья для диэлектрической подложки с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1 = 1, 20$. На рис. 4б — для различной толщины диэлектрика z_1 с фиксированным $\epsilon_1 = 10$. Из графиков видно, что увеличение ϵ_1 и z_1 ведет к ухудшению эмиссионных характеристик.

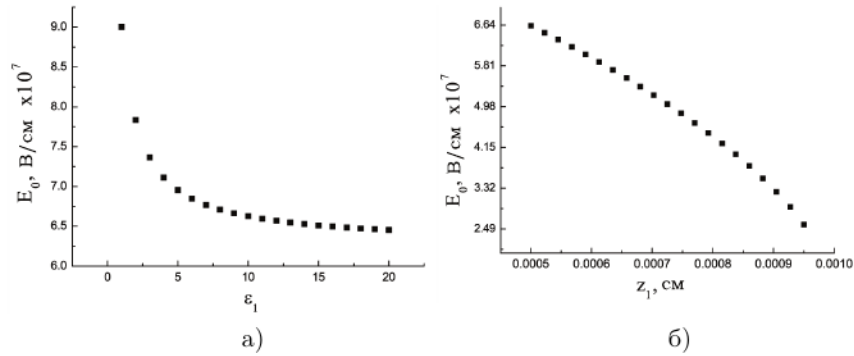


Рис. 4. а) напряженность поля на вершине острия для различной диэлектрической проницаемости подложки; б) напряженность поля на вершине острия для различной толщины диэлектрика

Выводы. В данной работе проводилось моделирование полевого эмиттера в цилиндрической системе со слоем диэлектрика, располагающегося на подложке катода. Решалась граничная задача для уравнения Пуассона. Функции распределения электростатического потенциала найдены в аналитическом виде (4)–(8). Представлены графики распределения потенциала. Показано влияние диэлектрической подложки на эмиссионные характеристики.

Литература

1. Егоров Н. В., Шешин Е. П. Автоэлектронная эмиссия. Принципы и приборы. Долгопрудный: Издат. Дом Интеллект, 2011. 704 с.
2. Egorov N. V., Vinogradova E. M. Mathematical model of electron gun on the field emission electron cathode basis // Vacuum. 2000. Vol. 57. P. 267–281.
3. Urteaga M., Rowell P., Pierson R. et al. Deep submicron InP DHBT technology with electroplated emitter and base contacts // 62nd Device research conference. 2004. P. 239–240.
4. Vinogradova E. M., Egorov N. V., Televnyi D. S. Calculation of a triode field-emission system with a modulator // Technical Physics. 2014. Vol. 59. P. 291–296.

УДК 524.6

Устименко С. С., Распопова Н. В.

Исследование орбит в трехпараметрическом семействе несферических обобщенно-изохронных моделей звездных систем

1. Описание модели. В последние десятилетия интенсивно рассчитываются траектории звезд в различных моделях гравитационного поля галактик. Набор моделей в литературе огромен. Возьмем семейство моделей, предложенное в [1].

1.1. Семейство потенциалов в сферической и ротационно-симметричной моделях. Гравитационное поле в моделях галактик обычно описывается с помощью потенциала как функции координат. Все фигурирующие в настоящей работе переменные являются безразмерными. Переход к размерным величинам выполняется умножением на соответствующие размерные единицы. Закон изменения потенциала $\varphi(r)$ в случае сферически симметричного распределения масс в модели [1] имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\alpha}{\alpha - 1 + w(r)}, \quad w(r) = (1 + \kappa r^p)^{1/p}, \quad \kappa = O(\alpha^p), \quad (1)$$

где r — расстояние от начала координат до пробной звезды, структурные параметры: $\alpha > 0$, $p > 0$. В работе [1] перечислены модели, которые представляют собой частные случаи предложенного семейства. Это обобщенно-изохронные модели Кузмина — Маласидзе — Велтманна [2–5], модель Аня — Эванса [6] и другие.

Рассмотрим ротационно-симметричную модель, используя метод раздельного задания эквипотенциалей и закона потенциала [7]. Закон потенциала берем в виде (1), уравнение эквипотенциала — из работы Миямото — Нагаи [8]

$$\varphi(\xi) = \frac{\alpha}{\alpha - 1 + w(\xi)}, \quad w(\xi) = (1 + \kappa \xi^p)^{1/p}, \quad \kappa = O(\alpha^p), \quad (2)$$

Устименко Сергей Сергеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: merkel05@gmail.com, тел.: +7(812)428-44-60

Распопова Наталья Викторовна — старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nv@smt.ru, тел.: +7(812)428-44-60

$$\xi^2 = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon)(\sqrt{z^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon). \quad (3)$$

Здесь R, z — цилиндрические координаты, $\varepsilon \in [0, 1]$ — третий структурный параметр, отвечающий за сплюснутость системы.

1.2. Плотность масс в модели галактики. Найдем плотность масс (в безразмерных величинах) из уравнения Пуассона. В силу ротационной симметрии модели в цилиндрических координатах оно имеет вид

$$\rho(R, z) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} - \frac{\partial \varphi}{R \partial R} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (4)$$

Рассмотрим различные значения структурных параметров и соответствующие им изменения в модели.

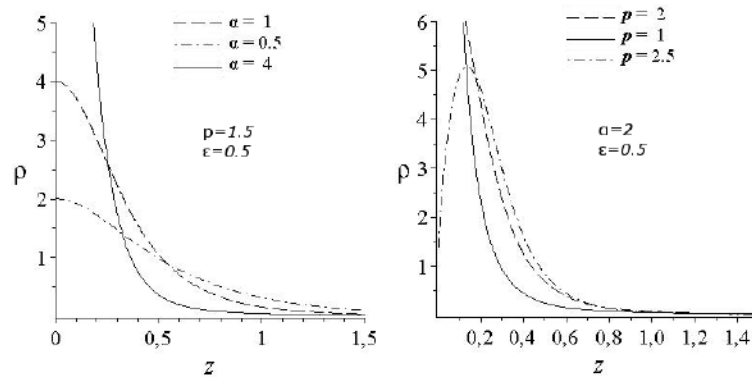


Рис. 1. Ход плотности на оси $R = 0$

На рис. 1 (слева), рис. 2 (слева) зафиксировано значение $p = 2$ и $\varepsilon = 0,5$. Изменяется α . Видно, что с увеличением значения α пик плотности становится выше. Таким образом α можно считать параметром концентрации распределения масс. На рис. 1 (справа), рис. 2 (справа) зафиксировано значение $\alpha = 1$. Вариации параметра p привели к более интересным изменениям хода плотности. Из выражения для плотности (4) получено, что при $p > 2$ значение плотности в центре принимает нулевое значение, при $p < 2$ имеем центральный пик плотности, как и в [6], при $p = 2$ плотность конечна. Значения $\varepsilon < 0,4$ дают отрицательную плотность.

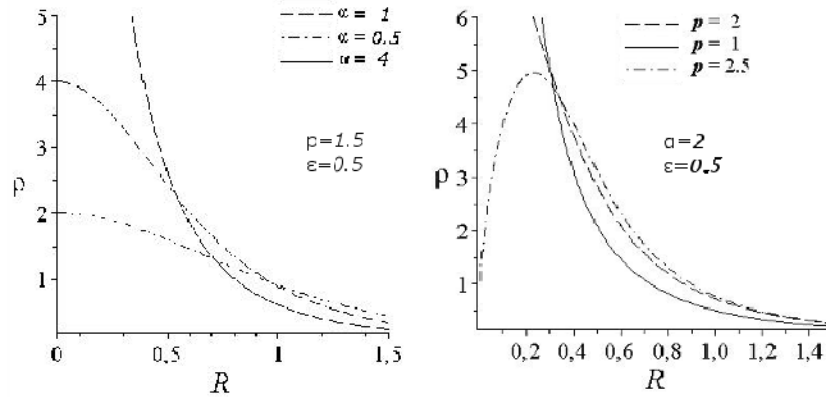


Рис. 2. Ход плотности в плоскости $z = 0$ в безразмерных единицах

Набор параметров $\alpha = 2$, $p = 1, 5$, $\varepsilon = 0, 5$ определяет физически корректную модель с положительной плотностью.

2. Орбиты. Для построения орбит будем решать задачу Коши, в которой система обыкновенных дифференциальных уравнений и начальные условия в общем случае имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla\varphi, \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (5)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор пробной звезды, \mathbf{v} — вектор скорости, ∇ — векторный оператор набла.

Для стационарной ротационно-симметричной модели имеют место интегралы энергии E и площадей I [9]

$$E = \varphi(\xi) - \frac{1}{2}(v_R^2 + v_z^2 + v_\theta^2), \quad I = Rv_\theta, \quad (6)$$

где v_R, v_θ, v_z — компоненты скорости соответствующих цилиндрических координат R, θ, z . Тогда задача сводится к решению системы (смотри, например, [10])

$$\begin{cases} \dot{R} = v_R, & \dot{v}_R = \frac{I^2}{R^3} + \frac{\partial\varphi}{\partial R}, \\ \dot{\theta} = \frac{I}{R^2}, & \dot{v}_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ \dot{z} = v_z. \end{cases} \quad (7)$$

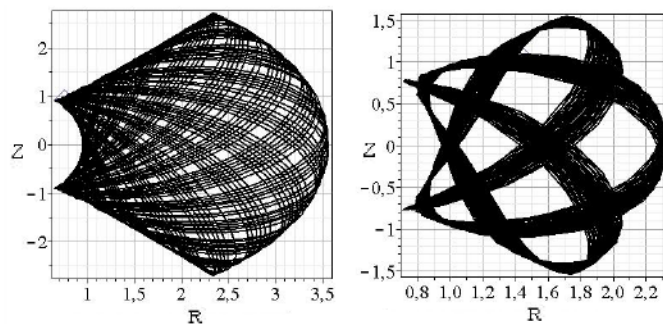


Рис. 3. Проекция орбит на сопутствующую плоскость в модели (2), (3).
 Значения интегралов движения: $I = 0, 5$; $E = 0, 2$ (слева); $E = 0, 27$ (справа)

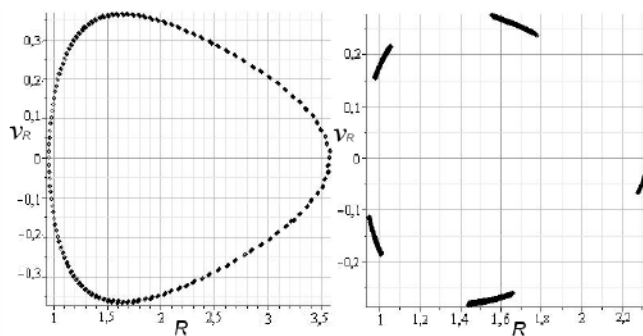


Рис. 4. Сечения Пуанкаре, соответствующие орбитам на рис. 3

2.1. Орбиты при разных значениях параметров. В случае ротационной симметрии удобно изображать орбиты в меридиональной плоскости (R, z) , которая сопутствует звезде. В результате численного интегрирования системы (7) было получено множество орбит.

Проварьируем значения параметров, выбирая те из них, которые порождают физически корректную модель, и посмотрим, как изменятся орбиты. Большинство вычисленных орбит оказываются

ящичными (см. рис. 3). Изменения параметров порождают изменения морфологии орбит.

2.2. Сечения Пуанкаре. Для выявления характера движения — регулярного или хаотического — используются различные методы. Например, показатели Ляпунова, которые характеризуют чувствительность к изменению начальных условий. Также важной характеристикой являются фрактальные свойства движения в фазовом пространстве: сечения Пуанкаре и фрактальные размерности [11, 12].

Сечения (или отображения) Пуанкаре получаются путем фиксации некоторой плоскости в фазовом пространстве, например, плоскость $(R(t), v_R(t))$ в моменты времени t , когда траектория пересекает плоскость симметрии $z = 0$ в заданном направлении, например, $v_z(t) > 0$. На рис. 4 изображены сечения, соответствующие орбитам на рис. 3. Если сечения состоят из конечного множества точек или из замкнутой орбиты, как и получилось в данной работе, то соответствующие движения являются упорядоченными [12].

3. Заключение. Рассмотрена обобщенная ротационно-симметричная модель звездной системы, включающая в себя предложенные ранее модели. Требование физической корректности, а именно, неотрицательности плотности, привело к ограничению на структурные параметры. Для моделей с принятыми значениями параметров построены орбиты пробных звезд и сделана попытка нахождения областей хаотического движения. Полученные сечения Пуанкаре позволили сделать вывод, что рассмотренные орбиты не являются хаотическими.

Литература

1. Raspopova N. V., Ossipkov L. P., Jiang Z. A new model for dark matter of spherical galaxies // *Astronomical Astrophysical Transactions*. 2012. Vol. 27, Iss. 3. P. 433–436.
2. Кузмин Г. Г., Маласидзе Г. А. Об одной форме гравитационного потенциала, допускающей решение задачи о плоских орбитах звезд в эллиптических интегралах // *Публикации Тартуской астрофизической обсерватории*. 1969. Т. 38. С. 181–250.

3. Велтманн Ю.-И. К. Теоретические выражения для щелевой плотности // *Астрономический журнал*. 1970. Т. 48. С. 1286–1288.
4. Кузмин Г. Г., Велтманн Ю.-И. К. Проекция плотности и обобщенно-изохронные модели сферических звездных систем // *Публикации Тартуской астрофизической обсерватории*. 1973. Т. 40. С. 281–323.
5. Кузмин Г. Г., Велтманн Ю.-И. К. Обобщенные изохронные модели для сферических звездных систем // *Динамика галактик и звездных скоплений*. Алма-Ата: Наука, 1973. С. 82–87.
6. An J. H., Evans N. W. Galaxy models with tangentially anisotropic velocity distributions // *Astronomical Journal*. 2006. Vol. 131, No 1. P. 782–789.
7. Кутузов С. А., Осипков Л. П. Плотность в моделях сильно сплюснутых звездных систем // *Астрономический журнал*. 1988. Т. 65, № 3. С. 468–477.
8. Miyamoto M., Nagai R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies // *Publ. Astron. Soc. Japan*. 1975. Vol. 27. P. 533–543.
9. Огородников К. Ф. *Динамика звездных систем*. М.: Физматгиз, 1958. 644 с.
10. Кутузов С. А., Распопова Н. В. Рельеф поля сил и орбиты в модели галактики // *Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления*. 2008. Вып. 1. С. 32–42.
11. Binney J., Tremaine S. *Galactic dynamics*. Princeton: Princeton University Press, 2008. 904 p.
12. Мун Ф. *Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ.* М.: Мир, 1990. 312 с.

УДК 537

Устинов Р. Н., Виноградова Е. М.

Математическое моделирование электронно-оптической системы с диэлектрической диафрагмой конечной толщины

1. Введение. Целью данной работы является построение математической модели электронно-оптической системы (ЭОС) с диэлектрической диафрагмой конечной толщины. Для решения уравнения Лапласа используется метод разделения переменных [1–3].

2. Математическая постановка задачи. Система представляет собой плоский конденсатор, внутренняя область которого заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и диэлектрической диафрагмой с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Схематическое изображение системы представлено на рис. 1.

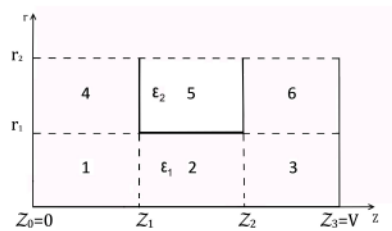


Рис. 1. ЭОС с диэлектрической диафрагмой

При решении данной задачи используется уравнение Лапласа

$$\Delta U(r, z) = 0. \quad (1)$$

Устинов Роман Николаевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: roman_3310@mail.ru, тел.: +7(950)028-76-15

Виноградова Екатерина Михайловна – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vincat2008@yandex.ru, тел.: +7(911)170-79-61

Граничные условия

$$\begin{aligned}
U_1(r, z_0) &= 0, r \in (0, r_1), \\
U_4(r, z_0) &= 0, r \in (r_1, r_2), \\
U_3(r, z_3) &= V, r \in (0, r_1), \\
U_6(r, z_3) &= V, r \in (r_1, r_2), \\
U_4(r_2, z) &= V_1(z), z \in (0, z_1), \\
U_5(r_2, z) &= V_2(z), z \in (z_1, z_2), \\
U_6(r_2, z) &= V_3(z), z \in (z_2, z_3).
\end{aligned} \tag{2}$$

3. Решение задачи. Для решения задачи разобьем всю область системы на шесть подобластей, как показано на рис. 1. Условия равенства потенциалов и условия сопряжения на границах разделов подобластей имеют вид

$$\begin{aligned}
U_1|_{z=z_1} &= U_2|_{z=z_1}, & U_2|_{z=z_2} &= U_3|_{z=z_2}, & r &\in (0, r_1), \\
U_4|_{z=z_1} &= U_5|_{z=z_1}, & U_5|_{z=z_2} &= U_6|_{z=z_2}, & r &\in (r_1, r_2), \\
U_1|_{r=r_1} &= U_4|_{r=r_1}, & z &\in (0, z_1), \\
U_2|_{r=r_1} &= U_5|_{r=r_1}, & z &\in (z_1, z_2), \\
U_3|_{r=r_1} &= U_6|_{r=r_1}, & z &\in (z_2, z_3),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial z}|_{z=z_1-0} &= \frac{\partial U_2}{\partial z}|_{z=z_1+0}, & r &\in (0, r_1), \\
\frac{\partial U_2}{\partial z}|_{z=z_2-0} &= \frac{\partial U_3}{\partial z}|_{z=z_2+0}, & r &\in (0, r_1), \\
\varepsilon_0 \frac{\partial U_4}{\partial z}|_{z=z_1-0} &= \varepsilon_1 \frac{\partial U_5}{\partial z}|_{z=z_1+0}, & r &\in (r_1, r_2), \\
\varepsilon_1 \frac{\partial U_5}{\partial z}|_{z=z_2-0} &= \varepsilon_0 \frac{\partial U_6}{\partial z}|_{z=z_2+0}, & r &\in (r_1, r_2), \\
\frac{\partial U_1}{\partial r}|_{r=r_1-0} &= \frac{\partial U_4}{\partial r}|_{r=r_1+0}, & z &\in (0, z_1), \\
\varepsilon_0 \frac{\partial U_2}{\partial r}|_{r=r_1-0} &= \varepsilon_1 \frac{\partial U_5}{\partial r}|_{r=r_1+0}, & z &\in (z_1, z_2), \\
\frac{\partial U_3}{\partial r}|_{r=r_1-0} &= \frac{\partial U_6}{\partial r}|_{r=r_1+0}, & z &\in (z_2, z_3).
\end{aligned} \tag{4}$$

Решая задачу (1)–(4) методом разделения переменных, получаем

общее решение задачи в виде рядов Фурье — Бесселя

$$U(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n J_0(\lambda r) + B_n Y_0(\lambda r)) (C_n \operatorname{sh} \lambda z + D_n \operatorname{ch} \lambda r) + \sum_{k=1}^{\infty} (E_k I_0(\lambda r) + F_k K_0(\lambda r)) (G_k \cos \lambda r + H_k \sin \lambda r). \quad (5)$$

Исходя из общего решения (5), распределение потенциала в каждой области имеет вид

$$U_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n(z - z_0))}{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_1 - z_0))} J_0(\lambda_n r) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(\mu_k(z - z_0)) \frac{I_0(\mu_k r)}{I_0(\mu_k r_1)} + V \frac{\varepsilon_1 z}{\varepsilon_1 z_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1)}, \quad (6)$$

$$U_2(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n(z - z_1))}{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_2 - z_1))} + A_n \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_2 - z))}{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_2 - z_1))} \right) J_0(\lambda_n r) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin(\nu_k(z - z_1)) \frac{I_0(\nu_k r)}{I_0(\nu_k r_1)} + V \frac{\varepsilon_1(z - z_1) + \varepsilon_1 z_1}{\varepsilon_1 z_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1)}, \quad (7)$$

$$U_3(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_3 - z))}{\operatorname{sh}(\lambda_n(z_3 - z_2))} J_0(\lambda_n r) + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \sin(\xi_k(z - z_2)) \frac{I_0(\xi_k r)}{I_0(\mu_k r_1)} + V \frac{\varepsilon_1 z + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1)}{\varepsilon_1 z_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1)}, \quad (8)$$

$$U_4(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \frac{\operatorname{sh}(\beta_n(z - z_0))}{\operatorname{sh}(\beta_n(z_1 - z_0))} W_0(\beta_n, r, r_2) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(\mu_k(z - z_0)) \frac{\overline{W}_0(\mu_k, r, r_2)}{\overline{W}_0(\mu_k, r_1, r_2)} + V \frac{\varepsilon_1 z}{\varepsilon_1 z_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1)}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
U_5(r, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(M_n \frac{\operatorname{sh}(\beta_n(z - z_1))}{\operatorname{sh}(\beta_n(z_2 - z_1))} + \right. \\
& \left. + H_n \frac{\operatorname{sh}(\beta_n(z_2 - z))}{\operatorname{sh}(\beta_n(z_2 - z_1))} \right) W_0(\beta_n, r, r_2) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin(\nu_k(z - z_1)) \frac{\overline{W}_0(\nu_k, r, r_2)}{W_0(\mu_k, r_1, r_2)} + \\
& + V \frac{\varepsilon_1(z - z_1) + \varepsilon_1 z_1}{\varepsilon_1 z_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1)},
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
U_6(r, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\operatorname{sh}(\beta_n(z_3 - z))}{\operatorname{sh}(\beta_n(z_3 - z_2))} W_0(\beta_n, r, r_2) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \sin(\xi_k(z - z_2)) \frac{\overline{W}_0(\xi_k, r, r_2)}{W_0(\xi_k, r_1, r_2)} + \\
& + V \frac{\varepsilon_1 z + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1)}{\varepsilon_1 z_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1)},
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\frac{\gamma_n}{r_1} = \lambda_n, \quad \frac{\pi k}{z_1 - z_0} = \mu_k, \quad \frac{\pi k}{z_2 - z_1} = \nu_k, \quad \frac{\pi k}{z_3 - z_2} = \xi_k; \tag{12}$$

$$W_0(\beta_n, r, r_2) = J_0(\beta_n r) Y_0(\beta_n r_2) - J_0(\beta_n r_2) Y_0(\beta_n r), \tag{13}$$

$$\overline{W}_0(\beta_n, r, r_2) = I_0(\beta_n r) K_0(\beta_n r_2) - I_0(\beta_n r_2) K_0(\beta_n r), \tag{14}$$

β_n — корни $W_0(\beta_n, r, r_2)$ при $r = r_1$.

Положим

$$W_1(\beta_n, r, r_2) = J_1(\beta_n r) Y_0(\beta_n r_2) - J_0(\beta_n r_2) Y_1(\beta_n r), \tag{15}$$

$$\overline{W}_1(\beta_n, r, r_2) = I_1(\beta_n r) K_0(\beta_n r_2) - I_0(\beta_n r_2) K_1(\beta_n r). \tag{16}$$

Формулы сопряжения на границах (4) приводят к системе линей-

ных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& \lambda_m \left(A_m \left(\operatorname{cth}(\lambda_m(z_1 - z_0)) + \operatorname{cth}(\lambda_m(z_2 - z_1)) \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{D_m}{\operatorname{sh}(\lambda_m(z_2 - z_1))} \right) \frac{r_1^2}{2} J_1^2(\gamma_m) + \\
& \quad + \lambda_m r_1 J_1(\gamma_m) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C_k \frac{\mu_k}{\lambda_m^2 + \mu_k^2} - \right. \\
& \quad \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} E_k \frac{\nu_k}{\lambda_m^2 + \nu_k^2} \right) = \\
& \quad = V \frac{r_1 J_1(\gamma_m) (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}{\lambda_m (\varepsilon_1 z_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1))}, \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_m \left(D_m \left(\operatorname{cth}(\lambda_m(z_2 - z_1)) + \operatorname{cth}(\lambda_m(z_3 - z_2)) \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{A_m}{\operatorname{sh}(\lambda_m(z_2 - z_1))} \right) \frac{r_1^2}{2} J_1^2(\gamma_m) + \\
& \quad + \lambda_m r_1 J_1(\gamma_m) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_k \frac{\nu_k}{\lambda_m^2 + \nu_k^2} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{\xi_k}{\lambda_m^2 + \xi_k^2} \right) = V \frac{r_1 J_1(\gamma_m) (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\lambda_m (\varepsilon_1 z_3 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(z_2 - z_1))}, \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi^2 \beta_m} \frac{J_0^2(\beta_m r_1) - J_0^2(\beta_m r_2)}{J_0^2(\beta_m r_1)} \left(H_m \left(\operatorname{cth}(\beta_m(z_1 - z_0)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{cth}(\beta_m(z_2 - z_1)) \right) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \frac{M_m}{\operatorname{sh}(\beta_m(z_2 - z_1))} \right) + \\
& \quad + r_1 \beta_m W_1(\beta_m, r_1, r_2) \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \frac{\nu_k}{\beta_m^2 + \nu_k^2} - \right. \\
& \quad \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\mu_k \cos(\mu_k(z_1 - z_0))}{\beta_m^2 + \mu_k^2} \right) = 0, \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi^2 \beta_m} \frac{J_0^2(\beta_m r_1) - J_0^2(\beta_m r_2)}{J_0^2(\beta_m r_1)} \left(M_m \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{cth}(\beta_m(z_2 - z_1)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \operatorname{cth}(\beta_m(z_3 - z_2)) \right) + \frac{H_m}{\operatorname{sh}(\beta_m(z_2 - z_1))} \right) + \\
& \quad + r_1 \beta_m W_1(\beta_m, r_1, r_2) \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \frac{\nu_k \cos(\nu_k(z_2 - z_1))}{\beta_m^2 + \nu_k^2} - \right. \\
& \quad \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{\xi_k}{\beta_m^2 + \xi_k^2} \right) = 0, \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^k \mu_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\lambda_n J_1(\gamma_n)}{\lambda_n^2 + \mu_k^2} - \sum_{n=1}^{\infty} H_n \frac{\beta_n W_1(\beta_n, r_1, r_2)}{\beta_n^2 + \mu_k^2} \right) + \\
& + C_k \mu_k \frac{z_1 - z_0}{2} \left(\frac{I_1(\mu_k r_1)}{I_0(\mu_k r_1)} - \frac{\overline{W}_1(\mu_k, r_1, r_2)}{\overline{W}_0(\mu_k, r_1, r_2)} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& \nu_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n J_1(\gamma_n)}{\lambda_n^2 + \nu_k^2} ((-1)^k D_n - A_n) - \right. \\
& \left. - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n W_1(\beta_n, r_1, r_2)}{\beta_n^2 + \nu_k^2} ((-1)^k M_n - H_n) \right) + \\
& + E_k \nu_k \frac{z_2 - z_1}{2} \left(\frac{I_1(\nu_k r_1)}{I_0(\nu_k r_1)} - \frac{\varepsilon_1 \overline{W}_1(\nu_k, r_1, r_2)}{\varepsilon_0 \overline{W}_0(\nu_k, r_1, r_2)} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
& \xi_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\beta_n W_1(\beta_n, r_1, r_2)}{\beta_n^2 + \xi_k^2} - \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n r_1)}{\lambda_n^2 + \xi_k^2} \right) + \\
& + G_k \xi_k \frac{z_3 - z_2}{2} \left(\frac{I_1(\xi_k r_1)}{I_0(\xi_k r_1)} - \frac{\overline{W}_1(\xi_k, r_1, r_2)}{\overline{W}_0(\xi_k, r_1, r_2)} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

4. Заключение. Построена математическая модель распределения потенциала в электронно-оптической системе с диэлектрической диафрагмой конечной толщины. Решение системы уравнений (17)–(23) определяет неизвестные коэффициенты разложений потенциала (6)–(16) во всей внутренней области системы.

Литература

1. Виноградова Е. М. Математическое моделирование электронно-оптических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 112 с.
2. Миролюбов Н. Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 209 с.
3. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Телевный Д. С. Расчет триодной полевой эмиссионной системы с модулятором // Журнал технической физики. 2014. Т. 84, № 2. С. 139–144.

УДК 519.673:519.682.6, 519.6

Черняева Н. Н.

Выявление зависимости появления хаотичности от коэффициентов для модели Энона — Хейлеса

Рекомендовано к публикации профессором Андриановым С. Н.

Непредсказуемость поведения системы при возникновении хаоса зачастую приводит к серьезным последствиям. Возможность же предсказать появление хаотичности может помочь либо избежать его, либо использовать в собственных целях.

Задачей исследования является обработка технологии, которая бы позволила найти условия, при которых возникает хаос. В качестве примера рассматривается система Энона — Хейлеса, отличающаяся от классической системы наличием коэффициентов a и b . Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{\omega}{2}(q_1^2 + q_2^2) + a q_1^2 q_2 - \frac{b}{3} q_2^3.$$

Данный вариант в существующей литературе практически не исследован, поэтому для отработки технологии рассмотрим задачу выявления зависимости появления хаотичности от коэффициентов a и b .

Исследование проводилось посредством математического продукта Maple, который позволяет строить фазовые портреты интересующей системы.

Присвоим начальное значение для $\omega = 1$, $p_2 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $H = 0,0416$, $a = 1$ и $b = 1$, тогда фазовый портрет примет вид, как на рис. 1, где можно наблюдать появление хаотичности. При увеличении энергии до $H = 0,1666$ хаотичность становится явно выраженной (рис. 1).

Для изучения характера изменений хаотичности в значении коэффициентов зафиксируем коэффициент $a = 1$. Далее изменяя коэффициент b с шагом 0,1, проанализируем его влияние на появление

Черняева Надежда Николаевна – аспирант, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена; e-mail: Nadjane91@mail.ru, тел.: +7(952)278-63-85

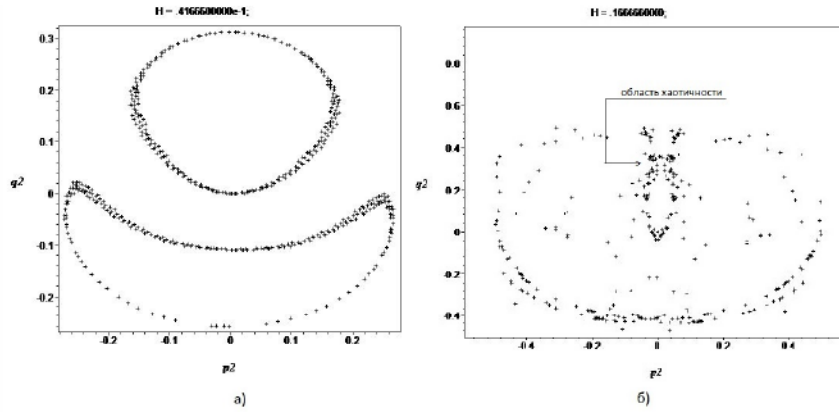


Рис. 1. а) фазовый портрет при $a = 1, b = 1, H = 0,0416$, б) фазовый портрет при $a = 1, b = 1, H = 0,1666$

хаотичности. При уменьшении b до значения $0,9$ хаотичность становится явно выраженной уже при значении энергии $H = 0,1250$ (рис. 2 а). И при уменьшении коэффициента до $b = 0,5$ явно выраженная хаотичность появляется при значении энергии $H = 0,1250$.

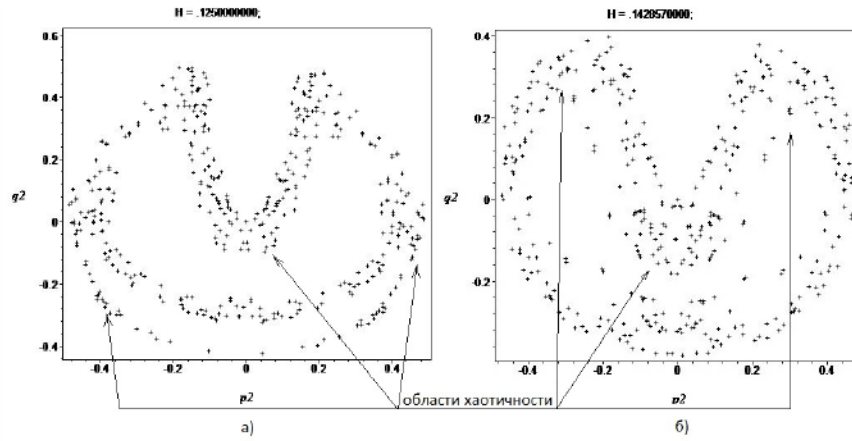


Рис. 2. а) фазовый портрет при $a = 1, b = 0,9, H = 0,1250$, б) фазовый портрет при $a = 1, b = 0,3, H = 0,1429$

Однако при значениях $b = 0,3$ хаотичность начинает проявляться при значении энергии $H = 0,1429$ (рис. 2 б). При значении коэффициента $b \approx 0$ явно выраженная хаотичность не проявляется при значении $H = 0,1666$.

При увеличении коэффициента b до значения 1,1 хаотичность явно выражена при значении энергии $H = 0,1429$ (рис. 3 а). При увеличении b ($b \in [1,2; 1,7]$) хаотичность ярко проявляется при $H = 0,0833$. При значениях $b \geq 1,8$ хаотичность становится выраженной при $H = 0,0555$ (рис. 3 б).

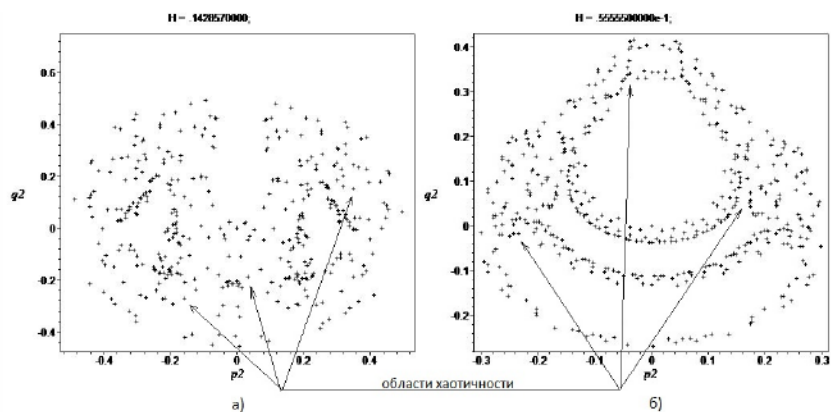


Рис. 3. а) фазовый портрет при $a = 1$, $b = 1,1$, $H = 0,1429$, б) фазовый портрет при $a = 1$, $b = 1,8$, $H = 0,0555$

Проанализируем появление хаоса при изменении коэффициента a . При уменьшении коэффициента a до 0,6 хаотичность начинает ярко проявляться только при значении энергии $H = 0,1666$, как и при $a = 1$. Однако, при $a = 0,5$ фазовый портрет примет вид, как на рис. 4 а), преобразуется в эллипс (при значении энергии $H = 0,0833$). При дальнейшем уменьшении a до 0,1 фазовые портреты имеют форму эллипса при значениях энергии как $H = 0,0833$, так и при $H = 0,1666$, при этом хаотичность не столь явно проявляется (рис. 4).

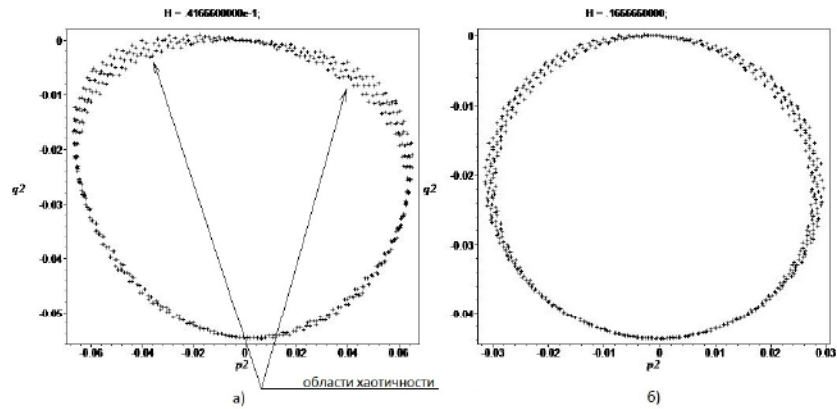


Рис. 4. а) фазовый портрет при $a = 0,5$, $b = 1$, $H = 0,0833$, б) фазовый портрет при $a = 0,1$, $b = 1$, $H = 0,1666$

На рис. 5 изображен фазовый портрет при значении $a = 1,1$ и $H = 0,1429$. При увеличении параметра a уменьшается значение энергии, при котором явно проявляется хаотичность. Так при значении $a = 1,6$ хаотичность становится значительной при $H = 0,0555$.

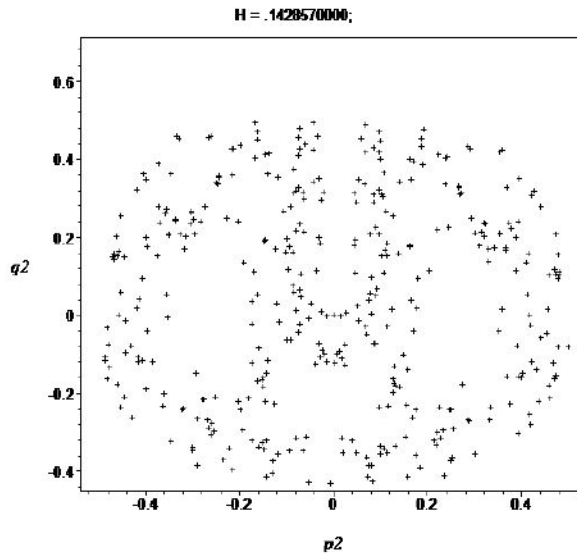
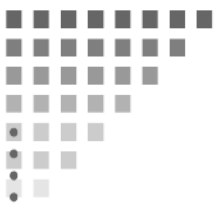


Рис. 5. Фазовый портрет при $a = 1,6$, $b = 1$, $H = 0,0555$

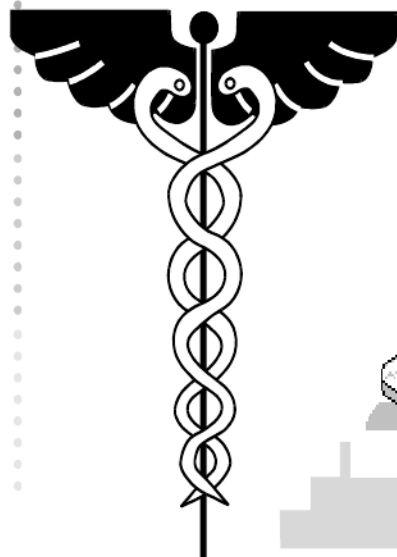
В данной работе использовался метод Рунге — Кутты четвертого порядка без симплификации. Поскольку рассматриваемый Гамильтониан является стационарным, то кроме симплектичности преобразования должен также выполняться закон сохранения энергии. Стоит отметить, что симплектичность — требование на отображение, то есть если отображение симплектично, то это справедливо для всех траекторий, а закон сохранения энергии должен перерисовываться для каждой траектории [1]. Нарушение этих двух свойств проявляется при большом количестве шагов интегрирования, поэтому в дальнейшем предполагается использовать другие методы интегрирования, в том числе сохраняющие симплектичные преобразования и закон сохранения энергии.

Литература

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная стохастическая динамика. М.: Мир, 1985. 529 с.



*3. Математические
модели медико-
биологических систем*



УДК 539.1

Бажанов П. В.

Моделирование сбора проекционных данных ПЭТ

Рекомендовано к публикации профессором Котиной Е. Д.

1. Введение. ПЭТ — радионуклидный томографический метод исследования внутренних органов человека. Метод основан на регистрации пары гамма-квантов, возникающих при аннигиляции позитронов. Позитроны возникают при позитронном бета-распаде радионуклида, входящего в состав радиофармпрепарата, который вводится в организм перед исследованием. Позитроны обладают небольшим пробегом (порядка нескольких миллиметров) до аннигиляции с электроном.

ПЭТ — развивающийся диагностический и исследовательский метод ядерной медицины. В основе метода лежит возможность при помощи специального детектирующего оборудования (ПЭТ-сканера) отслеживать распределение в организме биологически активных соединений, меченых позитрон-излучающими радиоизотопами. Выбор подходящего радиофармпрепарата (РФП) позволяет изучить с помощью ПЭТ такие разные процессы, как метаболизм, транспорт веществ, экспрессию генов и т. д.

При аннигиляции позитрона и электрона происходит выделение пары фотонов с энергией 511 кэВ, разлетающихся под углом 180° , которые фиксируются детектирующей аппаратурой. Если за определенный промежуток времени (до 10 нс) аппаратурой регистрируется пара фотонов, то считается, что их породило одно и то же событие аннигиляции [1]. После сбора достаточного количества информации строится картина распределения РФП в организме пациента.

Для моделирования процесса сбора данных ПЭТ используется метод Монте-Карло, который основан на получении большого числа реализаций случайного процесса. Методы Монте-Карло применяются для моделирования излучения радиоактивных веществ и коррекции рассеивания фотонов. Данные методы трудоемки и требуют большого числа вычислительных ресурсов.

Бажанов Павел Валерьевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: pavel.bazh@gmail.com, тел.: +7(951)642-51-38

В этой работе описан метод моделирования движения фотонов в веществе и сбора проекционных данных с учетом основных факторов, влияющих на качество изображения.

2. Взаимодействие γ -излучения с веществом. К основным видам взаимодействия γ -лучей с веществом относятся фотоэффект, эффект Комптона и образование электрон-позитронных пар.

Фотоэффект означает вырывание связанных электронов из атомов под действием электромагнитного излучения. При этом процессе квант, взаимодействуя с атомом, отдает одному из электронов оболочки почти всю энергию, а атом получает небольшую энергию отдачи. В результате нарушается связь электрона с ядром и электрону передается кинетическая энергия. Вероятность фотоэффекта тем больше, чем ближе энергия падающего кванта к энергии связи электрона. Фотоэффект невозможен на свободных электронах. Вероятность фотоэффекта сильно зависит от заряда ядра. Для квантов с большой энергией вероятность фотоэффекта убывает обратно пропорционально энергии.

Наряду с фотоэффектом при прохождении γ -лучей через вещество наблюдается *рассеяние* лучей. Рассеяние без изменения длины волны падающего излучения называется классическим, или томсоновским. Рассеяние с изменением длины волны (*комpton-эффект*) возникает тогда, когда энергия падающего кванта больше энергии связи электрона в атоме. Комптон предложил трактовать это явление как упругое рассеяние частиц-фотонов на свободных электронах. При малых углах рассеяния можно считать энергию фотонов постоянной. Линейный коэффициент ослабления пучка γ -лучей за счет комптоновского рассеяния при определенной энергии γ -лучей зависит практически только от плотности вещества. Вероятность комптон-эффекта обратно пропорциональна энергии кванта.

При энергиях γ -квантов, превышающих удвоенную массу электрона ($E = 2m_0c^2$), наблюдается процесс поглощения квантов с *образованием пары электрон-позитрон*. Энергия кванта тратится на создание двух частиц и сообщение им кинетической энергии. Образование пар в вакууме невозможно. Чем сильнее поле, с которым взаимодействует квант, тем вероятнее образование этих пар.

В ПЭТ основными взаимодействиями γ -излучения с веществом оказываются фотоэффект и комптоновское рассеивание, в силу того, что энергия квантов равна 511 кэВ.

3. Регистрация фотонных взаимодействий. Если за определенный промежуток времени (до 10 нс) детектирующая аппаратура зарегистрировала пару фотонов, то считается, что их породило одно событие аннигиляции. Координаты детекторов определяют прямую, на которой произошло событие, называемую линией отклика (line of response — LOR). При заданной конфигурации детекторов линия отклика определяется парой индексов детекторов. Также детектирующая аппаратура фиксирует время регистрации события.

Детектирующая аппаратура генерирует поток зарегистрированных совпадений, представляющих из себя пару: линия отклика, временная отметка регистрации.

4. Виды совпадений. Совпадения разделяют на четыре типа: истинные, рассеянные, случайные и множественные.

Истинные совпадения — результат регистрации пары фотонов, вызванных одним событием аннигиляции, которые не вступали ни в какое взаимодействие с материалом исследуемого объекта.

Рассеянные совпадения — результат регистрации пары фотонов, вызванных одним событием аннигиляции, но при этом произошло комптоновское рассеяние одного из фотонов.

Случайные совпадения появляются, когда в одно временное окно зарегистрированы фотоны от разных событий аннигиляции. Их число пропорционально квадрату скорости счета и разрешающему времени схемы совпадений. Чтобы минимизировать число случайных совпадений при высокой скорости счета томографа, разрешающее время схемы совпадений не должно превышать десятков нс.

Множественные совпадения возникают в результате регистрации более двух фотонов в одном временном окне.

Все совпадения, кроме истинных вносят ошибку в проекционные данные и должны быть скорректированы.

5. Постановка задачи. Необходимо по заданным параметрам детектирующей аппаратуры и фантома смоделировать сбор проекционных данных ПЭТ и предоставить его программную реализацию.

Фантом Шешпа — Логана хорошо известен в качестве имитации человеческого мозга, используется для тестирования алгоритмов томографической реконструкции.

Фантом Шеппа — Логана представляет собой суперпозицию N эллипсоидов с известными параметрами, коэффициентами рассеивания и поглощения и коэффициентами активности излучения (рис. 1). Физический фантом Шеппа — Логана конструируется с использованием склеенных вместе слоев поликарбоната, которые помещаются внутрь акрилового цилиндра.



Рис. 1. Фантом Шеппа — Логана

Фантом Дерензо представляет собой совокупность упорядоченно расположенных источников, имеющих форму стержня и обладающих определенной интенсивностью излучения РФП (рис. 2). В качестве параметров задаются: интенсивности источников, коэффициент ослабления в отверстиях, порядок изменения диаметра источников в секторах, количество секторов в срезе фантома [2].

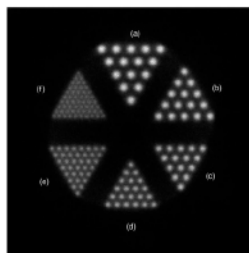


Рис. 2. Фантом Дерензо

В ПЭТ используются сцинтилляционные детекторы, расположенные в форме кольца (рис. 3). Известен радиус и количество колец, их ширина, количество детекторов в каждом кольце.

Детекторы генерируют поток зарегистрированных совпадений: линия отклика, временная отметка регистрации.

Проекционные данные представляют собой количество событий, зарегистрированных вдоль каждой линии отклика.

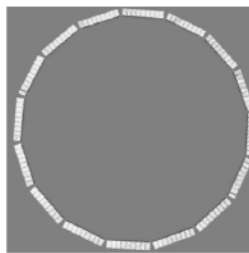


Рис. 3. Кольцо детекторов

6. Моделирование движения фотона в веществе.

Пусть G — ограниченная область, представляющая собой фантом, r_0 — произвольная точка фантома, в которой находится источник фотонов с энергией 511 кэВ и с равновероятными направлениями начальной скорости (рис. 4). Необходимо определить, покинет ли фотон область G или поглотится в ней.

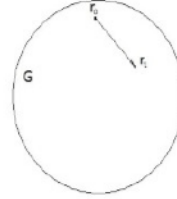


Рис. 4. Фантом

Предполагаем, что энергия фотона не меняется при рассеивании.

Пусть начальное направление скорости фотона равно ω_0 — единичный вектор. Выберем для него случайную длину ε_0 свободного пробега до взаимодействия фотона с веществом.

Направление скорости фотона выбирается по формулам:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_0 &= \vec{i}\omega_i + \vec{j}\omega_j + \vec{k}\omega_k, \\ \omega_i &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \cos \phi, \\ \omega_j &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sin \phi, \\ \omega_k &= \cos(\theta),\end{aligned}$$

где

$$\cos \theta = 2\gamma_1 - 1, \quad \phi = 2\pi\gamma_2,$$

а γ_1 и γ_2 — случайные числа из отрезка $[0, 1]$ [3].

Длина свободного пробега частицы выбирается по формуле $\varepsilon_0 = \frac{-1}{\mu} \ln \gamma$, где γ — случайное число из отрезка $[0, 1]$.

Получим точку $r_1 = r_0 + \omega_0 \varepsilon_0$, в которой происходит взаимодействие частицы с веществом. Если $r_1 \in G$, то моделируем точку r_2 . В противном случае считаем, что фотон вылетел из области G . Расчет продолжается до вылета частицы из области фантома.

Выберем $\alpha = \max(\mu(x))$. Возможны три исхода взаимодействия фотона с веществом: поглощение, рассеяние, фиктивное рассеяние (остаются неизменными направление и энергия фотона). Предположим, что коэффициент фиктивного рассеяния $\mu_f(x) = \alpha - \mu(x)$. Вероятности этих событий равны соответственно: $\frac{\mu_a}{\alpha}$, $\frac{\mu_e}{\alpha}$, $\frac{\mu_f}{\alpha}$.

Выберем случайное число $\gamma \in [0, 1]$. Если $\gamma < \frac{\mu_s}{\alpha}$, то фотон рассеивается, если $\gamma < \frac{\mu_s + \mu_e}{\alpha}$, то фотон поглощается, и если $\gamma \geq \frac{\mu_s + \mu_e}{\alpha}$, то происходит фиктивное рассеяние [4].

7. Практическая реализация. Написана программа на языке C# для моделирования процесса сбора проекционных данных ПЭТ. Входные данные: информация о блоке детекторов кольца, используемый фантом и его характеристики. Программа генерирует поток событий регистрации фотонов на основе перечисленных входных данных. Выходными данными является массив проекционных данных, по которому можно восстановить изображение.

8. Заключение. Написан программный модуль, который позволяет моделировать работу ПЭТ томографа. Данный метод моделирования движения фотонов может быть использован при разработке алгоритмов коррекции изображения и настройки детекторов.

Литература

1. Гребенчиков В.В., Котина Е.Д. Физико-технические основы ядерной медицины: учебное пособие. СПб.: СПбГУ, 2007. 172 с.
2. Budinger T., Derenzo S., Gullberg G., Greenberg W. Emission computer assisted tomography with single-photon and positron annihilation photon emitters // Journal of Computer Assisted Tomography, 1977. Vol. 1, No 1. P. 131–145.
3. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.
4. Спанье Дж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972. 271 с.

УДК 519.25

Куликова К. Ю.

Статистический анализ медицинских данных при наличии пропусков

Рекомендовано к публикации доцентом Парилиной Е. М.

1. Введение. Одна из трудностей, с которой сталкиваются аналитики — наличие пропусков в данных, которые могут возникнуть в выборке по ряду причин, например, пациент был на первом осмотре (перед операцией), но не явился на повторный (после операции). В связи с этим анализ данных с пропусками — это отдельная задача статистики.

К сожалению, не существует конкретного алгоритма, по которому нужно действовать при тех или иных условиях. Иногда данные с пропусками можно просто исключить из анализируемой выборки, в то время как в других случаях их желательно восстановить.

2. Классификация пропусков и восстановление данных. Пропуски условно можно разделить на четыре вида:

1. *Пропуски, которые не подходят под определение подвыборки.* Некоторые участники опроса исключаются, так как не удовлетворяют критериям конкретного исследования, в котором используется определенная подвыборка. Как правило, этот тип пропусков редко встречается при медицинских исследованиях, так как выборки формируются для определенной задачи.
2. *Абсолютно случайно пропущенные данные* [1]. Несмотря на то, что у этого типа пропусков есть точное определение, они редко встречаются на практике и имеют больше теоретическую значимость. Если представить данные в виде матрицы, где столбцы — переменные, а строки — события, тогда пропуски будут распределены равномерно. Наличие таких пропусков проверяется t -тестом или χ^2 -тестом.
3. *Случайно пропущенные данные.* Данный тип пропусков уже намного ближе к реальности, они распределены случайно в подгруппах переменных.

Куликова Ксения Юрьевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ksenygnirps@gmail.com, тел.: +7(911)825-27-59

4. *Неигнорируемые пропуски* [2]. Пропущенные данные могут не удовлетворять ни одному из вышеперечисленных определений, но тем не менее быть систематическими. Этот тип пропусков наиболее сложный для анализа и восстановления.

Существует множество методов для восстановления пропущенных данных, но мы рассмотрим лишь некоторые из них.

1. *Анализ полных данных или построчное удаление*. Метод заключается в удалении всех данных о респонденте, если он имеет пропуск хотя бы в одной переменной (т. е. удаляем всю строку из матрицы данных). Недостаток метода очевиден: при большом количестве переменных объем исключенных значений может быть слишком велик.
2. *Методы, использующие доступную информацию или попарное удаление*. Переменные для наблюдений не включаются в проводимый анализ по необходимости (т. е. при анализе данных по одной конкретной переменной в анализ не входят только те строчки, в которых отсутствуют данные именно в этой переменной в отличие от первого метода, где были бы удалены строчки, в которых есть пропуск хотя бы в одной из переменных), если данные пропущены абсолютно случайно, он дает те же результаты, что и предыдущий метод.
3. *Подстановка среднего по выборке*. Вместо пропущенного значения вставляется среднее значение по данной переменной. Однако, если пропуски не строго случайны, то подстановка среднего — не лучшее решение. Люди, которые близки к середине распределения по большинству переменных, чаще отвечают на все вопросы, а вот люди, которые близки к экстремумам распределения, чаще отказываются от ответов. Поэтому данный метод делает распределение более сконцентрированным около среднего значения и уменьшает дисперсию, следовательно, недооценивается ковариация переменных и результаты получаются неточными и смещенными.
4. *Подстановка среднего в подгруппах*. Вместо того, чтобы подставлять среднее значение по всем респондентам, их сначала разбивают на подгруппы по определенному признаку и подставляют среднее значение, полученное для данной подгруппы.

3. Пример анализа медицинских данных. Имеется медицинская база данных, в которой предоставлены данные по 108 больным варикоцеле, имеется 8 переменных: возраст, объем правого яичка до операции, объем левого яичка до операции, суммарный объем до операции, объем правого яичка после операции, объем левого яичка после операции, суммарный объем после операции, формы заболевания (смешанная, тестикулярная, дисплазия).

Ставится задача — определить, есть ли улучшения после ангио-микрохирургического лечения, а также проверить, есть ли зависимость между проявлением заболевания и другими факторами (возраст, форма заболевания).

3.1. Восстановление данных. Проведем процедуру восстановления двумя способами. После применения метода попарного удаления анализируем 88,8% данных до операции и 93,5% данных после операции.

После подстановки среднего по выборке имеем данные по всем 108 больным. Данные, восстановленные вторым методом, имеют несколько другое распределение: они стали более сконцентрированными возле среднего значения и по всем переменным уменьшилась дисперсия.

3.2. Анализ восстановленных данных. Проведена проверка на нормальность выборок с помощью критерия χ^2 с уровнем значимости 5%. В обоих случаях выборка не распределена по нормальному закону и данные до и после операции — это две зависимые выборки (т. е. это результаты двукратного измерения одного и того же свойства у одного и того же объекта, но при изменяющихся условиях), поэтому будем использовать для проверки критерий знаков или G-критерий [3].

Выявление изменений после лечения. Пусть гипотеза H_0 значит, что состояние больных не изменилось или ухудшилось, альтернативная гипотеза H_1 — состояние больных улучшилось. Сформируем статистику критерия ($T_{\text{эмпир}}$): имеем пары $(X_{\text{до}}^i, X_{\text{псл}}^i), i = 1, \dots, n$. Если значения в паре не различаются, пометим их идентификатором «0», если $X_{\text{до}}^i < X_{\text{псл}}^i$ — «+», и в последнем случае, когда $X_{\text{до}}^i > X_{\text{псл}}^i$ присваиваем «-».

Пусть N равно первоначальному объему выборки, а M — объем выборки без тех пар, в которых значения в паре не различаются, $T_{\text{эмпир}}$ — количество пар с идентификатором «+». Уровень значимости критерия p примем равным 0,05, $T_{\text{теорет}} = (M - t_p)$ — значение

статистики критерия, которое вычисляется по таблице [4].

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости p , если $T_{\text{эмпир}} > T_{\text{теорет}}$.

Результаты статистики для объема правого яичка:

1. Результаты, полученные для объема правого яичка при анализе данных, восстановленных методом попарного удаления: $N = 87$, $M = 85$, $T_{\text{эмпир}} = 77$, $T_{\text{теорет}} = 52$.
2. Результаты, полученные для объема правого яичка при анализе данных, после подстановки среднего: $N = 108$, $M = 106$, $T_{\text{эмпир}} = 96$, $T_{\text{теорет}} = 65$.

Из вычислений видно, что значения статистики различаются, но на принятие решения это не повлияло: в обоих случаях принимаем гипотезу H_1 при уровне значимости 0,05, что означает статистическую значимость улучшения состояния больных.

Результаты статистики для объема левого яичка:

1. $N = 87$, $M = 87$, $T_{\text{эмпир}} = 74$, $T_{\text{теорет}} = 53$.
2. $N = 108$, $M = 108$, $T_{\text{эмпир}} = 92$, $T_{\text{теорет}} = 67$.

Результаты статистики для суммарного объема:

1. $N = 87$, $M = 87$, $T_{\text{эмпир}} = 75$, $T_{\text{теорет}} = 53$.
2. $N = 108$, $M = 108$, $T_{\text{эмпир}} = 93$, $T_{\text{теорет}} = 67$.

Таким образом во всех случаях принимаем гипотезу H_1 при уровне значимости 0,05. Отсюда можно сделать вывод о том, что лечение дало положительные результаты.

Проверка явления «testicular catch-up growth». «Testicular catch-up growth» — феномен, описанный в литературе, как «догоняющий рост» объема пораженного (левого) яичка после операции до размеров другого. Имеем гипотезу H_0 : явление «testicular catch-up growth» не выявлено и альтернативную гипотезу H_1 : наблюдения показывают наличие данного явления. Значения статистики:

1. $T_{\text{эмпир}} = 48$, $T_{\text{теорет}} = 36$.
2. $T_{\text{эмпир}} = 57$, $T_{\text{теорет}} = 42$.

При анализе выборок, восстановленных обоими методами, принимаем гипотезу H_1 при уровне значимости 0,05.

Выявление зависимости между формами заболевания. Так как G -критерий подходит для выборок с объемом от 5 до 300 элементов, а имеющиеся выборки слишком малы, то выберем критерий Пирсона для дальнейшего анализа данных. Снова имеем две противоположные гипотезы, а именно, H_0 : нет зависимости, H_1 : зависимость присутствует.

1. Расчет теоретических частот. Всего в ходе исследования у 75 пациентов наблюдается увеличение объема, что составляет 86,2% от всех больных, соответственно тот же процент увеличения ожидается при любой форме заболевания. Получаем значения статистики $\chi^2_{\text{эмпир}} = 1,228782051$, $\chi^2_{\text{табл}} = 5,991464547$. Данные результаты говорят о том, что мы принимаем гипотезу об отсутствии зависимости увеличения суммарного объема от формы заболевания при уровне значимости критерия 0,05. Аналогично проверим гипотезу H_0 : явление «testicular catch-up growth» не зависит от формы заболевания, H_1 : зависимость присутствует. Значения статистики $\chi^2_{\text{эмпир}} = 1,649685$, $\chi^2_{\text{табл}} = 9,487729$, принимаем гипотезу об отсутствии зависимостей с уровнем значимости критерия 0,05.
2. Расчет теоретических частот. Всего в ходе исследования у 86,11% пациентов наблюдается увеличение объема, соответственно тот же процент увеличения ожидается при любой форме заболевания. Получаем значения статистики $\chi^2_{\text{эмпир}} = 0,9755$, $\chi^2_{\text{табл}} = 9,48773$. Данные результаты говорят о том, что мы принимаем гипотезу об отсутствии зависимости увеличения суммарного объема от формы заболевания при уровне значимости критерия 0,05. Проверим наличие явления: гипотезу H_0 : явление «testicular catch-up growth» не зависит от формы заболевания, H_1 : зависимость присутствует. Значения статистики $\chi^2_{\text{эмпир}} = 1,50845$, $\chi^2_{\text{табл}} = 9,48773$, принимаем гипотезу об отсутствии зависимостей при уровне значимости критерия 0,05.

Выявление зависимости между возрастными группами. Все больные разбиты на четыре группы: 4–7 лет, 8–12 лет, 13–16 лет, 17–18 лет. Так же по критерию Пирсона проверим гипотезу: отклонения от теоретических частот случайны и изменения после операции не зависят от возрастной группы. Альтернативная гипотеза: изменения после операции зависят от возраста больного. Принимаем гипо-

тезу об отсутствии зависимостей от возрастной группы при уровне значимости критерия 0,05.

4. Заключение. В данной задаче восстановление данных не повлияло на принятие гипотез, хотя значения критериев и различны. Тем не менее в другой ситуации процедура восстановления может значительно поменять картину и результаты, поэтому лучше анализировать несколько выборок: с исключением пропусков из анализа и восстановленные некоторыми способами.

Литература

1. Alan C. Acock working with missing values // *Journal of Marriage and Family*. 2005. № 67. P. 1012–1028.
2. Кутлалиев А. Х. Метод множественного восстановления данных // *Социологические методы в современной исследовательской практике*. М.: НИУ ВШЭ, 2011. С. 201–208.
3. Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов: Учебник. М.: Московский психолого-социальный институт, 2002. 336 с.
4. Грабарь М. И., Краснянская К. А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. М.: Педагогика, 1977. 136 с.

УДК 519.6

Пасечная Г. А.

Определение поля скоростей в задачах обработки радионуклидных изображений

Рекомендовано к публикации профессором Котиной Е. Д.

1. Введение. Радионуклидная диагностика представляет собой функциональную диагностику заболеваний человека, основанную на регистрации радиоактивных излучений от радиофармпрепаратов (РФП), поглощенных исследуемым органом [1]. На сегодняшний день эта область активно развивается, что делает актуальным создание новых математических моделей и алгоритмов для обработки данных [2]. В данной работе рассматривается метод определения поля скоростей, основанный на понятии оптического потока [3, 4], применительно к обработке радионуклидных изображений. Здесь под оптическим потоком будем понимать двумерное поле скоростей, описывающее наблюдаемое в изображении смещение точек, происходящее при движении изображаемых объектов относительно детектора гамма-камеры [5].

Динамический режим сбора данных позволяет наблюдать распределение РФП (индикатора) в исследуемой системе организма в зависимости от времени. В результате исследования получаем плотность распределения РФП, зависящую от времени и пространственных координат $\rho = \rho(t, x, y)$, $t \in [0, T]$, $(x, y) \in D$, или с учетом дискретизации по времени и пространственным координатам имеем последовательность матриц $\rho_1(i, j)$, $\rho_2(i, j)$, \dots , $\rho_T(i, j)$, $i, j = 0, \dots, n + 1$. Предположение о постоянстве градиента плотности распределения индикатора вдоль траекторий движения лежит в основе предложенного в статье метода.

2. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая моделирует транспорт РФП

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u(t, x, y), \\ \dot{y} &= v(t, x, y).\end{aligned}\tag{1}$$

Пасечная Галина Александровна – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: pasechnayagalina@gmail.ru, тел.: +7(812)428-48-68

Здесь x и y пространственные координаты, t — время, функции u и v определяют поле скоростей.

Будем предполагать, что градиент плотности распределения вдоль траекторий системы (1) остается постоянным

$$\begin{cases} \rho_{xx}u + \rho_{xy}v = -\rho_{xt}, \\ \rho_{yx}u + \rho_{yy}v = -\rho_{yt}, \end{cases} \quad (2)$$

где ρ_{xx} , ρ_{xt} , ρ_{xy} , ρ_{yy} , ρ_{yt} — обозначения для частных производных второго порядка, $(u, v)^T = f$ — поле скоростей системы (1).

Рассмотрим обратную задачу определения поля скоростей в системе (1), которая в общем случае является некорректной. Для ее решения используется метод регуляризации, описанный в [6]. Зафиксируем некоторый момент времени t и составим интегральный функционал

$$J(u, v) = \int_M (\varphi^2 + \alpha^2 \psi^2) dx dy, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= (\rho_{xt} + \rho_{xx}u + \rho_{xy}v)^2 + (\rho_{yt} + \rho_{yx}u + \rho_{yy}v)^2, \\ \psi^2 &= u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2, \end{aligned}$$

α^2 — параметр регуляризации, M — область ненулевой меры из R^2 .

Далее минимизируем интегральный функционал (3), для этого выпишем уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\begin{aligned} -\alpha^2 \Delta u + (\rho_{xx}^2 + \rho_{yx}^2)u + \rho_{xy}(\rho_{xx} + \rho_{yy})v &= -\rho_{xx}\rho_{xt} - \rho_{yx}\rho_{yt}, \\ -\alpha^2 \Delta v + (\rho_{xy}^2 + \rho_{yy}^2)u + \rho_{xy}(\rho_{xx} + \rho_{yy})v &= -\rho_{xy}\rho_{xt} - \rho_{yy}\rho_{yt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$. В результате данного подхода задача нахождения поля скоростей системы (1) сводится к решению системы (4) при соответствующих граничных условиях.

3. Разреженные системы специального вида. Рассмотрим систему (4), где $(x, y) \in M$ и функции u и v заданы на границе области M , которую обозначим Ω . Правая часть представляет собой известную функцию от x, y .

Учитывая дискретный характер измерений, обозначаем плотность распределения РФП в точке, находящейся на пересечении i -ой

строки, j -го столбца и k -го момента времени за $\rho_k(i, j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Будем искать решение системы (4) в узлах квадратной сетки с шагом, равным единичному изменению расстояния, т. е. приращению вдоль какой-либо оси величиной в один пиксель.

Пусть $u(i, j), v(i, j)$ — приближение к решению задачи (4) в точке (i, j) , принадлежащей сетке. Заменяем оператор Лапласа конечными разностями и, учитывая введенную дискретизацию, вычисляем приближенные значения частных производных второго порядка $\rho_{xx}, \rho_{xt}, \rho_{xy}, \rho_{yy}, \rho_{yt}$, используя значения плотности в соседних точках сетки по выбранной схеме. В результате для системы (4) получаем систему линейных уравнений с $2n^2$ неизвестными $u(i, j), v(i, j)$, $i, j = 1, \dots, n$, во внутренних точках сетки (функции u и v заданы на границе области) [7].

Эту систему можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $u = (u_1, \dots, u_{n^2})^T = (u_{11}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{n1}, \dots, u_{nn})^T$,
 $v = (v_1, \dots, v_{n^2})^T = (v_{11}, \dots, v_{1n}, \dots, v_{n1}, \dots, v_{nn})^T$ — значения иско-
 мых функций; $d = (d_1, \dots, d_{n^2})^T = (d_{11}, \dots, d_{1n}, \dots, d_{n1}, \dots, d_{nn})^T$,
 $e = (e_1, \dots, e_{n^2})^T = (e_{11}, \dots, e_{1n}, \dots, e_{n1}, \dots, e_{nn})^T$.

Запишем подробнее

$$d_{i,j} = -\rho_{xx}(i, j)\rho_{xt}(i, j) - \rho_{yx}(i, j)\rho_{yt}(i, j), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

$$e_{i,j} = -\rho_{xy}(i, j)\rho_{xt}(i, j) - \rho_{yy}(i, j)\rho_{yt}(i, j), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Матрица B — диагональная, т. е. $b_{sr} = 0$, $s, r = \overline{1, n^2}$,
 $b_{ss} = \rho_{xy}(i, j)(\rho_{xx}(i, j) + \rho_{yy}(i, j))$. Матрицы A, C — разреженные
 и отличаются диагональными элементами, $a_{sr} = c_{sr}$ и ненулевые
 из них $a_{sr} = c_{sr} = -\alpha^2$. Диагональные элементы матрицы A :
 $a_{ss} = 4\alpha^2 + \rho_{xx}^2(i, j) + \rho_{yx}^2(i, j)$, матрицы C : $c_{ss} = 4\alpha^2 + \rho_{yy}^2(i, j) +$
 $\rho_{yx}^2(i, j)$, $i, j = \overline{1, n}, s = \overline{1, n^2}$.

В результате переименования переменных система (5) примет вид

$$Hz = q, \quad (6)$$

где матрица H — блочная, с блоками второго порядка. Представим ее следующим образом

$$H = D - E - F, \quad (7)$$

матрица D — диагональная, E и F — нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы соответственно.

Для решения системы (6) с матрицей вида (7) используется блочный итерационный метод Гаусса — Зейделя. Для его сходимости в случае, когда матрица B — диагональная, матрицы A и C отличаются диагональными элементами, достаточно, чтобы выполнялись условия, полученные в статье [8]. Нетрудно проверить, что в данном случае они выполняются, и таким образом, метод Гаусса — Зейделя сходится к единственному решению при любом начальном приближении.

4. Построение поля скоростей для радионуклидных изображений. Рассмотрим применение описанного метода для обнаружения движения на радионуклидных изображениях. Изображения, полученные в ходе радионуклидной диагностики, обладают определенной спецификой, являются зашумленными и негладкими. Представленный в статье алгоритм включает в себя предварительную обработку данных с помощью фильтров.

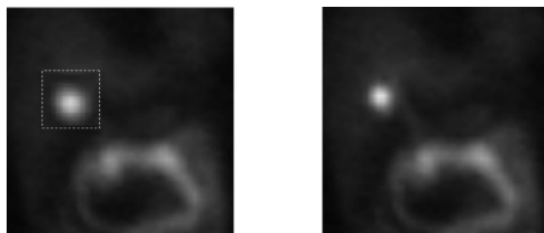


Рис. 1. Радионуклидные изображения $\rho_k(i, j)$ при $t = k, i, j = 0, \dots, n + 1$ и $\rho_{k+1}(i, j)$ при $t = k + 1, i, j = 0, \dots, n + 1$

Рассмотрим два радионуклидных изображения $\rho_k(i, j), \rho_{k+1}(i, j), i, j = 0, \dots, n + 1$, на которых имеет место сдвиг исследуемого органа (рис. 1). В результате применения предложенного метода поле скоростей в выделенной области интереса имеет вид, представленный на рис. 2.

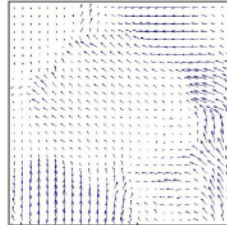


Рис. 2. Поле скоростей

Рассмотрим изображения, полученные при исследовании гепатобилиарной системы человека $\rho_k(i, j)$, $\rho_{k+1}(i, j)$, $i, j = 0, \dots, n + 1$, на которых имеет место сдвиг исследуемого органа (рис. 3).



Рис. 3. Изображения гепатобилиарной системы $\rho_k(i, j)$ при $t = k$, $i, j = 0, \dots, n + 1$ и $\rho_{k+1}(i, j)$ при $t = k + 1$, $i, j = 0, \dots, n + 1$

В области интереса, выделенной пунктиром на рис. 3, поле скоростей имеет вид, изображенный на рис. 4.

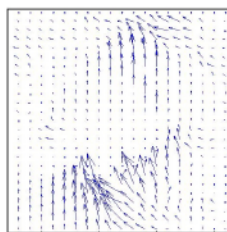


Рис. 4. Поле скоростей

5. Заключение. Метод определения поля скоростей, представленный в данной статье, может применяться для обнаружения дви-

жения и его коррекции [9], а также для построения контуров исследуемых органов при обработке радионуклидных изображений.

Литература

1. Котина Е. Д. Некоторые вопросы моделирования динамических процессов в радионуклидных исследованиях. СПб.: ВВМ, 2013. 150 с.
2. Kotina E. D. Data processing in radionuclide studies // Problems of Atomic Science and Technology. 2012. Vol. 79, No 3. P. 195–198.
3. Horn B. K. P., Schunck B. G. Determining optical flow // Artificial intelligence. 1981. Vol. 17, No 11. P. 185–203.
4. Papenberg N. Highly accurate optic flow computation with theoretically justified warping // International Journal of Computer Vision. 2006. Vol. 67, No 2. P. 141–158.
5. Сидоров А. В., Новиков В. Л., Гребенщиков В. В. и др. Опытный образец двухдетекторной томографической гамма-камеры // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Электрофизическая аппаратура. 2006. № 4. С. 30–34.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 285 с.
7. Котина Е. Д., Пасечная Г. А. Определение поля скоростей в задачах обработки изображений // Известия Иркутского государственного университета. 2013. Т. 6, № 1. С. 48–59.
8. Котина Е. Д. О сходимости блочных итерационных методов // Известия Иркутского государственного университета. 2012. Т. 5, № 3. С. 41–55.
9. Ovsyannikov D. A., Kotina E. D., Shirokolobov A. Yu. Mathematical methods of motion correction in radionuclide studies // Problems of atomic science and technology. 2014. Vol. 88, No 6. P. 137–140.

УДК 517.929.4

Смирнов Б. В., Кирьянен А. И.

Математические модели распространения инфекционных заболеваний с учетом инкубационного периода

1. Введение. В последнее десятилетие заметно значительное повышение научного интереса к пониманию массовой динамики протекания болезней. В основном [1–3] за основу берется известная *SIR*-модель, состоящая из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. В ней рассматриваемое население разбивается на три класса: S — число здоровых индивидов, но склонных к заболеванию, I — число больных и R — число переболевших или прошедших вакцинацию (не склонных к заболеванию). Однако, введение в эти уравнения временного запаздывания может повысить адекватность и реалистичность модели. Такие шаги были сделаны, например, в [4, 5] и других работах. Задача данной работы — объединить в рассмотрении несколько сходных моделей с запаздыванием, характеризующим либо инкубационный период заболевания, либо период временной иммунности; установить условия асимптотической устойчивости ненулевых решений и биологически интерпретировать полученные результаты.

Во всех нижеизложенных моделях будем использовать следующие предположения. Во-первых, население полагается полностью однородным (полностью перемешанным) в рамках классов S , I и R . Во-вторых, прирост количества больных за единицу времени прямо пропорционален произведению численностей восприимчивых и больных индивидов. Таким образом переход из класса S в класс I описывается трофической функцией $\beta S(\cdot)I(\cdot)$, где β — уровень заболеваемости. Кроме того, предполагается, что болезнь характеризуется сравнительно быстрым течением и рождаемостью/смертностью населения можно пренебречь, считая его постоянным.

Смирнов Борис Владимирович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: boris.v.smirnov@gmail.com, тел.: +7(921)752-02-69

Кирьянен Александр Иванович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kirjanen@mail.ru, тел.: +7(921)797-92-90

2. Модель I. Разносчики заразы, «абсолютная» вакцинация. В первой модели исследуем болезни, которые во время инкубационного периода делают носителей способными передавать ее другим, однако не обнаруживают ее сами (например, ветряная оспа). Здесь временную продолжительность инкубационного периода обозначим за h и, согласно сказанному ранее, введем ее в качестве запаздывания только у аргумента функции S .

Также введем некоторый параметр вакцинации λ , имеющий ту же размерность, что и переменные SIR . Он характеризует количество человек, подвергающихся вакцинации за единицу времени. Объяснить то, что параметр дан в «абсолютном» значении, а не относительно категории восприимчивых индивидов, легко. Иногда здравоохранительные органы в силу различных трудностей ограничены и не могут обеспечить любой необходимый объем вакцинации. В этом случае полагаем, что прививки делаются только ограниченному числу людей. Все параметры положительны.

В итоге система приобретает следующий вид:

$$\dot{S} = -\beta S(t-h)I(t) - \lambda, \quad (1)$$

$$\dot{I} = \beta S(t-h)I(t) - \gamma I(t), \quad (2)$$

$$\dot{R} = \gamma I(t) + \lambda. \quad (3)$$

Найдем нетривиальное положение равновесия. Переменная R не содержится в правых частях уравнения, так что ее можно исключить из рассмотрения. Из уравнения (2) получаем S^* и, подставляя, это в уравнение (1) окончательно

$$S^* = \frac{\gamma}{\beta}, \quad I^* = -\frac{\lambda}{\gamma}. \quad (4)$$

Можно заметить, что положение равновесия имеет отрицательную координату по оси I . Это погрешность модели, но на результаты исследования она не повлияет. В реальности количество больных, стремясь к отрицательной величине, «упрется» в нуль, так как больше уменьшиться не сможет. Более того, такая динамика отвечает задачам здравоохранения и означает полное здоровье населения. Сделаем замену

$$x' = S - \frac{\gamma}{\beta}, \quad y' = I + \frac{\lambda}{\gamma}.$$

Сохранив после раскрытия скобок только линейные члены, приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= -\gamma y(t) + \frac{\lambda\beta}{\gamma} x(t-h), \\ \dot{y}' &= -\frac{\lambda\beta}{\gamma} x(t-h), \\ \dot{z}' &= \gamma y(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Характеристическое уравнение без учета переменной R будет иметь вид

$$D(z) = z^2 e^{zh} - \frac{\lambda\beta}{\gamma} z - \lambda\beta = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} D(iy) &= (iy)^2 (\cos(yh) + i \sin(yh)) - \frac{\lambda\beta}{\gamma} iy - \lambda\beta = F(y) + iG(y), \\ F(y) &= -y^2 \cos(yh) - \lambda\beta, \quad G(y) = -y^2 \sin(yh) - \frac{\lambda\beta}{\gamma} y, \end{aligned}$$

где y — вещественное. Функция $G(y)$ обладает свойством нечетности, значит, можно рассматривать только $y > 0$, и имеет корень $y_0 = 0$ первой кратности. В нем всегда выполняется условие $F(y_0)G'(y_0) - F'(y_0)G(y_0) = \frac{(\lambda\beta)^2}{\gamma} > 0$. Остальные корни удовлетворяют уравнению

$$y \sin(yh) + \frac{\lambda\beta}{\gamma} = 0. \quad (7)$$

Или, другими словами, лежат на пересечении графиков функций $f_1(y) = y \sin(yh)$ и $f_2(y) = \frac{\lambda\beta}{\gamma}$.

Как видно из рис. 1, для того, чтобы на промежутке $[-2\pi, 2\pi]$ были корни, необходимо, чтобы

$$\frac{\lambda\beta}{\gamma} < \frac{3\pi}{2h}. \quad (8)$$

Также из анализа графиков можно локализовать корни функции (7): $y_1 h \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $y_2 h \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. В корнях нужно потребовать выполнение условия $F(y)G'(y) - F'(y)G(y) > 0$.

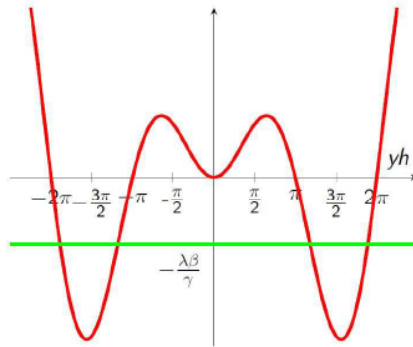


Рис. 1. Положение корней функции (7)

$$\begin{aligned}
 & F(y_1)G'(y_1) - F'(y_1)G(y_1) = F(y_1)G'(y_1) = \\
 & = (-y_1^2 \cos(y_1 h) - \lambda \beta) \left(\underbrace{-2 y_1 \sin(y_1 h) - y_1^2 h \cos(y_1 h)}_{(7)} - \frac{\lambda \beta}{\gamma} \right) = \\
 & = (-y_1^2 \cos(y_1 h) - \lambda \beta) \left(\underbrace{\frac{\lambda \beta}{\gamma} - y_1^2 h \cos(y_1 h)}_{>0} \right) > 0 \implies \\
 & \implies \lambda \beta < -y_1^2 \cos(y_1 h). \tag{9}
 \end{aligned}$$

Здесь следует заметить, что из-за положения корня $y_1 h$ правая часть последнего неравенства, несмотря на стоящий впереди знак « \rightarrow » на самом деле является положительной величиной.

$$\begin{aligned}
 & F(y_2)G'(y_2) - F'(y_2)G(y_2) = F(y_2)G'(y_2) = \\
 & = \underbrace{(-y_2^2 \cos(y_2 h) - \lambda \beta)}_{<0} \left(\underbrace{-2 y_1 \sin(y_1 h) - y_2^2 h \cos(y_2 h)}_{(7)} - \frac{\lambda \beta}{\gamma} \right) > 0 \implies \\
 & \implies \frac{\lambda \beta}{\gamma} < y_2^2 h \cos(y_2 h) \tag{10}
 \end{aligned}$$

Итак, условия (8)–(10) дают необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (6), а значит и исходной системы (5)

в положении равновесия (4). Условие (8) показывает, что при одних и тех же параметрах модели при увеличении запаздывания система теряет асимптотическую устойчивость. Это объясняется тем, что при слишком большом инкубационном периоде рост больных произойдет гораздо быстрее, чем инфекцию можно будет обнаружить и принять против нее соответствующие меры. Условие (10) дает ограничение на составной по всем параметрам модели коэффициент $\frac{\lambda\beta}{\gamma}$, что представляется интересным и важным результатом. Ввиду периодичности функции (7) на всех промежутках $[-2\pi k, 2\pi k]$, $k = 1, \overline{N}$ корни будут повторяться и соответствующие им неравенства будут иметь тот же самый вид. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы квазиполином (6) с положительными коэффициентами $\lambda, \beta, \gamma, h$ имел корни в левой полуплоскости, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:*

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\beta}{\gamma} &< \frac{3\pi}{2h}, \\ \lambda\beta &< -y_1^2 \cos(y_1 h), \\ \frac{\lambda\beta}{\gamma} &< y_2^2 h \cos(y_2 h). \end{aligned}$$

Замечание 1. Из условия (8) можно выразить величину максимального запаздывания $h_{max}^* = \frac{3\pi\gamma}{2\lambda\beta}$, имеющую значение для решения задачи стабилизации системы

3. Модели II–V. В следующих моделях рассмотрим другие сценарии поведения болезни и применения вакцинации. Так, например, большинство инфекций не передаются от человека к человеку во время инкубационного периода. Таким образом, на время h группу заболевших, а точнее, «готовящихся заболеть», следует просто исключить из слагаемого, отвечающего за передачу болезни. Это приводит к следующей модели:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\beta S(t-h)I(t-h) - \lambda, \\ \dot{I} &= \beta S(t-h)I(t-h) - \gamma I(t), \\ \dot{R} &= \gamma I(t) + \lambda. \end{aligned}$$

Задача обеспечения населения вакциной также может быть поставлена по-другому. Если у государства имеется достаточно ресурсов, чтобы привить любое количество человек, логичнее представить уровень вакцинации за единицу времени как долю от количества восприимчивых.

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta S(t-h)I(t-h) - \lambda S(t), \\ \dot{I} &= \beta S(t-h)I(t-h) - \gamma I(t), \\ \dot{R} &= \gamma I(t) + \lambda S(t).\end{aligned}$$

То же самое можно сделать и в случае «разносчиков болезни».

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta S(t-h)I(t) - \lambda S(t), \\ \dot{I} &= \beta S(t-h)I(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R} &= \gamma I(t) + \lambda S(t).\end{aligned}$$

Наконец, вакцина может являться временной мерой и по истечении какого-то времени терять свое действие. В этом случае в рассмотрение введем еще одно слагаемое, характеризующее «возврат» невосприимчивых ранее людей обратно в класс S . Это приводит к следующей модели, которая обобщает все вышеприведенные:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta S(t-h)I(t-h_0) - \lambda S(t) + \mu S(t-h_r), \\ \dot{I} &= \beta S(t-h)I(t-h_0) - \gamma I(t), \\ \dot{R} &= \gamma I(t) + \lambda S(t) - \mu S(t-h_r).\end{aligned}$$

В общем случае получаем характеристическое уравнение вида

$$D(z) = az^2e^{zh} + bze^{zh} + ce^{zh} + dz + e = 0.$$

К сожалению, теоретических результатов о необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости такого квазиполинома нами не найдено. Единственный путь решения, который пока можно наметить, предполагает очень громоздкие вычисления с использованием функций $D(iy) = F(y) + iG(y)$.

4. Заключение. Предложены пять вариаций SIR -модели с запаздыванием, характеризующим время инкубационного периода инфекции. В первом случае («разносчики болезни») получены неутраченные критерии асимптотической устойчивости. В остальных случаях поставлена задача по аналитическому нахождению условий

устойчивости некоторого обобщенного квазиполинома. Также в представленных моделях крайне актуальной будет задача об оптимальном управлении, которое выражено уровнем вакцинации и имеет целью минимизацию количества больных. Полученные результаты, хоть и не отвечают на все поставленные вопросы, являются адекватным примером использования ОДУ с запаздыванием в моделировании биологических систем. Итоги работы могут быть использованы в медицинских целях, так как все условия выражаются через коэффициенты исходной системы, что позволяет найти ограничения на варьируемые параметры.

Литература

1. Briat C., Verriest E. I. A new delay-SIR Model for pulse vaccination // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul: IFAC, 2008. P. 10295–10300.
2. Connell McCluskey C. Global Stability of an SIR Epidemic Model With Delay and General Nonlinear Incidence // Mathematics Faculty Publications. 2010. No 12. P. 837–850.
3. Xinzhu Meng, Lansun Chen. Global Dynamical Behaviors for an SIR Epidemic Model With Time Delay and Pulse Vaccination // Taiwanese Journal of Mathematics. 2008. No 12. P. 1107–1122.
4. Wanwan Wang, Maoxing Liu, Jinqing Zhao. Analysis of a Delayed SIR Model with Exponential Birth and Saturated Incidence Rate // Applied Mathematics. 2013. No 4. P. 60–67.
5. Kyrychko Y. N., Blyuss K. B. Global properties of a delayed SIR model with temporary immunity and nonlinear incidence rate // Real World Applications. 2005. No 6. P. 495–507.
6. Кирьянен А. И. Устойчивость систем с последействием и их приложения. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1994. 240 с.
7. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 183 с.

УДК 519.688

Смирнов К. В.

Метод оптического потока в задаче обработки изображений

Рекомендовано к публикации профессором Котиной Е. Д.

1. Введение. В данной статье рассмотрен метод, который можно применять для определения оптического потока радионуклидных изображений. Оптический поток — одна из форм представления движения объектов на изображении, при котором каждой точке изображения ставится в соответствие вектор скорости, отвечающий соответствующей точке на объекте. В статье приведено обоснование метода и математическая формализация, показаны примеры использования алгоритмов на тестовых изображениях и некоторые тонкости их работы в частных случаях.

2. Метод оптического потока. Чтобы выделить исходные концепции, которые лежат в основе выбора метода, пригодного для решения задачи распознавания движения объектов на изображении, в нашем случае, необходимо проанализировать радионуклоидные изображения. Как и в общем случае задачи распознавания, можно использовать внешнюю геометрическую похожесть одного и того же объекта на разных изображениях, при этом чем меньше изменений произошло между моментами, запечатленными на них, тем проще выделить один и тот же объект. Поэтому, в самом простом случае, за основу можно принять неизменность цвета объекта в течение времени. Если принять во внимание то, что яркость изображений может быть различна ввиду качества цветопередачи или изменения мощности регистрируемого излучения, можно принимать во внимание неизменность градиента цвета. В более общем случае яркость изображения может быть неравномерной, поэтому стоит рассмотреть постоянство второй производной цвета, выраженное в форме матрицы Гессе, её определителя Гессiana или следа Лапласиана.

Приведенных параметров недостаточно для построения алгоритма, так как они связывают точки одного изображения с точками

Смирнов Константин Валерьевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kvsmirnov@inbox.ru, тел.: +7(960)003-88-22

другого, основываясь только на их цвете, при этом нет упорядоченности, которая бы разрешала неоднозначность: в случае если точке на одном изображении будут соответствовать несколько точек другого. Одно из предположений, которое позволяет частично решить эту проблему, является предположение гладкости потока. Это отвечает неразрывности двигающихся тел, они не могут резко изменять свое строение, но могут менять размеры и форму.

3. Постановка задачи и алгоритм построения оптического потока. Приведем подробное описание семейства методов на примере предположений постоянства яркости и гладкости потока, потом сформулируем результаты для случая замены предположения постоянства яркости на постоянство Гессмана [1]. Будем рассматривать изображения, цвет каждой точки которого кодируется одним числом яркости $I(\mathbf{x})$, где вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, t)$ включает координату и время. Предположение постоянства яркости формулируется в виде задачи минимизации

$$I_z = I(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - I(\mathbf{x}) \rightarrow \min,$$

где вектор $\mathbf{u} = \mathbf{x}'_t = (u_1, u_2, 1)$ отвечает полю скоростей, которое является параметром минимизации. Чтобы это выполнялось для всех точек изображения, будем рассматривать задачу минимизации для интеграла

$$E_1 = \int_{\Omega} [I(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - I(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}.$$

Добавим предположение гладкости потока

$$E = \int_{\Omega} [I(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - I(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2 d\mathbf{x}.$$

Здесь α — коэффициент различия важности для наших двух предположений. Знак ∇ обозначает градиент, далее Δ будет символом лапласиана. Для решения задачи минимизации составим систему уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$I_z \nabla I(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - \alpha \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Приведем это выражение к системе линейных уравнений. Постро-

им итерационную схему. Введем вектор $d\mathbf{u}^k = (u_1^k, u_2^k, 1)^T$.

$$I_z^{k+1} \Delta I(\mathbf{x} + \mathbf{u}^k) - \alpha \begin{pmatrix} \Delta u_1^{k+1} \\ \Delta u_2^{k+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Для решения системы используем обратную итерационную схему. Лапласиан раскроем с помощью его интерполяции через значение потока, полученного на предыдущем шаге [2]. Линейную часть получим из I_z^{k+1} с помощью формулы Тейлора. Тогда

$$I_z^{k+1} \approx I_z^k + I_{x_1}^k du_1^k + I_{x_2}^k du_2^k.$$

При этом $u_1^{k+1} = u_1^k + du_1^k$, $u_2^{k+1} = u_2^k + du_2^k$. В итоге

$$(I_z^k + I_{x_1}^k du_1^k + I_{x_2}^k du_2^k) \nabla I(\mathbf{x} + \mathbf{u}^k) - \alpha \begin{pmatrix} \Delta u_1^{k+1} \\ \Delta u_2^{k+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, получили линейную систему относительно \mathbf{u}^k , решать которую можно различными методами [3], например, с помощью последовательных приближений, по следующей схеме

$$(I_z^k + d\mathbf{u}^{k,l+1} \nabla I^k) \nabla I(\mathbf{x} + \mathbf{u}^{k,l}) - \alpha \begin{pmatrix} \Delta (u_1^k + du_1^{k,l+1}) \\ \Delta (u_2^k + du_2^{k,l+1}) \end{pmatrix} = 0.$$

При использовании предположений постоянства Гессиана и гладкости потока результат будет иметь вид

$$\sum_{i,j=1}^2 \nabla I_{x_i x_j}^k \left[I_{x_i x_j z}^{k,l+1} + (\nabla I_{x_i x_j}^k)^T d\mathbf{u}^{k,l+1} \right] - \alpha \begin{pmatrix} \Delta (u_1^k + du_1^{k,l+1}) \\ \Delta (u_2^k + du_2^{k,l+1}) \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь нижние индексы $x_i x_j$ обозначают частные производные.

4. Примеры применения метода оптического потока. На рис. 1 приведено изображение, которое сдвигается на единичный вектор $(1, 1)$, изображение полутоновое, разные цвета обозначают величину цветовой компоненты. На рис. 2, 3 даны результаты работы приведенных алгоритмов для постоянства цвета и его гессиана.

При этом видно, что правильная картина в обоих случаях достигается только в отдельных областях, при этом их расположение

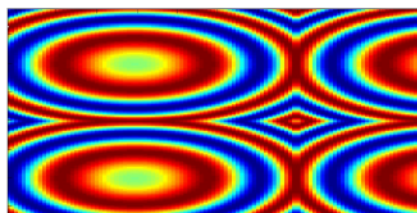


Рис. 1. Пример изображения

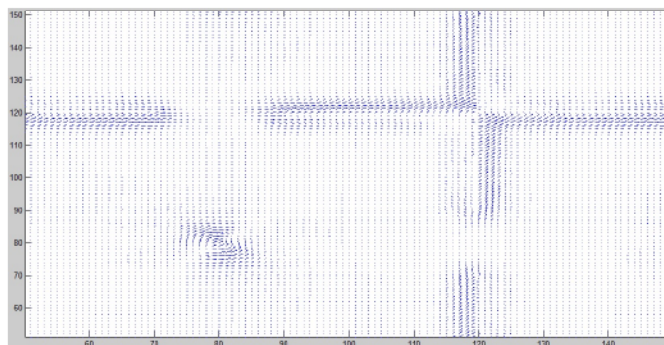


Рис. 2. Поток, рассчитанный из предположения постоянства яркости

зависит от алгоритма. Заметно, что на оба потока выделяют места, отвечающие положениям границ на изображении. Это может являться одним из способов использования данного метода.

При рассмотрении других изображений можно выделить дополнительные нюансы, одним из которых является возможность зависимости результата от начального приближения потока. Это достаточно просто представить на примере шахматной доски, при наличии дискретной информации о её поступательном движении можно определить её скорость с точностью до слагаемого, которое можно прибавлять к скорости любое целое число раз. Это носит название апертурной проблемы.

При данных предположениях возможности определения потока ограничиваются визуальными возможностями восприятия движения в каждой отдельной точке. В приведенном примере это достаточно хорошо заметно: вдоль полос с постоянным цветом нельзя опреде-

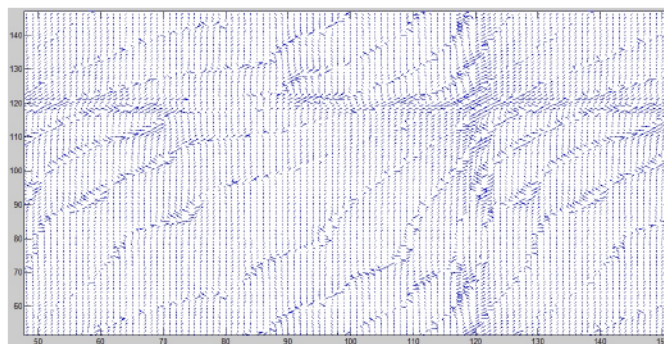


Рис. 3. Поток, рассчитанный из предположения постоянства гессиана яркости

лить движение, так как ничего не известно о движении прямой вдоль самой себя.

5. Заключение. В данной статье рассмотрен метод, который можно применять для определения оптического потока радионуклидных изображений. Этот алгоритм можно использовать в других приложениях, но необходимо учитывать специфику каждого отдельного случая. В целом, чем больше известно о свойствах движения и объектах на начальном этапе, тем точнее будет работать алгоритм оптического потока радионуклидных изображений. Этот алгоритм можно использовать в других приложениях, но необходимо учитывать специфику каждого отдельного случая. В целом, чем больше известно о свойствах движения и объектах на начальном этапе, тем точнее будет работать алгоритм.

Литература

1. Papenberg N. Highly accurate optic flow computation with theoretically justified warping // International Journal of Computer Vision. 2006. Vol. 2, No 67. P. 141–158.
2. Horn B. K. P., Schunck B. G. Determining optical flow // Artificial Intelligence. 1981. No 17. P. 185–203.
3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.

УДК 51-76

Смирнов Н. В.

Оптимальное управление процессом биоочистки сточных вод в аэротенке

Рекомендовано к публикации профессором Кирилловым А. Н.

1. Введение. Для биологической очистки сточных вод используется активный ил, который представляет собой сообщество микроорганизмов, окисляющих растворённый в воде субстрат. В работе рассматривается процесс биоочистки в аэротенке-смесителе с идеальным перемешиванием, у которого подвод сточной воды и активного ила осуществляется равномерно вдоль его одной стороны, а отвод – вдоль другой стороны. Задача нахождения оптимального управления процессом биоочистки решается на основе принципа максимума Понтрягина.

2. Математическая модель процесса биоочистки и её инвариантное множество. Рассматриваемый аэротенк-смеситель представляет собой коридор с определённым объёмом, на вход которому подаётся активный ил и субстраты одного или разных типов, характеризующиеся одним показателем. Для описания динамики концентраций субстрата $S = S(t)$ и активного ила $X = X(t)$ предлагается система

$$\dot{S} = Q(S^{in} - S) - \frac{\gamma}{Y}SuX, \quad (1)$$

$$\dot{X} = Q(X^{in} - X) + \gamma SuX, \quad (2)$$

где константа $Q = 1/T$; T – время прохождения иловой смесью аэротенка; S^{in} – концентрация субстрата в сточной воде; X^{in} – концентрация активного ила в иловой смеси, подаваемой в аэротенк; u – концентрация кислорода в аэротенке; γ – удельная максимальная скорость роста микроорганизмов в расчёте на один грамм субстрата и один грамм кислорода; Y – коэффициент перехода массы

Смирнов Николай Васильевич – аспирант, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН; e-mail: fresh.87@mail.ru, тел.: +7(906)207-71-04

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта по Программе №3 фундаментальных исследований ОМН РАН

субстрата в биомассу микроорганизмов. Ограниченность значений переменных системы (1), (2) при таком управлении следует из нижеприведенной теоремы 1.

Теорема 1. Для $\forall t \geq 0$ значения концентраций $S(t)$, $X(t)$ системы (1), (2) принадлежат ограниченному инвариантному множеству.

Доказательство. Иловая смесь на входе в аэротенк может содержать небольшую концентрацию субстрата S_{il} . Начальные концентрации субстрата и активного ила в аэротенке $S(0) = S_0$ и $X(0) = X_0$, соответственно, находятся следующим образом:

$$S_0 = \frac{S^{in}V_{cv} + S_{il}V_{il}}{V_{cv} + V_{il}} \leq S^{in},$$

$$X_0 = \frac{X^{in}V_{il}}{V_{cv} + V_{il}} \leq X^{in},$$

где V_{cv} , V_{il} — расходы сточной воды и активного ила, соответственно. На рис. 1 заштриховано множество допустимых значений S_0 и X_0 .

При $u = 0$ система (1), (2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{S} &= Q(S^{in} - S), \\ \dot{X} &= Q(X^{in} - X), \end{aligned}$$

а изменение концентраций показано на рис. 2, на котором точка D — положение равновесия. Если $u > 0$, то, умножив (1) на Y и прибавив к (2), получим уравнение, решение которого представим в виде

$$YS + X = (YS_0 + X_0 - YS^{in} - X^{in})e^{-Qt} + YS^{in} + X^{in}.$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$ фазовые траектории системы (1), (2) будут стремиться к прямой

$$l_1 = \{(S, X) : YS + X = YS^{in} + X^{in}\}.$$

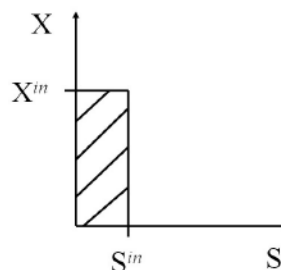


Рис. 1. Множество допустимых значений начальных концентраций

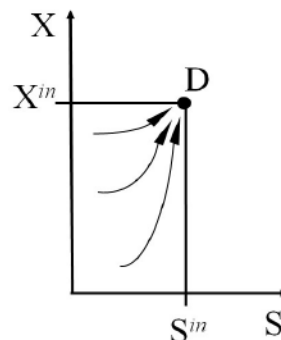


Рис. 2. Динамика концентраций системы (1), (2) при $u = 0$

Концентрация — величина неотрицательная, этому условию удовлетворяет только одно положение равновесия системы (1), (2):

$$(S_1, X_1) = \left(\frac{-b_p + \sqrt{b_p^2 - 4a_p c_p}}{2a_p}, \frac{S^{in}}{1 + \frac{-b_p + \sqrt{b_p^2 - 4a_p c_p}}{2Q}} \right),$$

где $a_p = \frac{\gamma u}{Y}$, $b_p = -\left(\frac{\gamma X^{in} u}{Y} - Q + \gamma S^{in} u\right)$, $c_p = -QX^{in}$.

Из уравнения (1) следует, что $S(t) \leq S^{in}$ для $\forall t \geq 0$. Тогда, очевидно, полученное положение равновесия (S_1, X_1) находится на участке прямой l_1 , который выделен маленькими кругами на рис. 3. Этот участок является интегральным притягивающим множеством. Выше было отмечено, что управлению $u = 0$ соответствует точка покоя D . Положения равновесия, соответствующие $u > 0$, находятся на прямой l_1 , левее точки D , правее оси ординат. Крайне левая точка (круг на рис. 3) соответствует положению равновесия при максимально большом, допустимом значении управления \bar{u} . Следовательно, в момент времени T завершения процесса биоочистки концентрация активного ила $X(T) \in [0, X^{in} + YS^{in}]$. Таким образом, для $\forall t \geq 0$ значения переменных $S(t)$ и $X(t)$ принадлежат четырёхугольнику $OADC$, который является инвариантным множеством системы (1), (2).

3. Нахождение оптимального управления. При попадании в аэротенк микроорганизмы некоторое время адаптируются к среде и размножаются сравнительно медленно. Если в аэротенке поддерживать $u = 0$, то начинается брожение активного ила и другие процессы, ухудшающие качество воды. В аэротенке можно поддерживать малую концентрацию кислорода u , которая обеспечивает настолько малую скорость окисления субстрата, что ей можно пренебречь. В таком случае динамика концентраций системы (1), (2) сохранится такой, какая описана в разделе 2.

Введём кусочно-постоянное управление концентрацией кислорода $u = u(t) \in U = [\underline{u}, \bar{u}]$. Увеличение концентрации растворённого кислорода в воде приводит к увеличению скорости окисления субстрата активным илом, однако требует больших финансовых затрат.

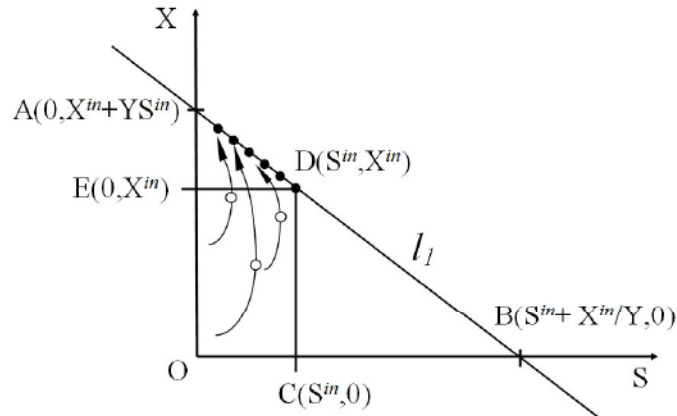


Рис. 3. Фазовый портрет системы (1), (2), где \bullet — положение равновесия, \circ — точка переключения управления

Таким образом, оптимальным является управление, которое обеспечивает окисление субстрата до концентрации, которая меньше и наиболее близка к значению нормативно допустимого сброса (НДС) данного типа субстрата.

Поставим задачу оптимального управления

$$\int_0^T u dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

При этом необходимо выполнение ограничений: $S(0) = S_0$, $X(0) = X_0$, $S(T) \leq S^*$, $X(T) \leq X^*$, где S_0 и X_0 определены ранее, S^* — значение НДС субстрата, X^* — концентрация активного ила на выходе из аэротенка, при этом $X^* \in [0, YS^{in} + X^{in}]$.

В работе [1] на основе принципа максимума Понтрягина предлагается правило решения задач оптимального управления, которое находится в полном соответствии с принципом Лагранжа снятия ограничений. Оптимальному управлению соответствует выполнение приведённых ниже, необходимых условий экстремума (4)–(11). Пусть символы « $'$ » и « $\hat{}$ », соответственно, означают транспонирова-

ние и оптимальность значения переменной или выражения под ними. Введём обозначения: $z = z(t) = (z_1(t) \ z_2(t))' = (S \ X)'$ — вектор переменных; $\varphi_1(z, u)$ и $\varphi_2(z, u)$ — правые части уравнений (1) и (2), соответственно; λ_i ($i = 0, \dots, 4$) и $p(t) = (p_1(t) \ p_2(t))'$ — множители Лагранжа. Тогда функция Лагранжа для данной задачи примет вид

$$\tilde{L} = \int_0^T \left(\lambda_0 u + p_1(\dot{S} - \varphi_1) + p_2(\dot{X} - \varphi_2) \right) dt + \lambda_1(S(0) - S_0) + \lambda_2(X(0) - X_0) + \lambda_3(S(T) - S^*) + \lambda_4(X(T) - X^*).$$

Условие стационарности по z — уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 u + p_1(\dot{S} - \varphi_1) + p_2(\dot{X} - \varphi_2)$:

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(Q + \frac{\gamma}{Y}Xu) - p_2\gamma Xu \\ p_1\frac{\gamma}{Y}Su + p_2(Q - \gamma Su) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Условия трансверсальности по z :

$$p(0) = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad p(T) = \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_3 \\ -\lambda_4 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Условие оптимальности по u — принцип минимума в лагранжевой форме:

$$\min_{u \in U} \left(\lambda_0 u - \sum_{j=1}^2 p_j(t) \varphi_j(\hat{z}, u) \right) = \min_{u \in U} \left(u \left(\lambda_0 + p_1 \frac{\gamma}{Y} SX - p_2 \gamma SX \right) \right).$$

Тогда, если $g = \lambda_0 + p_1 \frac{\gamma}{Y} SX - p_2 \gamma SX$, то оптимальное управление определяется как

$$\hat{u} = \begin{cases} \bar{u}, & g < 0, \\ \underline{u}, & g \geq 0, \end{cases}. \quad (6)$$

Условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1(S(0) - S_0) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_2(X(0) - X_0) = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_3(S(T) - S^*) = 0, \quad (9)$$

$$\lambda_4(X(T) - X^*) = 0, \quad (10)$$

Условие неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, 4. \quad (11)$$

В силу (11) бывает удобно рассмотреть два случая: $\lambda_0 = 0$ или $\lambda_0 = c$, где константа $c > 0$. Для сохранения u в лагранжиане необходимо выполнение условия $\lambda_0 \neq 0$, в таком случае в [1] предлагается использовать $\lambda_0 = 1$. Функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ задаются уравнениями (4) с граничными условиями (5).

Условия (7) и (8) выполняются для любых значений λ_1 и λ_2 , так как $S(0) = S_0$ и $X(0) = X_0$. Для выполнения (9) при любых значениях λ_3 в качестве X^* будем использовать значение $X(T)$, что является приемлемым в силу теоремы 1. Возьмем в качестве λ_1 любое положительное число, например, $\lambda_1 = 1$. Тогда λ_2 методом дихотомии находится так, чтобы с допустимой точностью выполнялось условие $S(T) - S^* = 0$, что обеспечивает свободу выбора значения λ_3 . Для этого решается система (1), (2), (4), в которой момент переключения управления τ находится с помощью (6).

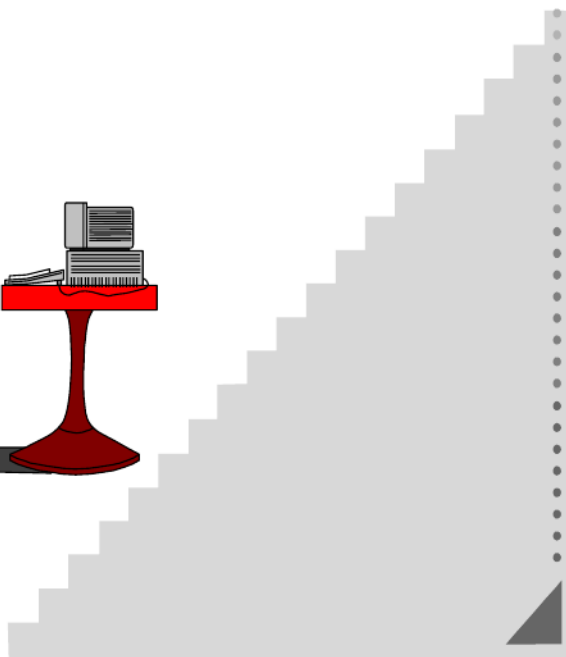
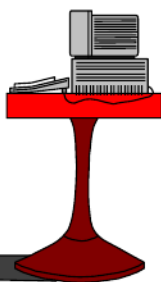
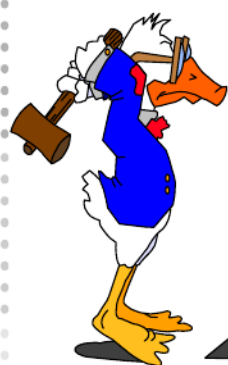
Для системы (1), (2) управление, обеспечивающее выполнение необходимых условий экстремума (4)–(11), определяется единственным образом. Так как существование оптимального управления следует из физического смысла задачи, то найденное управление будет оптимальным.

4. Выводы. Предложена математическая модель процесса биочистки сточных вод, найдено её инвариантное множество. Предложен подход к нахождению оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина. В результате применения этого подхода определяется момент времени, начиная с которого в аэротенке следует поддерживать наибольшую допустимую концентрацию кислорода.

Литература

1. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. М.: Наука, 1984. 288 с.

4. Информационные
и компьютерные
технологии



УДК 004.4

Балян С. Г., Раловец Р. В., Абраамян С. А., Южанин Н. В.

Функциональности системы управления виртуальными кластерами FishDirector и проверка ее эффективности

Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.

1. Введение. Организация работы суперкомпьютерных центров требует рационального использования находящихся в распоряжении компьютерных ресурсов для наиболее эффективного удовлетворения потребностей пользователей этих ресурсов. Такая эффективность подразумевает оперативное предоставление и изменение требуемых вычислительных мощностей, программного обеспечения и сервисов в нужном объеме, в нужное время, в удобной для пользователя форме. Поэтому установившуюся в России практику выделения фиксированных разделов (партиций) на вычислительных кластерах следует считать устаревшей и неэффективной. Более гибким и удобным, как с точки зрения использования разнородных ресурсов суперкомпьютерного центра, так и управления этими ресурсами, следует считать использование виртуальных машин (ВМ), как механизма доступа [1]. Еще более эффективным инструментом персональной работы пользователя является оперативная работа с большим числом персональных ВМ с целью создания на их основе виртуального высокопроизводительного компьютера [2]. Простейшим объектом, формируемым на основе нескольких ВМ, установленных на распределенных серверах одного или нескольких физических кластеров, является виртуальный кластер, который обладает определенными преимуществами

Балян Сероб Гургенович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: serob.balyan@gmail.com, тел.: +7(952)380-13-97

Раловец Роман Владимирович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: roman@ralovets.ru, тел.: +7(931)271-69-97

Абраамян Сурен Арменович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: surgo7@live.com, тел.: +7(964)382-88-50

Южанин Николай Владимирович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: yuzhanin@cc.spbu.ru, тел.: +7(911)152-35-93

Исследования проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ», а также частично поддержаны грантами РФФИ № 13-07-00747 и СПбГУ 9.38.674.2013, 0.37.155.2014

ществами перед физическими кластерами в плане гибкости и управляемости. Однако оперативная работа пользователя с виртуальными кластерами сталкивается с отсутствием в настоящее время удобного программного инструментария. При инициализации традиционной ВМ нужно вручную задавать конфигурационную информацию или указывать источники конфигурации. При наличии в сети большого количества ВМ неэффективная конфигурация всегда вызывает проблемы, например, пере- или недогруженность ресурсов [3]. Для этого были созданы различные системы, предназначенные для автоматизации создания виртуальных кластеров, управления ими и распределения ресурсов. Однако чаще всего это проприетарные решения. Для работы суперкомпьютерных центров научно-исследовательской ориентации, каким является Ресурсный центр «Вычислительный центр СПбГУ» (РЦ ВЦ), более привлекательными являются продукты, построенные по принципу Open Source. В работе приведены результаты исследования функциональностей продукта FishDirector. Он предоставляет гибкие вычислительные возможности в облаке и построен на основе открытого ПО для построения частных и публичных облаков – OpenStack (<https://www.openstack.org/>). Приведены результаты экспериментов использования ПО FishDirector на различном компьютерном оборудовании, сделаны выводы о возможностях его применения.

2. Функциональности системы FishDirector. Независимое от платформы и гипервизора программное обеспечение FishDirector спроектировано так, что может масштабироваться от нескольких физических серверов до ста тысяч на собственном оборудовании и в облаке. Программное обеспечение позволяет пользователю создавать кластеры и управлять ими с помощью веб-интерфейса или скриптов (с использованием командной строки). Механизмы интеллектуальных решений ПО FishDirector обеспечивают автоматизированное переключение питания, которое снижает общее энергопотребление и, как следствие, снижает количество вредных выбросов в атмосферу. Соблюдается принцип «зеленых вычислений»: экономия затрат на питание компонентов одной отдельно взятой рабочей станции.

При запуске HPC (High Performance Computing — высокопроизводительные вычисления) задач на кластере возможны конфликты между большими и малыми задачами в вычислительной сре-

де. Чтобы избежать таких конфликтов, менеджер операций системы FishDirector предопределяет политику в зависимости от того, насколько большие и малые НРС задачи должны быть запущены, и добавляет ограничения к системе; задачи помещаются в ресурсное хранилище, освобождая остальные ресурсы для запуска других задач; затем ресурсы возвращаются в общее хранилище как только какая-то задача будет завершена. Кроме того, пользователи с НРС задачами, требующими длительных расчетов, выиграют от отсутствия необходимости создавать снимки задач для контрольных точек перезапуска [4]. Архитектура системы показана на рис. 1.

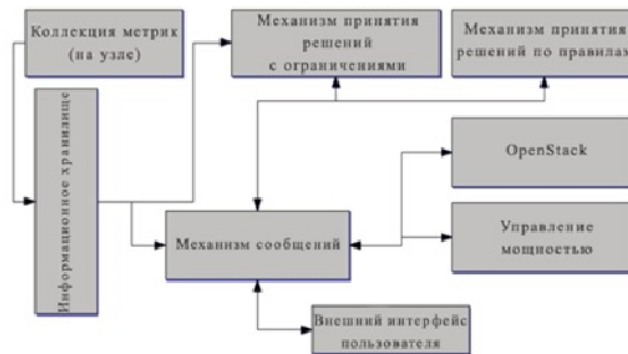


Рис. 1. Архитектура системы FishDirector

FishDirector контролирует стабильность и производительность НРС-узлов в системе. Если один из узлов становится неустойчивым, FishDirector может перевести виртуальную машину на другой узел без потери данных и без необходимости отката к контрольной точке перезапуска.

Также FishDirector поддерживает множество систем виртуализации и ведет детальный мониторинг рабочей станции. Схожую функцию исполняет система MOSIX (Multicomputer Operating System — <http://www.mosix.org/>). Однако, в отличие от FishDirector, он позволяет представить кластеры и сети операционных систем на ядре Linux, как одну систему. Mosix объединяет вычислительные мощности, но имеет более слабые алгоритмы балансировки нагрузки и переноса процессов. Возможности мониторинга, пакетного управления

также намного хуже, чем у FishDirector. Уровень подготовки администратора Mosix должен быть на порядок выше, так как данная система намного сложнее. FishDirector является продуктом, построенным на широко распространенной сегодня технологии OpenStack, а Mosix — расширение ядра Linux. Таким образом, FishDirector обладает большими возможностями для управления виртуальными машинами, а Mosix — для представления виртуальных машин в виде одной операционной системы.

3. Проверка эффективности. Проведены вычислительные тесты на отдельных виртуальных и физических машинах. Тесты представляли собой нахождение обратной матрицы заданного размера (100 × 100), (500 × 500), (1000 × 1000) и последующую проверку правильности нахождения. Для матрицы каждого размера тест на каждой машине запускался двадцать раз: десять — с использованием жесткого диска, десять — без использования диска. Как известно, паравиртуализация эффективнее аппаратной виртуализации с точки зрения производительности [5], и виртуальные вычислительные узлы должны быть созданы с помощью технологии паравиртуализации. Тем не менее, не каждая операционная система может быть паравиртуализирована, и в таком случае должна быть использована физическая машина с поддержкой аппаратной виртуализации. Поэтому тесты запускались на машинах и с поддержкой аппаратной виртуализации, и без ее поддержки, чтобы сравнить, как виртуальные машины, созданные с помощью FishDirector, ведут себя в обоих случаях.

	Память	Размер			
		Машина	100x100	500x500	1000x1000
Без поддержки аппаратной виртуализации	Диск	Виртуальная	0,18	4,8	20,16
		Физическая	0,06	1,02	3,7
	ОЗУ	Виртуальная	0,1	2,1	10,5
		Физическая	0,025	0,32	1,7
С поддержкой аппаратной виртуализации	Диск	Виртуальная	0,11	0,92	5,11
		Физическая	0,083	0,7	3,93
	ОЗУ	Виртуальная	0,09	0,35	1,25
		Физическая	0,067	0,3	1,07

Рис. 2. Средние значения результатов тестов

Средние значения всех проведенных тестов (в секундах) показаны на рис. 2. Графики, построенные на основе этой таблицы, при применении машины без поддержки аппаратной виртуализации с

использованием жесткого диска приведены на рис. 3а, а с использованием только оперативной памяти — на рис. 3б.

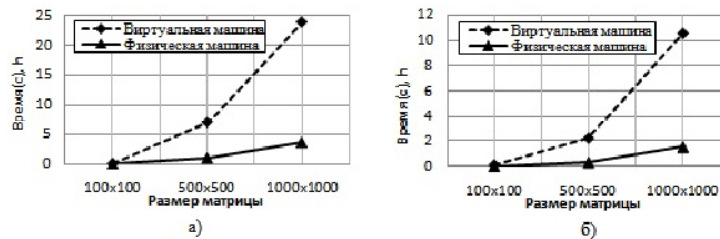


Рис. 3. Графики производительности без аппаратной виртуализации

Как видно, в обоих случаях производительность виртуальной машины слишком мала по сравнению с производительностью физической машины (при размере матрицы (500×500) разница около четырех раз, при (1000×1000) — около шести раз). Результат меняется, когда тесты проводятся на машине с поддержкой аппаратной виртуализации. На рис. 4 показаны графики результатов тестов на таких машинах с применением жесткого диска (рис. 4а) и без него (рис. 4б). В данном случае разница невелика, и производительность виртуальной машины почти равна производительности физической (при размере матрицы (500×500) и (1000×1000) разница между ними составляет примерно 1,3 раза).

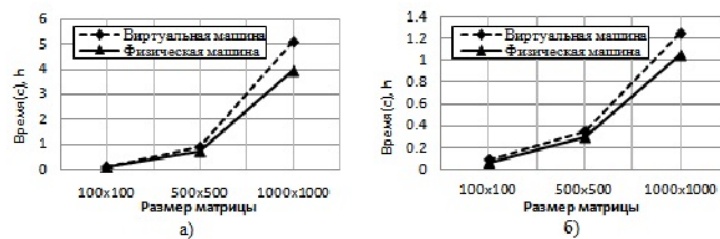


Рис. 4. Графики производительности с аппаратной виртуализацией

Кроме временных результатов, тесты показали, что вычисления, проведенные на виртуальных машинах, созданных с помощью ПО FishDirector, математически корректны (обратные мат-

рицы были рассчитаны правильно).

4. Заключение. FishDirector — программное обеспечение, основанное на технологии OpenStack, которое позволяет вне зависимости от платформы и гипервизора работать с виртуальными кластерами. Главным достоинством продукта является возможность автоматического распределения ресурсов, позволяющая пользователю самостоятельно конфигурировать кластеры, а также существенно облегчающая балансировку нагрузки и экономии электроэнергии.

Проделанные тесты показали, что созданные виртуальные машины работают корректно, как на физических машинах с поддержкой аппаратной виртуализации, так и на машинах без поддержки аппаратной виртуализации. Однако разница в производительности между этими типами виртуальных машин существенна.

Литература

1. Bogdanov A. V., Degtyarev A. B., Gaiduchok V. Yu., Gankevich I. G., Zolotarev V. I. Virtual workspace as basis of supercomputer center // Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education. Proceedings of 5th International Conference – Dubna. 2012. P. 60–65
2. Gankevich I., Gaiduchok V., Gushchanskiy D., Tipikin Yu., Korkhov V., Degtyarev A., Bogdanov A., Zolotarev V. Virtual private supercomputer: Design and evaluation // Ninth International Conference on Computer Science and Information Technologies. Revised Selected Papers. IEEE Conference Publication. 2013. P. 1–6.
3. Хуанг К., Донгарра Д., Фокс Д. Облачные вычисления: Виртуальные кластеры [Электронный ресурс] // TechNet Magazine: электрон. научн. журн. 2012. URL:<http://technet.microsoft.com/ru-ru/magazine/jj574501.aspx> (дата обращения: 16.03.14).
4. V-Maestro Virtual Machine SmartWare [Электронный ресурс]: URL:<http://www.cloudfabriq.com/resources/v-maestro-collateral> (дата обращения: 16.03.14).
5. Barham P., et al. Xen and the art of virtualization // ACM SIGOPS Operating Systems Review 37.5. 2003. P. 164–177.

УДК 519.6

Бобылева В. В.

Синтез астатического МРС-регулятора для системы магнитной левитации

Рекомендовано к публикации доцентом Сотниковой М. В.

1. Введение. В работе рассматривается задача синтеза линейного астатического регулятора для устройства магнитной левитации. Целью управления является стабилизация положения шарика на заданном расстоянии от электромагнита. Особенности задачи являются неустойчивость вертикального положения шарика и неточное математическое описание сил магнитного поля, что требует применения астатических стабилизирующих законов управления.

В качестве базового подхода применяется управление с прогнозирующими моделями (Model Predictive Control, МРС). Выполняется моделирование процессов управления для МРС-регулятора с нелинейной математической моделью системы магнитной левитации. Полученные результаты сравниваются с аналогичными процессами для PID-регулятора. Разработанные законы управления реализованы и протестированы для конкретного устройства магнитной левитации Quanser MAGLEV.

2. Математическая модель магнитной левитации. Математическая модель магнитной левитации представляется системой нелинейных дифференциальных уравнений [1]

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2 = g - \frac{1}{2} \frac{K_m \bar{x}_3^2}{M \bar{x}_1^2}, \quad \dot{\bar{x}}_3 = -\frac{R}{L} \bar{x}_3 + \frac{1}{L} \bar{u}, \quad (1)$$

где $\bar{x}_1 = x_b$ — расстояние от электромагнита до шарика, $\bar{x}_2 = \dot{x}_b$ — скорость шарика, $\bar{x}_3 = I$ — ток электрической цепи, $\bar{u} = V$ — напряжение, g — гравитационная постоянная, R — сопротивление катушки, L — её индуктивность, M — масса шарика и K_m — магнитная постоянная, которая определяет воздействие магнитного поля. Вывод уравнений (1) основан на втором законе Ньютона и законах

Бобылева Валентина Викторовна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: piterski_90@mail.ru, тел.: +7(911)715-02-82

электрических цепей [1]. Схема системы магнитной левитации приведена на рис. 1. Здесь F_g и F_m — силы тяжести и магнитного поля соответственно.

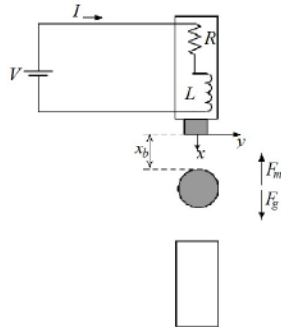


Рис. 1. Схема системы магнитной левитации

Отметим, что описание воздействия магнитного поля в модели (1) является приближенным, так как параметр K_m изменяет свое значение в зависимости от положения шарика x_b . Получим экспериментально эту зависимость. Для этого зафиксируем некоторое положение равновесия $(x_{b0}, 0, I_0)$ и, приравняв к нулю правые части уравнений (1), получим $K_m = K_m(x_{b0}, I_0) = \frac{I_0^2}{2Mg} x_{b0}^2$. Далее, проделаем этот же шаг для других положений $(x_{bi}, 0, I_i)$ и построим эмпирическую зависимость величины K_m от x_b . Для рассматриваемого устройства эта зависимость имеет вид

$$K_m(x_b) = k_1 x_b^2 + k_2 x_b + k_3, \quad (2)$$

где $k_1 = -0,198$, $k_2 = 0,018$, $k_3 = 1,03 \cdot 10^{-5}$.

В рассматриваемой системе магнитной левитации измеряются две величины: сила тока I в контуре и положение шарика x_b :

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1, \quad \bar{y}_2 = \bar{x}_3. \quad (3)$$

Выполним линеаризацию уравнений (1)–(3). Для этого рассмотрим некоторое положение равновесия $(x_{b0}, 0, I_0)$, соответствующее напряжению \bar{u}_0 . Введем переменные, определяющие отклонение от положения равновесия: $x_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_{10}$, $x_2 = \bar{x}_2$, $x_3 = \bar{x}_3 - \bar{x}_{30}$, $y_1 = \bar{y}_1 - \bar{y}_{10}$, $y_2 = \bar{y}_2 - \bar{y}_{20}$ и $u = \bar{u} - \bar{u}_0$. Тогда система в отклонениях примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix} u, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где $a_{21} = \frac{g}{K_m(x_{b0})}(k_2 + \frac{2k_3}{x_{b0}})$, $a_{23} = -\frac{2g}{I_0}$, $a_{33} = -\frac{R}{L}$, $b_0 = \frac{1}{L}$. Система (4) является неустойчивой по вертикальному положению шарика. Так, для рассматриваемого устройства собственные числа матрицы этой системы в случае $x_{b0} = 0,009$ равны $s_1 = 46,7$, $s_2 = -46,7$, $s_3 = -26,7$.

Введем следующие ограничения на управляющий сигнал:

$$|\bar{u}| \leq 25, \quad |\dot{u}| \leq 300. \quad (5)$$

Приведенная модель (1)–(5) будет использоваться для синтеза астатического МРС-регулятора.

3. Постановка задачи. Целью управления является стабилизация положения шарика в заданной точке. Качество процессов управления будем характеризовать при помощи функционала

$$J = J(\bar{u}) = \int_0^\infty ((x_b - x_{b0})^2 + \lambda \bar{u}^2) dt. \quad (6)$$

Задача стабилизации состоит в синтезе закона управления с обратной связью, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы и минимизирующего функционал (6) на движениях системы (1)–(3) с учетом ограничений (5).

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться LQR-регулятором, но он не является астатическим и не позволяет в явном виде учитывать ограничения. Другим подходом является PID-регулятор, который также не позволяет оперировать ограничениями и использовать функционал качества. Поэтому в качестве базового принят МРС-подход, который позволяет учесть ограничения, минимизировать функционал и обеспечить астатизм системы.

4. Синтез астатического МРС-регулятора. Одним из современных подходов к анализу и синтезу систем управления является теория управления динамическими объектами с использованием прогнозирующих моделей — Model Predictive Control (МРС). В соответствии с вариантом МРС-подхода [2], принятого для обеспечения астатизма, рассмотрим прогнозирующую модель, представленную следующей системой линейных разностных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{i+1} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{p}_i + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}_i, \quad i = k + j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{z}_i &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{p}_i, \end{aligned} \quad (7)$$

для которой вектор состояния и начальные условия равны

$$\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x}_i \\ \mathbf{C}\mathbf{x}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_k = \hat{\mathbf{p}}_k = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k \end{pmatrix},$$

где $\hat{\mathbf{x}}_k$ — текущее состояние объекта на k -ом такте. Матрицы $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ являются постоянными и вычисляются на основе матриц линейных разностных уравнений, представляющих динамику объекта [2]. Входной переменной для модели (7) служит вектор $\mathbf{v}_i = \Delta\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}$, а выходной — вектор $\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i$.

Качество управления прогнозирующей моделью на горизонте прогноза будем оценивать значениями квадратичного функционала

$$J_k = J_k(\bar{\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{v}}), \bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{r}})^T \mathbf{R}(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{r}}) + \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}\bar{\mathbf{v}}, \quad (8)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{Q} — заданные положительно-определенные весовые матрицы, P — горизонт прогноза, $\bar{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_{k+1} \ \mathbf{z}_{k+2} \ \dots \ \mathbf{z}_{k+P})^T$, $\bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_k \ \mathbf{v}_{k+1} \ \dots \ \mathbf{v}_{k+P-1})^T$, $\bar{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_{k+1} \ \mathbf{r}_{k+2} \ \dots \ \mathbf{r}_{k+P})^T$ — вспомогательные векторы. Между переменными $\bar{\mathbf{z}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ существует линейная связь [2]

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{L}\mathbf{p}_k + \mathbf{M}\bar{\mathbf{v}}, \quad (9)$$

где \mathbf{L} и \mathbf{M} — постоянные матрицы, которые вычисляются на основе матриц системы (7). С учетом (9) функционал (8) можно представить в виде

$$J_k = J_k(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{H}\bar{\mathbf{v}} + 2\mathbf{f}^T \bar{\mathbf{v}} + g,$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{M}^T \mathbf{R} \mathbf{M} + \mathbf{Q}$, $\mathbf{f} = \mathbf{M}^T \mathbf{R} \mathbf{L} \mathbf{p}_k - \mathbf{M}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{r}}$, $g = \text{const}$.

Поставим задачу оптимизации движения прогнозирующей модели на горизонте прогноза P с учетом имеющихся ограничений

$$J_k = J_k(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{H}\bar{\mathbf{v}} + 2\mathbf{f}^T \bar{\mathbf{v}} + g \rightarrow \min_{\bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{V} \subset \mathbf{E}^{mP}}, \quad (10)$$

где \mathbf{V} — допустимое множество, задаваемое неравенствами

$$\mathbf{V} = \{\bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{E}^{mP} : \mathbf{A}_\nu \bar{\mathbf{v}} \leq \mathbf{A}_{lim} + \mathbf{A}_p \mathbf{p}_k + \mathbf{A}_u \mathbf{u}_{k-1}\}.$$

Решение этой задачи определяет оптимальную программную последовательность векторов $\mathbf{v}_i^* = \Delta\mathbf{u}_i^*$, $i = k, k+1, \dots, k+P-1$. При этом по формуле $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \Delta\mathbf{u}_k^*$ определяется управление на текущем шаге. Задача минимизации (10) сводится к задаче выпуклого квадратичного программирования. В соответствии со стратегией

МРС-подхода на следующем шаге решение оптимизационной задачи (10) повторяется заново.

5. Моделирование астатических регуляторов. Сравним работу МРС и PID-регуляторов. Основные параметры устройства магнитной левитации Quanser Maglev, для которого выполняется моделирование, имеют следующие значения: $M = 0,0680$ кг, $g = 9,81$ м/с², $R = 11$ Ом, $L = 0,4125$ Г. Выберем заданное положение шарика $x_{b0} = 0,009$ м. Введем функционал качества

$$J = J(\bar{u}) = \int_0^{\infty} (5000(x_b - x_{b0})^2 + 0,01\bar{u}^2)dt.$$

Примем значение горизонта прогноза $P = 100$ с шагом дискретизации $\Delta t = 0,002$ с. Управление, подаваемое на объект, является суммой постоянного слагаемого $u_0 = \sqrt{\frac{2Mg}{K_m}}Rx_{b0}$, уравновешивающего силу тяжести, и астатического линейного регулятора. Коэффициенты PID-регулятора настраиваются с помощью NCD-блока. В результате настройки получен следующий алгоритм управления с PID-регулятором

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -66,8(I - I_{opt}^*) - 23,3 \int (I - I_{opt}^*)dt, \quad I_{opt}^* = I_0 + I_{opt}, \\ I_{opt} &= 449,9(x_b - x_{b0}) + 8,5\dot{x}_b + 2978,4 \int (x_b - x_{b0})dt, \end{aligned}$$

где $I_0 = \sqrt{\frac{2gM}{K_m}}x_{b0}$ — значение тока, компенсирующее силу тяжести, I_{opt} — стабилизирующее значение тока, вырабатываемое астатическим регулятором. На рис. 2 показано сравнение переходных процессов по положению шарика для МРС и PID-регуляторов. Как видно из рисунка, для МРС-регулятор отсутствует перерегулирование.

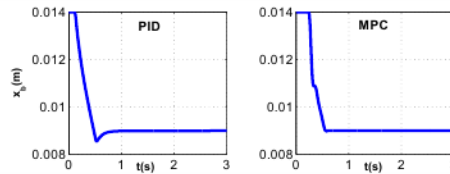


Рис. 2. Переходные процессы для астатических регуляторов

6. Реализация алгоритмов управления на устройстве левитации. Для управления в режиме реального времени исполь-

зуется программное обеспечение, включающее в себя подсистему Simulink и подсистему Real-Time Workshop среды MATLAB, также включена специализированная программа WinCon фирмы Quanser, обеспечивающая взаимодействие устройства со средой MATLAB. В режиме реального времени возникают сложности с реализацией MPC-регулятора, так как на каждом шаге необходимо решать задачу квадратичного программирования. Поэтому на устройстве был применен астатический MPC-регулятор без ограничений. Использовался шаг дискретизации системы $\Delta t = 0,001$ с. Результаты работы алгоритмов показаны на рис. 3. Для оценки вектора состояния используется дифференцирующий фильтр.

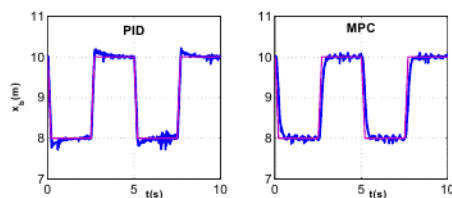


Рис. 3. Переходные процессы для астатических регуляторов на устройстве

7. Заключение. Выполнен синтез астатических MPC и PID-регуляторов. Проведено сравнение результатов обоих методов при моделировании системы и реализации на устройстве MAGLEV. Показано, что MPC-регулятор обеспечивает лучшее качество процессов по сравнению с PID-регулятором.

Литература

1. Сотникова М. В. Идентификация линейной модели магнитной левитации в среде MATLAB // Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB: Труды 4-й научной конференции / сост. И. С. Пономарева. Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2009. С. 507–522.
2. Веремей Е. И., Еремеев В. В., Сотникова М. В. Учебное пособие «Model Predictive Control Toolbox» [Электронный ресурс]: URL:<http://www.matlab.exponenta.ru/modelpredict> (дата обращения: 02.04.2014)

УДК 51.37

Ганкевич И. Г., Дегтярев А. Б.

Метод распределения нагрузки на многопроцессорную систему

Введение. Наиболее разработанным и широко применяемым подходом к распределению нагрузки на вычислительную систему является разбиение данных на однородные части (или разбиение задачи на однородные подзадачи) с последующим распределением их между отдельными ядрами вычислительного устройства или узлами кластера, однако такой подход не всегда работает эффективно. Во-первых, часто общее количество частей, на которые разбиваются входные данные, диктуется не архитектурой и конфигурацией вычислительной системы, а самой задачей и присущими ей ограничениями, и такое распределение не всегда эффективно с точки зрения вычислительной машины: количество частей оказывается либо слишком большим по сравнению с количеством процессоров, работающих параллельно, что ведет к увеличению накладных расходов на обмен данными, либо слишком маленьким, что не позволяет эффективно использовать все доступные вычислительные ядра. Во-вторых, сам характер деления входных данных на части может стать причиной появления неоднородности в размерах различных частей и дисбаланса нагрузки на отдельные вычислительные ядра системы. В-третьих, поскольку в вычислительной системе процессор — не единственное устройство, справляющееся с нагрузкой, и существуют другие компоненты, участвующие в вычислениях (такие как векторные ускорители, видеокарты и устройства хранения), то окончательная производительность системы и время решения конкретной задачи зависят от производительности не только процессоров, но и всех устройств, принимающих участие в вычислениях. Таким образом, учет только процессоров при распределении нагрузки на вычислительную систему является лишь первым приближением к решению задачи о достижении высокой производительности, и учет всех компонентов системы позволит улучшить этот результат.

Ганкевич Иван Геннадьевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: igankevich@cc.spbu.ru, тел.: +7(921)422-23-21

Дегтярев Александр Борисович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: deg@csa.ru, тел.: +7(911)913-48-99

Алгоритм распределения нагрузки. Для учета производительности всех компонентов вычислительной системы и неоднородности различных частей, на которые делятся входные и выходные данные, распределение нагрузки можно провести в два этапа. На первом этапе часть входных данных (или подзадача) направляется на соответствующее устройство, на которое предполагается произвести нагрузку, например, видеокарту или процессор; если же предполагается произвести нагрузку на устройство хранения, то подзадача направляется на процессор или процессорное ядро, специально выделенное под такой тип нагрузки. На втором этапе, когда тип устройства уже выбран, подзадача распределяется на одно из доступных в системе устройств данного типа. Несмотря на то, что на этом этапе подсистема в большинстве случаев является однородной (состоящей из устройств одного типа), для учета неоднородных подзадач необходим алгоритм распределения, который бы учитывал размер частей, на которые делится задача.

Такой алгоритм можно построить на основе алгоритма «заполнения» (англ. backfill), который широко применяется для распределения нагрузки на узлы вычислительного кластера, но для его эффективной работы в случае многопроцессорной системы нужно произвести определенные модификации. Для расчета времени решения задачи на кластере не существует надежного метода, и часто это время задается вручную перед отправкой задачи в очередь [1], что неприемлемо в случае многопроцессорной системы, и поэтому время решения отдельных подзадач необходимо предсказать. Для получения надежного предсказания можно воспользоваться любым подходящим статистическим методом и использовать время выполнения предыдущих подзадач в качестве исходных данных. Для учета неоднородной производительности устройств можно воспользоваться тем же методом, только в качестве исходных данных взять производительность устройства на предыдущих задачах (количество задач, завершенных в единицу времени). Чтобы сократить накладные расходы, метод должен быть достаточно простым, и поэтому в тестах был использовано осреднение N последних значений характеристики. Использование статистических методов в случае многопроцессорной системы оправдано, поскольку в отличие от задач, решаемых на кластерах, время решения подзадач достаточно мало, чтобы статистические методы работали эффективно. В случае же кластерных систем ввиду очень большого времени решения одной

задачи использование статистических методов не может дать надежный результат, и алгоритм «заполнения» работает эффективно для небольших задач [1].

Таким образом, распределение нагрузки осуществляется в два этапа: на первом этапе задача направляется на соответствующее ее типу нагрузки устройство, а на втором этапе она направляется на одно из выбранных устройств по алгоритму распределения. Сам же алгоритм является алгоритмом «заполнения» с модификациями, позволяющими автоматически предсказывать время выполнения задачи и производительность устройств.

Нагрузочное тестирование. В качестве задачи для нагрузочного тестирования была выбрана задача генерации взволнованной морской поверхности, имеющая практическое применение в создании виртуального полигона [2–5]. Генерация взволнованной поверхности реализована как преобразование белого шума, поверхность генерируется с помощью авторегрессионной модели, а давления рассчитываются по аналитической формуле. Алгоритм задачи состоит из трех фаз, наиболее требовательной к вычислительным ресурсам из которых является фаза генерации. Решение начинается с определения коэффициентов авторегрессии и дисперсии белого шума путем решения системы уравнений Юла — Уокера, затем следует генерация белого шума и его преобразование во взволнованную морскую поверхность, которая в завершении записывается в файл. Таким образом, задача заключается в генерации реальной морской поверхности и расчете поля давлений в каждой точке под этой поверхностью и является основой для расчета качки судна и воздействия взволнованной поверхности на стационарный объект.

Программа сбалансирована с точки зрения нагрузки на процессорные ядра, однако, как показали тесты, характеризуется высокой нагрузкой на устройства хранения. До проведения тестирования программа была реализована на OpenMP и для сравнения переписана в соответствии с разработанным подходом к распределению нагрузки, реализованным в виде отдельной библиотеки. Конфигурация оборудования, использованная в тестах, приведена в таблице 1. В результате две реализации были сопоставлены с точки зрения производительности.

Таблица 1. Конфигурация оборудования.

Компонент	Подробности
Язык программирования	C++11
Библиотека потоков	C++11 STL threads
Библиотека атомарных операций	C++11 STL atomic
Подпрограммы замера времени	clock_gettime(CLOCK_MONOTONIC) /usr/bin/time -f %e
Компилятор	GCC 4.8.2
Опции компиляции	-std=c++11 -O2 -march=native
Операционная система	Debian 3.2.51-1 x86_64
Файловая система	ext4
Процессор	Intel Core 2 Quad Q9650
Частота процессора (ГГц)	3.00
Количество ядер	4
Емкость ОЗУ (ГБ)	8
Диск	Seagate ST3250318AS
Скорость диска (об./мин.)	7200

В процессе экспериментов была измерена эффективность описанного метода распределения нагрузки, и он показал более высокую производительность в задаче генерации взволнованной поверхности (в задаче генерации большого объема данных) по сравнению с реализацией OpenMP. В результате предыдущих исследований было установлено, что реализация OpenMP имеет наилучшую производительность по сравнению с другими технологиями параллельного программирования [2], поэтому эксперимент заключался в сравнении ее производительности с производительностью нового метода на ряде входных данных. При каждом запуске варьировался только размер взволнованной поверхности. В результате эксперимента было установлено, что с увеличением размера поверхности увеличивается разрыв в производительности этих двух реализаций (см. рис. 1), а высокая производительность предложенного метода обуславливается наложением по времени фазы генерации взволнованной поверхности и фазы записи ее на диск (см. рис. 2). В реализации OpenMP такого наложения не происходит и запись на диск начинается сразу после окончания генерации поверхности в отличие от новой реализации, в которой генерация и запись на диск заканчиваются почти одновременно. Таким образом, в программах, работающих с большим объемом данных, конвейеризация параллельных вычислительных фаз более эффективна, чем их последовательное выполнение, и позволяет сбалансировать нагрузку не только на процессорные ядра, но и на дисковую подсистему.

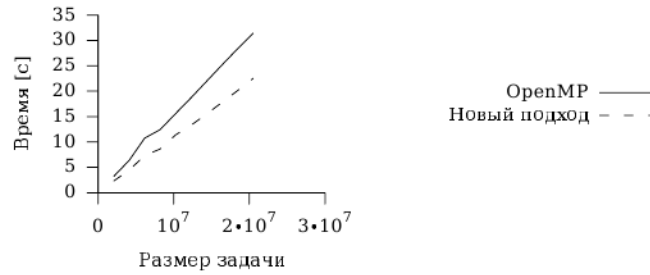


Рис. 1. Сравнение производительности реализаций программы на OpenMP и на разработанной технологии

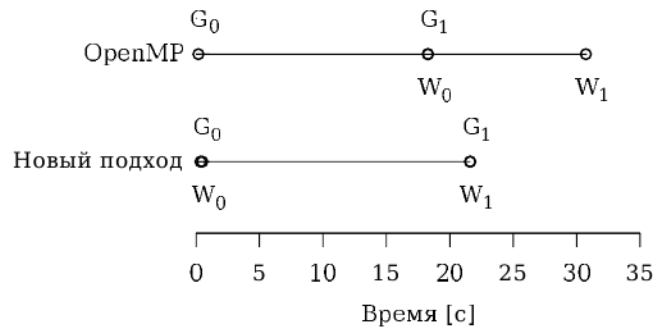


Рис. 2. Наложение параллельных вычислений на $[G_0, G_1]$ и записи данных на диск на $[W_0, W_1]$. В реализации OpenMP наложение отсутствует

Несмотря на то, что технология OpenMP содержит примитивы для создания конвейеров, соединить конвейером две распараллеленные фазы программы можно только вручную. Такое соединение можно реализовать с помощью синхронизированной очереди, в которую направляются сгенерированные части взволнованной поверхности, готовые к записи в файл. Используя директиву *omp section*, можно описать работу каждого из звеньев получившегося конвейера, однако реализовать параллельную обработку каждого из звеньев (или хотя бы первого) не представляется возможным, так как требу-

ется поддержка вложенных директив *omp parallel*, что редко встречается в реализациях OpenMP. Таким образом, реализация описанного метода распределения нагрузки в рамках стандарта OpenMP затруднена.

Выводы. Предложенный метод распределения нагрузки на многопроцессорную систему позволяет получить прирост производительности для приложений, считывающих и записывающих большой объем данных на диск, позволяет сбалансировать нагрузку на процессорные ядра вычислительной системы и назначить различные типы рабочей нагрузки разным процессорным ядрам, а также различным устройствам, в том числе дискам. В дальнейших исследованиях предполагается обобщить этот метод на распределенную вычислительную среду.

Литература

1. Zotkin D., Keleher P. J. Job-length estimation and performance in backfilling schedulers // Proceedings of the 8th International Symposium on High Performance Distributed Computing. 1999. P. 236–243.
2. Degtyarev A. B., Gankevich I. G. Wave surface generation using OpenCL, OpenMP and MPI // Proceedings of 8th International Conference «Computer Science & Information Technologies». 2011. P. 248–251.
3. Degtyarev A. B., Reed A. M. Modelling of incident waves near the ship's hull (application of autoregressive approach in problems of simulation of rough seas) // Proceedings of 12th International Ship Stability Workshop. 2011.
4. Degtyarev A. B., Reed A. M. Synoptic and short-term modeling of ocean waves // Proceedings of 29th Symposium on Naval Hydrodynamics. 2012.
5. Degtyarev A. B., Gankevich I. G. Evaluation of hydrodynamic pressures for autoregression model of irregular waves // Proceedings of 11th International Conference «Stability of Ships and Ocean Vehicles». 2012. P. 841–852.

УДК 004.93

Гиппиев М. Б.

Алгоритмы распознавания строк в стенографических документах

Рекомендовано к публикации профессором Роговым А. А.

1. Актуальность проблемы. Современные системы оптического распознавания символов (OCR), такие как «ABBYY FineReader», «CuneiForm», «Google Tesseract» и другие, достаточно хорошо решают задачу распознавания печатных текстов даже при наличии в них искажений, характерных для сканированных печатных документов. На первом шаге системы OCR решают задачу определения верха и низа документа, а также выделения строк. Однако, при выделении строк рукописных текстов сложности многократно возрастают, а особенно при анализе стенографических документов. На определение строк влияют наклон текста в ту или иную сторону, заваливание, исправление и зачеркивание текста [1, 2]. Кроме того, в стенографических документах все символы делятся на основные, надстрочные и подстрочные. Поэтому методы выделения строк в печатных текстах, используемые в системах OCR, оказываются бесполезными в случае стенографических документов, и требуется разработка новых методов.

В данной работе представлен алгоритм распознавания строк методом построения графа связей, который является модификацией алгоритма распознавания строк методом ближайшего соседа, описанного в работе [3], и главная идея которого заключается в выделении на стенограмме отдельных символов и нахождении расстояний между ними, а также алгоритм распознавания надстрочных и подстрочных символов.

2. Алгоритм распознавания строк в стенографических документах методом построения графа связей. Основная идея алгоритма заключается в следующем [4]. Вначале строятся связи

Гиппиев Михаил Борисович – аспирант, Петрозаводский государственный университет; e-mail: gippiiev@gmail.com, тел.: +7(909)570-67-17

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития (ПСР) ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

между символами в стенограмме. Для каждой связи задается первый и второй символы и расстояние между ними, не превышающее заранее определенное значение. Затем последовательно в порядке возрастания расстояний для каждой связи осуществляется попытка соединить символы (объединить в строки), входящие в нее. Если символы соединить нельзя, т. е. если они уже связаны с другими символами, то находим вертикальные интервалы между символами, связанными с первым символом, и символами, связанными со вторым символом. Если все интервалы не превышают максимальное заданное значение, то тогда объединяем все символы в одну строку.

3. Алгоритм классификации символов в стенографических документах на основные, надстрочные и подстрочные.

При распознавании строк возникает задача определения, к какому типу (основной, надстрочный и подстрочный) относится каждый символ, входящий в строку. Рассмотрим алгоритм, позволяющий решать данную задачу. Алгоритм использует метод аппроксимации, так как проведенный анализ показал, что строки в стенографических документах, как правило, имеют форму, которую можно аппроксимировать полиномом.

После распознавания строки строятся две аппроксимирующие функции: одна ($\varphi_T(x)$) по точкам, являющимися серединами верхних сторон, и одна ($\varphi_B(x)$) по точкам, являющимися серединами нижних сторон прямоугольников, в которые вписаны символы строки. При этом верхняя и нижняя стороны каждого такого прямоугольника параллельны оси абсцисс.

Пусть некоторый символ S вписан в прямоугольник, верхняя сторона которого задана уравнением $y = y_{S_T}$, а нижняя — уравнением $y = y_{S_B}$. Центр прямоугольника находится в точке с абсциссой x_{S_C} . Тогда функция $\varphi_T(x)$ принимает в данной точке значение $y_{A_T} = \varphi_T(x_{S_C})$, а функция $\varphi_B(x)$ — значение $y_{A_B} = \varphi_B(x_{S_C})$.

Определим новые значения ординат \tilde{y}_{S_T} и \tilde{y}_{S_B} . Для \tilde{y}_{S_T} :

- если $y_{S_T} > y_{A_T}$, то $\tilde{y}_{S_T} = y_{A_T}$;
- если $y_{S_T} < y_{A_B}$, то $\tilde{y}_{S_T} = y_{A_B}$;
- если $y_{A_B} \leq y_{S_T} \leq y_{A_T}$, то $\tilde{y}_{S_T} = y_{S_T}$.

Аналогично определяется значение \tilde{y}_{S_B} .

Пусть y_{A_C} — ордината середины отрезка с концами в точках (x_{S_C}, y_{A_T}) и (x_{S_C}, y_{A_B}) , а h_A — длина данного отрезка. Пусть

\tilde{y}_{SC} — ордината середины отрезка с концами в точках (x_{SC}, \tilde{y}_{ST}) и (x_{SC}, \tilde{y}_{SB}) , а h_C — длина отрезка с концами в точках (x_{SC}, y_{AC}) и (x_{SC}, \tilde{y}_{SC}) . Тогда вероятность того, что символ S является основным, равна $P_{\text{осн}} = \frac{h_A/2 - h_C}{h_A/2}$, а вероятность того, что символ S является надстрочным ($\tilde{y}_{SC} > y_{AC}$) или подстрочным ($\tilde{y}_{SC} < y_{AC}$), равна $P_{\text{неосн}} = \frac{h_C}{h_A/2}$.

4. Заключение. Рассмотренные в статье алгоритмы апробированы на исторических стенографических документах А. Г. Сниткиной и будут реализованы в создаваемой компьютерной программе для распознавания исторических стенограмм [3, 5].

Литература

1. Местецкий Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. 227 с.
2. Горский Н. Д., Анисимов В. А., Горская Л. М. Распознавание рукописного текста: от теории к практике. СПб.: Политехника, 1997. 126 с.
3. Рогов А. А., Скабин А. В., Штеркель И. А. О дешифровке исторических рукописных документов // El'manuscript-2012: Информационные технологии и письменное наследие. Материалы IV международной научной конференции. Петрозаводск, Ижевск. 2012. С. 230–233.
4. Гишиев М. Б., Жуков А. В., Рогов А. А., Скабин А. В. Распознавание строк в стенографических документах [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 4. URL: www.science-education.ru/110-9725 (дата обращения: 10.03.2014).
5. Рогов А. А., Скабин А. В., Штеркель И. А. Автоматизированная информационная система распознавания исторических рукописных документов // Информационная среда ВУЗА XXI века. Материалы международной научной конференции. Куопио (Финляндия). 2012. С. 127–130.

УДК 004.75

Гришкин В. М., Якушкин О. О.

Опыт решения проблемы Round-Robin для безброкерных систем

1. Введение. Архитектуру коммуникационных решений сегодня можно разделить на два основных подхода: «с брокером» и «без брокера» [1]. Формы взаимодействия узлов сети описываются шаблонами передачи сообщений: односторонними, такими как Push-Pool и Publish-Subscribe, или двусторонними: Request-Reply, Pair [2]. Направления рассылки сообщений дифференцируются по следующему принципу: одному участнику, группе или всем участникам системы.

Архитектура брокерных решений строится на базе централизованных очередей, в которые клиенты могут помещать сообщения и из которых данные могут быть извлечены на обработку или уничтожены по истечении заданного времени.

С распространением идеи шаблонов передачи сообщений, таких как Request-Reply, Pipeline, Publish-Subscribe встал вопрос о том, чтобы исключить посредника между узлами, сохранив базовые преимущества, привнесенные архитектурой, использующей брокера: разделение сообщений темами, сокрытие привязывания узлов системы к IP адресам и теневое распределение нагрузки между узлами, когда это возможно. Появились безброкерные библиотеки, соединяющие узлы системы напрямую. Однако, отсутствие контролирующего узла брокера вносит ряд сложностей при расширении системы.

Мы рассмотрим проблемы, возникающие при горизонтальном масштабировании систем без брокера для отправки сообщений одному получателю.

Гришкин Валерий Михайлович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vmg@armath.spbu.ru

Якушкин Олег Олегович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: oleg.jakushkin@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ. НИР № 01201453381, № 01201453375

Работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ»

2. Проблема Round-Robin для безброкерных систем. Балансировка нагрузки осуществляется средствами Round-Robin. Реализации паттернов сообщений, направляющих запросы с целью донесения информации до одного получателя не могут получить подтверждения о получении сообщения (за исключением отказа в обслуживании по истечению времени). Основной проблемой Round-Robin для библиотек P2P коммуникации является то, что отсутствует автоматизация пересылки сообщения другому потенциальному адресату в случае отсутствия ответа получателя (которая часто присутствует в брокерных решениях). В центре этой проблемы — отсутствие контроля за состоянием участников сети.

Решением проблем Round-Robin маршрутизации мог бы стать сервис имен, расширенный функциональностью контроля за состоянием узлов. Но для его работы понадобилась бы интеграция статистики о состоянии узлов с алгоритмом, выбирающим следующий узел для отправки сообщения, а это нереализуемо при использовании библиотек для безброкерных коммуникаций напрямую.

Мы разработали масштабируемое архитектурное решение для оркестрирования взаимодействий узлов распределенной среды, состоящее из сервиса, контролирующего узлы системы, сервиса, балансирующего нагрузку, и библиотеки для взаимодействия с ними.

3. Архитектура решения. Библиотека предоставляет средства общения в рамках разворачиваемой сети между управляющими и взаимодействующими узлами системы, а также следит за состоянием окружающих узлов. Сервис оркестрирования отслеживает состояние подключенных к нему, участвующих в распределении запросов по системе узлов и позволяет анализировать их загрузку.

Сервис оркестрирования является «standalone» приложением. Он обладает функциями по сбору статистики о существующих в системе узлах и занимается проверкой их состояния путем опроса всех имеющихся узлов с заданным в конфигурации периодом. Таким образом, осуществляется фильтрация вышедших из системы узлов.

Помимо базовой функциональности сервера имен, в сервисе оркестрирования заложена возможность подключения модулей балансировки нагрузки. Алгоритм работы системы балансировки нагрузки с контроллером узлов сети представлен в форме диаграммы последовательности на рис. 1.

Отметим, что разработанная система позволяет разворачивать

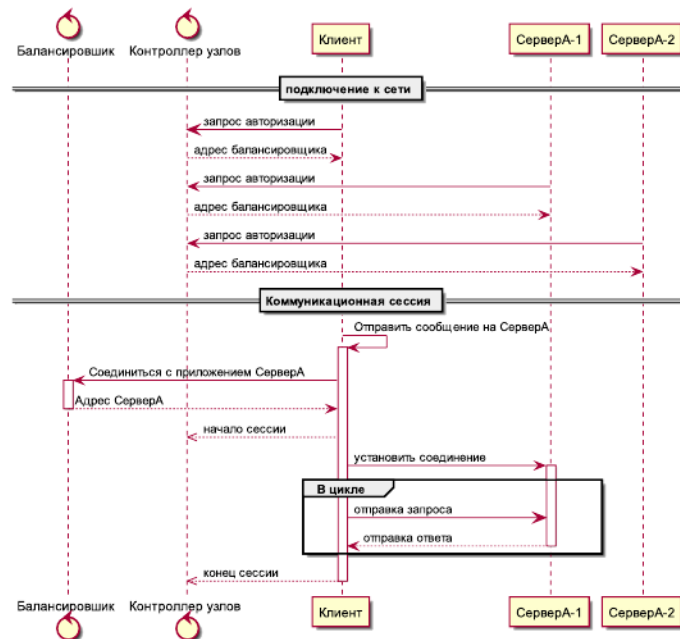


Рис. 1. Взаимодействие контроллера узлов и балансировщика нагрузки

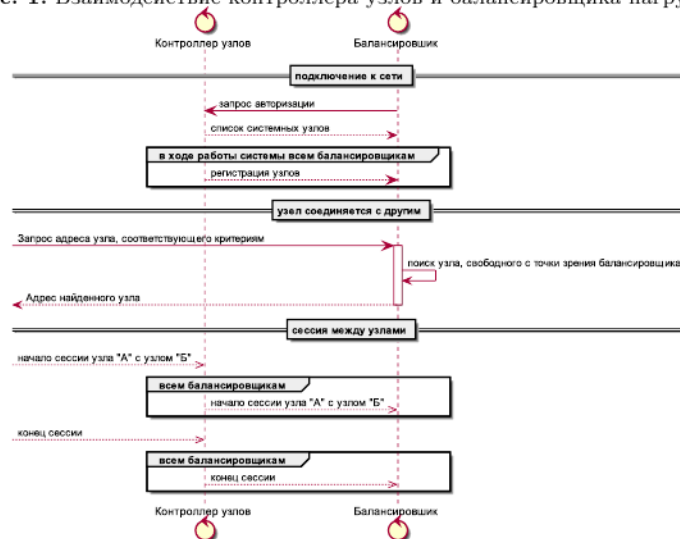


Рис. 2. Пример работы системы балансировки для паттерна передачи сообщений Request-Reply

отказоустойчивую горизонтально масштабируемую подсистему балансировки нагрузки. Более того, в рамках единой подсети для набора балансировщиков нагрузки можно развернуть набор контролирующих узлов системы, предоставив множество входов в распределенную систему.

Алгоритм взаимодействия узлов через систему балансировки (рис. 2) показывает, как «Клиенту» для работы был предоставлен один из «Серверов» определенный балансировщиком, что является существенным отличием принципа работы представленной системы от традиционных библиотек коммуникаций, в которых «Сервер» был бы выбран по принципу Round-Robin.

Модули распределения и балансировки нагрузки могут использовать системы предсказания и мониторинга, такие как Zabbix, OpenStack, Graphite, для того, чтобы предоставить списки последовательностей опроса узлов, качественно превосходящие стандартное распределение Round-Robin.

Прототип представленной системы был разработан на языке C# с использованием ZeroMQ в виде основного транспорта. Проект распространяется в форме открытого исходного кода и доступен по ссылке [3].

Литература

1. Doddavula S., Agrawal I., Saxena V. Cloud Computing Solution Patterns: Infrastructural Solutions / edited by Z. Mahmood. London: Springer, 2013. Computer Communications and Networks. P. 197–219.
2. Hintjens P. ZeroMQ: Messaging for Many Applications. Sebastopol: O'Reilly Media, Inc., 2013. 516 p.
3. MQ Cloud. [Электронный ресурс]: URL: <http://mqcloud.org/> (дата обращения: 06.20.14).

УДК 004.912

Гушчанский Д. Е.

Метод извлечения текста из научных статей в формате PDF

Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.

1. Введение. Упрощенный современными информационными технологиями доступ к огромным объемам научной литературы не мог не оказать влияния на работу научного сообщества. Доступность электронных изданий позволяет оперативно получать информацию о новейших исследованиях, снижает порог вхождения в научные области для молодых ученых, облегчает взаимодействие между исследователями [1].

Исторически сложилось, что основным стандартом представления электронных версий статей стал *Portable Document Format* (PDF). PDF направлен на обмен полнотекстовыми документами с графикой, например, статьями, технической документацией, через электронные средства связи так, что документы могут быть единообразно просмотрены на любом компьютере и распечатаны локально [2]. *Portable Document Format* хорошо подходит для отображения текстовой и графической информации, однако извлечение из него полезной информации является нетривиальной задачей. Документы представляют собой наборы вложенных объектов различных типов, глубина вложения при описании текста достигает такого уровня, что каждый символ описывается целым набором параметров. Кроме того, не существует единых правил оформления для научных публикаций: имеются общепринятые нормы, но форматы их представления могут сильно различаться. В то же время доступ к точным версиям текстов научных статей может упростить решение задач машинной обработки текстов: кластеризации, поиска по коллекциям документов, их аннотирования и других. В сочетании с тем, что современные решения по извлечению текста направлены либо на документы общего вида [3], либо на конкретные издания и требуют описания верстки [4], задача построения программного метода, реализующего

Гушчанский Дмитрий Евгеньевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: dmitry.gushchanskiy@gmail.com, тел.: +7(812)404-84-18

возможность качественного извлечения текста из PDF-документов научных статей и докладов произвольной тематики, является актуальной для успешной организации работы современных ученых. Описанию разработки и тестирования подобного метода и посвящена данная работа.

2. Описание метода. Процесс извлечения текста разделяется на три этапа, описываемых в соответствующих подразделах:

1. Формирование блоков текста на основе страниц документа и определение их параметров.
2. Фильтрация блоков на основе полученных параметров.
3. Слияние блоков в единый текст.

Было принято следующее представление документа как структуры данных. Документ $D = (q_1, \dots, q_n)$ — это набор страниц q_i , $i = 1, \dots, n$. Каждая страница представляет собой древовидную иерархическую структуру, отношения между объектами в которой являются отношениями вхождения: a — потомок b , это значит, что объект a содержится в объекте b . Объекты могут представлять собой различные части отображаемого документа: текст, иллюстрации, оформление; они могут образовывать сложные иерархические связи. Рассматриваются только структуры, связанные с текстом. Их выделено два вида: символы и блоки текста. Символы — это самый нижний в иерархии вид объектов, задаваемый такими параметрами, как позиция на странице (x, y) , вид шрифта f и непосредственно отображаемый символ c : $ch = (x, y, f, c)$. Блоки текста — прямоугольные части страницы, целиком заполненные символами. Параметры блоков определяются на основе их содержимого в первом этапе обработки.

2.1. Формирование блоков текста. В рамках этого этапа производится группировка символов в блоки, в ходе которой у блоков вычисляются дополнительные параметры, используемые в дальнейшем:

- позиция блока на странице — две точки, соответствующие левому верхнему и правому нижнему углам блока. Точка начала отсчета находится в левом верхнем углу документа;
- текст блока;
- длина текста в блоке;
- средний размер шрифта в блоке.

Для вычисления параметров для каждой страницы осуществляется рекурсивный обход ее дерева объектов, в рамках которого определяется группировка символов на странице по блокам и из символов формируется текст блока. Поскольку блок текста имеет простую сплошную прямоугольную структуру, то для расстановки символов в том порядке, в котором их следует воспринимать в тексте, достаточно отсортировать их по координатам в порядке чтения: слева направо, сверху вниз. Параллельно при получении координат символа собирается информация о его шрифте, на основе которой подсчитывается общая характеристика блока.

2.2. Фильтрация блоков. На данном этапе блоки классифицируются по их «полезности» в тексте. Затем блоки, не признанные важными для документа, опускаются из обработки.

По результатам анализа документов был сделан вывод, что к малополезным блокам можно отнести различные записи в колонтитулах, нумерации страниц и формул. Точно сформулировать критерии того, что блок текста можно опустить без ущерба для общего текста, не представляется возможным. В связи с этим было решено использовать классификатор на основе модели перцептрона с одним скрытым слоем из двадцати элементов с сигмоидальной функцией активации:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

подавая ему на вход информацию о блоках из документа. В качестве нормированных параметров, подаваемых классификатору, используются следующие:

- расстояния до двух ближайших краев листа a и b . Берутся как отношения к максимально возможным расстояниям;
- размер шрифта f в блоке:

$$f = \tilde{f}(x) = \frac{x}{x + F_{cp}},$$

где x — размер шрифта блока, F_{cp} — средний размер шрифта на странице;

- длина l текста в блоке. Берется как отношение к максимальной длине текста блока на странице;
- доля текстовых символов s в блоке — отношение количества символов из используемого алфавита (например, а — z для латинского) к длине блока.

Классификатор был обучен на примерах, сформированных на основе коллекции научных статей произвольных тематик. Для обучения использовался метод обратного распространения ошибки.

2.3. Слияние блоков. После проведения фильтрации блоки сортируются в порядке следования в тексте, а затем их тексты соединяются. Для определения очередности следования блоков используется метод на основе расстояния между блоками, уже зарекомендовавший себя в общих задачах обработки PDF-документов [3], [5].

Расстоянием между двумя блоками текста, заданными парами точек $a((x_{a0}, y_{a0}), (x_{a1}, y_{a1}))$ и $b((x_{b0}, y_{b0}), (x_{b1}, y_{b1}))$ называется величина

$$S = (\max(x_{a1}, x_{b1}) - \min(x_{a0}, x_{b0}))(\max(y_{a1}, y_{b1}) - \min(y_{a0}, y_{b0})) - (((x_{a1} - x_{a0})(y_{a1} - y_{a0})) + ((x_{b1} - x_{b0})(y_{b1} - y_{b0}))).$$

Геометрическая интерпретация расстояния проиллюстрирована на рис. 1. Между блоками a и b ничего не расположено, если в площадь прямоугольника, описанного вокруг a и b , не попадает ни одного другого блока.

Группа блоков задается как $G = (a, b)$, где a и b — блоки либо группы блоков. Группа блоков G интерпретируется как прямоугольник, описанный вокруг блоков либо групп блоков a и b , поэтому его можно определить как структуру $G = ((x_{G0}, y_{G0}), (x_{G1}, y_{G1}), a, b)$. Блоки a и b входят в структуру в строгом порядке: если блок a идет впереди блока b , то выполняется $y_{a1} \leq y_{b0}$ либо $x_{a0} \leq x_{b0}$.

Алгоритм базируется на предположении, что две относительно близких группы блоков, между которыми нет других блоков, можно рассматривать как единый блок. В ходе работы алгоритма объекты попарно соединяются в группы пока не образуется единственная группа. После этого из нее можно извлечь очередь соединения блоков. Для этого группу блоков можно интерпретировать как бинарное дерево поиска, где элемент a будет в роли левого поддерева, а b — в роли правого. Тогда для извлечения очереди достаточно будет выполнить левосторонний обход дерева.

После получения очереди из блоков происходит их слияние. Простая конкатенация содержимого блоков может отразиться на оче-

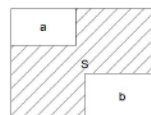


Рис. 1. Расстояние S между a и b

редности чтения текста. Помимо этого, при построчной обработке блоков было решено устранить встречающиеся переносы слов между строками, что способно улучшить качество машинной обработки текста. Принцип обработки переносов следующий: если строка заканчивается на букву и символ «-», а следующая строка начинается со строчной буквы, то эти две строки можно соединить, удалив дефис.

При соединении блоков реализовано следующее правило: если блок не заканчивается как предложение точкой либо иным подходящим знаком препинания, является достаточно длинным, чтобы не напоминать заголовок или подпись, и при этом следующий блок не выглядит как продолжение предыдущего, то его можно пропустить и поставить после того, как продолжение будет найдено. Временно пропускаемые блоки хранятся в отдельной очереди небольшой длины, чтобы избежать значительного перемещения блоков в тексте.

3. Проверка метода. Описанный выше метод реализован на языке Python версии 2.7. Для обеспечения низкоуровневого доступа к PDF-документам с целью формирования обрабатываемых структур использовались модули, входящие в пакет утилит PDFminer [5]. Для создания и обучения классификатора для фильтрации блоков использован модуль PyBrain [6].

3.1. Тестирование. Для проведения тестирования метода был взят набор из 50 научных статей. Документы случайным образом выбирались из поисковой выдачи «Академии Google» [7]. В качестве запросов выступал список ключевых слов к статьям, относящимся к разнообразным областям науки: математики, физики, химии и другим. Разработанным методом из них был извлечен текст, результаты были сравнены с текстами, полученными из этих же документов средствами только PDFminer. В качестве улучшения текста рассматривались такие параметры, как исправление очередности порядка чтения, систематическое исправление переносов в документе, корректное исключение частей текста, не относящихся к тексту статьи.

В результате работы метода наблюдалось улучшение в 90% случаев. Метод оказался способен исправлять переносы и порядок следования частей текста. Ухудшение качества извлечения текста наблюдалось у пяти документов. Во всех случаях оно связано с тем, что информативные блоки текста были отфильтрованы классификатором, так как по характеристикам были схожи с фильтруемыми

блоками: имели небольшую длину, относительно маленький шрифт и располагались близко к кромке листа.

4. Заключение. Метод извлечения текста из научных статей в формате PDF показал достаточно хорошие результаты, делая грубые ошибки только в некоторых случаях классификации. Однако, стоит отметить, что ни в одном случае не был получен полностью правильно извлеченный текст. Улучшению могут быть подвержены как механизм отбора «полезных» блоков, допускающий ошибки при фильтрации, так и метод слияния блоков, не всегда способный корректно указать порядок следования частей текста (например, при работе с таблицами). Совершенствование данных методов рассматривается как основной вариант дальнейшего развития работы.

Литература

1. Souto P. N. E-publishing development and changes in the scholarly communication system // *Ciencia da Informacao*. 2007. Vol. 36, No. 1. P. 158–166.
2. The history of PDF [Электронный ресурс]: URL:<http://www.prepressure.com/pdf/basics/history> (дата обращения: 01.04.14).
3. Xpdf — Foo Labs [Электронный ресурс]: URL:<http://www.foo labs.com/xpdf/> (дата обращения: 01.04.14).
4. Ramakrishnan C., Patnia A., Hovy E., Burns G. A. Layout-aware text extraction from full-text PDF of scientific articles // *Source Code for Biology and Medicine*. 2012. Vol. 7, No. 1. P. 1–10.
5. PDFminer — Python PDF parser and analyzer [Электронный ресурс]: URL:<http://www.unixuser.org/~euske/python/pdfminer/> (дата обращения: 01.04.14).
6. PyBrain [Электронный ресурс]: URL:<http://pybrain.org/> (дата обращения: 01.04.14).
7. Академия Google [Электронный ресурс]: URL:<http://scholar.google.ru/> (дата обращения: 01.04.14).

УДК 681.324

Карташов Д. Н.

Минимизация времени исполнения пользовательских программ

Рекомендовано к публикации профессором Тереховым А. Н.

1. Введение. В современном мире наблюдается тенденция к использованию языков программирования в бизнесе, не связано с информационными технологиями. Так, например, для расширения стандартной функциональности программ пакета Microsoft Office применяется язык программирования Visual Basic for Applications; для автоматизации торгов и анализа исторических рыночных данных используются предметно-ориентированные языки EasyLanguage, NinjaScript и ThinkScript [3]. Также можно отметить такие широко распространенные предметно-ориентированные языки, как ILOG, Oracle Policy Automation, DTRules, Drools.

Пользователи при использовании этих языков, как правило, решают задачу удаленной обработки данных. Таким образом, возникает проблема по оптимизации исполнения пользовательских программ.

При решении данной задачи встает вопрос о модели исполнения пользовательских запросов. С одной стороны, все пользовательские программы могут быть переданы в центральное хранилище, выполнены на ЭВМ сервера, и затем результаты возвращены на ЭВМ клиента. С другой стороны, все необходимые для расчетов данные могут быть загружены на ЭВМ клиента, на которой будут проведены вычисления. Обе модели не являются оптимальными, потому что в первом случае возникает большая нагрузка на процессор ЭВМ сервера при параллельной обработке существенного числа пользовательских программ; во втором случае может возникнуть большая нагрузка на сеть, так как объем данных, необходимых для вычислений, в большинстве случаев значительно превышает объем результирующих данных.

Карташов Дмитрий Николаевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kartashov.dm@gmail.com, тел.: +7(911)272-16-31

В данной статье предложена модель выполнения пользовательской программы, в которой на этапе компиляции происходит разделение процесса исполнения программы на клиентскую и серверную части, что позволяет избежать ранее описанных проблем.

Ниже будут введены основные понятия и определения, описан разработанный алгоритм и приведен пример его использования.

2. Описание алгоритма. Введем основные определения. Будем называть *графом потока данных* ориентированный граф, представляющий последовательное преобразование исходных данных программы в конечные, необходимые пользователю [1]. Фронтальной вершиной для разреза (S, T) будем называть вершину $s \in S$, у которой существует исходящее ребро (s, t) такое, что $t \in T$. Выходным множеством данных является набор данных, указанных пользователем в качестве результата выполнения программы.

Основными параметрами системы, влияющими на скорость исполнения программы, являются объем передаваемой информации и мощность ЭВМ, на которой производятся вычисления. Далее будем предполагать, что вычислительная мощность серверной ЭВМ, поделенная на число пользователей, сопоставима с мощностью ЭВМ пользователя, что позволит сосредоточиться только на минимизации объема передаваемой информации. Предлагаемый алгоритм основан на анализе графа потока данных. Основная идея заключается в том, что минимальный разрез графа потока данных при заданных определенным образом весах вершин соответствует оптимальному распределению исполнения программы.

Далее приведем подробное описание алгоритма.

Этап 1. Генерация графов. Входным набором данных является набор пользовательских программ.

1. Для каждой пользовательской программы построить граф потока данных.
2. Вершины в этом графе проиндексировать на основании их семантического типа данных.
3. Выполнить слияние полученных графов на основании индексации. Во время слияния также необходимо учитывать объединения подмножеств входящих данных.

4. Разделить полученный общий граф на множество связанных графов.

Этап 2. Поиск минимальных разрезов. Входным набором данных является множество графов потоков данных полученных после выполнения Этапа 1.

1. В каждом графе выделить вершины, которые фигурируют в выходном множестве, заданном пользователем.
2. Удалить подпути, не ведущие к помеченным вершинам.
3. В полученном графе построить остовное дерево. При необходимости добавить дополнительную общую вершину в истоке (см. решение задачи поиска максимального потока в [2]).
4. Продублировать по направлению вычислений вершины из выходного множества. Это необходимо, чтобы граф можно было разделить так, что программа будет выполняться полностью на стороне сервера.
5. Найти все возможные варианты разбиения исходного графа с помощью рекурсивного декартова произведения ветвей дерева.
6. Для полученных разрезов посчитать сумму весов фронтальных вершин и найти минимальную. В качестве функции веса узла графа используется величина объема данных, соответствующих данному узлу.

Итог. Найденный минимальный разрез разделяет пользовательскую программу на клиентскую и серверную части.

Замечание 1. При использовании других функций весов можно решить схожие задачи минимизации ресурсов. Например, такие как минимизация энергопотребления при выполнении программы, что является актуальным на фоне развития мобильных устройств [4].

3. Пример использования алгоритма. Приведем пример использования предлагаемого алгоритма. Предположим, что построен граф потока данных для программы пользователя как показано на рис. 1а.

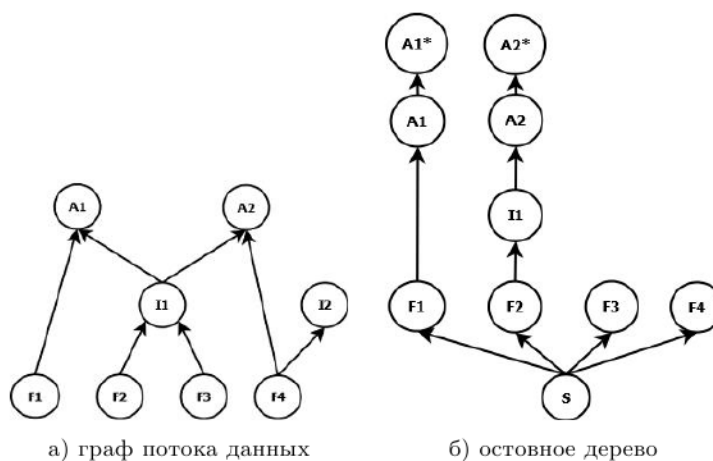


Рис. 1. Результаты работы алгоритма

Тогда остовное дерево, соответствующее построенному графу потока данных, будет выглядеть как представлено на рис. 1б. Предположим, что вершины имеют веса как указано в таблице 1, при этом вес S будем считать равным бесконечности.

Таблица 1. Веса вершин графов

F1	F2	F3	F4	I1	A1	A2
500	100	200	300	100	100	450

Множество возможных разрезов можно представить как

$$\{F1, A1, A1^*\} \times \{F2, I1, A2, A2^*\} \times \{F3\} \times \{F4\}$$

Фронтальными вершинами для минимального разреза являются A1, I1, F4, суммарный вес которых составляет 500.

Замечание 2. Не все вершины, полученные декартовым произведением, будут являться фронтальными вершинами разреза. В их набор будут включены только те вершины, через исходящие ребра которых прошел разрез. Именно поэтому F3 не участвует в подсчете весов.

4. Заключение. Описанный алгоритм решает поставленную задачу поиска оптимального разделения выполнения пользовательской программы между серверной и клиентской частью.

Данная задача является актуальной для систем, в которых пользователю предоставляется язык для удаленной обработки данных. В качестве таких систем для внедрения алгоритма могут выступать торговые платформы, на которых пользователи обрабатывают большие объемы исторических данных для предсказания поведения торговых котировок.

Литература

1. Дроздов А. Ю., Новиков С. В., Боханко А. С., Галазин А. Б. Глобальный граф потока данных и его роль в проведении оптимизирующих преобразований программ // Высокопроизводительные вычислительные системы и микропроцессоры: сборник трудов ИМВС РАН. 2005. С. 78–87.
2. Кормен Е., Лайзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание, М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1296 с.
3. Gentile T. Explore your option // Technical Analysis of Stocks & Commodities. 2013. № 4. С. 52–65.
4. Gartner Says Worldwide PC, Tablet and Mobile Phone Combined Shipments to Reach 2.4 Billion Units in 2013 [Электронный ресурс]: URL:<http://www.gartner.com/newsroom/id/2408515> (дата обращения: 20.10.13)

УДК 519.6

Киктенко А. А., Никифоров К. А.

Исследование информационной чувствительности компьютерного алгоритма для проблемы коммивояжера

1. Постановка задачи. Под информационной чувствительностью алгоритма по трудоемкости понимается влияние различных входов фиксированной длины на значения функции трудоемкости алгоритма [1].

Влияние изменений параметров входа на выходную характеристику некоторого объекта традиционно в теории автоматического управления называют чувствительностью по входному параметру. В данной работе объектом исследования является компьютерный алгоритм. В качестве входа рассматриваются элементы некоторого информационного массива, содержащего исходные данные алгоритма. Такая чувствительность называется информационной чувствительностью компьютерного алгоритма [1]. При этом наблюдаемой выходной характеристикой является функция трудоемкости алгоритма. В работе используется подход со следующими особенностями:

- используются случайные входные данные, на которых трудоемкость алгоритма для данной длины входа рассматривается как дискретная ограниченная случайная величина;
- функция трудоемкости алгоритма, задающая количество базовых операций алгоритма в выбранной модели вычислений, исследуется по тактовому времени выполнения программной реализации.

В работе проведено статистическое исследование этой случайной величины, в рамках которого поставлен численный эксперимент с

Киктенко Анастасия Александровна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: anakiktenko_89@mail.ru, тел.: +7(911)793-37-24

Никифоров Константин Аркадьевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: knikifogov@cc.spbu.ru, тел.: +7(921)631-57-00

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00150 и частично СПбГУ, грант № 9.38.673.2013

использованием технологии параллельных вычислений. Результатом эксперимента является измеренная информационная чувствительность алгоритма ветвей и отсечений для задачи коммивояжера.

2. Основные определения. Под трудоемкостью алгоритма A на входе D понимается величина $f_A(D)$ — число базовых операций в принятой модели вычислений, задаваемых алгоритмом на этом входе. Можно определить функцию трудоемкости, которая зависит от входных данных в трех случаях: худший, лучший и средний.

$$f_A^{\wedge}(n) = \max_{D \in D_n} \{f_A(D)\},$$

$$f_A^{\vee}(n) = \min_{D \in D_n} \{f_A(D)\},$$

$$\bar{f}_A(n) = \sum_{D \in D_n} P(D)f_A(D),$$

где $P(D)$ есть вероятность входа D для анализируемой области применения алгоритма, D_n — множество задач размерности n . Трудоемкость алгоритма при фиксированной длине входа можно рассматривать как дискретную ограниченную случайную величину, имеющую некоторое неизвестное распределение. Статистическая количественная мера информационной чувствительности алгоритма по трудоемкости $\delta_{IS}(n)$ (при фиксированной длине входа) есть произведение генерального коэффициента вариации значений трудоемкости, как дискретной ограниченной случайной величины, на нормированный размах варьирования значений трудоемкости [1]:

$$\delta_{IS}(n) = V(n)R_N(n).$$

Коэффициент вариации V является характеристикой вариационного ряда, для трудоемкости алгоритма зависит от размерности и вычисляется следующим образом:

$$V(n) = \frac{\sigma_{f_A}(n)}{\bar{f}_A(n)},$$

где $\sigma_{f_A}(n)$ — стандартное отклонение трудоемкости, как дискретной ограниченной случайной величины, при фиксированной длине входа n . Нормированный размах варьирования значений трудоемкости для

входов длины вычисляется как отношение половины вариантного интервала к его середине

$$R_N(n) = \frac{f_A^{\wedge}(n) - f_A^{\vee}(n)}{f_A^{\wedge}(n) + f_A^{\vee}(n)}.$$

Величину $\delta_{IS}(n)$ возможно определить двумя способами: теоретически и экспериментально. Теоретический подход состоит в получении функции трудоемкости для лучшего, среднего и худшего случаев теоретического значения стандартного отклонения, как функции от длины входа. В этом случае $\delta_{IS}(n)$ получается в явном виде. Экспериментальный подход использует методы математической статистики и основан на получении выборки значений трудоемкости, по которой возможно определить необходимые значения для расчета. На основе серии испытаний при фиксированной длине входа необходимо определить выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочный коэффициент вариации, минимальное и максимальное значения вариационного ряда и по этим данным выборки рассчитать $\delta_{IS}(n)$ как выборочную статистическую меру информационной чувствительности алгоритма по трудоемкости.

3. Программная реализация алгоритма. Поставлен численный эксперимент для алгоритма решения проблемы коммивояжера в сегменте задач с количеством вершин графов 1000–10000. В многочисленных современных практических приложениях возникают графы размером до 10000 вершин и даже более [2].

Основной целью данного примера являлось получение оценок информационной чувствительности и трудоемкости для алгоритма решения задачи коммивояжера по методу ветвей и отсечений.

Набор программ `concorde` [2, 3], разработанный в Принстонском университете (с 2001 года), предназначен для решения задачи коммивояжера методом ветвей и отсечении. На данный момент `concorde` является одной из лучших программных реализаций метода ветвей и отсечении для симметричной постановки и позволяет решать симметричные задачи любых классов в оптимальной постановке размера от 1 до десятков тысяч вершин. Код написан на ANSI C и находится в свободном доступе для академических целей. Библиотека `concorde` включает более 700 функций, которые могут быть использованы для создания программ, нацеленных на решение дискретных оптимизационных задач.

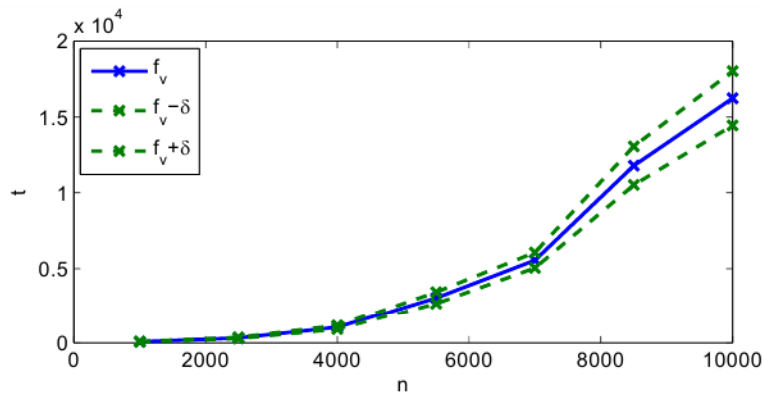


Рис. 1. Доверительные интервалы функции трудоемкости алгоритма

4. Методика вычислений. Возможны два способа набора статистики [4]:

- дожидаться окончания процесса решения для каждого случайного графа — в этом случае в выборку заносятся длительности процессов решения;
- обрывать процесс решения после определенного времени работы и заносить в выборку количество задач, процесс решения которых успел завершиться.

В работе использовался первый способ. Для набора статистики производился многократный запуск программной реализации алгоритма на случайных входных данных. Исследовалось тактовое время выполнения программы, как одна из характеристик трудоемкости алгоритма. Ускорение в решении поставленной задачи достигалось путем использования параллельного режима вычислений.

Для вычислений использовался кластер факультета ПМ–ПУ, состоящий из двенадцати 8-ядерных узлов и одного управляющего сервера (под управлением ОС SLES 11). Программа также была установлена на 8-ядерной виртуальной машине (SuSe 11) Ресурсного центра СПбГУ «Вычислительный центр» и на кластере Т-платформ под управлением CentOS 5.

5. Результаты. На рис. 1 приведен график зависимости выборочного среднего значений функции трудоемкости и доверительных

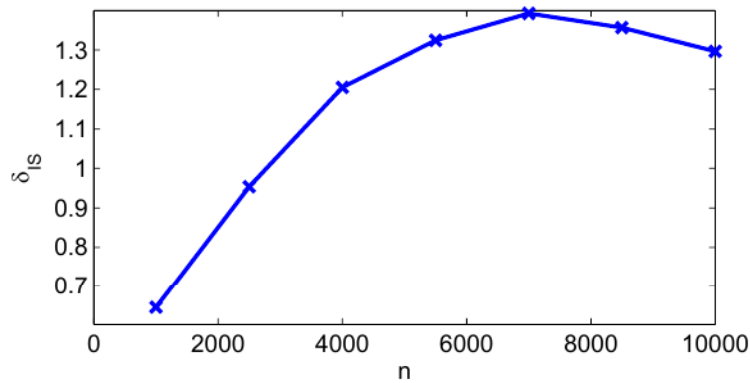


Рис. 2. Статистическая мера информационной чувствительности

интервалов от размера входных данных. Характер монотонности функции соответствует увеличению среднего времени работы алгоритма при возрастании объема входных данных. По вычислительной сложности данная задача принадлежит классу NP-полных, откуда следует надполиномиальная асимптотическая зависимость функции трудоемкости. На рис. 2 показан график информационной чувствительности в зависимости от размера входных данных. По классификации [1], исследуемый алгоритм характеризуется сильной информационной чувствительностью.

6. Заключение. Рассмотрено понятие информационной чувствительности алгоритма, которая характеризует зависимость трудоемкости алгоритма от вида входных данных. Наряду с классической вычислительной сложностью, оперирующей с трудоемкостью «в худшем случае входа», данная характеристика представляет дополнительный инструмент для детального и более практико-ориентированного исследования алгоритмов. Статистическая мера информационной чувствительности вычислялась на основе статистической обработки результатов эксперимента, использующего многократный запуск программной реализации алгоритма со случайными входными данными. Теория проиллюстрирована на примере решения задачи коммивояжера методом ветвей и отсечений в програм-

ме concorde. Для входных графов размером 1000–10000 вершин построены доверительные интервалы для функции трудоемкости, вычислена статистическая мера информационной чувствительности и получено, что по функции трудоемкости алгоритм является сильно чувствительным к входным данным фиксированного размера. Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ».

Литература

1. Ульянов М. В. Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы. Разработка и анализ. М. : Физматлит, 2008. 304 с.
2. Applegate D. L., Bixby R. E., Chvatal V., Cook W. J. The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. Princeton: University Press, 2007. 606 p.
3. Concorde TSP Solver [Электронный ресурс] URL: <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde/index.html> (дата обращения: 25.03.2014).
4. Gutin G., Punnen A. P. The traveling salesman problem and its variations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. 848 p.

УДК 004.932.72

Климов Н. С.

Распознавание лиц нейросетевыми методами

Рекомендовано к публикации доцентом Коровкиным М. В.

1. Введение. Распознавание лиц — один из важнейших биометрических методов идентификации человека. Однако, как и другие задачи на распознавание зрительных образов, эта задача очень сложна. Существует несколько причин такой сложности. Во-первых, так как входящие образы являются изображениями, размерность таких образов очень высока. Во-вторых, очень сложно формально выразить особенности, по которым можно определять класс образа.

Это влечет за собой необходимость использовать алгоритмы, которые умеют самостоятельно выделять особенности предоставляемых образов. В данной статье представлен нейросетевой алгоритм, позволяющий распознавать лица в анфас.

Распознавание будет проходить в два этапа. На первом этапе будут выделены наиболее важные особенности лиц и, как следствие, будет понижена размерность задачи, а также найдется отображение из исходного пространства в пространство признаков. На втором этапе полученные особенности будут обработаны перцептроном, который определит, кому принадлежит данное лицо. Оба этапа требуют предварительного обучения с учителем.

2. Выделение особенностей. В этом разделе представлены два метода выделения особенностей: метод главных компонент и линейный дискриминантный анализ.

2.1. Метод главных компонент. Это один из способов понижения размерности, состоящий в переходе к новому ортогональному базису, оси которого ориентированы по направлениям максимальной дисперсии набора входных данных. Вдоль первой оси нового базиса дисперсия максимальна, вторая ось максимизирует дисперсию при условии ортогональности первой оси и т. д. Последняя ось имеет минимальную дисперсию из всех возможных. Таким образом находятся векторы, проекции на которые несут больше всего информации. Алгоритм метода следующий.

Климов Николай Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: klimov.ns@mail.ru, тел.: +7(965)034-94-72

Пусть X_1, \dots, X_N — изображения лиц, составляющие обучающую выборку, $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ — среднее лицо обучающей выборки. Тогда матрица ковариации вычисляется по формуле

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T.$$

Главными компонентами назовем набор ортонормированных собственных векторов $u_1, \dots, u_{N'}$ матрицы C , идущих в порядке убывания собственных значений. Пусть N' — размерность пространства, натянутого на векторы u_i , $N' \leq N$.

Чтобы получить представление Ω произвольного вектора X в главных компонентах, нужно центрировать X и спроецировать его на базис $u_1, \dots, u_{N'}$, т. е. сделать операцию

$$\omega_k = u_k^T (X - \bar{X}),$$

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{N'}\}.$$

Вообще говоря, уже на этом этапе можно провести простейшую классификацию, найдя в обучающей выборке ближайшее лицо по евклидовой метрике. Иными словами, нужно найти лицо с индексом k , которое минимизирует

$$\varepsilon_k = \|\Omega - \Omega_k\|^2,$$

где Ω_k — весовой вектор, соответствующий лицу k из обучающей выборки.

Однако такой метод не дает требуемой точности, поэтому нужен иной алгоритм классификации.

2.2. Линейный дискриминантный анализ. Метод линейного дискриминантного анализа в целом схож с методом главных компонент. В этом методе выбирают проекцию пространства изображений на пространство признаков так, чтобы минимизировать внутриклассовое и максимизировать межклассовое расстояние в пространстве признаков.

Пусть $x^{(i)}$ — лица, принадлежащие человеку i , μ_i — среднее лицо из $x^{(i)}$, μ — среднее лицо всей выборки X , N_i — число лиц класса i , K — число классов (людей из обучающей выборки). Тогда алгоритм метода следующий.

Для каждого класса вычисляем его ковариационную матрицу

$$S_j = \sum_{i=1}^{N_i} (x_i^{(j)} - \mu_j)(x_i^{(j)} - \mu_j)^T.$$

Вводим матрицы

$$S_w = \sum_{j=1}^K S_j,$$

$$S_b = \sum_{i=1}^K N_i (\mu_i - \mu)(\mu_i - \mu)^T.$$

Далее находим собственные векторы u_1, \dots, u_K матрицы

$$\Sigma = S_w^{-1} S_b.$$

Таким же образом, как и в методе главных компонент, проецируем входящий вектор X на векторы u_i и получаем Ω — представление X в пространстве признаков.

3. Конфигурация нейронной сети. В качестве классификатора выбран двухслойный персептрон, обучающийся алгоритмом обратного распространения ошибки. Подробнее об этом алгоритме можно прочитать в [1].

Сложность использования нейронных сетей в подобных задачах заключается в выборе параметров сети таких, как количество слоев, количество нейронов в скрытых слоях, число итераций для обучения. Конфигурация сети показана в таблице 1. Параметры подобраны экспериментально с целью улучшения точности классификации.

Таблица 1. Конфигурация сети

Параметр	Значение
Количество эпох обучения	400
Количество нейронов входного слоя	$\dim(\Omega)$
Количество нейронов скрытого слоя	70
Количество нейронов выходного слоя	Количество классов

4. Эксперимент. Для реализации эксперимента использовался программный пакет ruBrain, реализующий основные функции нейронных сетей и алгоритмы их обучения.

В качестве базы данных взята база университета Yale, содержащая 200 изображений двадцати лиц. На рис. 1 можно видеть примеры лиц из базы данных. На рис. 2 показаны первые 16 главных компонент.



Рис. 1. Примеры лиц из базы данных

Сначала выборка была разделена на обучающую и тестовую в пропорции 70:30. Далее на основе обучающей выборки были получены векторы $\{u_i\}$. Перцептрон тренировался на проекциях обучающей выборки на пространство признаков. Результаты эксперимента представлены в таблице 2. В ней PCA (Principal Component Analysis) — метод главных компонент; LDA (Linear Discriminant Analysis) — линейный дискриминантный анализ; ANN (Artificial Neuron Network) — искусственная нейронная сеть. Указана средняя точность за три эксперимента. Результаты соотносятся с другими исследованиями в этой области [2].

Таблица 2. Результаты эксперимента

Метод	Точность	Время обучения (сек.)
PCA	78%	3,6
LDA	85%	5,2
PCA + ANN	86%	41
LDA + ANN	89%	52

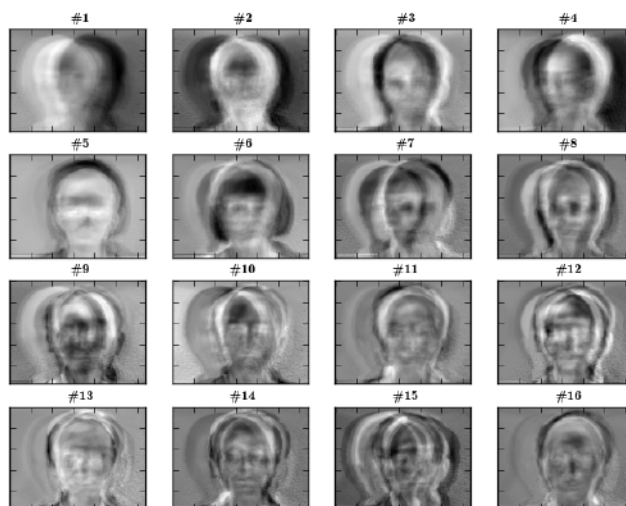


Рис. 2. Первые 16 главных компонент

5. Вывод. Как видно из результатов эксперимента, по сравнению с методом нахождения ближайшего лица в пространстве признаков, нейронные сети прямого распространения позволяют выполнять распознавание лиц с лучшей степенью точности. Результат может быть существенно улучшен при использовании более продвинутых нейросетевых методов таких, как сверточные нейронные сети или каскады классификаторов.

Литература

1. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. 2-е изд. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.
2. Latha P., Ganesan L., Annadurai S. Face recognition using neural networks // Signal Processing: An International Journal. 2008. Vol. 3. P. 153–160.

УДК 519.711.3

Князькин Я. В.

Обнаружение и диагностика динамических сбоев в процессе стабилизации движения морского судна

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Постановка задачи. В работе рассматривается задача компьютерного моделирования процесса управления морским судном, во время которого возникают неисправности, которые следует обнаружить и идентифицировать. Цель состоит в построении системы обнаружения и изоляции динамических сбоев. В основу принятого подхода положен метод главных компонент (РСА — Principal Component Analysis). Этот статистический метод, не использующий модель объекта, был выбран по той причине, что она часто неизвестна или известно только грубое линейное приближение к ней. Система должна не только установить факт сбоя, но также и определить его тип.

2. Метод главных компонент. Он определяет вычислительную процедуру, которая переводит большое количество коррелированных переменных в меньшее число некоррелированных, называемых главными компонентами. Пусть X — $(N \times n)$ -матрица, составленная из N n -мерных наблюдений состояния системы. Чтобы перейти от n переменных к $l < n$, требуется реализовать следующую процедуру:

1) вычислить матрицу $A = X^T X$, пропорциональную ковариационной и имеющую те же собственные векторы и пропорциональные собственные числа. Если переменные имеют разную амплитуду, матрицу X следует нормировать;

2) вычислить собственные числа λ_j и собственные вектора p_j матрицы A ;

3) выбрать l максимальных собственных чисел λ_j и соответствующих им собственных векторов p_j , после чего построить матрицу перехода

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l]; \quad (1)$$

Князькин Ярослав Вячеславович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: yaroslavknyazkin@gmail.com, тел.: +8(981)762-29-04

4) выполнить линейное преобразование данных:

$$T = XP; \quad (2)$$

5) осуществить обратное преобразование к размерности n :

$$\hat{X} = TP^T = XPP^T. \quad (3)$$

Здесь $X = \hat{X} + \tilde{X}$, где $\tilde{X} = X(E - C_l)$ — остаток, $C_l = PP^T$. Чтобы определить возможные неисправности в динамическом процессе, который представлен указанными данными, необходимо сравнить начальный сигнал с сигналом, полученным после обратного преобразования. Норму остатка принято обозначать SPE (Square Prediction Error): $SPE = \|\tilde{X}\|$ — это характеристика меры нарушения корреляции, т. е. отклонения процесса от нормального течения. Если она превышает определенный порог, это значит что произошел динамический сбой. Порог может быть постоянным или адаптивным. Постоянный порог определяется по формуле [1]

$$SPE_\alpha = \theta_1 \left[\frac{c_\alpha h_0 \sqrt{2\theta_1}}{\theta_1} + 1 + \frac{\theta_2 h_0 (h_0 - 1)}{\theta_1^2} \right]^{\frac{1}{n^0}}, \quad (4)$$

где $\theta_i = \sum_{j=l+1}^n \lambda_j^i$, $i = 1, \dots, n$, $h_0 = 1 - \frac{2\theta_1\theta_3}{3\theta_2^2}$. Структура формирования адаптивного порога представлена на рис. 1, где использованы обозначения: U — SPE для текущего наблюдения, C_1 — постоянный порог, множитель C_2 и параметры фильтров можно подобрать экспериментально.

3. Метод частичных главных компонент. Сформированная система должна не только обнаруживать неисправности, но и идентифицировать их тип. Для этого используется метод РРСА (Partial PCA), описанный в [2, 3]. Пусть произошел сбой при векторе состояния $x \approx x^* + \Xi_R f_R$, где x^* — невозмущенный вектор, Ξ_R — ортонормальная $(n \times r)$ -матрица, R — подмножество индексов координат x , на которые воздействует возмущение. Размерность R ограничена, $r < n - l$. Тогда $\hat{x}_R = G_R x$, $\tilde{x}_R = (E - C_l)G_R x = P_R^{(l)} x$, где $\tilde{\Xi}_R = (E - C_l)\Xi_R$, $G_R = E - \Xi_R \left(\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Xi}_R \right)^{-1} \tilde{\Xi}_R^T$, $P_R^{(l)} = (E - C_l)G_R$; $f_R = \operatorname{argmin} \|\tilde{x} - \tilde{\Xi}_R f_R\|^2 = \left(\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Xi}_R \right)^{-1} \tilde{\Xi}_R^T \tilde{x}$. Если $SPE_R = \|\tilde{x}_R\|$ меньше порога, значит матрица Ξ_R выбрана верно. Сбой может быть

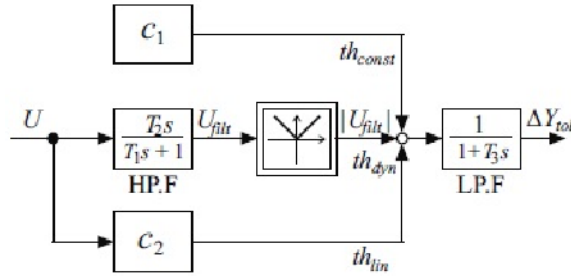


Рис. 1. Структура формирования адаптивного порога

обнаружен не на каждом направлении: существует показатель R_{cond} , равный отношению минимального и максимального сингулярных чисел матрицы $\tilde{\Xi}_R$. Если он близок к нулю, обнаружение происходит только при очень большом значении f_R . Это относится ко всем другим направлениям, содержащим R .

В некоторых случаях достаточно вычислить SPE_R , но при управлении морским судном большинство возможных неисправностей воздействует на все переменные. В этом случае требуется применять методы кластерного анализа, заранее сформировав выборки $D_i = SPE_i$ по возмущенным данным.

4. Алгоритм обнаружения и идентификации неисправности. Перед началом процесса управления интегрируются уравнения динамики объекта и формируется матрица из измерений состояния судна при нормальном функционировании. После этого находятся матрицы, используемые в алгоритмах PCA и PPCA. Моделируются все возможные неисправности и записываются в память выборки соответствующих им $D_i = \{SPE_i\}$.

Во время процесса для каждого наблюдения производится прямое и обратное преобразование, вычисляются SPE. Если SPE превышает порог, вычисляется SPE_i и расстояние до выборок по метрике Махаланобиса $\rho(x, D) = \sqrt{(x - \mu)^T S^{-1} (x - \mu)}$, где μ — среднее значение, S — ковариационная матрица выборки D .

5. Пример. Рассматривается процесс, во время которого катер водоизмещением 512 т должен удерживать заданный курс в усло-

виях морского волнения интенсивностью 5 баллов. Последовательно возникают три различных неисправности: заклинивание руля (50–350 с), отказ датчика руля (нулевой сигнал на 1000–2000 с), отказ компаса (нулевой сигнал на 3000–3500 с). Система использует пять переменных: V_y — боковую скорость, ω — угловую скорость вращения по курсу, φ — курс, u — управляющий сигнал, δ — отклонение вертикального руля. Количество главных компонент было принято равным трем. Результат обнаружения и идентификации сбоев представлен на рис. 2–5.

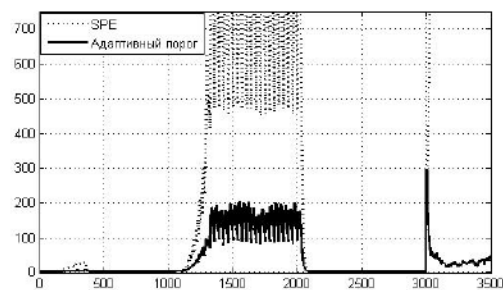


Рис. 2. SPE и адаптивный порог



Рис. 3. Идентификация первого сбоя

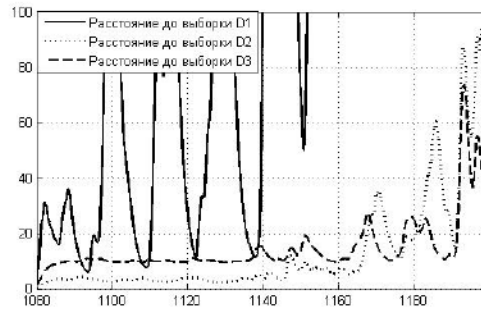


Рис. 4. Идентификация второго сбоя

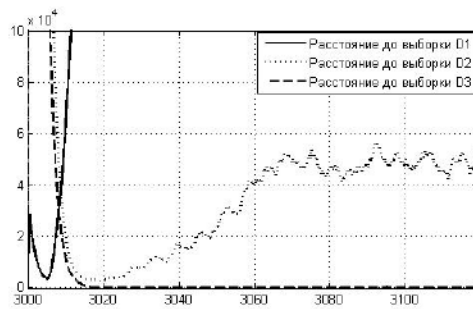


Рис. 5. Идентификация третьего сбоя

6. Выводы и дальнейшие перспективы. Поставленная задача может быть успешно решена с применением предложенного подхода. Его эффективность продемонстрирована на примере динамики конкретного судна с моделированием в среде MATLAB. Тем не менее, возможно существование трудно отличимых друг от друга неисправностей. Для решения проблемы идентификации сбоя следует использовать более сложные методы кластерного анализа или сочетать PCA с другими методами.

Литература

1. Noppa – portaali [Электронный ресурс]: URL:https://noppa.aalto.fi/noppa/kurssi/ke-90.5100/viikkoharjoitukset/exercise_1_instruction_pca.pdf (дата обращения: 15.03.14).
2. Tharrault Y., Mourot G., Ragot J. Fault detection and isolation with robust principal component analysis // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2008. Vol. 18, No 4. С. 429–442.
3. Dunia R., Joe Qin S. Subspace approach to multidimensional fault identification and reconstruction // AIChE Journal. 1998. Vol. 44, No 8. P. 1813–1831.

УДК 004.056

**Комаров И. И., Юрьева Р. А., Дранник А. Л.,
Масленников О. С., Коваленко М. Е., Егоров Д. А.**

Исследование деструктивного воздействия роботов-злоумышленников на эффективность работы мультиагентной системы

1. Введение. Частным случаем практического применения технологий мультиагентных систем (МАС) является роевая робототехника — одно из самых перспективных направлений автоматизации сложных технических задач. Снижение цен и, как следствие, совокупной стоимости владения влечет рост востребованности роевых робототехнических систем (РРТС) в различных сферах деятельности. Наиболее существенные преимущества РРТС — избыточность, надежность и масштабируемость, обеспечивающие способность к самовосстановлению и устойчивость к сбоям, благодаря достаточному запасу компонентов и самоорганизации.

Но приведенные преимущества ведут и к уникальным уязвимостям РРТС, среди которых есть и уязвимости в области информационной безопасности (ИБ). Это, в свою очередь, диктует острую потребность в качественной оценке ИБ РРТС. На текущий момент

Комаров Игорь Иванович — доцент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики; e-mail: komarov@cit.ifmo.ru, тел.: +7(812)233-86-51

Юрьева Рада Алексеевна — аспирант, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики; e-mail: alegria89@bk.ru, тел.: +7(812)233-86-51

Дранник Анастасия Леонидовна — магистрант, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики; e-mail: dan52434@yandex.ru, тел.: +7(812)233-86-51

Масленников Олег Сергеевич — студент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики; e-mail: maslennikovoleg@gmail.com, тел.: +7(812) 233-86-51

Коваленко Михаил Евгеньевич — студент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики; e-mail: michaelkovalenko93@gmail.com, тел.: +7(812) 233-86-51

Егоров Денис Анатольевич — студент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики; e-mail: mgkrpvn@gmail.com, тел.: +7(812) 233-86-51

Работа выполнена в рамках НИР Университета ИТМО № 6104454/4111

исследования в этой области отстают от развития самих РРТС. Рост сфер использования РРТС и недостаточный уровень научно-методического аппарата их ИБ обуславливают актуальность данной работы.

Целью работы является получение зависимости показателей эффективности работы МАС от количества роботов-злоумышленников, внедренных в систему.

Исследование проводилось по классической схеме:

1. Адаптация ИСИМ к задачам и условиям эксперимента.
2. Определение пространства признаков и формализация признаков эффективности работы системы.
3. Проведение имитационного моделирования работы РРТС в случаях оказания деструктивного воздействия на систему и его отсутствия.
4. Обработка полученных результатов экспериментов.

Данные, используемые в исследовании, получены экспериментальным путем, причем эксперименты проведены с выполнением следующих условий:

- применение РРТС как частного случая МАС;
- в качестве инструментального средства имитационного моделирования (ИСИМ) использовалась программа V-REP, адаптированная для работы с моделью робота марки Kilobot;
- использование алгоритма группирования (по парам) в работе РРТС;
- время, отводимое на каждый эксперимент, $t = 30$ мин;
- каждый робот-злоумышленник может ввести заблуждение не более двух роботов-агентов;
- во время оказания деструктивного воздействия на робота-агента выполнение им задачи невозможно.

Полученные данные обработаны с целью получения зависимости $m(d, n)$, где m — число роботов-агентов, находящихся в паре с другими роботами-агентами на момент времени t ; d — число роботов-злоумышленников, внедренных в систему; n — общее число роботов-агентов, участвующих в работе системы.

В работе в качестве показателей эффективности использовались:

- коэффициент $k = \frac{m}{n}$;
- значение n , при котором значение m является равным заданному.

2. Группирование РРТС. В проведенном исследовании представлены результаты некоторого воздействия роботов-злоумышленников на рой с целью уменьшения эффективности выполнения задачи группировкой. Роботы-агенты роя передвигаются по плоскости в поисках друг друга. В случае сближения двух роботов, находящихся в состоянии поиска пары, на расстояние связи, они образуют пару и прекращают движение.

Целью воздействия, осуществляемого роботами-злоумышленниками, является минимизация m при данном n . Эта цель достигается путем внедрения некоторого количества d неподвижных роботов-злоумышленников, которые имитируют вступление в пару с роботами-агентами. Важным фактором является то, что каждый робот-диверсант может находиться в паре с несколькими другими роботами. Таким образом, количество роботов $(n - m)$, не вступивших в пару на момент времени t , может увеличиться на величину большую, чем d , в результате работы роботов-злоумышленников.

На рис. 1 представлена зависимость $k(d, n)$.

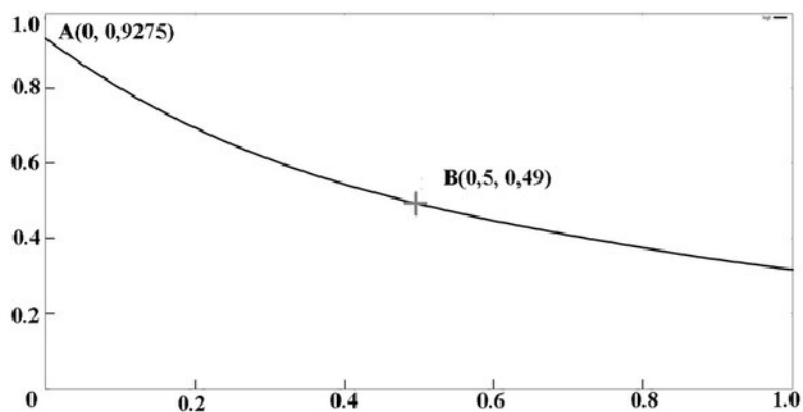


Рис. 1. Зависимость эффективности работы РРТС от $\frac{d}{n}$

На графике приведена точка А (0, 0,9275), характеризующая эф-

фektivность работы РРТС при отсутствии роботов-злоумышленников. Полученное значение эффективности отличается от теоретически возможного максимума, так как в части экспериментов присутствовали роботы, не нашедшие пару за время t . Такие роботы составляют в среднем 7% от общего числа, что характерно для РРТС. Также, значению $\frac{d}{n} = 0,5$ соответствует $\frac{m}{n} = 0,49$, т. е. при количестве роботов-злоумышленников в два раза меньшем, чем число роботов, работающих над выполнением задачи, величина $m = d$.

Для изучения эффективности воздействия роботов-злоумышленников более информативной является производная функции k .

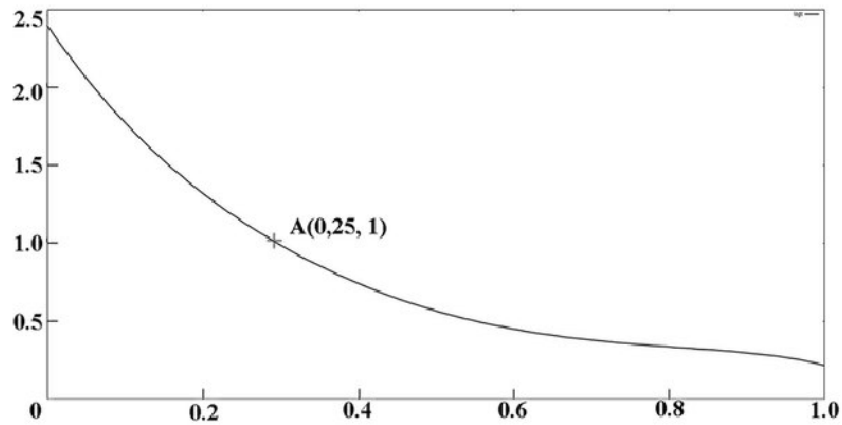


Рис. 2. Маргинальное влияние единичного робота-злоумышленника на эффективность работы РРТС при известных значениях d и n

Из приведенного на рис. 2 графика очевидно, что внедрение роботов-злоумышленников в количестве, превышающем $\frac{1}{4}$ числа роботов-агентов роя, нецелесообразно в силу того, что каждый следующий робот-диверсант уменьшает величину m на значение, меньшее единицы. Описанному состоянию системы соответствует точка $A(0,25, 1)$.

3. Заключение. Полученные зависимости показателей эффективности работы МАС от количества роботов-злоумышленников, внедренных в систему, могут быть использованы при решении прямых и обратных задач оценки вероятности достижения цели МАС.

Литература

1. Добрынин Д. А., Карпов В. Э. Моделирование некоторых форм адаптивного поведения интеллектуальных роботов // Информационные технологии и вычислительные системы 2006. №2. С. 45–56.
2. Beni, G., Wang, J. Swarm intelligence in cellular robotic systems // Proceedings of NATO Advanced Workshop on Robots and Biological Systems. 1989. P. 1–2.
3. Barca J. C., Sekercioglu Y. A. Swarm robotics reviewed // Robotica. 2012. №31. P. 1–12.
4. Кельтон В. Имитационное моделирование. Классика ЦС. СПб: Издательская группа BHV, 2004. 280 с.
5. Каляес И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009. 280 с.
6. Turgut A., Celikkanat H., Gokce F., Sahin E. Self-organized flocking in mobile robot swarms // Swarm Intelligence. 2008. P. 97–120.
7. Юревич Е. И. Основы робототехники. 2 изд. СПб: Издательская группа BHV, 2005. 416 с.

УДК 62-503.55

Короткова Н. Ю.

Динамическое позиционирование мобильного робота

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

Введение. Пусть движение робота описывается следующими уравнениями

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega,$$

где (x, y) — координаты робота на плоскости, θ — угол поворота вокруг вертикальной оси, измеряемый относительно оси Ox , при этом линейная v и угловая ω скорости трактуются как управляющие сигналы. На их значения, а также на значения линейного и углового ускорений, т. е. производных $\dot{v} = a$ и $\dot{\omega} = \varepsilon$, налагаются ограничения

$$|v| \leq v_{\max}, \quad |\omega| \leq \omega_{\max}, \quad |a| \leq a_{\max}, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_{\max}.$$

Поставим задачу о построении управления, переводящего робота из фиксированного начального положения $q_s = (x_s, y_s, \theta_s)^T$ в произвольно задаваемое конечное положение $q_g = (x_g, y_g, \theta_g)^T$.

Общий подход к решению. Прежде всего зададимся целью построить допустимую программную траекторию, проходящую через заданные точки, с учетом ограничений, наложенных на значения управляющих сигналов, но не на их производные. Предположим, что весь путь робот проходит на максимальной скорости. Будем строить желаемую траекторию движения робота из сегментов двух типов: дуг окружностей наименьшего возможного радиуса $R = |v_{\max}/\omega_{\max}|$ и отрезков прямых. Будем рассматривать составные траектории «дуга – прямая – дуга», причем, только те, у которых совпадает направление поворота в начале и в конце движения.

Короткова Нелли Юрьевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: *nelly_kor@mail.ru*, тел.: +7(921)752-15-44

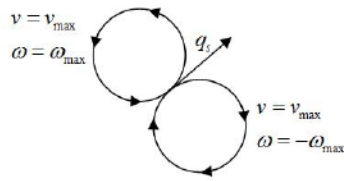


Рис. 1. Окружности левого и правого поворотов для положения q_s

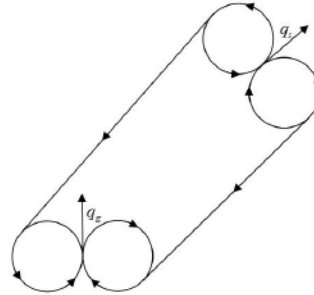


Рис. 2. Два варианта траектории

Такие траектории можно построить для любых начального и конечного положений. Действительно, для любого положения $q = (x, y, \theta)^T$ можно построить на плоскости две окружности, соответствующие повороту налево при входных сигналах $v = v_{\max}$, $\omega = \omega_{\max}$ и повороту направо при $v = v_{\max}$, $\omega = -\omega_{\max}$ (рис. 1). Построим такие окружности для начального и конечного положений q_s и q_g и соединим их касательными, учитывая направление движения. Таким образом, получим два варианта искомой траектории, из которых впоследствии можно будет выбрать наиболее предпочтительный (рис. 2).

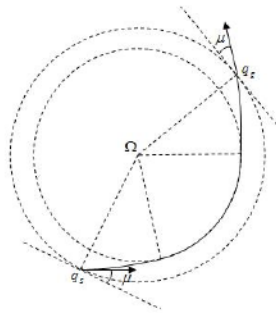


Рис. 3. Поворот с непрерывной кривизной

Поворот с непрерывной кривизной и μ -касательные. Существенным недостатком траекторий, построенных описанным выше способом, является то, что в момент перехода с окружности на касательную к ней прямую, а также в момент перехода с прямой на окружность, угловая скорость должна мгновенно изменить свое значение с $\pm\omega_{\max}$ на 0, или наоборот. Это предполагает бесконечное угловое ускорение, что не удовлетворяет ограничениям.

Указанную проблему можно решить, используя для перехода между прямыми и окружностями клотоиды — кри-

вые, кривизна которых изменяется линейно в зависимости от длины дуги $k(s) = \sigma s + k_0$. При этом окружности заменяются поворотами с непрерывной кривизной [1], которые состоят из трёх составляющих: части клотоиды с $\sigma = \pm\sigma_{\max}$, кривизна которой изменяется от 0 до $\pm k_{\max}$; дуги окружности; части клотоиды с $\sigma = \mp\sigma_{\max}$, кривизна которой изменяется от $\pm k_{\max}$ до 0 (рис. 3).

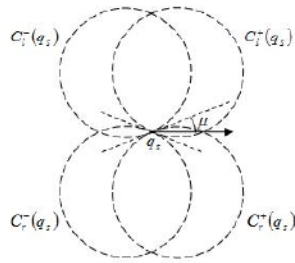


Рис. 4. Окружности $C_l^+(q_s)$, $C_r^+(q_s)$, $C_l^-(q_s)$ и $C_r^-(q_s)$ для положения q_s

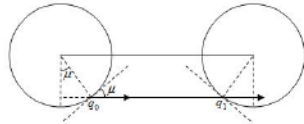


Рис. 5. μ -касательная, соединяющая две окружности

Множество положений q_g , достижимых из некоторого начального положения q_s , на плоскости представляет собой окружность радиуса r , причем в каждой из таких точек ориентация робота будет составлять угол μ с касательной к этой окружности. Эти величины однозначно определяются параметрами k_{\max} и σ_{\max} . Для любого q_s можно построить четыре таких окружности $C_l^+(q_s)$, $C_r^+(q_s)$, $C_l^-(q_s)$ и $C_r^-(q_s)$, где знак «+» или «-» определяет направление движения, а l или r — направление поворота (рис. 4).

Для соединения окружностей достижимости необходимо использовать μ -касательные линии, которые являются секущими этих окружностей в обычном смысле и в точках пересечения составляют с касательной угол μ (рис. 5).

Разгон и торможение робота.

Сделанное ранее предположение о том, что робот проходит весь путь на максимальной скорости, означает, что в начале движения он должен мгновенно набрать максимальную скорость и так же мгновенно остановиться в конце, что в реальности невозможно. Чтобы избежать этого, добавим в начале и в конце траектории прямолинейные участки для разгона и торможения наименьшей достаточной для этого длины $S = \frac{v_{\max}^2}{2a_{\max}}$.

Тогда все остальные расчеты будут проводиться для новых на-

чального и конечного положений

$$q'_s = q_s + (S \cos \theta_s, \sin \theta_s, 0)^T, \quad q'_g = q_g - (S \cos \theta_g, \sin \theta_g, 0)^T.$$

Алгоритм бортового расчета траектории. В качестве итога проведенных рассуждений сформулируем алгоритм построения допустимой программной траектории, предназначенный для бортовой реализации.

1. Найдем параметры r и μ и новые начальное и конечное положения q'_s и q'_g .
2. Найдем центры окружностей $C_l^+(q'_s)$, $C_r^+(q'_s)$ и центры $C_l^-(q'_g)$, $C_r^-(q'_g)$.
3. Построим μ -касательные между $C_l^+(q'_s)$ и $C_l^-(q'_g)$, $C_r^+(q'_s)$ и $C_r^-(q'_g)$.
4. Получим два варианта траектории, каждый из которых задан тремя значениями (α, b, γ) , где α и γ — углы поворота, а b — длина отрезка прямой.
5. Выберем наиболее предпочтительную траекторию. Например, в зависимости от того, по какую сторону относительно q_s лежит q_g . Также можно использовать в качестве критерия суммарную длину траектории и выбирать ту, длина которой меньше.

Построение управления. По полученным значениям (α, b, γ) построим управляющие сигналы $v(t)$ и $\omega(t)$ в виде кусочно-линейных функций:

$$v(t) = \begin{cases} a_{\max} t, & 0 \leq t < \tau, \\ v_{\max}, & t \leq T - \tau, \\ v_{\max} - a_{\max} t, & T - \tau < t \leq T, \end{cases}$$

где T — общее время движения, $\tau = v_{\max}/a_{\max}$ — время, необходимое для разгона до максимальной скорости.

На прямолинейных участках траектории $\omega(t) = 0$. На участке траектории, соответствующем повороту на угол α :

- при $\alpha > \delta_{\min} = \frac{\omega_{\max}^2}{\varepsilon_{\max}}$ угловая скорость $\omega(t)$ представляет собой трапецевидную функцию такую, что $\dot{\omega} = w$, $w \in \{\varepsilon_{\max}, 0, -\varepsilon_{\max}\}$;

- при $\alpha \leq \delta_{\min}$ угловая скорость $\omega(t)$ представляет собой треугольную функцию такую, что $\dot{\omega} = \pm \sigma v_{\max}$, где

$$\sigma = \frac{\pi \left(\cos(\alpha/2) C_f \left(\sqrt{\alpha/\pi} \right) + \sin(\alpha/2) S_f \left(\sqrt{\alpha/\pi} \right) \right)^2}{r^2 \sin^2(\alpha/2 + \mu)},$$

C_f и S_f — интегралы Френеля.

В случае поворота налево $\omega(t) \geq 0$, направо — $\omega(t) \leq 0$. При этом в обоих случаях должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{t_1} |\omega(t)| dt = \alpha.$$

Моделирование динамики робота. Для подтверждения состоятельности принятого подхода работа алгоритма была проверена с использованием Simulink-модели динамики робота. При реализации управления для обеспечения устойчивости движения была также добавлена обратная связь [2], удерживающая робот на траектории, генерируемой опорным объектом, модель которого аналогична модели робота.

Управление, подаваемое на вход робота, строится в виде

$$v(t) = v_r(t) + C_2 \{ [x_r(t) - x] \cos \theta + [y_r(t) - y] \sin \theta \},$$

$$\omega(t) = \omega_r(t) + C_1 [\theta_r(t) - \theta],$$

где $v_r(t)$ и $\omega_r(t)$ — управляющие сигналы, подаваемые на вход опорной модели, а $q_r(t) = (x_r(t), y_r(t), \theta_r(t))^T$ — генерируемая ей траектория.

Для демонстрации работы системы позиционирования в модель робота был добавлен шум, который в реальности может быть вызван неровностями на поверхности, по которой передвигается робот.

Рассмотрим пример работы алгоритма. Зададим начальное и конечное положения $q_s = (0, 0, 0)^T$, $q_g = (6, 4, \pi)^T$, параметры модели $v_{\max} = 1$, $\omega_{\max} = 1$, $a_{\max} = 1$, $\varepsilon_{\max} = 1$ и значения коэффициентов обратной связи $C_1 = 0,7$, $C_2 = 0,7$.

Полученные результаты представлены в виде графиков на рис. 6, 7. Робот перешел в положение $q(T) = (6, 03, 4, 07, 3, 2)^T$ за время $T = 12, 44$.

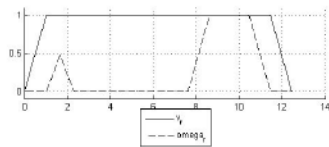


Рис. 6. Управляющие сигналы

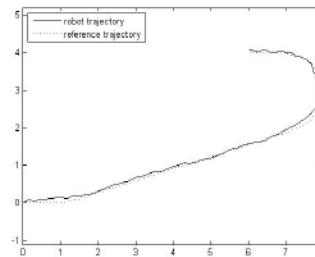


Рис. 7. Траектория робота и опорная траектория

Проведенное исследование подтвердило состоятельность предложенного подхода.

Литература

1. Fraichard T., Scheuer A. From Reeds and Shepp's to continuous-curvature paths // IEEE Trans. on Robotics and Automation. 2004. Vol. 20, No 6. P. 1025–1035.
2. Panteley E., Lefeber E., Loria A., Nijmeijer H. Exponential tracking control of a mobile car using cascaded approach // Proceedings of the IFAC Workshop on Motion. Grenoble, France. 1998. P. 221–226.

УДК 519.612.2

Лашков А. А.

Решение СЛАУ с разреженной матрицей методом приведения к блочному диагонально-окаймленному виду

Рекомендовано к публикации доцентом Ереминым А. С.

1. Введение. Рассматривается система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с квадратной невырожденной разреженной матрицей. Ставится задача найти перестановку P , которая приводит матрицу A к блочному диагонально-окаймленному (БДО) виду

$$\widehat{A} = PAP^T = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & B_1 \\ \mathbb{O} & A_2 & \dots & \mathbb{O} & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & A_m & B_m \\ C_1 & C_2 & \dots & C_m & D \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тогда исходная система представляется в виде $\widehat{A}\widehat{x} = \widehat{b}$:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & B_1 \\ \mathbb{O} & A_2 & \dots & \mathbb{O} & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & A_m & B_m \\ C_1 & C_2 & \dots & C_m & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \vdots \\ \widehat{x}_m \\ \widehat{x}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \\ \vdots \\ \widehat{b}_m \\ \widehat{b}_{m+1} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\widehat{x} = Px$, $\widehat{b} = Pb$.

Систему (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} A_i \widehat{x}_i + B_i \widehat{x}_{m+1} = \widehat{b}_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m C_i \widehat{x}_i + D \widehat{x}_{m+1} = \widehat{b}_{m+1}. \end{cases} \quad (3)$$

Лашков Антон Александрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: lenton_91@mail.ru, тел.: +7(981)755-20-44

Из первой группы уравнений (3) выразим

$$\hat{x}_i = A_i^{-1} (\hat{b}_i - B_i \hat{x}_{m+1}), \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Подставив (4) во второе уравнение (3), получим

$$\sum_{i=1}^m C_i A_i^{-1} (\hat{b}_i - B_i \hat{x}_{m+1}) + D \hat{x}_{m+1} = \hat{b}_{m+1}$$

или после преобразования

$$\left(D - \sum_{i=1}^m C_i A_i^{-1} B_i \right) \hat{x}_{m+1} = \hat{b}_{m+1} - \sum_{i=1}^m C_i A_i^{-1} \hat{b}_i.$$

Таким образом для решения исходной системы нужно решить систему

$$H \hat{x}_{m+1} = g, \quad (5)$$

где $H = D - \sum_{i=1}^m C_i A_i^{-1} B_i$, $g = \hat{b}_{m+1} - \sum_{i=1}^m C_i A_i^{-1} \hat{b}_i$.

После чего, решая

$$\begin{cases} A_i \hat{x}_i = b_i - B_i \hat{x}_{m+1}, & i = \overline{1, m}, \\ x = P^T \hat{x}, \end{cases}$$

находим решение исходной системы.

2. Алгоритм приведения матрицы к БДО виду. Рассмотрим $(N \times N)$ -матрицу A и соответствующий её структуре граф $G = (V, E)$, где $V = \{1, \dots, N\}$, $E = \{(i, j) \mid a_{i,j} \neq 0 \vee a_{j,i} \neq 0, i, j = \overline{1, N}\}$. Зададим минимальный N_{min} и максимальный N_{max} размер диагональных блоков A_1, \dots, A_m .

Шаг 0. Зададим $J = \emptyset$, $m = 0$, $D = \{D_0\}$.

Шаг 1. $m = m + 1$, $D = D \cup D_m$, $J_{min} = \infty$.

Выберем вершину графа с наименьшим количеством соседей

$$\nu = \arg \min_{v \in V} |\text{adj } v|$$

и добавим её во множество D_m ($D_m = D_m \cup \nu$). Во множестве J запоминаем её соседей

$$J = \text{adj } \nu.$$

Убираем вершину ν из множества рассматриваемых ($V = V \setminus \nu$) и ребра, инцидентные ей.

Шаг 2. Если $|J| = 0$, то переходим на Шаг 1.

Из множества J выберем вершину ν с наименьшим количеством соседей из V , не входящих в J ,

$$\nu = \arg \min_{v \in J} |\text{adj } v \cap (V \setminus J)|$$

и добавим её в D_m ($D_m = D_m \cup \nu$). Во множестве J запоминаем те вершины, которые в исходном графе отделяют вершины множества D_m от остальных вершин графа.

$$J = (J \setminus \nu) \cup (\text{adj } \nu \cap (V \setminus J)),$$

Убираем вершину ν из множества рассматриваемых ($V = V \setminus \nu$) и ребра, инцидентные ей. Если $|V| = 0$, то выход.

Шаг 3. Если $|D_m| \geq N_{min}$ и $|J| \leq J_{min}$, то

$$J_{min} = |J|, \quad J_{opt} = J, \quad \theta = \nu.$$

Если $|D_m| = N_{max}$, то

$$D_0 = D_0 \cup J_{opt},$$

из множества D_m возвращаем в граф вершины (и ребра, связанные с ними), которые были добавлены в D_m после вершины θ , кроме вершин из J_{opt} , вершины из J_{opt} убираем из обоих множеств и переходим на Шаг 1, иначе, переходим на Шаг 2.

В результате получим множества D_0, \dots, D_m такие, что в исходном графе множества вершин D_1, \dots, D_m связаны между собой только через вершины множества D_0 . Эти множества образуют перестановку $P = (D_1, \dots, D_m, D_0)$, которая приводит исходную матрицу к блочному диагонально-окаймленному виду (1).

Управляющими параметрами метода являются параметры N_{min} и N_{max} , определяющие размер диагональных блоков A_1, \dots, A_m, D . Для эффективного по времени решения системы нас интересуют такие параметры, которые будут обеспечивать минимальную размерность блоку D (так как в процессе решения матрица H правой части (5) является плотной) при наименьшем значении N_{max} .

Данный метод основан на алгоритме, описанном в [1], с изменениями, которые позволяют на практике получить меньший размер блока D .

3. Полный алгоритм решения СЛАУ. Решение системы разбивается на несколько этапов:

- нахождение перестановки P для исходной матрицы по приведенному выше алгоритму;
- перестановка матрицы $\hat{A} = PAP^T$ и заполнение матриц $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_m, D$;
- LU -разложение матриц A_i ;
- нахождение матриц $\tilde{B}_i = A_i^{-1}B_i$ (решением систем $A_i\tilde{B}_i = B_i$, $i = \overline{1, m}$);
- составление матрицы $H = D - \sum_{i=1}^m C_i\tilde{B}_i$;
- LU -разложение матрицы H ;
- нахождение векторов $\tilde{b}_i = A_i^{-1}\hat{b}_i$ (решением систем $A_i\tilde{b}_i = \hat{b}_i$, $i = \overline{1, m}$);
- составление вектора $g = \hat{b}_{m+1} - \sum_{i=1}^m C_i\tilde{b}_i$;
- решение системы $H\hat{x}_{m+1} = g$;
- нахождение $\hat{x}_i = \tilde{b}_i - \tilde{B}_i\hat{x}_{m+1}$, $i = \overline{1, m}$;
- получение решения после обратной перестановки $x = P^T\hat{x}$.

4. Практические результаты. Тестирование алгоритма производилось на матрицах различной размерности и структуры [2]. Для сравнения были взяты два метода решения СЛАУ: решение через представление матрицы в блочном диагонально-окаймленном виде по приведенному выше алгоритму (вариант I) и решение через LU -разложение всей матрицы (вариант II). Параметрам метода заданы значения $N_{max} = 0,1N$, $N_{min} = 0,75N_{max}$.

Результаты решения системы с различными матрицами представлены в таблице.

Таблица. Результаты тестовой программы

Матрица	N	Заполнение	Решение I,c	Решение II,c	Ускорение
1138_bus	1138	0,4%	0,018	0,061	3,38
rail_1357	1357	0,56%	0,04	0,16	4
nasa1824	1824	1,23%	0,24	1,24	5,16
c-18	2169	0,36%	0,08	0,36	4,5
c-37	8204	0,11%	3,76	11,73	3,1
flowmeter0	9669	0,07%	2,14	55,84	26
tuma2	12992	0,03%	1,08	24,69	22,8
rail_20209	20209	0,03%	4,6	118,67	25,8
ncvxbqp1	50000	0,01%	660	4920	7

5. Вывод. Описанный алгоритм приведения разреженной матрицы к блочному диагонально-окаймленному виду показывает хорошие результаты. На рассмотренных матрицах он дает значительное ускорение в решении СЛАУ, однако необходимо определять параметры N_{min} и N_{max} , оптимальные значения которых зависят от размерности и структуры матрицы. Кроме того, блочная структура матрицы позволяет производить параллельно некоторые операции при решении: LU -разложение диагональных блоков, нахождение \tilde{B}_i, \tilde{b}_i , перемножение матриц при составлении матрицы H и др.

Литература

1. Sangiovanni-Vincentelli A., Li-Kuan Chen, Chua L.O. An efficient heuristic cluster algorithm for tearing large-scale networks // Circuits and Systems, IEEE Transactions on. 1977. Vol. 24. P. 709–717.
2. The University of Florida Sparse Matrix Collection [Электронный ресурс]: URL:<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/index.html> (дата обращения: 04.03.14).

УДК 517.518.82, 519.254

Новопашин Д. В.

Статистическая обработка данных вторичной радиолокации с помощью ортогональных полиномов Чебышева

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

1. Введение. Постановка задачи. Вторичная радиолокация используется в авиации для опознавания самолетов, ее основная особенность — использование на самолётах активного ответчика для определения положения воздушного судна. Радиолокационная станция (РЛС) облучает окружающее пространства запросными импульсами, а оборудованные ответчиками воздушные суда, находящиеся в зоне действия луча запроса, при получении запросных импульсов отвечают запрашившей РЛС серией кодированных импульсов, в которых содержится дополнительная информация о номере борта, высоте и т. п.

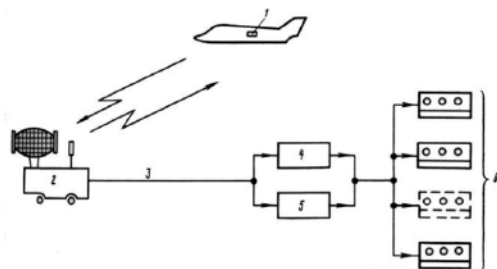


Рис. 1. Модель вторичной радиолокации: 1 — ответчик на борту ВС; 2 — РЛС; 3 — линия связи; 4,5 — обрабатывающая сигнал аппаратура; 6 — конечный пользователь.

В настоящее время активно используются две технологии определения местоположения самолетов — MLAT (*Multilateration*) и АЗН-В

Новопашин Дмитрий Вадимович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: veshchiy@yandex.ru, тел.: +7(911)938-14-23

(автоматическое зависимое наблюдение-вещание).

MLAT основана на методе, известном как временная разница приема [сигнала] (*Time Difference of Arrival*, TDOA), когда используется несколько наземных станций, размещенных в стратегических местах около аэропорта или разбросанных по широкой территории, покрывая большую площадь воздушного пространства. MLAT принимает ответы всех воздушных судов (ВС), оборудованных ответчиками, и определяет местонахождение ВС, основываясь на временной разнице поступления ответов от ВС (TDOA). АЗН-В — технология, активно внедряемая в настоящее время в США, России и других странах, позволяющая пилотам в кабине самолета и диспетчерам на наземном пункте получать аэронавигационную информацию (в том числе передает пилотам погодную информацию в реальном времени) и «видеть» трафик движения воздушных судов с большей точностью, чем это было доступно ранее. Все это значительно расширяет осведомленность пилота о ситуации и повышает безопасность полетов. Оборудованное АЗН-В ответчиком воздушное судно передает всем свои координаты месторасположения в течение всего полета вместе с другими данными, такими как скорость, высота, курс, вертикальная скорость. Приемники АЗН-В, интегрированные в системы контроля воздушного трафика авиадиспетчеров, а также установленные на борту воздушного судна, обеспечивают отображение на экране радара движения воздушных судов, оборудованных АЗН-В, как в небе, так на земле. Дополнительно, вне зависимости от поступления запроса от наземного радара, примерно каждую секунду самолетом передается расширенный сквиттер (*extended squitter*), который содержит координаты месторасположения воздушного судна.

Независимо от используемой технологии, принятый от ответчика сигнал, обработанный приёмником РЛС и поступивший к конечному потребителю и (или) на контрольный индикатор, содержит ошибку местоопределения. На величину этой ошибки могут влиять самые разные факторы — от погрешностей измерительных приборов и алгоритмов обработки до рельефа местности и погодных капризов. Поэтому предположим, что ошибка в каждом измерении независима и имеет нормальное распределение. Таким образом, чтобы получить как можно более точную оценку местоположения ВС на основе полученных данных, необходимо прежде минимизировать ошибку [1, 2].

Очевидно, что ошибка местоположения будет вносить «шум» в гладкую, изначально, траекторию движения ВС, поэтому перед ста-

статистической обработкой данные необходимо аппроксимировать. В этом и состоит основная задача.

2. Построение траектории. Входные данные имеют вид пар координат $(x_n(t), y_n(t))$, полученные в неравноотстоящие моменты времени t_n . Применение ортогональных полиномов Чебышева делает оценки некоррелированными, а использование рекуррентных формул при вычислении ортогональных многочленов более предпочтительно, чем непосредственное их вычисление, по ряду причин, в том числе снижение количества операций в алгоритме и уменьшение вычислительной погрешности [3]. Поэтому используется трехчленная формула:

$$\alpha Q_i(t) = tQ_{i-1}(t) - \alpha Q_{i-1}(t) - \beta Q_{i-2}(t), \quad i = 1, \dots, r$$

для рекуррентного вычисления ортогональных нормированных многочленов $Q_0(t), \dots, Q_r(t)$, при помощи которых наблюдения аппроксимируются многочленом степени r :

$$\phi(t) = \omega_0 Q_0 + \dots + \omega_r Q_r.$$

Начальные значения первых многочленов, где n — это количество пар координат, по которым происходит построение траектории:

$$Q_0(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad Q_1(t) = (t - \alpha)Q_0(t).$$

Коэффициенты α и β определяются далее по формулам:

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n t_i Q_{j-1}^2(t_i), \quad \beta_j = \sum_{i=1}^n t_i Q_{j-1}(t_i) Q_{j-2}(t_i).$$

Значение λ находится из условия:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \sqrt{Q_j^2(t_i)}.$$

Таким образом, получим матрицу коэффициентов Q в n столбцов, где n — это число точек в рассматриваемом отрезке, и в m строк, где $m = r + 1$ (в конкретном случае $r = 2$). Рассчитывать аппроксимированную траекторию необходимо отдельно по осям Ox и Oy , но

так как координаты привязаны к одному моменту времени попарно, то и матрица Q , и вспомогательные векторы α , β и λ размерностью m будут одинаковы для координат x и y . Отличаться будет лишь вектор ω :

$$\omega_{x_j} = \sum_{i=0}^n Q_i(t)x_i(t), \quad \omega_{y_j} = \sum_{i=0}^n Q_i(t)y_i(t).$$

Основным и главным недостатком метода наименьших квадратов, который использовался в контрольном индикаторе ранее, были огромные ошибки, возникающие в случаях, когда дискриминант базисного минора в ходе решения СЛАУ методом Гаусса был близок к нулю. Аппроксимация полиномами Чебышева не имела подобной проблемы и показывала более точное приближение траектории.

В ходе практической реализации возникла необходимость в создании прото-фильтра для предварительной обработки аппроксимируемых данных. Первая причина была в ошибках при формировании исходных данных: в некоторых случаях на обработку поступала пара координат, которая была обработана с задержкой:

$$\dots (x_{n-2}(t_{n-2}), y_{n-2}(t_{n-2})), (x_{n-1}(t_{n-1}), y_{n-1}(t_{n-1})), (x_n(t_n), y_n(t_n)),$$

где $t_{n-2} < t_n < t_{n-1}$.

Чтобы избежать таких ситуаций, перед каждым запуском алгоритма аппроксимации массив данных сортируется по возрастанию времени.

Вторая причина — неравномерное поступление данных в одном из режимов работы концентратора, когда вместо одной точки на обработку поступал кластер из нескольких десятков точек с временной разницей в несколько миллисекунд, при этом временная разница между последовательными кластерами точек могла составлять до нескольких секунд.

Данная проблема решалась усреднением точек за небольшой интервал времени, например, за 1 секунду. Данное решение позволило получить более гладкую, а значит и более реалистичную траекторию движения самолета. Несущественным минусом можно считать то, что на панели контрольного индикатора отображается положение траектории с запаздыванием в половину интервала усреднения.

3. Статистическая информация. На основе приходящих от самолета ответов обрабатываются следующие статистические пара-

метры, которые являются входной информацией для последующих вычислений:

pO — вероятность обнаружения ВС, отношение корректных ответов к общему числу полученных ответов за последние n секунд;

pA — вероятность режима А, отношение ответов, содержащих код А, к общему числу полученных ответов за последние n секунд;

pC — вероятность наличия высоты ВС, отношение ответов, содержащих информацию о высоте ВС, к общему числу полученных ответов за последние n секунд;

dT — средний период обновления положения ВС, среднее время задержки между ответами за последние n секунд;

pLG — вероятность долгой задержки («long gap»), задержка считается долгой при $t > 3,3 dT$;

SDP — среднеквадратичная погрешность местоположения ВС;

R — радиальная погрешность местоположения ВС;

AZ — азимутальная погрешность местоположения ВС.

Именно для вычисления трех последних величин используются значения сглаженной траектории:

$$SDP = \sqrt{(\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2},$$

$$R = \left| \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right|, \quad AZ = \left| \arctan \frac{\hat{y}}{\hat{x}} - \arctan \frac{y}{x} \right|,$$

где \hat{x}, \hat{y} — сглаженные значения.

Данный алгоритм был успешно интегрирован в программный пакет контрольного индикатора и в настоящий момент используется в коммерческих релизах продукта. В будущем планируется развитие продукта в двух направлениях: обработка накопленной информации с привязкой к местности, для выделения «проблемных» зон точности, и обработка накопленной информации с привязкой к ВС, для обнаружения неполадок в бортовых устройствах.

Литература

1. Идье В., Драйард Д., Джеймс Ф., Рус М., Садуле Б. Статистические методы в экспериментальной физике / пер. с англ. под ред. Тяпкина А. А. М.: Атомиздат, 1976. 336 с.
2. Маликов М. Ф. Основы метрологии. М.: Коммерприбор, 1949. 479 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973. 632 с.

УДК 004.738.5

Огийко А. А.

Применение метода Борда в ранжировании веб-сайтов

Рекомендовано к публикации доцентом Печниковым А. А.

1. Введение. На фоне стремительного развития и внедрения информационных технологий одним из важнейших показателей деятельности крупных организаций становится качество их представления в сети Интернет. Грамотно оформленное содержимое веб-сайтов и ссылки с авторитетных ресурсов обеспечивают удобный доступ к важной информации, как для пользователей, так и для потенциальных спонсоров, а также влияют на положительную оценку организации-владельца общественностью. Это касается различных учреждений, в числе которых вузы, исследовательские лаборатории, медицинские институты. Рост внимания к качеству специализированных веб-ресурсов привел к появлению вебметрических рейтингов, в рамках которых ресурсы ранжируются на основе некоторых показателей, таких как объем информации, цитируемость и т. д.

На сегодняшний день не существует единого подхода к созданию вебметрических рейтингов. При выборе набора показателей и объединяющей их формулы ранжирования, исследовательские группы руководствуются различными принципами. В среднем, используется от 6 до 8 показателей, а основным методом подсчета рейтингов является суммирование показателей с определенными коэффициентами (линейная функция). При этом иногда перед вычислением общего рейтинга проводится нормировка показателей различными способами (так как данные, полученные с помощью поисковых систем, могут быть ошибочны). Таким образом, остается актуальной задача поиска других существующих математических методов, которые могут применяться в вебметрическом ранжировании. Одним из таких методов является метод Борда, который нашел широкое применение в создании социологических и экономических рейтингов.

Огийко Анна Алексеевна – аспирант, Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН; e-mail: ogiiko@krc.karelia.ru, тел.: +7(931)702-58-75

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, грант № 12-03-12001

2. Использование метода Борда при ранжировании по нескольким показателям. Задача ранжирования веб-сайтов может быть представлена в форме задачи о групповом выборе. Согласно одному из существующих определений, приведенному Угольницким [1], стандартная постановка задачи группового выбора предполагает получение функции, которая должна строить групповую ранжировку для некоторого множества альтернатив на основе индивидуальных упорядочений. Применительно к веб-ресурсам и показателям их оценки ранжируемыми альтернативами в такой задаче могут быть сами веб-сайты, а индивидуальные ранжировки можно построить на основе показателей, в роли которых выступают различные данные, получаемые с помощью поисковых систем (количество страниц на сайте, количество полнотекстовых файлов и т. д.).

Среди существующих функций группового выбора для решения такой задачи можно выбрать правило Борда, одним из достоинств которого является возможность получения групповой ранжировки при любых условиях.

Для того чтобы использовать правило, необходимо вначале вычислить рейтинги участников ранжирования по каждому показателю, используя их порядковые номера в упорядоченных списках. Полученный результат будет являться набором индивидуальных ранжировок. Далее для каждого участника необходимо определить число Борда по формуле

$$B(a) = B_1(a) + \dots + B_n(a),$$

где a — сайт-участник, $B_i(a)$ — число сайтов, расположенных ниже него в i -ой индивидуальной ранжировке. Групповая ранжировка строится по следующему правилу: сайт a имеет больший ранг, чем сайт b тогда и только тогда, когда $B(a) > B(b)$.

Очевидно, что в такой модели не будут учитываться порядки различия значений показателей для набора веб-сайтов. Например, два участника могут занимать близкие позиции в общем рейтинге при сильно различающихся значениях одного из показателей. Исследования, проведенные на множестве веб-сайтов научных учреждений России, показали, что для достаточно большого количества единиц анализа (веб-сайтов) характерно экспоненциальное распределение значений показателей. Таким образом, можно сделать вывод о необходимости предварительной обработки данных, подлежащих ранжированию методом Борда.

3. Нормирование показателей. Одним наиболее эффективных и простых в исполнении методов нормирования показателей, подлежащих ранжированию является стратификация — разбиение по корзинам (группам). Идея разбиения участников на группы по каждому показателю уже была использована при составлении рейтинга РИВНОУ [2] (однако, далее использовалось ранжирование простым суммированием индивидуальных рейтингов).

Для применения разбиения необходимо определить на множестве значений каждого показателя N интервалов одинаковой длины и для каждого веб-сайта определить порядковый номер интервала, в который попадает соответствующее ему значение показателя. В зависимости от числа корзин порядок разности между значениями одного показателя для разных участников будет учитываться в большей или меньшей степени. Если взять достаточно большое число корзин, такое что в каждую корзину попадает не более одного участника, то получим индивидуальные ранжировки, аналогичные тем, что могут быть рассчитаны без предобработки.

4. Эксперимент. В ходе эксперимента использованы данные о 398 сайтах научных учреждений России, входящих в состав РАН, полученные с помощью поисковых систем Яндекс и Google, а также поискового робота BeeCrawler [3], в июне 2013 года. Рассмотрены следующие показатели:

- S_Y — количество страниц, индексируемых поисковой системой Яндекс на заданном сайте;
- S_G — количество страниц, обнаруживаемое поисковой системой Google на заданном сайте;
- S_B — количество страниц, обнаруживаемое на первых восьми уровнях сайта инструментом BeeCrawler [3];
- V_G — количество гипертекстовых ссылок с других веб-ресурсов на заданный сайт, обнаруживаемое Google;
- $V_B(links) * V_B(sites)$, где $V_B(links)$ — количество гипертекстовых ссылок, на заданный сайт с других сайтов целевого множества, обнаруживаемых BeeCrawler; $V_B(sites)$ — количество сайтов целевого множества, с которых сделаны гипертекстовые ссылки на заданный сайт, обнаруживаемое BeeCrawler;

- R_Y — суммарное количество файлов с расширениями PDF, DOC, PS и др., обнаруживаемое Яндекс на заданном сайте;
- R_G — суммарное количество файлов с расширениями PDF, DOC, PS и др., обнаруживаемое Google на заданном сайте;
- S_{cGS} — количество ссылок на сайт, обнаруживаемых сервисом Google Scholar.

Значения первых трех показателей соответствуют одному свойству веб-сайта — его объему, который выражается в количестве индексированных поисковыми системами веб-страниц. Тем не менее, из-за специфики алгоритмов различных поисковых сервисов эти показатели могут сильно различаться, что было подтверждено ранее в работе [4]. Таким образом, возникает необходимость проведения процедуры сглаживания. Под данной процедурой подразумевается вычисление правдоподобных значений показателей вместо измеренных и представляющих ошибочными значений с использованием данных о сайте, обнаруживаемых поисковым роботом BeeCrawler (алгоритм работы которого известен в отличие от алгоритмов других используемых поисковых систем). Более подробно методы сглаживания ошибок измерений для S_Y и S_G описаны в [4].

Следующий шаг — это непосредственно подсчет рангов сайтов участниками различными способами, которые были описаны ранее:

- с использованием метода Борда без деления на корзины;
- с предварительным делением на 50/100/200 корзин и применением метода Борда.

Для того, чтобы сравнить между собой полученные ранжировки использовалось расстояние Кемени — Снелла, которое во многих исследованиях, связанных с теорией выбора и экспертного оценивания, выполняет роль количественного показателя различия между двумя индивидуальными экспертными ранжированиями [5]. Меньшее значение расстояния Кемени — Снелла соответствует большей схожести между двумя ранжировками. Данная мера эквивалентна удвоенному значению нормированного расстояния Хэмминга, которое также используют для измерения различий между двумя ранжировками

[6]. В рассматриваемом случае оно вычисляется по формуле

$$d_H = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n |r_{ij} - s_{ij}|,$$

где n — число сайтов-участников, r_{ij} и s_{ij} — элементы матриц бинарных отношений, соответствующих ранжированиям R и S .

Таблица 1. Значения расстояний Кемени — Снелла при различном числе корзин

	50 корзин	100 корзин	200 корзин	Без группировки
50 корзин	0	0,36	0,49	0,73
100 корзин	0,36	0	0,20	0,65
200 корзин	0,49	0,20	0	0,66
без группировки	0,73	0,65	0,66	0

Основываясь на полученных значениях парных расстояний между ранжировками, можно сделать следующие выводы:

- наиболее схожими оказались результаты ранжирования с разбиением на 100 и 200 корзин, а значит, с ростом числа корзин растет сходство между ранжировками с близким по количеству групп нормированием;
- между ранжировкой без нормирования и ранжировкой с разделением на группы (в том числе, на достаточно большое количество групп: 200 корзин при 398 участниках) существуют значительные различия (расстояние Кемени — Снелла $> 0,5$);
- из рассмотренных в ходе эксперимента вариантов ранжирования с практической точки зрения интересен метод, включающий нормировку с разделением на 200 корзин, так как суммарное расстояние от каждого рассмотренного ранжирования до данного сравнительно невелико, и вместе с тем сохраняется достаточное количество позиций в рейтинге (271 позиций для 397 учреждений).

Полученные выводы можно расширить, исследовав большее количество модификаций как для метода Борда, так и для других методов многокритериального ранжирования. Кроме того, можно сравнить аналогичным образом ранжирования, полученные по значениям каждого из показателей, с групповыми ранжировками, чтобы определить наиболее согласованное с каждым отдельным критерием ранжирование.

Литература

1. Угольницкий Г. А. Модели конфликтов. М.: Вузовская книга, 2012. 320 с.
2. Антопольский А. Б., Поляк Ю. Е., Усанов В. Е. О российском индексе веб-сайтов научно-образовательных учреждений // Информационные ресурсы России. 2012. № 4. С. 2–7.
3. Печников А. А., Чернобровкин Д. И. Адаптивный краулер для поиска и сбора внешних гиперссылок // Управление большими системами. Вып. 36. М.: ИПУ РАН, 2012. С. 301–315.
4. Печников А. А. Об измерениях вебметрических индикаторов // Международный журнал экспериментального образования. 2013. № 10. С. 400–404.
5. Kemeny J. G., Snell J. L. Mathematical models in the social sciences. Boston.: Ginn, 1962. 145 p.
6. Миркин Б. Г., Орлов М. А. Методы многокритериальной стратификации и их экспериментальное сравнение. Препринт WP7/2013/06. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2013. 32 с.

УДК 519.68

Орехов М. Ю.

Быстродействующая строковая система на C++

Рекомендовано к публикации доцентом Матросовым А. В.

1. Введение. Примером приложения, быстродействие которого критически зависит от скорости выполнения операций сравнения и копирования строк, может являться графическая система визуализации в составе информационно-вычислительного программного комплекса, используемая для динамического отображения векторных объектно-ориентированных схем открытого текстового формата. Высокое быстродействие обработки строк позволяет обеспечить отображение объектов схемы в реальном времени (с частотой не менее 5 FPS); скорое чтение и запись схем значительного объёма; редактирование схемы, в том числе операции отмены и повтора модификаций, копирования и вставки выборки объектов и т. д.

Разработать совершенный строковый класс — найти единственно лучшее решение в рамках оппозиции «универсальность применения — быстродействие» — весьма сложно [1]. Данная статья посвящена вопросам проектирования оптимальной по быстродействию строковой системы, использующей символьный набор ASCII. Рассмотрены ключевые аспекты разработки быстродействующей строковой системы, а именно, изложена концепция подстроки, кратко описаны функции сравнения и копирования, отмечены особенности совместного использования данных строками, предложен механизм безопасного выделения подстрок.

2. Концепция подстроки. Необходимо учитывать наличие в составе строкового класса методов, принимающих в качестве аргументов C-строки и строковые литералы. Для формирования возвращаемого значения в виде строки такой метод неизбежно должен создать временный объект класса «строка», что при частых вызовах снижает быстродействие приложения за счёт издержек обращения к динамической памяти. Кроме того, для таких часто используемых функций строковой системы как, к примеру, операторы сравнения,

Орехов Михаил Юрьевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: genazvale2005@yandex.ru, тел.: +7(904)649-85-53

как правило, отсутствует возможность передачи фрагмента строки в качестве аргумента. Вместо этого разработчиками предлагаются неудобные в использовании специализированные функции с большим числом аргументов (см. функцию `std::string::compare()`). Эти соображения обосновывают необходимость введения и широкого применения в рамках строковой системы сущности, являющейся ссылкой на строку и хранящей единожды вычисленную длину её фрагмента: подстроки. Подстрока предназначена для использования в качестве универсального временного аргумента для передачи в функции строковой системы, не меняющие содержимого строк (`read-only`), и возврата из них. Подстрока должна реализовывать операторы сравнения, инкапсулировать методы выделения подстрок, взятия символа по индексу. Состав класса `SubString`-«подстрока» определяется приведёнными выше соображениями.

Для обеспечения совместимости проектируемой строковой системы с другими строковыми типами для каждого из них следует определить функцию, возвращающую подстроку либо ссылку на неё:

```
inline const SubString& subString(const SomeString &s);
```

3. Сравнение подстрок. Строковые типы, возвращающие подстроки, могут использовать функции сравнения вида:

```
template <class T1,class T2>
inline int compare(const T1 &s1,const T2 &s2)
    { return _compare(subString(s1),subString(s2)); }
class SubString {
    ...
public:
    template <class T>
    int operator>=(const T &s) const
        { return _compare(*this,subString(s))>=0; }
    ...
};
```

По соображениям компактности кода функции и операторы сравнения реализованы в виде *шаблонов*, аргументы которых выделяют подстроку. В ином случае было бы необходимо перегружать соответствующие функции для каждого типа аргумента.

Введены внешние по отношению к `SubString` функции, используемые функциями сравнения более высокого уровня:

```
int _compare(const SubString &s1,const SubString &s2)
    { return basicCompare(s1,s2); }
```

Базовые функции сравнения имеют вид:

```
inline int basicCompare(const SubString &s1,
                       const SubString &s2) {
    register uint n1=s1.length(), n2=s2.length();
    if (!(n1-n2)) return __compare(s1.data(),s2.data(),n1);
    if (n1<n2) n2=1; else { n1=n2; n2=(uint)-1; }
    return (int)((n1==__compare(s1.data(),s2.data(),n1)) !=
                0?n1:n2);
}
```

Базовые функции сравнения обращаются к низкоуровневой функции `__compare()`, которая, в свою очередь, использует `memcmp()` — самое быстрое средство сравнения двух блоков памяти *известной* длины, предусмотренное в стандартной библиотеке:

```
inline int __compare(const char *p1,const char *p2,uint n)
    { return p1==p2 ? 0:memcmp(p1,p2,n); }
```

4. Копирование подстрок. Для реализации возможности копирования подстроки в буфер достаточного размера предусмотрена последовательность внешних функций:

```
template <class T>
inline char *copyData(char *dest,const T &s)
    { return _copyData(dest,subString(s)); }
inline char *__copyData(char *dest,const char *src,uint n)
    { return (char*)memcpy(dest,src,n); }
char *_copyData(char *dest,const SubString &s)
    { return __copyData(d,s.data(),s.length()); }
```

5. Особенности совместного использования данных. Строковый класс `SString` (Swift String) применяет концепцию так называемого неявного совместного использования данных, согласно которой его объекты, ассоциированные с одним и тем же значением, разделяют единственное представление — буфер: ссылаются на общую структуру данных в памяти. Более подробно эта концепция изложена, к примеру, в [2]. Идея использования концепции разделяемого

буфера при проектировании строковых типов не оригинальна (см. реализацию строк STL, QString). Новизна состоит в употреблении буфера, порождённого от подстроки. Таким образом, для использования строковым типом приведённых выше функций сравнения и копирования, достаточно передачи ссылки на собственный буфер:

```
inline const SubString &subString(const SString &s)
    { return *s._buf; }
```

Также следует обратить внимание на способ размещения объектов класса `StringBuf` (разделяемый буфер строки) в памяти. `StringBuf` содержит указатель `char *_data` на символьные данные. Во избежание двойного вызова функций `new` и `delete`, т. е. для снижения издержек обращения к динамической памяти класс `StringBuf` перегружает соответствующие операторы. Оператор `new` выделяет блок памяти достаточного размера для размещения самого буфера, заданного числа символов и 0-символа конца строки. В поле `StringBuf::_data` заносится адрес, вычисляемый как `(char*)this+sizeof(StringBuf)`, т. е. символьные данные располагаются в блоке памяти, выделенном оператором `new`, со смещением `sizeof(StringBuf)`.

6. Безопасное выделение подстрок. При реализации методов класса `SString`, формирующих фрагменты строк, необходимо учитывать, что время существования подстроки не должно превышать время существования строки, а точнее её разделяемого буфера. Это условие удовлетворяется использованием механизма блокирования: создаваемая подстрока увеличивает счётчик ссылок буфера, запрещая его уничтожение. Таким образом, при передаче строк в функции, принимающие в качестве аргументов подстроки, посредством соответствующего оператора выполняется их преобразование к типу подстроки с блокировкой буфера, что обеспечивает безопасное использование созданных при этом временных объектов-подстрок внутри функций:

```
inline SString::operator SubStr() const
    { return SubStr(this); }
```

Для реализации механизма блокировки буфера вводится промежуточный класс `BufLocker`, хранящий указатель на разделяемый

буфер строки и изменяющий значение его счётчика ссылок в конструкторах и деструкторе. `BufLocker` используется в качестве второй базы наследования (первой является `SubString`) при определении класса `SubStr` — немодифицируемой (read-only) подстроки, блокирующей разделяемый буфер.

7. Демонстрация быстродействия. Предположим, что для задач разбора текста требуется функция, сравнивающая два строковых объекта, которыми могут являться строки, их фрагменты и строковые литералы:

```
int _stringCmp(const "подстрока" &s1, const "подстрока" &s2)
{ return s1>=s2; }
```

Оценить скорость выполнения операций сравнения строковой системы можно, выполнив эксперимент, суть которого заключается в измерении времени работы такой функции. Предлагаемый тест является *комплексным*, поскольку помимо функций и операторов сравнения на результат также окажут влияние характерные для строковой системы издержки передачи строковых аргументов сравнивающей функции.

```
"строка" str("It's a long way to the promise land...");
void stringCmp_N() {
    for (int i=0; i<1000000; ++i) // Литерал длины n.
        _stringCmp(str.подстрока(n), "It's a long...");
}
```

Оценки быстродействия продемонстрированы на графике (рис. 1), где по оси абсцисс откладывается количество символов в строке, значение по оси ординат фиксирует время работы функции `stringCmp_N()` в секундах. На графике также представлен результат измерения быстродействия функции `memcmp()` (в цикле с тем же числом итераций), сравнивающей массивы символов соответствующей длины. Значения ординат точек кривой `memcmp` отмечают наименьшее возможное время сравнения, достижимое через посредство низкоуровневых функций стандартной библиотеки.

Наихудший результат строковой системы STL объясняется отсутствием в ней класса «подстрока», по причине чего для выделения фрагмента строки всякий раз требуется создавать объект класса `std::string`, т. е. обращаться к динамической памяти. Лучшая

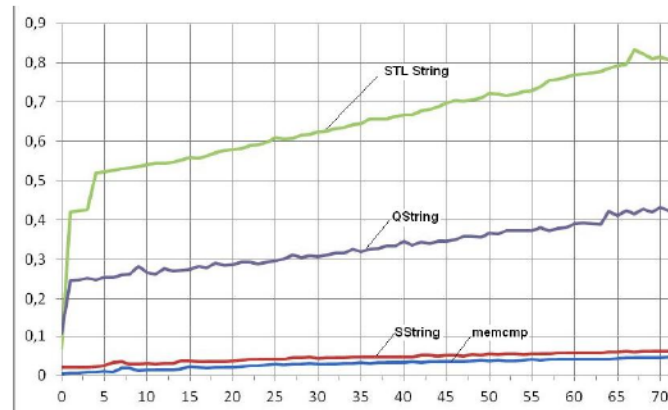


Рис. 1. Оценки быстродействия строковых систем в части выполнения операции сравнения для компилятора gcc4.4.0

по отношению к STL оценка строковой системы Qt демонстрирует преимущества использования концепции подстроки, однако тест в то же время обнаруживает недостатки её реализации: невозможность конструирования Qt-подстроки непосредственно от строкового литерала обуславливает необходимость создания временного объекта `QString`.

8. Заключение. Рассмотрены ключевые аспекты проектирования быстродействующей строковой системы. Выполнен тест, результат которого демонстрирует превосходство разработанного строкового типа по быстродействию выполнения операции сравнения строк по отношению к аналогам, предложенным в библиотеках STL и Qt.

Литература

1. Страуструп Б. Язык программирования C++. Специальное издание. Пер. с англ. М.: ООО «Бином-Пресс», 2004. 1104 с.
2. Бланшетт Ж., Саммерфилд М. Qt4: программирование GUI на C++. Пер. с англ. 2-е изд., доп. М.: Кудлиц-Пресс, 2008. 736 с.

УДК 519.17

Пономарева Е. С.

Алгоритмы разбиения графов на сообщества на примере графа пользователей сайта twitter.com

Рекомендовано к публикации доцентом Добрыниным В. Ю.

1. Постановка задачи. Твит — это сообщение длиной до 140 символов, опубликованное на сайте twitter.com. У каждого твита есть автор, текст твита, а также место, которое при регистрации указал автор. Существует база, содержащая около миллиона англоязычных твитов, посвященных американским президентским выборам 2012 года. Ретвит — упоминание имени одного автора в твите другого. В сообщении это оформляется как @имяДругогоАвтора. Например, «Вместе с @CollinSmith ходили вчера на голосование. Всем рекомендую!»

Было бы интересно разбить базу твитов на сплоченные сообщества авторов.

Построим ориентированный граф взаимодействия между пользователями твиттера на основе ретвитов. Каждый автор — вершина графа. Будем считать, что между двумя авторами проходит ребро графа, если один автор ретвитит другого. Нужно преобразовать исходную базу так, чтобы из текста каждого автора остались только упоминания других авторов и построить граф.

2. Построение графа. Всего получилось 43362 вершин-авторов и около 120000 ребер. Для начала разобьем граф на компоненты сильной связности. Применим алгоритм Косарайю на получившемся ориентированном графе. В итоге получается одна огромная компонента (около 8000 авторов) и много маленьких, примерно от 1 до 28 авторов в каждой.

Можно сделать вывод, что компоненты сильной связности не могут привести к конечному, удовлетворительному результату. Необходимо разбить эту огромную компоненту на много маленьких, воспользовавшись другими методами поиска сообществ. Но для этого нужно вернуться к началу и построить неориентированный граф

Пономарева Елена Сергеевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alen.ponomareva@gmail.com, тел.: +7(911)725-38-23

авторов твиттера, так как алгоритмы поиска сообществ все равно используют неориентированные графы. Будем считать, что между двумя авторами проходит ребро графа, если первый автор ретвитит второго, а второй — ретвитит первого. В итоге получается 7526 вершин и около 13000 ребер. Разобьем этот граф на связные компоненты при помощи поиска в глубину.

Получится одна огромная компонента — около 2500 авторов — и много маленьких — от 2 до 18 авторов в каждой. Огромную компоненту и нужно разбить.

3. Использование betweenness. Node-betweenness centrality [1] (промежуточность, значимость вершины) — это мера центральности (ценности) вершины в графе. Betweenness вершины T равна сумме (по всем парам вершин) отношений числа всех кратчайших путей (между вершинами в паре), проходящей через вершину T , к числу всех кратчайших путей (между вершинами в паре). Пример можно увидеть на рис. 1.

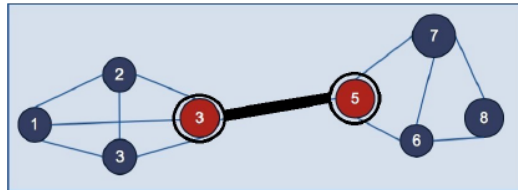


Рис. 1. Вершины с высоким значением node-betweenness (выделены вторым кругом)

В статье [2] можно найти достаточно быстрый алгоритм для вычисления node-betweenness. Удалось запрограммировать его и посчитать на большой компоненте в 2500 узлов. Самое большое значение node-betweenness у политических сайтов: thinkprogress, politico, Washingtonpost.

Но разбивать сообщества при помощи node-betweenness — не лучший вариант. В приведенном выше примере неясно, как поступать с вершинами с высокими значениями node-betweenness. Их нельзя просто удалить, так как тогда граф распадется.

Поэтому воспользуемся понятием edge-betweenness (промежущеч-

ность, значимость ребра). Edge-betweenness ребра E равна сумме (по всем парам вершин) отношений числа всех кратчайших путей (между вершинами в паре), проходящей через ребро E , к числу всех кратчайших путей (между вершинами в паре). На рис. 1 ребро с высоким значением edge-betweenness выделено жирной линией.

4. Алгоритм Ньюмана — Гирвана. Для разбиения огромной компоненты будем использовать алгоритм Ньюмана — Гирвана (Newman — Girvan algorithm):

1. Вычисляем edge-betweenness всех ребер в графе.
2. Находим ребро с самым высоким значением edge-betweenness и удаляем его.
3. Заново вычисляем edge-betweenness у всех тех ребер, на которые повлияло удаление ребра на предыдущем шаге.
4. Шаги 2 и 3 повторяем, пока не останется ни одного ребра.

В [3] можно найти как вычислять edge-betweenness (первый шаг алгоритма Ньюмана — Гирвана) с использованием поиска в ширину:

```

for каждой вершины  $A$  графа do
    пустить поиск в ширину;
    for каждой вершины  $B$  графа, обрабатываемой при поиске
    в ширину (двигаясь сверху вниз) do
        вычислить число кратчайших путей до вершины  $A$ .
        Оно равно сумме чисел кратчайших путей родителей
        вершины  $B$ ;
    end
    for каждой вершины  $B$  графа (двигаясь снизу вверх) do
        вычислить поток для ребер, которые исходят из  $B$ . К
        входящему в вершину  $B$  потоку (из нижестоящих
        ребер) добавляется единица. Поток делится между
        исходящими ребрами пропорционально числу
        кратчайших путей (до вершины  $A$ ) у вершин, в
        которые эти ребра входят. Вершины одного уровня
        потоками не обмениваются;
    end
end

```

1: Алгоритм вычисления edge-betweenness

Сумма потоков для ребра E после всех запусков поиска в ширину

и есть значение edge-betweenness для ребра E . Это значение нужно поделить на два, так как поток вычислялся дважды для любой пары вершин.

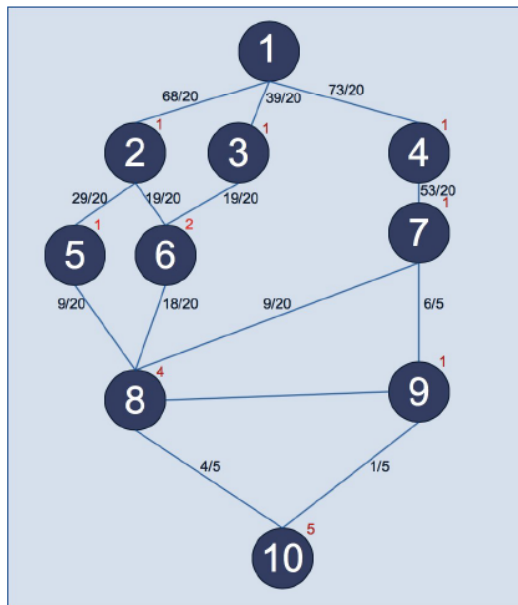


Рис. 2. Пример вычисления edge-betweenness из вершины 1

1. Вычисление числа кратчайших путей для вершин. На рис. 2 число кратчайших путей обозначено справа от номера вершины. Для вершин 2, 3, 4 существует всего один способ добраться до вершины 1; поэтому помечаем их единицами. В вершину 6 можно попасть из вершин 2 и 3, поэтому число кратчайших путей вершины 6 — это $1 + 1$ равно 2. И так далее для каждого уровня.

2. Вычисление потоков для ребер. В последней вершине поток равен единице. Двигаясь вверх, делим единицу потока пропорционально числу кратчайших путей для каждой из вершин вышестоящего уровня. Например, в вершине 8 это число равно 4, а в вершине 9 оно равно 1. Значит единицу потока из вершины 10 делим так: $4/5$ к ребру между вершиной 10 и вершиной 8 и $1/5$ к ребру между вершиной 10 и вершиной 9. И так далее.

Применим алгоритм Гирвана — Ньюмана на нашем графе, чтобы разбить большую компоненту (2500 авторов) на сообщества, количество авторов в каждом из которых не превышает, например, 60. Получится 119 групп.

5. Меры сплоченности сообществ. Шаг 4 алгоритма Ньюмана — Гирвана хотелось бы изменить — разбивать граф, пока не будет выполнено некое условие сплоченности для каждого сообщества.

Но какую меру сплоченности выбрать? И как понять, что мера правильно описывает единство группы? Для этого воспользуемся 20newsgroups — коллекцией из 20000 документов (электронных писем): 20 различных тем по 1000 документов в каждой. Для упрощения модели возьмем по 100 текстов из каждой темы. Тексты пронумерованы. Например, тексты № 1–100 из первой темы, а тексты № 1701–1800 из семнадцатой темы. Свяжем все тексты в один граф, где вершины — это документы, а ребра строятся в зависимости от подобия документов. Для обработки слов из коллекции 20newsgroups дополнительно используем стеммер Портера.

5.1. Мера сплоченности с использованием tf-idf. Вес каждого слова (в векторном виде, индекс вектора — это слово, а компонента вектора — это вес слова) вычисляется по формуле tf-idf. Теперь вычислим скалярное произведение каждой пары документов-векторов после нормализации векторов. Получится косинус угла между документами. Если он стремится к единице, то документы схожи по смыслу, а если стремится к нулю, то документы различны по смыслу. Выбираем для косинуса пороговое значение α . Если косинус угла между двумя документами больше α , то ребро существует. Выбираем α так, чтобы отношение числа ребер к числу вершин было эквивалентно такому же отношению в графе авторов твитов.

Воспользуемся алгоритмом Ньюмана — Гирвана для разбиения графа. Будем разбивать, пока размер каждой компоненты не будет меньше 100 авторов. Далее введем меры внутренней и внешней устойчивости для проверки качества разбиения.

Внутренняя устойчивость:

$$\frac{\sum_{i,j \in K, i \neq j} \cos(K_i, K_j)}{n_k},$$

где K_i — i -й документ k -го сообщества (кластера), K_j — j -й документ k -го сообщества (кластера), а n_k — число различных пар документов в k -м сообществе (кластере).

Внешняя устойчивость:

$$\frac{\sum_{i \in K, j \in K} \cos(K_i, \bar{K}_j)}{\bar{n}_k},$$

где K_i — i -й документ k -го сообщества (кластера), \bar{K}_j — j -й документ всех остальных сообществ (кластеров) кроме k -го, а \bar{n}_k — число различных пар документов.

Но насколько велика или насколько мала должна быть внутренняя устойчивость? Это нужно смотреть по результатам. Например:

Компонента № 1. В ней тексты №: 53 1964 1716 1722 1717 1704 1713 1715 1706 1800 1719 1705 1720 1733 1734 1739 1729 1743 1756 1774 1779 1794 1754 1755 1801 1781 1778 1870. Почти все документы из темы № 17.

Внутренняя устойчивость: 0,1215, внешняя устойчивость: 0,0127.

Компонента № 2. В ней тексты №: 67 71 86 1985 1564 1558 1572 1518 1629 1978 1981 634. Документы из разных тем.

Внутренняя устойчивость: 0,0612, внешняя устойчивость: 0,0138.

6. Вывод. Рассмотрены алгоритмы поиска сообществ в графах и мера сплоченности получившихся сообществ. Далее нужно выбрать подходящие значения для внутренней и внешней устойчивости и использовать их при разбиении графа твитов.

Литература

1. Freeman L. C. A set of measures of centrality based on betweenness // Lehigh University. Sociometry. 1977. Vol. 40. P. 35–41.
2. Brandes U. A faster algorithm for betweenness centrality // Journal of Mathematical Sociology. University of Konstanz. Department of Computer Information Science. 2001. P. 163–177.
3. Easley D., Kleinberg J. Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

УДК 517.925.51

Приставка М. В.

Анализ робастной устойчивости системы автоматического управления движением автомобиля

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему управления автомобилем, представленную схемой на рис. 1.

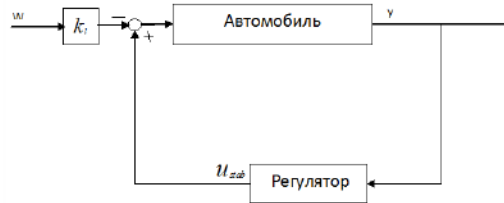


Рис. 1. Система управления движением автомобиля

В качестве модели динамики будем рассматривать следующую стационарную систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} -\frac{c_f + c_r}{mv} & \frac{l_r c_r - l_f c_f}{m v^2} & \frac{c_f}{mv} & 0 \\ \frac{l_r c_r - l_f c_f}{m l_r l_1} & -\frac{c_f l_f^2 + c_r l_r^2}{m v l_r l_1} & \frac{l_f c_f}{m l_r l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T.$$

Вектором состояний системы является вектор $x = (\beta \ \omega \ \delta \ \psi)^T$, где β — угол бокового скольжения, ω — угловая скорость, δ — угол поворота колес, ψ — угол курса.

Приставка Мария Владиславовна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: masha.pristavko@gmail.com, тел.: +7(911)143-54-60

Управление реализуется в виде $u = u_{stab} - k_l w$, где u_{stab} — выходной сигнал стабилизирующего регулятора, k_l — масштабирующий коэффициент, w — заданный постоянный командный сигнал, поступающий от водителя.

В приведенной математической модели (1) четыре параметра m, v, c_f, c_r определены неточно: они варьируются в некоторых пределах. Зафиксируем их номинальные значения соответственно m_0, v_0, c_{f0}, c_{r0} и зададим диапазоны их изменения в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0,9m_0 \leq m \leq 1,1m_0, & \quad 0,9v_0 \leq v \leq 1,1v_0, \\ 0,9c_{f0} \leq c_f \leq 1,1c_{f0}, & \quad 0,9c_{r0} \leq c_r \leq 1,1c_{r0}. \end{aligned}$$

Изменяя параметры системы в заданных пределах, получаем некоторую совокупность объектов. Так как коэффициенты матрицы A нелинейно зависят от указанных величин, то вместо модели с параметрической неопределенностью будем рассматривать модель с неструктурированной неопределенностью. Возникает вопрос о робастной устойчивости совокупности объектов, возмущенных по отношению к номиналу.

2. Частотная граница робастной устойчивости. Рассмотрим амплитудно-частотные характеристики $A_n(\omega) = |P_n(j\omega)|$ и $A(\omega) = |P(j\omega)|$ номинального и возмущенного объектов соответственно. Зададим весовую функцию $W_d(s)$ так, чтобы она удовлетворяла условию

$$\left| \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| \leq |W_d(j\omega)| \quad \forall \omega \in R^1. \quad (2)$$

Используя теорему о малом коэффициенте усиления для вспомогательного объекта с передаточной матрицей $M(s) = -W_d(s)K(s)[1 + P_n(s)K(s)]^{-1}P_n(s)$, получаем достаточное условие устойчивости возмущенной замкнутой системы:

$$\max_{\omega \in R^1} |\Delta(j\omega)M(j\omega)| \leq 1,$$

где $\Delta(s) = \frac{P(s) - P_n(s)}{P_n(s)W_d(s)}$ — взвешенное относительное возмущение.

С учетом неравенства (2) для относительного возмущения, имеем

$$\max_{\omega \in R^1} |\Delta_0(j\omega)T(j\omega)| \leq 1,$$

где $T(s) = K(s)[1 + P_n(s)K(s)]^{-1}P_n(s)$, $\Delta_0(s) = \frac{P(s) - P_n(s)}{P_n(s)}$, $K(s)$ — передаточная функция регулятора, стабилизирующего номинальный объект.

Данное условие является слишком жестким, однако его можно ослабить, представляя в виде

$$|[P(j\omega) - P_n(j\omega)](P_n(j\omega))^{-1}| < 1/|T(j\omega)| \quad \forall \omega \in [0, \infty].$$

Из приведенных рассуждений следует, что функция частоты $b(\omega, P_n, K) = 1/|T(j\omega)|$ может быть трактована как частотная граница робастной устойчивости. Она определяет допустимый диапазон изменения амплитудно-частотных характеристик возмущенных объектов.

Так как функция $b(\omega, P_n, K)$ зависит от выбора передаточной функции $K(s)$ регулятора, то, построив данную характеристику для различных регуляторов, получим возможность сравнивать качество управления, определяемое ими.

3. Сравнение регуляторов. Построим регуляторы с передаточными функциями $K_1(s)$ и $K_2(s)$ как решение задачи синтеза модального управления. С этой целью зададим желаемые характеристические полиномы матрицы A номинального объекта $\Delta_1^*(s) = (s + 11)^4$ и $\Delta_2^*(s) = (s + 1)^4$ для первого и второго регуляторов соответственно.

Для дальнейшего анализа возьмем весовую функцию $W_{d1}(s) = \frac{18702}{s^2 - 178,3s + 15770}$, задающую допустимый диапазон вариаций модели объекта.

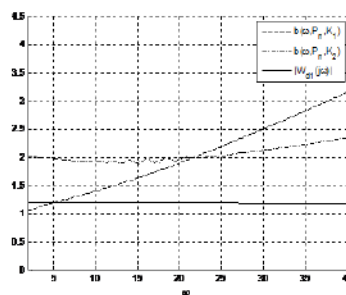


Рис. 2. Сравнение границ робастной устойчивости

Из рис. 2 видно, что регулятор с передаточной функцией $K_2(s)$ обеспечивает устойчивость всем возмущенным объектам, лежащим в допустимом диапазоне вариаций амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), определяемом функцией $W_{d1}(s)$, в отличие от другого регулятора. Исходя из данного факта, можно сделать вывод, что увеличение числа γ в желаемом характеристическом полиноме $\Delta^*(s) = (s + \gamma)^4$ ведет к потере свойства робастной устойчивости на заданном допустимом диапазоне вариаций АЧХ возмущенной модели объекта.

Рассмотрим суженный диапазон вариаций модели объекта, задаваемый весовой функцией $W_{d2}(s) = \frac{7882}{s^2 - 178,3s + 15770}$.

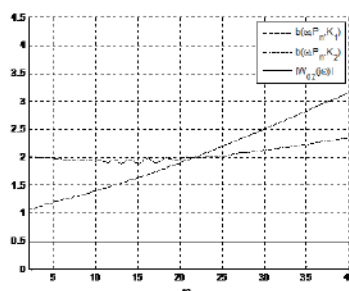


Рис. 3. Сравнение границ робастной устойчивости

На заданном диапазоне частот оба регулятора справляются с поставленной задачей. (рис. 3)

4. Вывод. В данной работе применен основной принцип построения частотной границы устойчивости, подробно описанный в [1]. Для модели автомобиля проведен сравнительный анализ регуляторов, полученных при помощи модального синтеза с желаемым характеристическим полиномом вида $\Delta^*(s) = (s + \gamma)^4$, который обнаруживает зависимость свойства робастной устойчивости для заданного диапазона вариаций АЧХ и числом γ .

Литература

1. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Изд-во «Лань», 2013. 448 с.

УДК 537.534.7, 004.942

Рябуша В. А.

Моделирование интенсивного пучка заряженных частиц на основе клеточного автомата

Рекомендовано к публикации профессором Андриановым С. Н.

1. Введение. Пучок заряженных частиц является не только уникальным средством для фундаментальных исследований, но и основой для новых технологий в различных областях науки, техники и медицины.

Особый интерес представляют интенсивные пучки. Математической моделью, наиболее полно описывающей интенсивный пучок заряженных частиц, является кинетическое уравнение Власова, основными методами решения которого являются численные методы, требующие значительных вычислительных ресурсов. Поиск моделей, менее трудоемких и поддающихся распараллеливанию, является актуальным.

Новым подходом моделирования, альтернативным численному решению дифференциальных уравнений, описывающих сложный нелинейный процесс, является дискретное моделирование на основе клеточного автомата.

Применение модели клеточного автомата позволяет представить динамику и эволюцию пучка заряженных частиц в виде процесса дискретного по времени и пространству. При этом появляются возможности уменьшения объема и распараллеливания процесса вычислений.

Данная работа является продолжением цикла работ [1–3]. В ней рассматривается обобщенная математическая модель интенсивного пучка заряженных частиц на основе клеточного автомата для n -мерного случая, что дает возможность создать единый алгоритм и программу. Также в работе рассмотрены особенности программной реализации модели. Представлены результаты численного эксперимента для одномерного случая.

Рябуша Владимир Александрович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vladimir.ryabusha@gmail.com, тел.: +7(812)428-47-83

2. Обобщенная формализация клеточного автомата для n -мерного случая. В работах [2, 3] предложены математические модели динамики пучка заряженных частиц, основанные на применении клеточного автомата. Обобщим данные модели для n -мерного случая.

Пусть пучок B однородных элементарных заряженных частиц состоит из N одинаковых частиц, движущихся в n -мерном пространстве O_{x_1, \dots, x_n} , где $n \in \{1, 2, 3\}$, со средней скоростью \mathbf{V}_B .

Частица p_j , где $j \in \{1 \dots N\}$, обладает следующими характеристиками: (x_1, \dots, x_n) — декартовы координаты частицы, m — ее масса, q — заряд, $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_n)$ — вектор скорости.

Выберем размер ячейки Δx , и разобьем n -мерное пространство O_{x_1, \dots, x_n} на ячейки K_{i_1, \dots, i_n} размером $\Delta x_1 \times \dots \times \Delta x_n$, где $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_n = \Delta x$. Обозначим $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)^T$. Таким образом, $p_j^{K_i} \in K_i$, где $p_j^{K_i}$ — частица, попавшая в ячейку K_i . Выберем шаг Δt (по времени) клеточного автомата, а также величину окрестности ячейки K_i , равную $(M + \frac{1}{2}) \Delta x$, в которой будем учитывать суммарное влияние кулоновских сил, действующих со стороны соседних ячеек (подобно радиусу Дебая).

На каждом шаге клеточного автомата вычисляются характеристики ячеек K_i (координаты, заряды, массы, скорости) и силы, действующие на ячейку K_i . В соответствии с состоянием клеточного автомата на шаге t вычисляются новые ускорения, скорости и координаты частиц p_j .

Будем считать, что каждая ячейка K_i является квазичастицей, у которой

$$x_n^{K_i} = i_n \Delta x + \frac{\Delta x}{2}, \quad q^{K_i} = \sum_{p_j \in K_i} q^{p_j},$$

$$m^{K_i} = \sum_{p_j \in K_i} m^{p_j}, \quad v_n^{K_i} = \frac{\sum_{p_j \in K_i} v_n^{p_j}}{N^{K_i}},$$

где N^{K_i} — количество частиц, содержащихся в ячейке K_i .

Пусть \mathbf{F}^{K_i} — результирующая сила, действующая на ячейку K_i .

Учет суммарного влияния кулоновских сил соседних ячеек на квазичастицу K_i в n -мерном кубе размером $(2R_1 \times \dots \times 2R_n)$, где $R_1 = \dots = R_n = (M + \frac{1}{2}) \Delta x$ для z -ой координаты ($z = 1, \dots, n$), описывается формулой

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{x_z}^{K_i} = -k \frac{q^{K_i}}{\Delta x^2} \sum_{b_1=-M}^M \dots \sum_{b_n=-M}^M \frac{q^{K_i+\mathbf{b}}}{\left(\sum_{l=1}^n b_l^2\right)^{3/2}} b_z, \\ (M + \frac{1}{2})^2 \geq \sum_{l=1}^n b_l^2 > 0, \end{cases}$$

где k — коэффициент пропорциональности в законе Кулона, $\mathbf{b} = (b_1 \dots b_n)^T$.

Ускорение, которое получит K_i ячейка (квазичастица),

$$a_z^{K_i} = \frac{\mathbf{F}_{x_z}^{K_i}}{m^{K_i}}.$$

Аппроксимируя полученные ускорения квазичастиц K_i , можно получить ускорения $a_n^{p_j}$, скорости $v_n^{p_j}$ и новые координаты $x_n^{p_j}$ для каждой частицы p_j .



Рис. 1. Схема распараллеленной программной реализации модели

3. Особенности реализации модели. Для упрощения расчетов согласно модели предлагается перейти в безразмерный вид и провести некоторые преобразования. Пусть $q = 1$, $m = 1$, $k = 1$, тогда характеристики квазичастицы будут определяться следующим образом:

$$q^{K_i} = N^{K_i}, \quad m^{K_i} = N^{K_i},$$

а ускорение будет рассчитываться как

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{x_z}^{K_i} = -\frac{1}{\Delta x^2} \sum_{b_1=-M}^M \cdots \sum_{b_n=-M}^M \frac{N^{K_i+b}}{\left(\sum_{l=1}^n b_l^2\right)^{3/2}} b_z, \\ \left(M + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \sum_{l=1}^n b_l^2 > 0. \end{array} \right.$$

Предложенная математическая модель реализуется в виде параллельных алгоритмов благодаря однородной структуре клеточного автомата. Расчеты характеристик частиц и квазичастиц, расположенных в соответствующих областях клеточного автомата, распределяются по процессорам, как показано на рис. 1. Более детально с принципами параллельной реализации можно ознакомиться в [2, 3].

4. Вычислительный эксперимент для одномерного случая. Проведен вычислительный эксперимент для равномерного распределения частиц в пучке.

Пусть заданы число частиц $N = 10^6$, размер пучка L , размер ячейки $\Delta x = L/100$, шаг по времени Δt и число шагов. Первоначальные скорости частиц считаются нулевыми относительно скорости пучка ($v_j = 0$). Данные условия заданы для проверки адекватности модели и соответствия результатам, полученным другими исследователями.

Вычислены плотность распределения частиц в пучке, распределение ускорений в пучке по координатам, распределение скоростей и размер пучка. Величины, полученные в результате вычислений для квазичастиц, интерполировались кубическими сплайнами.

На рис. 2 представлены результаты вычислительного эксперимента на шаге номер 10, 100 и 300. Из представленных графиков можно сделать выводы относительно вычисляемых величин.

Расчеты показывают, что на шаге номер 100 у пучка еще сохраняется монолитное ядро с равномерным распределением, однако на шаге номер 300 распределение имеет практический гауссовский вид.

Из расчетов видно, что в начале процесса (шаг 10) наибольшие ускорения и скорости приобретают частицы на периферии пучка. На более поздних шагах наибольшие ускорения приобретают частицы более близкие к центру пучка, что соответствует распределению плотности частиц в пучке. Плотность частиц на периферии уменьшается, и их вклад в результирующую кулоновскую силу уменьшается.

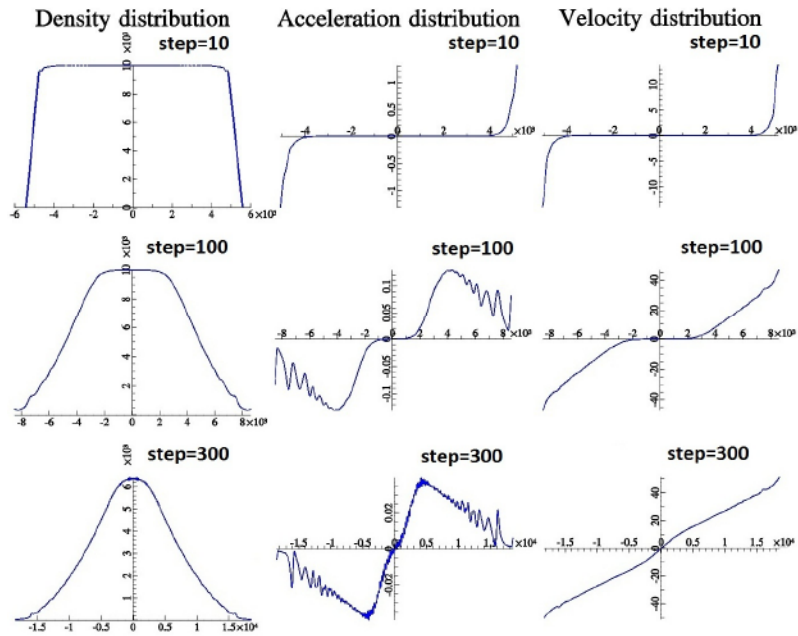


Рис. 2. Результаты вычислений плотности распределения частиц в пучке, распределение ускорений в пучке по координатам, распределение скоростей в пучке по координатам для шагов номер 10, 100 и 300

ется по сравнению с результирующим вкладом частиц, находящихся в центре пучка.

Вид графиков распределения ускорений на шагах номер 100 и 300 указывает на необходимость сглаживания (аппроксимации) данных для соответствия физической модели, так как эти скачки являются следствием дискретизации.

На рис. 3 представлены результаты вычислений плотности распределения частиц в пучке для шагов номер 600, 800 и 1000, а также видны эффекты дискретизации, для которых необходимо применить сглаживание.

Полученные результаты вычислительного эксперимента качественно совпадают с результатами, приведенными в монографии [4].

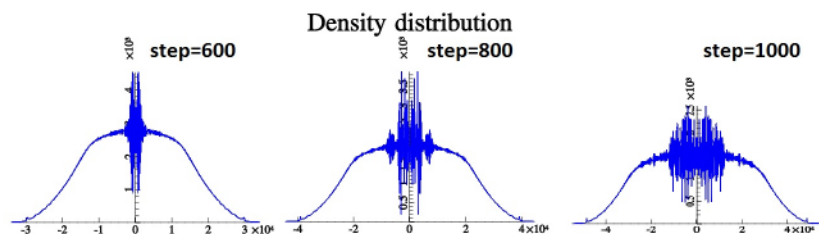


Рис. 3. Результаты вычислений плотности распределения частиц в пучке для шагов номер 600, 800 и 1000

Все вычисления производятся в безразмерном виде. Для перехода к физическим величинам надо применить соответствующие коэффициенты пересчета.

Литература

1. Рябуша В. А. Концепция построения «Виртуального ускорителя» на базе облачных инфраструктур // Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 382–387.
2. Рябуша В. А. Клеточный автомат, моделирующий движение пучка заряженных частиц // Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 473–478.
3. Ryabusha V. A., Andrianov S. N., Kulabukhova N. V. Cellular automaton simulating the motion of the charged particles beam. // Proc. of IPAC2013. 2013. P. 918–920.
4. Андрианов С. Н. Динамическое моделирование систем управления пучками частиц. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2004. 372 с.

УДК 519.714.3

Севостьянов Р. А.

Управление движением мобильного робота с учетом транспортного запаздывания

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. Запаздывание управляющего сигнала — ситуация, которая часто возникает, например, при удаленном управлении, когда объект и система управления связаны между собой через компьютерную сеть. Алгоритмы управления, реализованные без учета транспортного запаздывания, будучи примененными к системам с запаздыванием, могут работать некорректно, приводя к перерегулированию или неустойчивости. В данной работе рассматривается случай линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием. Приводится пример динамической модели мобильного робота.

2. Объект управления. В качестве объекта управления выступает мобильный робот унициклического типа. Кинематическая модель робота является нелинейной, и построить для нее стабилизирующее управление довольно трудно. В связи с этим рассмотрим динамическую модель робота [1]:

$$\begin{cases} m\dot{v} = F - B_v v, \\ J\dot{\omega} = T - B_\omega \omega, \end{cases} \quad (1)$$

где (v, ω) — линейная и угловая скорости; m — масса робота; F — равнодействующая сил, действующих на систему; B_v — коэффициент трения поступательного движения; J — момент инерции; T — момент силы; B_ω — коэффициент трения вращения. Силу F и момент силы T можно выразить через силы F_R и F_L , продуцируемые правым и левым электромоторами робота, соответственно:

$$\begin{aligned} F &= F_R + F_L, \\ T &= l(F_R - F_L), \end{aligned}$$

где l — расстояние между гусеницами робота.

Севостьянов Руслан Андреевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: zetoster@gmail.com, тел.: +7(921)883-32-52

Введем новые обозначения: e_m — среднее напряжение на электромоторах, e_d — разность напряжений на электромоторах. Сила F и момент силы T будут пропорциональны этим величинам:

$$\begin{aligned} F &= k_m e_m, \\ T &= k_d e_d, \end{aligned}$$

где k_m и k_d — коэффициенты пропорциональности. Тогда систему (1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{v} = k_v v + k_m e_m, \\ \dot{\omega} = k_\omega \omega + k_d e_d. \end{cases} \quad (2)$$

Перейдем к матричной форме и введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}, & u(t) &= \begin{pmatrix} e_m(t) \\ e_d(t) \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} k_v & 0 \\ 0 & k_\omega \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} k_m & 0 \\ 0 & k_d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда система (2) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (3)$$

Таким образом, динамическая модель робота является линейной стационарной системой.

3. Постановка задачи. Введем в систему (3) постоянное запаздывание h по управлению:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h). \quad (4)$$

Для системы (4) требуется построить стабилизирующее управление таким образом, чтобы с его помощью обеспечить переход в заданное состояние x_d .

4. Метод решения. Вернемся к системе (3) без запаздывания и стабилизируем ее управлением по состоянию:

$$u(t) = Kx(t), \quad (5)$$

обеспечивая гурвицевость матрицы $A + BK$. Для того, чтобы перейти в заданное состояние x_d , необходимо добавить к управлению постоянный задающий сигнал $r(x_d)$:

$$u(t) = Kx(t) + r(x_d),$$

таким образом, чтобы обеспечивалось равенство

$$(A + BK)x_d + Br(x_d) = 0,$$

откуда имеем

$$r(x_d) = -(B^{-1}A + K)x_d.$$

Теперь вернемся к системе (4) и для нее будем строить управление в виде

$$u(t - h) = Kx(t) + r(x_d),$$

что можно переписать следующим образом:

$$u(t) = Kx(t + h) + r(x_d), \quad (6)$$

которое с очевидностью дает ту же замкнутую систему, что и без запаздывания. Управление (6) требует наличия прогноза (оценивания вперед) на h секунд по отношению к текущему времени.

В общем случае это не осуществимо, однако в данном линейном и стационарном варианте можно воспользоваться формулой Коши, определяющей решение системы (7) в любой момент t_2 через ее состояние в момент t_1 [2]:

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)}x(t_1) + e^{A(t_2-t_1)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-A(\tau-t_1)} Bu(\tau - h) d\tau.$$

В частности, полагая $t_1 = t$, $t_2 = t + h$, получим

$$x(t + h) = e^{Ah}x(t) + e^{Ah} \int_{t_1}^{t_2} e^{-A(\tau-t)} Bu(\tau - h) d\tau. \quad (7)$$

Теперь введем обозначение $\theta = \tau - h$. Тогда из (7) имеем

$$x(t + h) = e^{Ah}x(t) + e^{At} \int_{t_1}^{t_2} e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta.$$

Таким образом, управление в момент t определяется формулой

$$u(t) = Ke^{Ah}x(t_1) + Ke^{At} \int_{t_1}^{t_2} e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta + r(x_d). \quad (8)$$

Для реализации управления в виде (8) введем в рассмотрение вспомогательную переменную

$$z(t) = \int_0^t e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta. \quad (9)$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\int_0^t e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta = \int_0^{t-h} e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta + \int_{t-h}^t e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta,$$

откуда

$$\int_{t-h}^t e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta = \int_0^t e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta - \int_0^{t-h} e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta,$$

или, подставив (9):

$$\int_{t-h}^t e^{-A(\theta)} Bu(\theta) d\theta = z(t) - z(t-h). \quad (10)$$

С учетом (10) управление принимает вид

$$u(t) = Ke^{Ah}x(t) + Ke^{At}[z(t) - z(t-h)] + r(x_d), \quad (11)$$

а переменная $z(t)$, согласно (9), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{z} = e^{-A(\theta)} Bu(\theta).$$

Таким образом, компенсирующее управление (11) имеет собственную динамику:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= e^{-A(\theta)} Bu(\theta), \\ u(t) &= Ke^{Ah}x(t) + Ke^{At}[z(t) - z(t-h)] + r(x_d), \end{aligned}$$

что эквивалентно динамическому регулятору

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= e^{-A(\theta)}BK e^{At}z(t) - e^{-A(\theta)}BK e^{At}z(t-h) + \\
&\quad + e^{-A(\theta)}BK e^{Ah}x(t) + e^{-A(\theta)}Br(x_d), \\
u(t) &= Ke^{Ah}x(t) + Ke^{At}z(t) - Ke^{At}z(t-h) + r(x_d), \\
z(t) &\equiv 0 \quad \forall t \in [-h, 0].
\end{aligned} \tag{12}$$

5. Компьютерная модель. В среде MATLAB-Simulink спроектирована система, управление в которой может осуществляться как в режиме динамического предсказывающего регулятора (12), так и в режиме классического регулятора (5). Динамика модели в различных условиях проиллюстрирована на рис. 1–3.

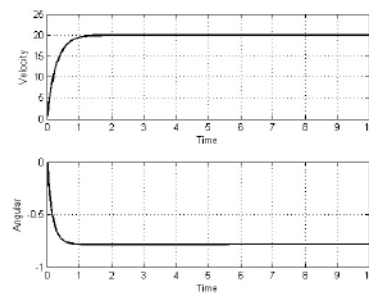


Рис. 1. Динамика модели без запаздываний с регулятором (5)

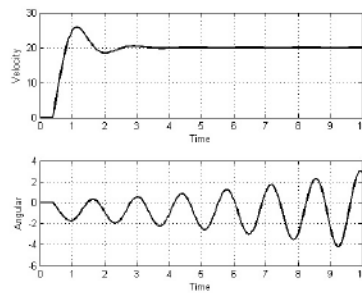


Рис. 2. Динамика модели с запаздыванием 0,4 с и регулятором (5)

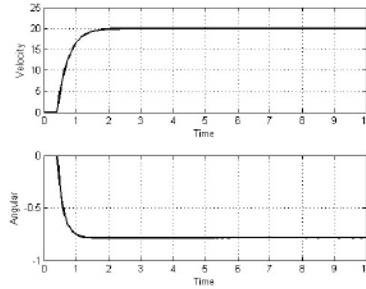


Рис. 3. Динамика модели с запаздыванием 0,4 с и регулятором (12)

Задача состояла в переводе системы из начального состояния $x_0 = (0, 0)$ в состояние $x_d = (20, -\pi/4)$. Рис. 1 показывает, что в отсутствие задержки с регулятором (5) система без проблем осуществляет выход на заданный уровень. Из рис. 2 видно, что с регулятором (5) при наличии постоянного запаздывания 0,4 с линейная скорость осуществляет выход на заданный уровень, но появляется перерегулирование, а угловая скорость теряет устойчивость. Наконец, рис. 3 показывает, что с тем же самым постоянным запаздыванием динамический предсказывающий регулятор (12) обеспечивает выход системы на заданный уровень.

6. Заключение. В работе представлен предсказывающий регулятор, обеспечивающий стабилизацию линейных стационарных систем с постоянным запаздыванием. При помощи компьютерного моделирования показана его работоспособность. В будущем планируется провести испытания на реальных устройствах, а также обобщить задачу на случай непостоянного запаздывания.

Литература

1. Carona R., Aguiar A.P., Gaspar J. Control of unicycle type robots: tracking, path following and point stabilization // Proceedings of IV Jornadas de Engenharia de Electronica e Telecomunicacoes e de Computadores. Lisbon: ISEL, 2008. P. 180–185.
2. Krstic M. Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems. Boston: Birkhauser, 2009. 466 p.

УДК 004.051

Севрюков С. Ю., Соловьев П. А., Полонский В. А.

Обзор и анализ вариантов реализации растровых операций в Web-ГИС

1. Введение. Решение различного рода прикладных задач, связанных с работой карантинных служб и других служб мониторинга, уже не может быть представлено без использования Географических Информационных Систем (ГИС). Эти задачи должны решаться оперативно и своевременно с использованием актуальных данных, но при этом часто требуется, чтобы специалисты находились «в поле».

Таким образом, возникает необходимость доставки релевантных данных, в том числе являющихся производными по отношению к традиционным эколого-климатическим картам в любую точку мира с возможностью их последующей обработки и анализа. Web-технологии позволяют доставлять данные потребителю, независимо от его местоположения, требуя только наличия соединения, однако, проведение с их помощью анализа этих данных является ресурсозатратным.

Наиболее ресурсозатратными операциями ГИС-анализа является анализ растровых карт, каковыми является большая часть используемых экологических карт и, в первую очередь, карты получаемые космической съемкой [1, 2]. Однако, результаты выполнения таких операций являются решающими в принятии тех или иных решений, например, карантинными службами [3]. Это означает, что у профильных специалистов должна иметься возможность проведения ГИС-анализа (растровых) экологических карт, в том числе и в полевых условиях.

В данной работе проведено сравнение клиентской и серверной моделей реализаций растрового ГИС-анализа в web-ГИС.

Севрюков Сергей Юрьевич – старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mails.sevryukov@spbu.ru, тел.: +7(911)910-94-88

Соловьев Павел Алексеевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: solovyev.p.a@gmail.com, тел.: +7(921)922-27-36

Полонский Василий Александрович – бакалавр, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: mr.9nis@gmail.com, тел.: +7(921)445-15-34

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, грант № 0.37.526.2013

2. Конфигурация системы. В данном разделе описываются компоненты, использованные при построении рассматриваемого в данной работе web-приложения, которое осуществлялось в соответствии с чрезвычайно-популярной архитектурой web-ГИС OpenGeo [4] с включением в нее дополнительных элементов.

2.1. Серверная сторона web-приложения. В соответствии с данной архитектурой, в разработанной web-ГИС в качестве картографического web-сервера используется GeoServer [5], запущенный на сервере приложений Tomcat6 [4].

Также в соответствии с архитектурой OpenGeo, в качестве базы данных используется объектно-реляционная база данных PostGIS, являющаяся расширением базы данных PostgreSQL [4] для работы с пространственными данными.

Для отдачи статичного контента web-ГИС используется связка из свободно-распространяемых web-сервера Nginx [6] и программной платформы Node.js [7]. Для дополнительного увеличения скорости работы web-приложения используется распределенная сетевая инфраструктура сети доставки контента (Content Delivery Network, CDN) [8].

Возможности программной платформы Node.js также используются для реализации выполнения вычислений, связанных с растровым ГИС-анализом, на серверной стороне web-приложения. Данные вычисления реализованы в самописном модуле, который поддерживается свободно-распространяемой JavaScript библиотекой Math.js.

2.2. Клиентская сторона web-приложения. В соответствии с архитектурой OpenGeo, в приложении в качестве библиотеки визуализации используется библиотека OpenLayers [4]. В качестве альтернативы OpenLayers рассматривалась более легковесная библиотека LeafLet [9]. Однако, в ходе экспериментов выяснилось, что данная библиотека визуализации имеет ряд серьезных проблем при наложении изображений из различных источников.

Пользовательский интерфейс web-ГИС создавался с помощью Sencha Ext JS [10], мощного кроссбраузерного фреймворка с современным пользовательским интерфейсом на основе виджетов. Недостатком данного фреймворка является тяжеловесность, но его альтернативы также имеют данный недостаток. Выбор в пользу Ext JS был сделан в силу более качественного и подробного руководства по использованию. Дополнительно стоит отметить, что фреймворк пользовательского интерфейса не оказывает прямого влияния

на возможности ГИС-анализа web-приложения.

Функции, необходимые для проведения вычислений растрового ГИС-анализа на клиентской стороне web-приложения реализованы на языке JavaScript в виде самописного модуля, который поддерживается свободно-распространяемыми библиотеками Math.js и PNGLib. Библиотека Math.js используется для поддержки математических вычислений, а задачей библиотеки PNGLib является формирование конечного изображения, которое представляется пользователю web-ГИС.

2.3. Используемые виртуальные машины. При тестировании и сравнении клиентской и серверной моделей реализации выполнения растровых операций в web-ГИС использовались виртуальные машины с характеристиками, приведенными в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики виртуальных машин

№ п/п	Процессор	Оперативная память
1	2 GHz, 1 ядро	512 Mb
2	2 GHz, 1 ядро	1024 Mb
3	2 GHz, 2 ядра	4096 Mb

3. Тестирование. Тестирование ГИС-анализа в разработанной web-ГИС проводилось отдельно для клиентской и серверной моделей реализации выполнения растровых операций. В качестве тестовых растров использовались растры разрешения 853×520 точек со значениями в виде чисел с плавающей точкой одинарной точности.

Основными критериями сравнения являлись время выполнения вычислений по одному запросу и число запросов на выполнение растровых операций, которое сервер может обслужить за одну секунду.

3.1. Реализация вычислений на клиентской стороне. По результатам 1000 тестовых расчетов были получены показатели, приведенные в таблице 2.

Таблица 2. Вычисления на клиентской стороне

	Растровая реклассификация	Растровая алгебра
Число слоев	1	Варьируется
Время передачи данных одного слоя	5 секунд (сервер) 2,5 секунды (CDN)	5 секунд (сервер) 2,5 секунды (CDN)
Полное время передачи данных	5 секунд (сервер) 2,5 секунды (CDN)	Варьируется
Выполнение операции	Зависит от процессора машины пользователя	Зависит от процессора машины пользователя

Стоит отметить, что серверная сторона web-приложения участвует в выполнении расчетов только до момента окончания передачи данных слоев на машину пользователя. Как только передача данных завершается, система может начинать обслуживать следующего клиента. Число запросов, которые система может обслужить за одну секунду, приведено в таблице 3.

Таблица 3. Число запросов в секунду, обслуживаемое сервером в случае реализации растрового ГИС-анализа на клиентской стороне

	Растровая реклассификация	Растровая алгебра
Виртуальная машина 1	0,2 / поток (сервер) Неограничено (CDN)	Варьируется (сервер) Неограничено (CDN)
Виртуальная машина 2	0,2 / поток (сервер) Неограничено (CDN)	Варьируется (сервер) Неограничено (CDN)
Виртуальная машина 3	0,2 / поток (сервер) Неограничено (CDN)	Варьируется (сервер) Неограничено (CDN)

Использование кэша CDN позволяет обслуживать потенциально неограниченное число запросов в единицу времени при условии, что данные растровых слоев уже закэшированы в CDN. Если это условие не выполнено, то первый запрос на данный слой будет передан на сервер. Все последующие запросы исходных данных этого слоя будут получать ответ из кэша CDN [8, 11].

3.2. Реализация вычислений на серверной стороне. По результатам 1000 тестовых расчетов были получены показатели, приведенные в таблице 4.

Таблица 4. Вычисления на серверной стороне

	Растровая реклассификация	Растровая алгебра
Число слоев	1	Варьируется
Выполнение операции	4 секунды / 1 ядро	от 7 секунд / 1 ядро

Время передачи данных не рассматривается, так как данные располагаются на локальных жестких дисках. Число запросов, которое система может обслужить за одну секунду, приведено в таблице 5.

Таблица 5. Число запросов в секунду, обслуживаемое сервером в случае реализации растрового ГИС-анализа на серверной стороне

	Растровая реклассификация	Растровая алгебра
Виртуальная машина 1	0,25	до 0,14
Виртуальная машина 2	0,25	до 0,14
Виртуальная машина 3	0,5	до 0,28

Число операций растрового ГИС-анализа, которое сервер может обрабатывать за единицу времени в существенной степени зависит от числа доступных ядер процессора. Увеличение числа ядер вдвое удваивает и число выполняемых операций растрового ГИС-анализа в единицу времени.

4. Выводы. Недостатками клиентской реализации растрового ГИС-анализа являются большой объем передаваемых данных и повышенные требования к процессорной мощности и объему оперативной памяти машины пользователя. Использование кэша CDN, однако, позволяет снять с сервера необходимость «лично» выдавать исходные данные растровых слоев.

С другой стороны, недостатком серверной реализации является невозможность кэширования результатов в CDN, поскольку вероятность того, что различные пользователи будут запрашивать выполнение одинаковых операций над растрами крайне мала.

Кроме того, при серверной реализации растрового ГИС-анализа, сервер должен сохранять результаты выполнения операций над растрами, по крайней мере, до окончания текущей сессии пользователя. При большом числе одновременно работающих пользователей это значительно повышает требования к доступной памяти сервера. Данная проблема может быть также решена путем увеличения числа серверов, на которых работает web-ГИС приложение, но данное решение является финансово затратным.

Наконец, при большом числе пользователей системы, использование кэша CDN позволит web-приложению с реализацией растрового ГИС-анализа на клиентской стороне одновременно обслуживать больше клиентов, чем web-приложению с серверной реализацией, даже если последнее развернуто более чем на одном сервере.

Таким образом, особенно с учетом роста вычислительных мощностей и ресурсов оперативной памяти на машинах пользователей, вопрос о том, какая из реализаций растрового ГИС-анализа в web-приложениях является лучшей, остается открытым.

Литература

1. Malczewski J. GIS-based land-use suitability analysis: a critical overview // Progress in Planning 62. 2004. P. 3–65.

2. Joerin F., Theriault M., Musy A. Using GIS and outranking multicriteria analysis for land-use suitability assessment // Int. J. Geographical Information Science. 2001. Vol. 15, No 2. P. 152–174.
3. Kotzinos D. A., Chrysoulakis N. B. GIS web services and satellite imaging as a framework for environmental monitoring: the design and implementation of a vegetation indices calculation test case [Электронный ресурс]: URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.183.8437> (дата обращения: 12.03.2014).
4. Steven A. R. Rich interactive mapping experience through open source frameworks and AJAX data visualization techniques [Электронный ресурс]: URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.150.7208> (дата обращения: 12.03.2014).
5. Официальный сайт картографического web-сервера GeoServer [Электронный ресурс]: URL: <http://geoserver.org/> (дата обращения: 13.03.2014).
6. Официальный сайт web-сервера Nginx [Электронный ресурс]: URL: <http://nginx.org/en/> (дата обращения: 13.03.2014).
7. Официальный сайт программной платформы Node.js [Электронный ресурс]: URL: <http://nginx.org/en/> (дата обращения: 13.03.2014).
8. Mukaddim P., Rajkumar B. Performance Models for Peering Content Delivery Networks [Электронный ресурс]: URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.144.5554> (дата обращения: 13.03.2014).
9. Официальный сайт библиотеки визуализации LeafLet [Электронный ресурс]: URL: <http://leafletjs.com/> (дата обращения: 14.03.2014).
10. Официальная страница фреймворка и платформы разработки ExtJS [Электронный ресурс]: URL: <http://www.sencha.com/products/extjs/> (дата обращения: 14.03.2014).
11. Buyya R., Pathan M., Vakali A. Content Delivery Networks. Springer, 2008. XVI. 418 p.

УДК 681.5.013

Смирнов М. Н., Смирнова М. А.

Современные информационные технологии в процессе обучения технических специалистов

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. Активное внедрение вычислительной техники в различные области науки, промышленности, энергетики и машиностроения является одним из основополагающих факторов роста качественных требований, предъявляемых к выпускникам вузов. Основной областью такого внедрения является оборудование для автоматического управления процессами производства, обслуживания и контроля [1, 2]. В связи с этим необходимо изменять подход к обучению студентов путем введения в него специализированных программных комплексов в связке со стендовым оборудованием для апробирования и закрепления теоретических знаний на практике.

Компьютерное и имитационное моделирование являются наиболее важными составляющими информатизации процесса обучения. Компьютерное моделирование предполагает наглядное представление объекта или явления. Имитационное моделирование используют в случаях, когда отсутствует возможность экспериментировать с реальным объектом или когда необходимо имитировать поведение системы в экстремальных условиях. Поэтому при подготовке специалистов в области теории управления крайне важно обучить их не только теоретическим основам, но и дать им возможность применить свои знания к управлению реальными объектами на практике.

В статье рассматривается пример применения современных информационных технологий к построению системы управления движением шара, перемещающегося по подвижной направляющей, с целью стабилизации последнего в заданном желаемом положении относительно направляющей с использованием пакета MATLAB и специализированного инструмента Simulink. Данное устройство используется в лаборатории управляемых устройств факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ для обучения

Смирнов Михаил Николаевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: smirnov-mn@gmail.com, тел.: +7(905)278-31-48

Смирнова Мария Александровна – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: smirnova-ma@gmail.com, тел.: +7(905)278-31-48

студентов практическому применению теоретических знаний в области теории управления.



Рис. 1. Управляемое устройство.
Ультразвуковой датчик

управлять положением шарика. Фактически изменение угла наклона α происходит путем подачи на сервопривод напряжения u .

Для управления целесообразно использовать пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор, поскольку он позволяет свести отклонение регулируемой величины от заданного значения к нулю. Если обозначить через x текущее положение шара, а через x_3 — командный сигнал, то закон управления в форме ПИД-регулятора примет вид

$$u = K_1(x(t) - x_3) + K_2 \int_0^t (x(\tau) - x_3) d\tau + K_3 \frac{d}{dt}(x(t) - x_3).$$

Здесь коэффициенты K_1, K_2, K_3 подлежат выбору для обеспечения устойчивости и желаемых характеристик динамического объекта.

Поиск коэффициентов осуществляется с использованием оптимизационного подхода [2]. Цель управления шаром состоит в том, чтобы с помощью изменения высоты штанги удерживать шар в заранее заданном положении, например, на расстоянии 20 см от датчика. Отдельный интерес представляют задачи многопрограммного управления, когда нужно обеспечить заданное количество положений равновесия [3–5].

2. Постановка задачи.

Объект управления представляет собой шар, движущийся по наклонной плоскости. Его движение вдоль штанги (см. рис. 1) описывается дифференциальным уравнением второго порядка $\ddot{x} = g \sin \alpha$, где x — положение шара, α — угол наклона штанги. Силой трения в данном случае можно пренебречь, поскольку поверхности штанги и шара гладкие и площадь их соприкосновения мала. Таким образом, изменяя угол α , можно

3. Компьютерное моделирование. В качестве среды для компьютерного моделирования и построения системы автоматического управления используется среда MATLAB с подсистемой Simulink. Компьютерная модель системы управления шаром на подвижной направляющей реализуется с помощью специализированной библиотеки Real Time Windows Target, которая позволяет проводить тестирование в реальном времени.

Для более простого и удобного взаимодействия с разработанной моделью создан графический интерфейс пользователя (GUI), изображенный на рис. 2.

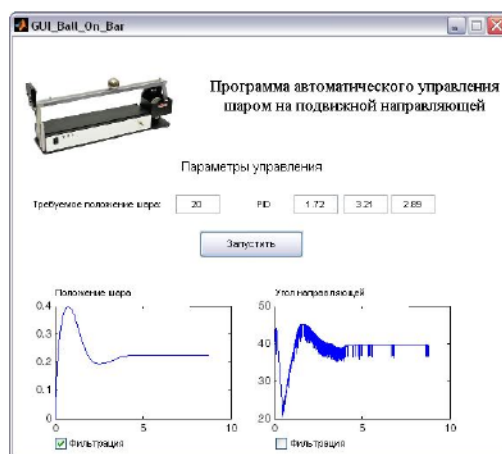


Рис. 2. Графический интерфейс пользователя

Реализованный GUI предоставляет возможность задания командного сигнала, выбора коэффициентов закона управления, моделирования системы в реальном времени и построения результирующих графиков. В разработанном графическом интерфейсе также реализована возможность фильтрации сигналов, идущих с датчиков. Это важно, так как из-за погрешностей датчиков с них поступают сильно зашумленные сигналы, работать с которыми не представляется возможным.

Используя разработанную программу, можно задавать любое желаемое положение шара и, используя подобранный каким-либо способом закон управления, наблюдать за реакцией объекта управле-

ния. Важной особенностью является то, что описанная программа распространяется с открытым исходным кодом, что позволяет студентам самостоятельно добавлять в нее дополнительные возможности, законы управления и т. д. Это способствует ускоренному и более продуктивному вовлечению студентов в образовательный процесс, лучшему усвоению пройденного материала, учит их самостоятельно разрабатывать программное обеспечение с графическим интерфейсом для работы с различными управляемыми объектами.

4. Заключение. Реализация изложенного подхода предоставляет студенту инструмент исследования окружающей действительности, с помощью которого можно изучать развитие процессов, протекающих в реальной жизни, создавать модели изучаемых реальных процессов, исследовать их при изменяющихся внешних условиях, прогнозировать результаты развития изучаемых процессов и осуществлять проверку достоверности прогноза. Это переводит процесс обучения на качественно новый уровень, ориентированный на исследовательский подход и прогнозирование результатов экспериментально-исследовательской деятельности.

Литература

1. Смирнов Н. В., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Решение прикладных задач теории управления в MATLAB. СПб.: Соло, 2013. 186 с.
2. Веремей Е.И. Оптимизационный подход к моделированию и разработке информационно-управляющих систем // Прикладная информатика. 2012. № 6 (42). С. 34–41.
3. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Шахов Я. А. Стабилизация заданного набора положений равновесия нелинейных систем // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 3–9.
4. Smirnov N. V., Smirnova T. E., Smirnov M. N., Smirnova M. A. Multiprogram digital control // Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, IMECS 2014, March 12–14, Hong Kong. 2014. Vol. 1. P. 268–271.
5. Smirnov N. V., Smirnova T. Ye. The synthesis of multi-programme controls in bilinear systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2000. Vol. 64. No 6, P. 891–894.

УДК 517.977.5

Сюэ Юаньюань

Компьютерное моделирование системы стабилизации курса автомобиля с использованием прогноза

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. Проектирование систем автоматического управления движением автомобиля базируется на математических моделях динамики, которые представляются системами обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих параметры состояния и управляющие и возмущающие воздействия.

Однако указанные модели содержат фиксированные параметры, которые, как правило, не известны точно. Более того, их нельзя точно задать, поскольку они меняются в достаточно широких диапазонах в зависимости от конкретных условий движения. В этом случае система автоматического управления должна обладать адаптивными свойствами, позволяющими подстраиваться под текущую ситуацию, соответственно меняя управление в зависимости от изменения динамических свойств объекта управления и внешних условий. Это особо значимо при возникновении различных экстремальных или даже аварийных режимов движения, где система управления должна обеспечивать безопасность движения. Одним из способов указанной адаптации является идеология управления с прогнозом (MPC – Model Predictive Control). Системы управления, построенные на базе MPC-подхода, в настоящее время достаточно широко используются в различных приложениях [1].

Исходя из прогноза текущего состояния, полученного с помощью системы наблюдения за движением автомобиля, выбирается оптимальное решение из возможных вариантов, происходит изменение параметров для управления автомобилем по ожидаемой траектории с исключением случайных воздействий, чтобы избежать аварийных ситуаций.

Сюэ Юаньюань – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: хиеуаньюан.рмпу@gmail.com, тел.: +7(968)186-74-57

2. Система управления движением автомобиля на основе предсказаний. Система управления движением, основанная на прогнозирующих моделях, не только всегда может изменить параметры управления для адаптации к изменениям в окружающей среде, но и может быть скорректирована по периоду предсказания и частоте прогноза, чтобы найти разумный баланс между точностью управления и затратами вычислительных ресурсов, и, таким образом, удовлетворить различным системным требованиям.

Система управления на основе предсказаний — это система динамического управления, которая построена с использованием понятия подвижного временного окна. Схема функционирования такой системы состоит из следующих этапов (рис. 1):

1. Оценка текущего состояния объекта управления.
2. Построение оптимального программного управления, которое действует в пределах заранее прогнозируемого малого промежутка времени.
3. Реализация данного действия в нужный момент.
4. Повторение указанных ранее действий для предопределённого момента в будущем.

Использование указанной схемы является основной идеей, реализуемой системой управления на основе предсказаний [2].

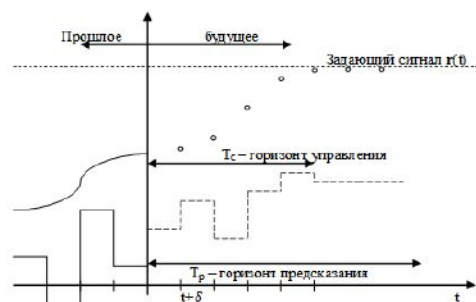


Рис. 1. Прогноз управляемого динамического процесса

Указанный алгоритм особенно подходит для управления движением с учётом ограничения. Цель алгоритма состоит в поиске оптимальных решений в допустимом коридоре, учитывающем фактиче-

ские возможности системы управления и ограничения на динамические параметры. Функциональные особенности алгоритма позволяют работать с нестационарными и нелинейными динамическими объектами. В результате использования приведённой схемы управления с прогнозом фактически формируется регулятор (обратная связь), который функционирует в режиме реального времени, изменяя прогнозирующую модель в соответствии с необходимыми временными тактами.

Система управления с прогнозирующей моделью, функционирующая в режиме реального времени, использует оптимизационный подход, базирующийся на задаче квадратичного программирования. Рассмотрим эту систему подробнее, для удобства используем схему, представленную на рис. 2.

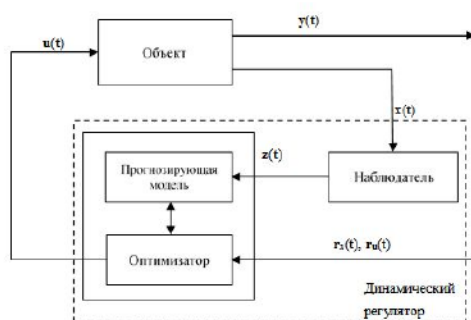


Рис. 2. Блок-схема системы управления с прогнозом

Система измерения (наблюдатель) осуществляет оценивание состояния динамического объекта и выдаёт соответствующую информацию в динамический регулятор.

В состав регулятора входят две части: система предсказания на базе прогнозирующей модели и система оптимизации. Система управления выполняет моделирование динамического прогноза на определённый отрезок времени в будущем в соответствии с действующим входным сигналом состояния и предыдущим состоянием динамического объекта. Затем предсказанный результат в качестве входных данных служит основой для процесса оптимизации, а текущее состояние сохраняется в качестве аргумента для следующей операции. Оптимизатор формирует оптимальное управление, соот-

ветствующее желаемому целевому состоянию, которое может быть указано первоначально или может быть получено из внешней системы наблюдения за дорожным покрытием в режиме реального времени, и сформирует командный сигнал для подачи на привод исполнительных устройств.

Заметим, что использование системы управления с прогнозирующей моделью, по существу реализующую регулятор (обратную связь) с адаптивными свойствами, позволяет в известной мере учесть влияние на объект управления внешних воздействий и шумов в измерениях.

3. Компьютерная модель системы управления с прогнозирующей моделью. В качестве примера построения системы автоматического управления с прогнозирующей моделью, рассмотрим вопрос об автоматическом управлении курсом автомобиля, уравнения динамики которого приведены в работах [3, 4].

Входным воздействием на автомобиль, рассматриваемый как объект управления, является управляющая сила, пропорциональная угловой скорости поворота передних колес. При этом внешнее воздействие моделируется гауссовским белым шумом, а также отдельными единичными импульсами, представляющими существенные неровности дороги. В данной работе для простоты принимается, что выходной сигнал совпадает с полным вектором состояния, хотя несложно перейти и к произвольному составу измеряемых переменных (рис. 3).

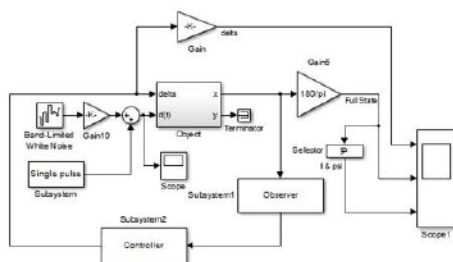


Рис. 3. Блок-схема Simulink-модели системы управления

Рассмотрим Simulink-модель системы управления движением автомобиля. Подсистема «Object» моделирует автомобиль как дина-

мический объект управления. Она выдаёт выходной сигнал, в состав которого включены вектор состояния объекта, полученный с помощью наблюдателя, и вспомогательные переменные, используемые при отладке. Входной сигнал объекта состоит из двух частей: сигнала управления и сигнала внешнего воздействия, в котором смешиваются единичные импульсы и гауссовский белый шум, что позволяет имитировать процесс движения по дороге с неровностями. С использованием данной модели в ходе имитационного моделирования можно проверить, способна ли система управления с прогнозирующей моделью реагировать на входные возмущения в реальном времени, подавляя их воздействие на автомобиль. Модуль «Observer» используется для формирования оценки вектора состояния. Подсистема «Controller» формирует сигнал управления с использованием прогнозирующей модели, выдавая его в заданные фиксированные моменты времени.

4. Результаты компьютерного моделирования. Результаты моделирования представлены в виде графиков динамических переменных, изменяющихся во времени, на рис. 4. Здесь показан процесс поворота по курсу на угол 40° при учёте воздействия неровностей дороги. Анализ динамики позволяет заключить, что система автоматического управления справляется с компенсацией стационарных возмущений в течение первых пяти секунд. На 5-ой секунде появляется импульсное воздействие, нарушающее динамику управления. Однако в силу адаптивности, регулятор с прогнозом обновляет свои параметры и выдаёт новый сигнал управления, который через 5-6 секунд приводит систему к нормальному режиму стабилизации.

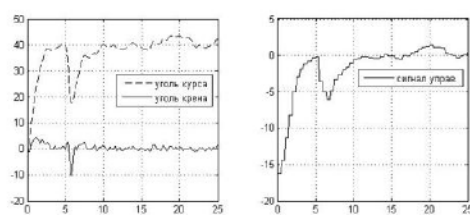


Рис. 4. Динамика процесса разворота

5. Заключение. Сформирована компьютерная модель системы автоматического управления автомобилем с использованием предсказаний. В качестве базового метода взята идеология MPC с оптимизацией на основе задачи квадратичного программирования. В ходе имитационного моделирования показано, что путём выбора предсказания с подходящей периодичностью и периодической выдачей управляющего сигнала можно решать в реальном времени проблему автоматического управления автомобилем по курсу при наличии случайных воздействий, определяемых неровностями дороги.

Литература

1. Mayne D. Q., Rawlings J. B., Rao C. V., Scolaert P. O. M. Constrained model predictive control: stability and optimality // Automatica. Vol. 36, Iss. 6 / ed. by T. Basar. IFAC, the International Federation of Automatic Control, 2000. P. 789–814.
2. Веремей Е. И., Еремеев В. В., Сотникова М. В. Введение в задачи управления на основе предсказаний [Электронный ресурс]: URL:<http://matlab.exponenta.ru/modelpredict/book1/index.php> (дата обращения: 22.10.13).
3. Гуо Конхуэй. Динамика управления автомобиля. Чанчунь: Цзилиньское изд-во наука и техника, 1991. 683 с. (на китайском языке).
4. Сюэ Юаньюань. Компьютерное моделирование системы управления движением автомобиля // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 403–407.

УДК 004.057.2

Типикин Ю. А.

Механизм транзакций для RESTful веб-сервисов: концепции решения

Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.

1. Введение. Сегодня все более широкое распространение получают веб-сервисы, основанные на описанных Р. Филдингом [1] архитектурных принципах построения сетевых приложений. REST (Representation State Transfer) подход к описанию Web привел как к новым версиям основного протокола сетевого обмена HTTP (Hypertext Transfer Protocol v. 1.1 [2]), так и к появлению новых парадигм программирования, таких как ROA (Resource Oriented Architecture). Особенно стоит отметить, что REST архитектура используется для построения веб-сервисов, так как обладает свойством *масштабируемости* [1] и, следовательно, хорошей производительностью.

Не имея поддержки ведущих корпораций, но обладая простыми, четкими и обоснованными ограничениями, REST архитектура наравне с SOAP стала де-факто стандартом для построения веб-сервисов. Тем не менее, REST по сравнению с SOAP (Simple Object Access Protocol) имеет и недостатки [3]. Одним из наиболее заметных, особенно для приложений уровня предприятия, является отсутствие механизма транзакций. В данной статье описана и обоснована концепция создания подобного механизма, который бы не нарушал требований архитектуры REST.

Для того, чтобы перейти к описанию механизма транзакций, применимых для RESTful веб-сервисов, необходимо дать конкретные определения транзакции, RESTful веб-сервиса, описать свойства и ограничения механизма и показать, что данные свойства не вступают в конфликт с принципами REST архитектуры.

2. Транзакции в RESTful веб-сервисах: проблемы. Рассмотрим понятие транзакции и RESTful веб-сервиса.

Определение. В классическом понимании, транзакция есть метаоперация над данными, обладающими некоторыми свойствами

Типикин Юрий Александрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: yuriiipikin@gmail.com, тел.: +7(981)818-90-95

ми. Традиционными и, соответственно, наиболее распространенными требованиями к транзакциям является набор ACID (Atomicity, Consistency, Isolation, Durability) [4].

Определение. Веб-сервис можно считать RESTful, если он оперирует объектами как ресурсами, имеющими уникальный идентификатор. Взаимодействие с ресурсом реализовано в соответствии с протоколом HTTP и ссылка до ресурса функциональна, иначе говоря, семантика ссылки определяет однозначное взаимодействие с ресурсом [5].

Если же попытаться реализовать механизм транзакций с данными свойствами применительно к RESTful веб-сервисам, то получится конфликт, который прямо вытекает из ограничений REST архитектуры. Рассмотрим данные ограничения, в контексте клиент-серверного взаимодействия.

Единообразие интерфейса — ограничение, которое упрощает работу с ресурсами, — будет нарушено, если реализовывать транзакции на стороне веб-сервиса, так как необходимо будет изменять заголовки, чтобы передавать информацию о транзакции и, следовательно, клиенты, которым не требуется механизм транзакций, должны будут обслуживаться иным интерфейсом.

Кроме необходимости специальных интерфейсов также нужно хранить и обновлять информацию о транзакции. Взаимодействие без сохранения состояний (Stateless Interactions) — одно из важнейших ограничений архитектуры REST, обеспечивающее масштабируемость, запрещает хранить данные о транзакции на сервере. Хранить транзакции на стороне клиента не имеет смысла, потому как если рассматривать транзакцию как бизнес процесс (business activity в SOAP WS-Transaction), время исполнения может занимать дни и недели.

Вернемся к набору ACID. Вышеописанные ограничения приводят к тому, что при условном наложении механизма транзакций на связку клиент-сервер можно сохранить лишь свойство атомарности в частном случае. Свойство атомарности не выполняется в общем случае, потому что не существует стандарта RESTful веб-сервисов, который бы требовал в обязательном порядке реализовать все HTTP методы. Это означает, что откат (rollback) условной операции не всегда возможен. Изоляция операций также будет нарушена, потому что на сервере веб-сервиса информацию о транзакции хранить нельзя. Отсюда же и нарушение свойства надежности и согласованности

данных. Таким образом, чтобы ввести транзакции для RESTful веб-сервисов, необходимо переработать ACID свойства с учетом ограничений REST архитектуры.

3. Концепция механизма транзакций для RESTful веб-сервисов. Рассмотрим возможные варианты создания такого механизма с учетом вышеописанных выводов. Следует отметить, что транзакции должны обрабатываться на отдельном сервере, который будет выступать в качестве посредника. Возможность наличия серверов-посредников описана в архитектуре REST. При наличии отдельного сервера, который не является контейнером для RESTful веб-сервиса, появляется возможность создания полного цикла работы транзакции с возможностью отката последовательности операций.

Рассмотрим теперь взаимодействие тройки клиент-СТ-сервер (СТ — Сервер Транзакций). Соблюдая принцип единообразного интерфейса, будем рассматривать СТ как *метаклиент*, т. е. фактически перейдем от связки клиент-сервер к связке СТ-сервер. В данной связке нет причины менять заголовки, значит ограничение единообразия интерфейса нарушено не будет.

Очевидно, для того чтобы говорить об откатах в общем смысле, необходимо зафиксировать правило, при котором любой RESTful веб-сервис будет поддерживать обратные операции. Под обратными операциями здесь понимаются операции, логически соответствующие парам HTTP методов POST-DELETE, PUT-DELETE так же, как и обязательное внедрение метода OPTIONS. Поддержка обратных операций обязательна для достижения атомарности [6], метод OPTIONS — для информирования СТ о том, поддерживает ли конкретный веб-сервис возможность отката результата запроса, и, следовательно, дает возможность СТ судить об атомарности всей транзакции.

Свойство согласованности системы и изоляции корректно рассматривать только в смысле работы с данными. На уровне веб-сервисов в общем случае согласованность системы получить нельзя, потому что ни REST, ни HTTP не предполагают наличия специального механизма резервирования или блокировки ресурса. В частном случае подобное можно осуществить, если на стороне сервера предусмотреть специализированные «резервирующие» веб-сервисы.

Обеспечение изоляции операции также в большей мере лежит на

стороне веб-сервиса, но не полностью. Со стороны СТ должна быть обеспечена очередность для запросов к конкретному веб-сервису относительно времени выполнения транзакций. Таким образом, для вызовов веб-сервисов, попавших в состав транзакций и проходящих через СТ, свойство изоляции будет обеспечено полностью, но так как в общем случае к веб-сервисам можно обратиться напрямую, то обеспечение полной изоляции есть вопрос политики доступа к веб-сервису.

Надежность СТ обеспечивается системой журнализации и возможно репликацией данных о транзакциях на вспомогательные серверы. Ни журнализация, ни репликация не противоречат принципам REST и в обосновании не нуждаются.

4. Реализация. Перейдем непосредственно к реализации сервера транзакций. Рассмотрим только те веб-клиенты, которые основаны на языке JavaScript (JS). Создание сервера основано на возможностях и особенностях языка JavaScript и сервера Node.js, архитектура конечных веб-сервисов не рассматривается.

Клиентская часть представляет собой функцию-прототип, аргументами которой являются исполняемые функции вызовов веб-сервисов, которые формируются в JSON-объект (JavaScript Object Notation) и пересылаются данной функцией-прототипом на сервер транзакций. Здесь воспользуемся тем, что JS есть интерпретатор, соответственно JS код самоинтерпретируемый. При такой реализации очевидным минусом является необходимость пересылки много большего количества информации от клиента к серверу; с другой стороны, общее количество операций передачи данных сокращается (равно количеству транзакций). Также появились накладные расходы связанные с концепцией метаклиента: часть логики перешла от клиента к серверу транзакций. Кроме того необходимо обеспечить безопасное соединение между клиентом и сервером транзакций, чтобы пресечь возможные вредоносные инъекции в передаваемый код. Плюсами являются: сокращение расходов на вычисления клиента за счет распределения нагрузки между клиентом и сервером транзакций, сокращение времени выполнения транзакции при условии, что сервер транзакций расположен в одной быстродействующей сети с сервером приложений.

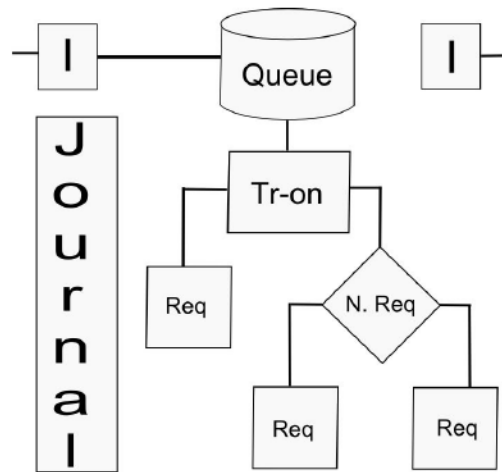


Рис. 1. Схема сервера транзакций. Здесь I — интерфейс, N. Req — вложенные запросы, Req — запрос к веб-сервису.

Серверная часть состоит из реализации очереди, механизма распределенных запросов (исполнение транзакции) к веб-сервисам, журнала. Сервер распределяет поступающие транзакции среди своих дочерних процессов (Master-Worker). После этого, запрос направляется в очередь, где ожидает исполнения. Исполнение запросов составляющих транзакцию происходит асинхронно, с параллельной записью в журнал исполняемого кода вместе

с сервисной информацией по тому же принципу, что и происходит распределение транзакций на входе сервера транзакций. Выполнение транзакции есть исполнение дерева запросов клиента. Запросы делятся на вложенные (узлы) и одинарные (листья). Вложенные запросы содержат в себе более одного одинарного и (или) вложенного запроса. Транзакция считается выполненной, когда все потомки сообщат об успешном собственном выполнении узлу-родителю (вплоть до корня дерева). После записи в журнал об успешном выполнении, сервер транзакций отвечает клиенту результатом выполнения транзакции.

Положительные стороны введения сервера транзакций: повышение надежности через контроль над исполнением веб-сервисов (основная цель), возможность перераспределения нагрузки между клиентом и сервером, повышение общей безопасности с введением требуемого безопасного соединения.

Отрицательные стороны: накладные расходы клиента на одновременную передачу данных о транзакции вырастут как минимум на время передачи данных от сервера транзакций до сервера-контейнера веб-сервиса.

5. Заключение. Обобщим вышеописанные результаты. Реализация механизма транзакций для RESTful веб-сервисов должна осуществляться в виде метаклиента и содержать:

- единообразный интерфейс для взаимодействия с сервером;
- интерфейс создания транзакции со стороны клиента;
- систему журналирования;
- политики поведения при откатах и при откатах в условиях неполной атомарности;
- очередность запросов.

Дальнейшая работа предполагает введение разделения на вызов веб-сервиса, передачу данных и исполнения логики. Таким образом предполагается сократить до минимума нагрузку на сервер транзакций, повысив его общую пропускную способность.

Литература

1. Fielding R. T. Architectural Styles and the Design of Network-based Software Architectures. Diss. PhD in Information and Computer Science, Irvine: University of California, 2000. 162 p.
2. HTTP/1.1 RFC 2616 [Электронный ресурс]: URL:<http://tools.ietf.org/html/rfc2616> (дата обращения: 15.03.2014).
3. Pautasso C., Zimmermann O., Leymann F. RESTful web services vs. big'web services: making the right architectural decision // 17th International World Wide Web Conference (WWW2008). Beijing, China: 2008. P. 805–814.
4. Gray J. The transaction concept: virtues and limitations // Proceedings of the 7th International Conference on Very Large Data Bases. 1981. P. 144–154.
5. Wilde E., Pautasso C. REST: From Research to Practice. New York: Springer, 2011. 528 p.
6. Kochman S., Wojciechowski P., Kmiecik M. Batched transactions for RESTful web services // Current Trends in Web Engineering. Berlin, Germany: Springer, 2012. P. 86–98.

УДК 004

Южанин Н. В., Золотарев В. И.

Решение проблемы слежения за вычислительными задачами на суперкомпьютерах при помощи системы service desk

Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.

1. Введение. В связи с бурным развитием вычислительной техники в последние годы появилось множество вычислительных центров, оснащенных суперкомпьютерами. Для наиболее оптимального использования вычислительных мощностей суперкомпьютера необходимо постоянное обеспечение некоторого порога загрузки его процессоров, что предполагает коллективное использование. При расчете задач на суперкомпьютере многими пользователями возникает целый комплекс проблем.

Большая часть этих проблем успешно решается системами очередей (batch system). Различные реализации Portable Batch System работают по единому сценарию, запуская задачи пользователей в соответствии с расписанием, составляемым внутренним или сторонним планировщиком на основе системы заранее установленных правил. Агенты системы очередей на узлах суперкомпьютера собирают информацию о загрузке узлов для балансировки нагрузки ресурсов суперкомпьютера.

Для контроля состояния вычислительных задач в системах очередей реализована команда вывода сводной таблицы задач с возможностью выборки по некоторым параметрам. Существенный недостаток такой таблицы в том, что в ней отображаются только задачи, выполняемые в момент запроса. Также информирование пользователя о его задачах может производиться по электронной почте. Система очередей может отправлять отчеты о начале и завершении задачи. Однако уведомления по электронной почте имеют существенный недостаток: загромождение почтового ящика письмами и сложность

Южанин Николай Владимирович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: yuzhanin@cc.spbu.ru, тел.: +7(911)152-35-93

Золотарев Валерий Иванович – директор, Ресурсный центр «Вычислительный центр СПбГУ»; e-mail: viz@cc.spbu.ru, тел.: +7(812)428-43-58

извлечения из них нужной информации. Более подробная информация о работе системы очередей может быть получена из ее логов, однако они доступны только ограниченному кругу лиц [1]. Для решения проблемы слежения за вычислительными задачами необходимо создать такую информационную систему (ИС), которая дополнит систему очередей и нивелирует ее недостатки.

2. Постановка задачи. Рассматривая вопрос получения информации о вычислительных задачах, мы неизбежно приходим к конфликту интересов различных сторон, причастных к процессу высокопроизводительных вычислений. Две основные группы участников процесса — пользователи и персонал дата-центра — обладают значительно различающимися целями и, соответственно, потребностями в составе и представлении информации о вычислительных задачах. Но и внутри этих групп есть участники с различающимися требованиями: исполнители и руководители научных групп среди пользователей, системные администраторы и руководство дата-центра среди персонала. Сообразно специфике работы с вычислителями разделяются и требования к информации о вычислительных задачах.

Так, пользователю, являющемуся исполнителем научной работы и непосредственно запускающему задачи на счет, необходима, во-первых, информация о том, успешно ли начат и завершен расчет задачи. Во-вторых, исполнителю необходимо видеть список всех своих задач и их статусы, а для выполненных — время выполнения. Также для исполнителя имеет значение удобное представление информации, в то время как множество подробностей ему не требуется. Руководителя научной группы, в отличие от исполнителя, не интересуют конкретные вычислительные задачи. В его обязанности входит контроль за работой исполнителей, планирование ресурсов, необходимых для работы, а также предоставление отчетности по работе группы руководству либо грантодателю. Исходя из этих обязанностей, руководителю научной группы необходима информация о деятельности каждого исполнителя с теми же подробностями, что требуются исполнителю, а также сводки по всей научной группе. Удобное и красивое представление информации руководителю группы не требуется. Для него даже удобнее табличное представление вместо диаграмм и графиков. Набор параметров задачи, доступный руководителю группы, должен быть больше, чем для исполнителя; обязательно отображение расхода процессорного времени. Для ру-

ководителя научной группы также очень полезны опции генерации отчета за указанный временной период и прогноза потребления ресурсов до указанной даты.

С другой стороны, системному администратору дата-центра в силу его обязанностей требуется как возможность получить любую информацию о любой задаче, запущенной когда-либо на исполнение, так и возможность получить статистическую информацию по любой выборке задач, например, для планирования балансировки нагрузки. В то же время администратору необходимо слежение за проблемными задачами, вызывающими ошибки, и возможность быстро оформить их как инциденты и решать силами службы поддержки. Руководству дата-центра, в свою очередь, нужна возможность получать информацию в целом о картине использования вычислителей, специфицировать ее по вычислителям и научным группам. Более подробной информации не требуется, просмотр отдельных задач необязателен. Однако совершенно необходима возможность создания полного отчета за временной период с акцентом на количественные характеристики потребленных ресурсов, как с разделением по вычислителям, так и в целом. Как нетрудно заметить, требования разных групп имеют как пересечения, так и конфликты.

Задача, таким образом, состоит в проектировании и практической реализации такой информационной системы, дополняющей систему очередей, которая максимально полно удовлетворит требованиям всех вышеозначенных групп пользователей.

Отдельно стоит оговорить критерии оценки полезности приводимого решения задачи. Поскольку удобство пользователей субъективно, можно провести оценку по критерию сокращения времени на решение инцидента, связанного с расчетами на суперкомпьютере. Время решения инцидента можно выразить формулой $t = t_o + t_p$, где t_o и t_p — время обнаружения ошибки и время работ по решению соответственно. Оценкой эффективности решения инцидента, подобно оценке эффективности многопроцессорных систем, будет служить величина $\varepsilon = t_p/t$, возрастающая с уменьшением t_o и ограниченная сверху единицей.

3. Решение задачи. Ввиду того, что суперкомпьютеры являются частью ИТ-инфраструктуры дата-центра и основой предоставления услуг, логично проектировать нашу ИС как часть системы управления ИТ-инфраструктурой для максимально полной интегра-

ции и взаимодополнения с остальными ИС. Одну из центральных позиций в такой системе занимает service desk, являясь основным компонентом для взаимодействия пользователей и IT-службы. Этот факт обуславливает применение системы service desk в качестве основы для нашей ИС.

Возможно, более простым вариантом решения нашей задачи станет ИС, основанная не на service desk, а на веб-сайте на открытой CMS с готовыми модулями для получения почтовых сообщений от системы очередей, а также отображения информации из базы данных CMS на веб-страницах. Однако использование системы service desk может дать весомые преимущества по сравнению с более очевидным подходом. Во-первых, в системе service desk уже реализованы БД и ее система управления, структура которых отвечает нашим требованиям, а также удобный для наших целей объект тикета, для которого возможно автоматическое управление состоянием в зависимости от ключевых слов в приходящих письмах. Во-вторых, service desk дает возможность персоналу вычислительного центра следить за происходящим в системе очередей в реальном времени, и в случае проблем с какой-либо задачей обрабатывать ситуацию как обычный инцидент, обеспечивая сокращение времени обработки ошибки.

Однако потребности различных групп пользователей системы в предоставлении информации не могут быть удовлетворены интерфейсом системы service desk. Следовательно, необходимо использовать веб-интерфейс личного кабинета пользователя на сайте дата-центра, в котором будет отображаться информация, собранная в системе service desk, в виде, зависящем от того, к какой группе пользователей принадлежит конкретный пользователь. Для реализации необходимого представления информации наиболее подходящим видится использование веб-сервиса, работа которого зависит от принадлежности пользователя к определенной группе. Также необходимы веб-сервисы для связи личного кабинета с базами данных, входящими в ИС.

Для связи всех составляющих ИС необходима служба каталогов, хранящая учетные записи пользователей, с которыми ассоциируется информация во всех составных частях ИС. Учетная запись пользователя также может содержать информацию о его принадлежности к определенной группе. Эта информация может быть использована веб-сервисом для построения нужного представления данных.

4. Практическая реализация. В качестве основы информационной системы был выбран свободно распространяемый service desk OTRS 3 ввиду наличия всех необходимых функций, простоты развертывания и настройки, а также наличия интерфейса для взаимодействия с веб-сервисами [2]. На сервере системы очередей TORQUE установлен mail transfer agent, отправляющий почтовые сообщения в service desk от имени пользователя, запустившего соответствующую задачу. В service desk в зависимости от ключевых слов в сообщении либо открывается новый тикет, либо меняется состояние существующего, соответствующего указанной в письме задаче. В случае программного сбоя очереди приходит письмо с ключевым словом, по которому тикет, соответствующий задаче, меняет статус на «инцидент» и обрабатывается технической поддержкой незамедлительно.

Личный кабинет пользователя с интерфейсом для вывода информации о вычислительных задачах создан на базе модуля CMS Drupal и взаимодействует с системой service desk и базой данных службы каталогов посредством веб-сервисов, построенных по архитектуре REST, и прямых запросов при помощи библиотеки Sag [3]. Связующим звеном информационной системы стала служба каталогов Microsoft Active Directory.

Для генерации представления данных создан веб-сервис, который на входе получает данные учетной записи пользователя и JSON-документы о запущенных и запускавшихся пользователем задачах на суперкомпьютерах из системы service desk. На основании полученных данных сервис формирует графическое представление в зависимости от принадлежности пользователя к одной из четырех групп, сохраняет его и возвращает как результат своей работы. Данный подход позволил удовлетворить потребности различных групп пользователей в наглядном представлении данных.

Инфографика дает пользователю больше возможностей для адекватной оценки потребляемых ресурсов, что в дальнейшем поможет избежать чрезмерного (или недостаточного) выделения ресурсов, сократить затраты пользователя, а следовательно, и дата-центра, на обслуживание.

Описанная выше информационная система была реализована на оборудовании ресурсного центра «Вычислительный центр СПбГУ» и прошла опытную эксплуатацию. По итогам эксплуатации отмечено сокращение среднего времени обработки ошибок, связанных с расчетами на суперкомпьютерах, более чем в 2 раза.

5. Выводы. Поставленную задачу можно считать решенной: реализована система, решающая проблему слежения за вычислительными задачами и удовлетворяющая требованиям всех групп пользователей. В дальнейшем планируется развить систему в сторону расширения функциональности, связанной с отчетами, а также реализовать более удобный графический интерфейс.

Особенно полезной система будет для руководителей работ. В ней они смогут оценить успешность завершения расчетных задач в целом по группе, продуктивность каждого исполнителя, объем и равномерность расхода квот на вычисления. Также отпадает необходимость составлять акт о фактическом потреблении ресурсов по завершении научной работы — это может быть сделано автоматически.

Не забыт в этой ситуации и персонал вычислительного центра: сотрудники группы по обслуживанию пользователей могут легко получить данные по учету потребления вычислительных ресурсов. Также возможно слежение за использованием дефицитных ресурсов и автоматическое отчуждение неиспользуемых квот на них для выдачи другим пользователям.

Что касается численных критериев, данное решение позволяет повысить эффективность решения инцидента ε более чем вдвое, а время формирования отчетов и вовсе становится незначительным в сравнении с ручным способом формирования. Также добавляется несколько вариантов отчетов.

Литература

1. TORQUE Administrator Guide [Электронный ресурс]: URL:<http://docs.adaptivecomputing.com/torque/help.htm> (дата обращения: 10.03.14).
2. OTRS 3.3 Admin Manual [Электронный ресурс]: URL:<http://doc.otrs.org/3.3/en/html> (дата обращения: 22.02.14).
3. Drupal Community Documentation [Электронный ресурс]: URL:<https://drupal.org/documentation> (дата обращения: 22.02.14).

УДК 004.75

Якушкин О. О.

Добавление новых коммуникационных шаблонов и их горизонтальное масштабирование в безброкерной системе

Рекомендовано к публикации профессором Дегтяревым А. Б.

1. Введение. В облаках решаются принципиально разнородные задачи. При первом приближении можно выделить три: большое количество маленьких задач типа массовых расчетов, обработка больших массивов данных и расчет одной большой задачи — целостной системы управлений, меняющей свое состояние при внесении каждого нового управления [1–4]. Требования к балансировке и масштабированию систем, решающих эти задачи различны. Существенное обстоятельство состоит в том, что если исключить первый случай, который хорошо масштабируется даже в рамках Грида, работать в облачных структурах невозможно без средств коммуникации.

В зависимости от того, какую из этих задач нам надо решить, применяются различные инструменты. В рамках облачной системы для задач, связанных с интенсивным взаимодействием узлов, когда управляющие элементы разнесены по виртуальным машинам, а процессы полностью виртуализированы, остро встают вопросы способов коммуникации между узлами системы. Эта проблема актуальна как для задач обработки Big Data, так и для решения задач моделирования крупных систем.

В рамках работы над прототипом коммуникационной системы для мониторинга и диагностики состояния объектов культурного наследия, а также для использования при реализации некоторых вычислительных экспериментов по моделированию гидрофизических и гидрометеорологических процессов на акватории Балтийского моря, нами была разработана безброкерная транспортная система, позволяющая динамически перераспределять нагрузку в ходе

Якушкин Олег Олегович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: oleg.jakushkin@gmail.com, тел.: +7(981)103-16-50

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ. НИР № 01201453381, № 01201453375

Работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ»

взаимодействия узлов, поддерживая разнообразные способы коммуникации.

2. Постановка задачи. Библиотеки P2P коммуникации для обмена сообщениями, такие как, например, ZeroMQ или NanoMsg, содержат предустановленный набор шаблонов взаимодействия программ и компонентов. Другие библиотеки P2P коммуникаций, ориентированные на передачу информации в форме потоков, такие как, например, libjingle, предоставляют узкий набор коммуникационных примитивов, не сильно расширяющих пул абстракций, привнесенных еще BSD сокетами. Отсутствие структурированных правил безопасного для системы и продуманного с точки зрения масштабирования подхода к расширению набора шаблонов взаимодействия системы, создает неопределенность при разработке продукта и требует глубокого знания всей архитектуры транспортного решения для внесения каких-либо изменений.

Так, к стандартным паттернам передачи сообщений как Push-Pool, Publish-Subscribe, Request-Reply или Pair пользователям нашей системы требовалось добавлять возможности использования асинхронного Request-Reply, позволяющего отвечать на запросы пользователей в удобное для сервера время и длительных цепочек пар Request-Reply с возможной сменой роли с сервера на клиента. В рамках традиционной безброкерной архитектуры пользователям пришлось бы создать расширения к имеющимся библиотекам, которые на текущий момент не предоставляют формализованных интерфейсов для расширения. Другими словами, полностью контролировать поведение внедряемого ими паттерна, имея информацию лишь об одном узле системы, что при горизонтальном масштабировании могло привести к потере стабильности работы всей системы и отзывчивости приложения для конечных пользователей.

3. Предложенное решение. В рамках работы над поставленными задачами была разработана библиотека, предоставляющая интерфейсы, позволяющие систематизированно расширять набор предоставляемых средств коммуникации. Отметим, что добавление коммуникационных шаблонов было сопряжено с рядом проблем: единая адресация, необходимая для горизонтального масштабирования; унификация интерфейсов для разработки новых коммуникационных компонентов и дальнейшего взаимодействия с ними; возможность смены протокола транспортного уровня без требования к

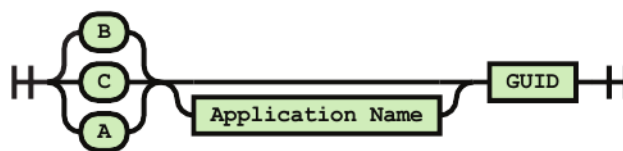


Рис. 1. Формирование уникального идентификатора экземпляра приложения переписыванию созданных средств коммуникационного взаимодействия.

3.1. Адресация. Рассмотрим предложенные решения. Создание единообразной адресации важно для работы любой коммуникационной логики, например, чтобы передавать информацию от приложения «А» к приложению «Б» по стеку TCP/IP где-то требуется хранить адрес и порт, к которым можно подсоединиться. Более того, для того чтобы различать приложения одного типа, запущенные в рамках системы, и предоставлять возможность горизонтального масштабирования, требуется введение общего банка адресов. Существующие библиотеки P2P коммуникаций не предоставляют внешних формализованных форматов, скрывающих явные IP адреса узлов, на которых исполняются приложения за содержательными названиями. В связи с этим, нами был разработан формат представления адресов приложениям, изображенный на синтаксической диаграмме (см. рис. 1). В нем к типу и имени приложения, если оно представлено, добавляется уникальный идентификатор. Такой уникальный идентификатор экземпляра приложения хранится в банке адресов: ему сопоставляются необходимые сетевые данные для поддержки различных средств коммуникационного взаимодействия.

3.2. Интерфейсы взаимодействия. В ходе работы предложенной системы, осуществляется взаимодействие между банком актуальных адресов и всеми экземплярами запущенных приложений в соответствии с заданным интервалом времени. Таким образом, осуществляется «сердцебиение системы». Созданная система адресации скрыта от пользователя предлагаемой архитектуры за набором интерфейсов, предоставляющих высокий уровень абстракции над структурами и алгоритмами библиотеки, показанными на рис. 2.

Для создания новых шаблонов передачи сообщений помимо *IMessage*, *IPublisher*, предоставляется базовый класс, реализующий *ICommunicationPattern* и предоставляющий набор методов, позволя-

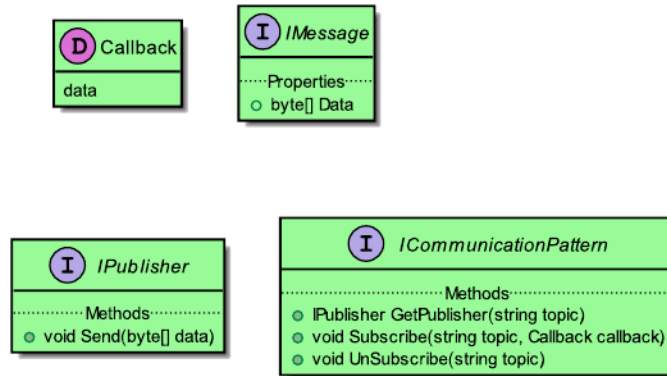


Рис. 2. Интерфейсы библиотеки

ющих зарегистрировать созданный экземпляр шаблона взаимодействия в общей сети и получить адреса участвующих в сети других экземпляров.

Схема горизонтального масштабирования определяется реализацией шаблона передачи сообщений. Экземпляр реализации шаблона может запросить у банка адресов либо всех подписчиков, либо набор уникальных приложений подписчиков (передавших различные имена), либо одного подписчика. Экземпляр шаблона начинает взаимодействие и контролирует его процесс.

3.3. Гибкость транспортного уровня. Отличительной особенностью системы является возможность смены нижележащей транспортной прослойки. Транспорт, такой как ZeroMQ, приводится к унифицированному интерфейсу, после чего библиотека получает возможность с ним работать. Таким образом, не только пользователю предоставляется уровень абстракции при работе с библиотекой, но и разработчику расширений, т. е. новых коммуникационных шаблонов.

4. Заключение. Рассмотренный подход позволяет сохранять состоящую из разделенных, не связанных напрямую компонент систему. Предоставляет расширяемость на уровне способов взаимодействия компонент и контролирует со стороны бизнес логики распределение нагрузки, получая полную картину связей между узлами системы.

Другими словами, топология всех коммуникаций в системе может быть проанализирована архитектором или самой системой динамично.

чески для выделения новых ресурсов нуждающимся сервисам, что особенно актуально при работе в рамках облачных инфраструктур.

Предложенная схема дает возможность добавления новых коммуникационных шаблонов и поддержания их горизонтального масштабирования, в безброкерной коммуникационной среде. Прототип системы разрабатывался на языке C# с использованием P2P библиотеки ZeroMQ и доступен в виде открытого исходного кода по ссылке [5].

Литература

1. Degtyarev A. B., Logvinenko Y. Agent system service for supporting river boats navigation // *Procedia Computer Science*. 2010. Vol. 1, No. 1. P. 2717–2722.
2. Bogdanov A. V., Degtyarev A. B., Nechaev Y., Valdenberg A. Design of Telemedicine System Architecture // *Healthcare IT management*. 2006. Vol. 1, No. 2. P. 31–33.
3. Bogdanov A. V., Degtyarev A. B., Nechaev Y., Valdenberg A. Design of High-Performance Telemedicine System // *Healthcare IT management*. 2006. Vol. 1, No. 1. P. 29–31.
4. Bogdanov A. V., Degtyarev A. B., Lwin S. M., Lwin T. K. Problems of Development of Complex Multilayered Applications in Distributed Environment // *Proceedings of the 4th Intern. Conf. “Distributed Computing and Grid-Technologies in Science and Education”*. Dubna: JINR, 2010. P. 51–56.
5. MQ Cloud. [Электронный ресурс]: URL: <http://mqcloud.org/> (дата обращения: 06.21.14).

УДК 004.032.26

Ялов А. Л.

Распознавание номеров вагонов при помощи нейросети

Рекомендовано к публикации профессором Дегтярёвым А. Б.

1. Введение. В отраслях, связанных с железнодорожными перевозками или активно использующих ж/д транспорт, эффективное управление подвижным составом — важная составляющая успеха. Но привычная ручная работа, традиционно применяющаяся для учёта вагонов, — процесс длительный и трудоёмкий, и не позволяет эффективно управлять транспортом. Необходимо автоматизировать получение данных о подвижном составе в реальном времени.

2. Постановка задачи. Имеется проезжающий мимо поезд и заранее переданные номера вагонов (в произвольном порядке). Необходимо убедиться, что все вагоны присутствуют. Для этого около железной дороги устанавливается камера видеонаблюдения, снимающая перпендикулярно направлению движения поезда. В поле зрения камеры последовательно входят вагоны с нанесёнными на них номерами. Именно эти номера и необходимо получить для дальнейшей обработки.

При решении задачи распознавания можно выделить несколько этапов:

1. Предобработка.
2. Локализация.
3. Фрагментация.
4. Оптическое распознавание.
5. Верификация со списком.

Подробно о методах компьютерного зрения, используемых в промежуточных этапах, в частности, в предобработке, можно ознакомиться в [1]. Также в [2] описана более простая версия алгоритма, использующая OCR Tesseract [3]. Таким образом, цель данной работы — заменить OCR на модуль фрагментации и распознавания символов при помощи нейросети.

Ялов Александр Леонидович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexander.yalov@gmail.com, тел.: +7(911)184-97-90

3. Строчно-столбцовый метод локализации номера. Пусть A_5 — полученное в результате предобработки изображение. Делим A_5 на строки одинаковой толщины, получим множество строк, и считаем количество ненулевых пикселей для каждой строки. Получим множество значений $\{r''_i\}_0^{n-1}$. Линейно растянем это множество на $[0, 100]$, т. е.

$$r'_i = r''_i - r''_{min}, \quad r''_{min} = \min_{i=0, n-1} r''_i,$$

$$r_i = \frac{r'_i}{r'_{max}} \cdot 100, \quad r'_{max} = \max_{i=0, n-1} r'_i.$$

Далее по множеству $\{r_i\}_0^{n-1}$ пройдём линейной комбинацией переменной длины с весами $(-1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, -1)$ и найдём наибольшую из полученных сумм, а именно

$$\max_{i, k} \left(-r_i + \sum_{j=i+1}^{i+k-2} (r_j) - r_{i+k-1} \right).$$

Таким образом, получаем строки с наибольшим суммарным количеством особенностей (вес равен 1), по краям которых находятся строки с наименьшим количеством особенностей (вес равен -1). После уточняем принадлежность номеру верхней и нижней строки в зависимости от значений соответствующих элементов множества $\{r\}$ (если $r_{\tau_{1,2}} < 10$, то строка не принадлежит номеру). Значения i и k , в которых достигается максимум, найдены, таким образом полоса с возможным положением номера определена, назовём её R .

Приступаем к поиску столбцов с номером. Полосу R делим на столбцы одинаковой толщины, получим множество столбцов, и считаем количество ненулевых пикселей для каждого столбца, получим множество значений $\{c''_i\}_0^{m-1}$. Линейно растянем это множество на $[0, 100]$ способом, указанным выше, получим $\{c_i\}_0^{m-1}$.

Далее совершим ту же, но усложненную процедуру, а именно, найдём

$$\max_{i, k} \left(-c_i + \sum_{\substack{j=i+1 \\ (j \neq c_{jmin})}}^{i+k-2} (c_j) - c_{i+k-1} \right), \quad c_{jmin} = \min_{j=i+1, i+k-2} c_j.$$

Таким образом, получаем столбцы с наибольшим суммарным количеством особенностей (вес равен 1), по краям которых находятся

столбцы с наименьшим количеством особенностей (вес равен -1). Причём внутри столбцов с весами 1 выбираем столбец с наименьшим значением (c_{jmin}) и если $c_{jmin} < 25$, то его не учитываем.

Последнее условие необходимо, так как $\{c_i\}_0^{m-1}$ может иметь провалы (либо связанные с особенностью нанесения номера, либо удалённые на предыдущих этапах), которые обходятся таким маневром.

Далее уточняем принадлежность номеру правого и левого столбца, в зависимости от значений соответствующих элементов множества $\{c\}$ (если $c_{\tau_{1,2}} < 10$, то строка не принадлежит номеру). Столбцы с возможным положением номера C определены, и так как $C \subset R$, то область C — претендент на положение номера.

Проверяем

$$\begin{aligned} k_1(w(A_5)h(A_5)) < w_c < k_2(w(A_5)h(A_5)), \\ k_3(w(A_5)h(A_5)) < h_c < k_4(w(A_5)h(A_5)), \end{aligned}$$

т. е. проверяем, входит ли ширина и высота (w_c и h_c) прямоугольника-претендента C в разумные пределы (зависящие от ширины и высоты изображения A_5). Также убеждаемся, что отношение ширины и высоты входит в разумные пределы:

$$k_5(w(A_5)h(A_5)) < \frac{w_c}{h_c} < k_6(w(A_5)h(A_5)).$$

4. Фрагментация. Полученный прямоугольник C вырезаем из исходного изображения видеопоследовательности и применяем алгоритм бинаризации. Далее, на основе посчитанной гистограммы, делаем предположения о границах цифр. При наличии слишком широких сегментов усиливаем параметры и ищем границы в этих сегментах пока ширина всех сегментов не будет меньше ожидаемых.

Может быть получено до 20 сегментов. В них войдут буквы, которые написаны сразу за номером. Кроме того, многие цифры могут быть разделены на две части из-за их трафаретности. Частный анализ каждого сегмента не даст результатов, так как и человек не способен определить, находится перед ним символ 1 или часть от символа 4, потому передаём в нейросеть кроме n сегментов ещё и $n - 1$ пар соседних сегментов, строим все возможные варианты на основе ширины каждого символа и конструируем строки выходов для каждого варианта. Далее, ищем совпадения переданного списка вагонов и полученного списка номеров. При наличии совпадения считаем, что данный вагон есть.

5. Нейросеть. Для обучения использовались вырезанные изменённым алгоритмом, масштабированные бинаризованные цифры, размеченные вручную. Сперва использовалась нейросеть персептрон 640-325-10: 640 соответствует количеству пикселей на входных изображениях, 10 выходных нейронов соответствуют цифрам, а $325 = \frac{640+10}{2}$ – количество нейронов на среднем слое. Затем, после многих тестов, число нейронов на среднем слое было увеличено до 1000, качество распознавания на тестовой выборке увеличилось.

6. Заключение. Реализована система распознавания номеров вагонов в реальном времени. Использовалась среда разработки VS2012, библиотека OpenCV. Программа выполнялась на ПК с процессором Intel i5 и тактовой частотой 3 ГГц. Результаты по данным тестовых видеороликов с несколькими составами, содержащими вагоны различного типа, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Верификация вагонов

видеоролик	кол-во вагонов	качество
w1	50	95 %
w2	10	100 %
s1	40	70 %
s2	39	67 %
c1	14	85 %
c2	64	78 %
всего	217	81 %

Главная цель — заменить модуль OCR Tesseract на самостоятельно обученную нейросеть, без потери качества, выполнена.

Литература

1. Ялов А. Л. Распознавание движения со стационарной и поворотной камер видеонаблюдения // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 508–512.
2. Ялов А. Л. Распознавание номеров железнодорожных вагонов. Дипломная работа // Арх. С.-Петербур. гос. ун-та. 2013. 19 с.
3. Open source OCR engine Tesseract [Электронный ресурс]: URL: <https://code.google.com/p/tesseract-ocr/> (дата обращения: 01.04.2014).

UDK 004.9

Yuhei Akama, Keitaro Naruse
University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Japan

A tool for visualizing multiple agents using the Octree algorithm

Abstract. When controlling a massive number of agents, problem occurs; for example, it is difficult to observe the entire swarm. In order to control swarms efficiently, an indicator is needed which represents how they are likely to behave in the future. To define this, we must visualize and analyze physical quantities of swarms. So a tool is required to visualize them with easy visualization method for the observer. We developed 2 visualization methods called micro and macro views. In particular, our research focused on the macro visualization method. In the macro view, the agents are represented as an area. So the physical quantities which are invisible in the default visualization method (micro) can be visualized in the macro view. In this research, we investigated how these 2 views effect on the observation of massive numbers of agents.

1. Introduction. The background to this research is the intention to control multiple robots. In the near future, it will be possible to control multiple robots when a disaster such as an earthquake happens. However, we will not be able to control them efficiently because of the large number of robots. In the worst case, robots might cause a secondary disaster; for example, if robots collide with each other.

The final goal of this research is to define the indicator that we can use to predict how multiple agents move. However, the number of multiple agents in the real situation may range from hundreds of thousands to millions. In order to control these agents, we need characteristic quantities. It is difficult to observe the entire flock, so we have developed two views called micro and macro, so that we can observe them efficiently. The objective of this research is to develop a visualization tool . Moreover, it needs to be an interactive tool, which has quick response, because we want to control the time of the simulation for detailed and flexible observing. However, developing 3D visualization which makes it easy to observe is difficult. So we are first developing the tool in 2D.

Yuhei Akama – student, University of Aizu, Japan; e-mail: s1180123@gmail.com

There was a visualization tool called Mason for multi-agents made with Java [1]. It was able to be used for a wide range of simulations. Kornhauser has investigated and evaluated efficient visualization methods in developing a visualization tool [2]. They have used models in NetLogo.

2. Physical model of flock. We have experimented with a numerical simulation consisting of 10 thousands agents. All agents have an observation area in which they try to maintain a stable distance d and to synchronize velocity with each other (Fig. 1). This control relies on the following formula (1) from Olfati-Saber[3].

$$\mathbf{u}_i = k_p \sum_{j \in N_i} (\|p_j - p_i\| - d) \mathbf{n}_{ij} + k_v \sum_{j \in N_i} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i). \quad (1)$$

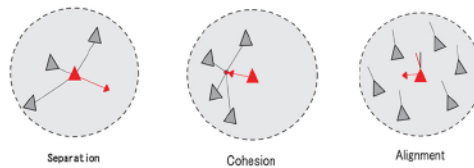


Figure 1. Rules of boids

3. About visualization

3.1. Goal and problems in visualization. Now, we do not know the element related to the predicting indicator. So we have to visualize and observe the physical quantities that all agents have. For this purpose, the tool has to have a representation method which makes observing them easy. Visualizing some physical quantities on a plane (or a space) is the main focus of this research because the representation of the swarm is limited to the plane.

3.2. Visualization of flocking in two views. It is difficult to observe all agents. So we implement two views called micro and macro. From the micro view, we can observe them one by one. From the macro view, you can observe them as an area because the plane is divided by the Octree. You can change two views stepwise.

The tool simply displays multiple agents one by one in micro. Their velocity is represented as an arrow. You can perceive the power \mathbf{u}_i when

each agent has a color. It becomes green when the power is weak and it becomes red when strong.

In macro, we use the Octree method to divide the plane. The left-side image is an example of the octree. (Fig. 2) The y-axis is divided as well as the x-axis. The details on the the Octree algorithm can be found in [4]. To observe agents stepwise from micro to macro, each axis is divided by 2, 4, 8, 16, 32, 64. So there are 4, 16, 64, 256, 1024, 4096 areas on the x-y plane. The separate interval is 160, 80, 40, 20, 10, 5 and corresponds to the number of the axis divisions. The velocity of each area is the average of the velocity of the agents in the area. The representation of velocity is the same as the micro view's. The power is calculated like the velocity and the color representation is the same as the micro view in which the threshold of the power is defined by the case all agents are stable. The density is represented as an area color transparency. The method to define the threshold is the same method as the power.

3.3. Visualization of part flock. Let's define a part flock. The observation relation of each agent can be considered as a graph. When each agent observes each other; they are in the same flock. This is part flock. This part flock is across divided areas and some part flocks are in the same area. So, we need a method for displaying the part flock. To avoid any mistake, we implement the following two methods.

3.4. Part flock representation by a frame and multi frames. You can distinguish whether the same part flock is in some areas because of a color frame surrounding one area. The number of color is 42 so that you are able to distinguish frames. Also, we represent how many part flocks are in the area as the transparency. The threshold of the density changes corresponding to the divided number of the axis for the readability.

You cannot grasp how many part flocks are in one area correctly using the above method. Therefore, we implement the function that the frames of part flocks in the area are displayed. The coloring rule is the same as the above method. However, there is a case in which the number of part flocks exceeds the 42 colors. So the frame color becomes black when it occurs.

4. How to determine the connectivity of agents. To represent the part flock in macro view, we must investigate the connectivity of each agent. Not considering all agent j for one agent i , we implement

the following.

1. Divide the display space into a discrete grid.
2. Investigate which cell the agent i is in.
3. Determine all agents j in the area in which the agent i is and the 8-neighbor area.

The above method makes it possible to reduce the computation time for sorting out the part flock.

5. Experiment

5.1. Setting of the experiment. Using the multi-agent simulation toolkit which we have been developing in this research, we set $\Delta t = 0.1$ as the time intervals of the simulation.

Based on tables (Tab. 1), we carry out the simulation using the Newton-Euler method (2, 3).

$$\mathbf{v}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_i^t + \mathbf{u}_i \Delta t. \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{p}_i^t + \mathbf{v}_i \Delta t. \quad (3)$$

Table 1. Simulation setting

Number of agents	10,00
Observation radius	$r = 1.5$
Stable distance	$d = 1.0$
Initial position	100×100 square
Initial velocity	$-1.0 \sim 1.0$ of uniform random
Spring constant	$k_p = 1.0$
Damper constant	$k_v = 1.0$

5.2. Result of visualization in Micro and Macro. We were able to grasp position and velocity of all agents one by one in micro (Fig. 3).

We could not know in detail the feature quantities of each agent in macro, but, we could grasp the rough position in order to change the view from macro to micro stepwise (Fig. 3). Also, we were able to get the information of the average of velocity, power and density which were invisible in micro view in divided areas.

5.3. Result of visualizing part flock using a frame

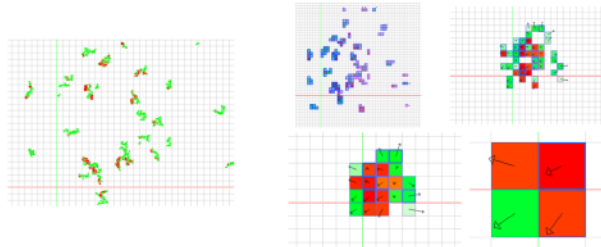


Figure 2. Visualization of agents in micro view (right side) and in macro view by 64×64 , 16×16 , 8×8 , 2×2 (left side)

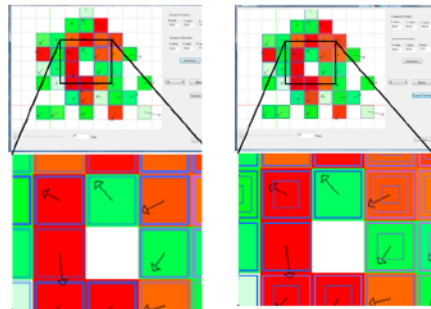


Figure 3. The frame and frames

We are not able to know the correct number of part flock, because the density of part flock in one area is represented as a shade of color (Fig. 4). It is easy to distinguish part flock in the area, but a frame's color is decided by one part flock so you cannot recognize when there are some part flocks because the shade of color of one part flock and some part flocks are different.

5.4. Result of visualizing part flock using frames.

You can know how many part flocks are in the area,

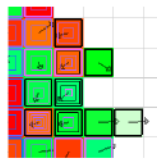


Figure 4. Black frames

because frames which are the same as the number of part flocks in one area appear on the display (Fig. 4). Also, there are frames representing one part flock therefor, it is possible to distinguish all frames in one area. However, the frame becomes black when the part flock number is bigger than 42 colors (Fig. 5). This makes it difficult to distinguish part flock.

6. Evaluation of readability. We evaluated the readability of

the tool with a questionnaire survey given to university students who have majored in computer science (Tab. 2). We found that the macro view is better than the micro in observing. We also found that the observer always observes the information of 10,000 agents in the micro view, but there is much less information in the macro because there are at most 4096 information. For this reason, we found the following. Color representations (power, density, part flock) in both views are not easy to observe, because it is difficult to distinguish the color. So we need a new design idea for the tool.

Table 2. Evaluation of readability

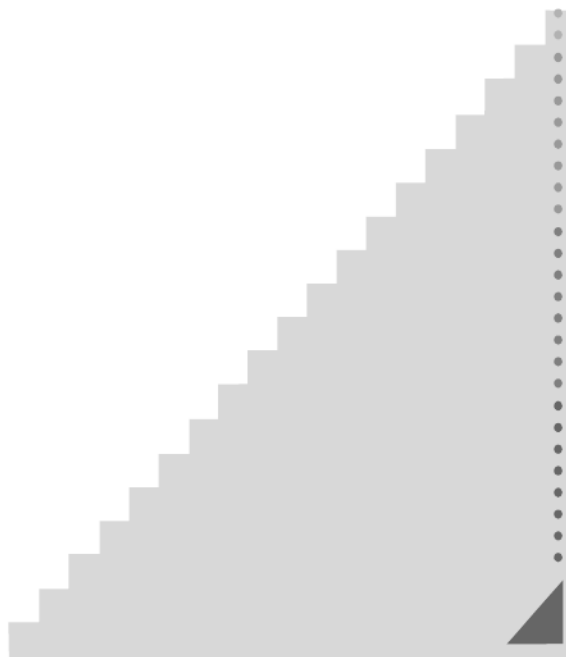
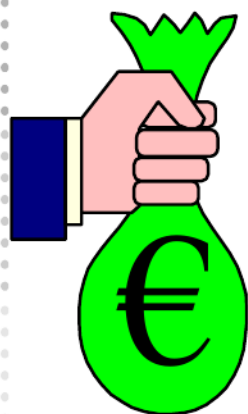
	Micro	Macro
Position	○	○
Velocity	×	○
Power	△	△
Density	×	△
Part flock (Density frame)	△	△
Part flock (Multi frames)	×	○

7. Conclusion and future work. We developed a visualization tool to observe multi agents easily from two views. In one of the views, the micro view, we can grasp position, velocity and power of each agent in detail. However, it is impossible to observe all agents, because of the large number. In the other view, the macro, we cannot identity all physical quantities correctly, but we can get approximate information. Moreover, we can observe the density and part flock which we cannot in the micro view. To improve color representations, we need more efficient methods. So we will implement a multi layer system which displays each type of information on a different layer and you can stack up those layers in the tool.

References

1. Luke, Sean, et al. "Mason: A new multi-agent simulation toolkit." Proceedings of the 2004 Swarm Fest Workshop. Vol. 8. 2004.
2. Kornhauser, Daniel, Uri Wilensky, and William Rand. "Design guidelines for agent based model visualization." Journal of Artificial Societies and Social Simulation 12.2 (2009): 1.
3. Olfati-Saber, Reza. "Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory." Automatic Control, IEEE Transactions on 51.3 (2006): 401-420.
4. Octree <http://en.wikipedia.org/wiki/Octree>.

5. Управление
социально-
экономическими
системами



УДК 519.816

Алферов Г. В., Малафеев О. А., Мальцева А. С.

Динамическая модель проведения инспекций

1. Постановка задачи. В настоящее время метод математического моделирования получил широкое распространение, польза от построения и исследования с помощью математических моделей в целях анализа и прогноза всевозможных процессов в естественных, технических, экономических и других науках общепризнана [1–7]. Члены террористических групп, наркомафии, коррумпированных сообществ используют в своей противоправной деятельности современные средства связи и передвижения. При этом возникает необходимость проводить инспекционные мероприятия для их пресечения. Для организации успешного противодействия следует прибегать к использованию современных технических средств и аппарата оптимизации использования ресурсов, разрабатывать динамические модели проведения инспекций. Рассмотрим следующую ситуацию. Корабль-перехватчик, оснащенный эхолотом, обнаружил перископ подводной лодки, которая в этот же момент, опустившись под воду, стала перемещаться в неизвестном направлении с неизвестной скоростью. Необходимо перехватить лодку за минимально возможное время [8]. Предполагается, что корабль-перехватчик не знает точно скорость подводной лодки, но ему известен дискретный набор скоростей, одна из которых является действительной скоростью подводной лодки. Далее корабль-перехватчик будем называть преследователем, а подводную лодку — убегающим и обозначать соответственно P и E .

2. Алгоритм отыскания оптимальной траектории преследователя и времени перехвата. Опишем алгоритм спирального поиска и нахождения времени поиска в условиях, когда преследователю достоверно неизвестна скорость убегающего [9]. Предположим,

Алферов Геннадий Викторович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alferovgv@gmail.com, тел.: +7(921)906-60-42

Малафеев Олег Алексеевич – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: malafeyevoa@mail.ru, тел.: +7(904)644-38-85

Мальцева Анастасия Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: luna171@mail.ru, тел.: +7(911)750-63-49

что скорость преследователя намного больше скорости убегающей лодки. В начальный момент обнаружения P точно определяет местоположение подводной лодки. Таким образом, преследователю известно расстояние между ним и убегающим. Обозначим его через D_0 . Для нахождения времени поимки необходимо определить траекторию, по которой должен двигаться корабль-перехватчик. Введем полярную систему координат (ρ, ϕ, O) таким образом, чтобы полюс находился в точке обнаружения подводной лодки, а полярная ось проходила через точку, в которой находился корабль-перехватчик. Тогда динамика убегающего описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^E &= v, \\ \dot{\phi}^E &= 0.\end{aligned}$$

Динамика преследователя описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^P &= \alpha, \quad \|\alpha\| \leq v_\rho, \\ \dot{\phi}^P &= \beta, \quad \|\beta\| \leq v_\phi, \\ v^P &= \sqrt{v_\rho^2 + v_\phi^2}.\end{aligned}$$

Преследователю точно неизвестна скорость v , однако известно, что она выбирается из дискретного множества V^E . Максимально возможную скорость корабля-преследователя обозначим через v^P . Преследователь может гарантировать поимку, перебрав все элементы множества V^E . Первоначально, корабль делает предположение, что убегающий имеет скорость $v_1 \in V^E$. Для поимки подводной лодки в момент t_0 преследователь начинает движение со скоростью v^P в направлении на точку O и движется так до момента t_1 , в который P и E оказываются на одинаковом расстоянии от нее, чтобы выполнялось равенство

$$\rho_1^E = \rho_1^P$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} v_1 dt + v^P(t_1 - t_0) = D_0.$$

С момента t_1 преследователь должен двигаться, выбирая скорость, так, чтобы постоянно находиться на таком же расстоянии от полюса,

что и убегающий. Для этого скорость корабля-перехватчика раскладывается на две составляющие: радиальную v_ρ и тангенциальную v_ϕ . Радиальная составляющая — скорость, с которой корабль отдаляется от полюса,

$$v_\rho = \dot{\rho}.$$

Тангенциальная составляющая — это линейная скорость вращения относительно полюса,

$$v_\phi = \dot{\phi}\rho.$$

Для того, чтобы встреча произошла, радиальная составляющая скорости преследователя полагается равной предполагаемой скорости убегающего. Тогда для нахождения траектории преследователя необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^P &= v_1, \\ (\dot{\phi}^P)^2(\rho^P)^2 &= (v^P)^2 - (v_1)^2.\end{aligned}$$

Начальными условиями для этой системы будут

$$\begin{aligned}\phi^P(t_1) &= 0, \\ \rho^P(t_1) &= v_1 t_1.\end{aligned}$$

Решая ее, находим

$$\begin{aligned}\phi^P(t) &= \frac{\sqrt{(v^P)^2 - (v_1)^2}}{v_1} \ln \frac{v_1 t}{v_1 t_1}, \\ \rho^P(t) &= v_1 t.\end{aligned}$$

Выразим время как функцию полярного угла

$$t(\phi) = t_1 \exp\left(\frac{v_1 \phi^P}{\sqrt{(V^P)^2 - (v_1)^2}}\right).$$

Таким образом, траектория состоит из прямолинейных участков и участков логарифмической спирали. В [10] доказано, что при движении по спирали встреча произойдет за время, не превышающее время прохождения одного витка. Тогда, если корабль, обойдя виток спирали, не находит подводную лодку, значит первоначальное

предположение о скорости убегающего было неверным. Далее выбирается следующая скорость $v_2 \in V^E$. Значит убегающий за время t_2 прошел расстояние $\rho_E(t_2) = v_2 t_2$, а преследователь $\rho_P(t_2) = v_1 t_2$. Если $\rho_P(t_2) > \rho_E(t_2)$, тогда расстояние между игроками будет равно $D_2 = \rho_P(t_2) - \rho_E(t_2)$ и для нахождения момента времени t_3 необходимо решить уравнение

$$v^P(t_3 - t_2) - \int_{t_2}^{t_3} v_2 dt = D_2.$$

После движения по прямолинейному участку преследователь движется по спирали. Преследователю для уменьшения времени целесообразно упорядочить перебор скоростей убегающего по убыванию. Однако, если это становится известно убегающему, он может двигаться с минимальной скоростью, что позволит максимизировать время поиска. Таким образом, получается следующая игра. Множеством стратегий убегающего является множество комбинаций возможных скоростей v_i его движения и направлений движения α . Множество стратегий корабля-перехватчика — это множество всевозможных перестановок элементов V^E . Матрица полученной игры состоит из элементов T , которые являются временем поимки.

3. Теоретико-игровая модель поиска и перехвата нескольких убегающих несколькими преследователями. Предположим, что корабль-перехватчик, имея на борту n катеров с глубинными бомбами в момент t обнаружил на различных расстояниях от него на поверхности моря перископы n подводных лодок, которые в тот же момент совершили погружение под воду и с фиксированными скоростями стали перемещаться прямолинейно в различных направлениях. Требуется отправить катера на перехват подводных лодок оптимальным образом, т. е. так, чтобы сумма гарантированных времен перехвата лодок была бы минимальной. Для решения задачи составим матрицу эффективности $A = (a_{ij})$, элементы которой есть гарантированное время перехвата подлодки j катером i , которое складывается из времени достижения катером точки обнаружения перископа и его полного времени прохождения по логарифмической спирали перехвата. Пусть величины $x_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ могут принимать только два значения:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{назначен } i \text{ катер для } j \text{ лодки,} \\ 0, & \text{не назначен } i \text{ катер для } j \text{ лодки.} \end{cases}$$

Математическая формулировка задачи об оптимальных назначениях

$$\min z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Пример. Пусть корабль-перехватчик обнаружил 4 подводные лодки. Первоначальное расстояние до каждой из них соответственно 100 километров, 200 километров, 50 километров и 163 километра. Преследователь имеет 4 катера для поимки подводных лодок. Максимальная скорость каждого катера соответственно 74 км/ч, 90 км/ч, 178 км/ч и 124 км/ч. Первая лодка движется по прямой $\alpha_1 = 23$, со скоростью $v_1 = 23$ км/ч. Соответствующие параметры второй лодки — $\alpha_2 = 137, v_2 = 50$ км/ч, третьей — $\alpha_3 = 187, v_3 = 67$ км/ч, четвертой — $\alpha_4 = 50, v_4 = 70$ км/ч. Тогда таблица для задачи о назначениях выглядит следующим образом:

Таблица. Задача о назначениях

1903	386	9,96	52
$1,15 \cdot 10^{71}$	$6,4 \cdot 10^{51}$	$1,3 \cdot 10^{34}$	$1,89 \cdot 10^{26}$
$5,6 \cdot 10^{172}$	$1,13 \cdot 10^{90}$	$2 \cdot 10^{32}$	$3,7 \cdot 10^{51}$
$2,4 \cdot 10^{63}$	$7,56 \cdot 10^{26}$	$1,28 \cdot 10^9$	$5,96 \cdot 10^{14}$

Элементы матрицы были получены при помощи программы Maple. Игру можно решить венгерским методом.

4. Заключение. Рассмотрен процесс поиска одного или нескольких убегающих. Найдена траектория движения преследователя, перемещение по которой гарантирует встречу с убегающим. Представлен алгоритм поиска времени погони. Решен контрольный пример.

Литература

1. Cournot A. O. Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses. Paris. 1838.
2. Nash J. Non-Cooperative Games // The Annals of Mathematics, Second Series. 1951. Vol. 54. No 2. С. 286–295.
3. Малафеев О. А., Черных К. С. Математическое моделирование развития компании // Экономическое возрождение России. 2004. № 1. С. 60.
4. Григорьева К. В., Малафеев О. А. Динамический процесс кооперативного взаимодействия в многокритериальной (многоагентной) задаче почтальона // Вестник гражданских инженеров. 2011. № 1. С. 150–156.
5. Алферов Г. В. Генерация стратегии робота в условиях неполной информации о среде // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь. 2003. № 35. С. 4–24.
6. Григорьева К. В., Иванов А. С., Малафеев О. А. Статическая коалиционная модель инвестирования инновационных проектов // Экономическое возрождение России. 2011. № 4. С. 90–98.
7. Колокольцов В. Н., Малафеев О. А. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть I) // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 4. С. 144–153.
8. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
9. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Математические и компьютерное моделирование социально-экономическим систем на уровне многоагентного взаимодействия. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2006. 1006 с.
10. Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1992. 216 с.

УДК 519.81

Асанова Н. С.

Использование аппарата производственных функций в условиях толерантности

Рекомендовано к публикации профессором Колбиным В. В.

Исследование зависимости между факторами и последствиями, к которым они привели, зачастую помогает предсказать развитие ситуации в дальнейшем и скорректировать свои действия для достижения наилучшего результата. Рассмотрим такие зависимости на примере строительной отрасли города Санкт-Петербурга, выбрав пять основных показателей.

Каждый из показателей зависит от ряда факторов, связь между которыми можно найти при помощи производственных функций. Для моделирования будем использовать данные Росстата и сайтов администрации города за 2010–2013 гг. [1].

Рассмотрим такие виды производственных функций, как линейную, степенную, показательную и обратную. Подберем коэффициенты этих производственных функций так, чтобы относительная погрешность была как можно меньшей, а коэффициент детерминированности был близок к единице. Для этого можно воспользоваться инструментом для поиска решений и задач оптимизации в программе Excel. Для каждого из показателей выберем свой вид функции, показывающий наилучшее приближение:

1. Ввод нового жилья (кв. м.)

$$y_1 = e^{5,02 \cdot 10^{-6} t} x_1^{0,02} x_2^{0,0015} x_3^{1,65} x_4^{0,144} x_5^{0,215} x_7^{0,935}.$$

2. Доступность приобретения жилья (соотношение между средним ежемесячным доходом на одного человека и средней стоимостью одного квадратного метра жилой площади в %)

$$y_2 = \frac{1000000}{0,055x_8 + 75x_4 + 0,388x_6}.$$

Асанова Надежда Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nadi5419181@yandex.ru, тел.: +7(911)091-70-21

3. Стоимость жилищно-коммунальных услуг (на одного человека в месяц в семье из трех человек)

$$y_3 = e^{1,063} x_9^{0,5739} x_{10}^{0,134} x_7^{0,856}.$$

4. Площадь ветхого и аварийного жилищного фонда во всем жилищном фонде (%)

$$y_4 = \frac{4204,6e^{-66 \cdot 10^{-6}t} x_3}{1,588x_{11} + 2024,7x_7}.$$

5. Объем выдачи ипотечных кредитов (количество)

$$y_5 = \frac{10^{-5} e^{0,05} x_8^{0,13} x_6^{3,1}}{x_{12}^{5,03}},$$

где вектор $x = (x_1, \dots, x_{12})$ — вектор факторов (см. таблицу 1).

Таблица 1. Факторы

Расходы на капитальные вложения по отрасли «Жилищное хозяйство»	x_1
Жилищный комитет (тыс. руб.)	x_2
Индексы цен строительно-монтажных работ	x_3
Индексы цен на прочие капитальные работы и затраты	x_4
Индексы цен на грузовые перевозки	x_5
Себестоимость строительства (руб. на 1 кв. м.)	x_6
Занятость	x_7
Прирост численности населения	x_8
Плата за содержание и ремонт жилого помещения (за 1 кв. м.)	x_9
Тарифы на электрическую энергию для населения (руб./кВт.ч)	x_9
Оптовые цены на газ без НДС (руб. за 1000 куб. м.)	x_{10}
Расходы на проведение противоаварийных работ и снос зданий, находящихся в аварийном состоянии	x_{11}
Процентная ставка по ипотеке	x_{12}

В первой и четвертой производственных функциях присутствует множитель e^t , который характеризует научно-технический прогресс.

Построенные производственные функции в некоторой мере отражают предпочтения к факторам (альтернативам) по направлению развития отрасли: рост количества новых квартир и доступности

жилья, понижение стоимости жилищно-коммунальных услуг, уменьшение площади ветхого жилья и повышение объема ипотечных кредитов. Поэтому на основе производственных функций построим вектор функций полезности

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \\ u_4(x) \\ u_5(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ -y_3(x) \\ -y_4(x) \\ y_5(x) \end{pmatrix}.$$

Эти функции удовлетворяют определению функций полезности, т. е. x будет предпочтительнее z по показателю i , тогда и только тогда, когда $u_i(x) > u_i(z)$ [2]. Так же функции удовлетворяют свойству инвариантности относительно линейных положительных преобразований, т. е. изменение функции на $au_i(x) + b$, $a > 0$, не повлияет на выбор альтернативы.

Так как факторы имеют неопределенный характер, перейдем к функции ожидаемой сравнительной полезности. Для этого построим функции распределения каждого из факторов, влияющих на показатели. Будем считать факторы непрерывными, независимыми случайными величинами и будем искать плотность распределения в виде стандартного нормального распределения

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x_i - a_i)^2}{2\sigma_i^2}}.$$

За a_i возьмем наиболее вероятное значение случайной величины. Для факторов, соответствующим статьям бюджета, возьмем за a_i плановые значения на 2014 год, остальные же найдем с использованием линейной регрессии методом наименьших квадратов. Чем больше среднеквадратичное отклонение, тем меньше вероятность, что $x_i = a_i$. Поэтому выберем σ_i , исходя из уверенности, что $x_i = a_i$ в следующем периоде (см. таблицу 2).

Таблица 2. Параметры распределения

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
a_i	4200000	22700000	101	135	110	44563
σ_i	200000	1000000	2,6	9,62	25	172,4
	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
a_i	262	92474	3,39	4245	130692	13
σ_i	1,91	7059	0,1	52,02	54039	0,5

Тогда ожидаемую полезность каждого из показателей при данном распределении факторов можно найти по формуле [2]

$$E(u, f(x)) = \int u(x)f(x)dx.$$

Для вычисления значений функций ожидаемой полезности воспользуемся программой Maple. Так как факторы подчиняются нормальному распределению, вероятность попадания каждого в интервал $[a_i - 3\sigma_i, a_i + 3\sigma_i]$ равна 99,7%. Поэтому для вычисления интегралов в качестве пределов интегрирования возьмем соответствующие интервалы.

$$\begin{aligned} E(u_1, f(x)) &= \int_{38 \cdot 10^5}^{46 \cdot 10^5} \int_{19 \cdot 10^6}^{27 \cdot 10^6} \int_{20.95}^{180.95} \int_{31}^{235} \int_0^{220} \int_{162}^{362} \frac{e^{5,02 \cdot 10^{06} \cdot 2014}}{(2\pi)^3} \times \\ &\quad \times \frac{x_1^{0,02} x_2^{0,0015} x_3^{1,65} x_4^{0,144} x_5^{0,215} x_7^{0,935}}{200000 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2,6 \cdot 9,62 \cdot 25 \cdot 1,91} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{(x_1 - 4164535)^2}{8 \cdot 10^{10}}} e^{-\frac{(x_2 - 22687705)^2}{2 \cdot 10^{12}}} e^{-\frac{(x_3 - 100,95)^2}{2 \cdot 2,6^2}} e^{-\frac{(x_4 - 134,83)^2}{2 \cdot 9,62^2}} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{(x_5 - 110)^2}{1 \cdot 25^2}} e^{-\frac{(x_7 - 262)^2}{2 \cdot 1,91^2}} dx_7 dx_5 dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 = 2,7529 \cdot 10^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(u_2, f(x)) &= \int_{62474}^{122474} \int_{95}^{175} \int_{42563}^{46563} \frac{10^6}{(2\pi)^{1,5} \cdot 7058,61 \cdot 9,62 \cdot 172,36} \times \\ &\quad \times \frac{e^{-\frac{(x_8 - 92474,4)^2}{2 \cdot (7058,6)^2}} e^{-\frac{(x_4 - 134,83)^2}{2 \cdot 9,62^2}} e^{-\frac{(x_6 - 44563)^2}{2 \cdot 172,4^2}}}{(0,05x_8 + 75x_4 + 0,388x_6)} dx_6 dx_4 dx_8 = 30,74, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(u_3, f(x)) &= - \int_{2.39}^{4.39} \int_{3945}^{4345} \int_{242}^{282} \frac{e^{1,06} x_9^{0,57} x_{10}^{0,134} x_7^{0,856}}{(2\pi)^{1,5} \cdot 0,1 \cdot 52,02 \cdot 1,91} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{(x_9 - 3,39)^2}{2 \cdot (0,1)^2}} e^{-\frac{(x_{10} - 4245,4)^2}{2 \cdot 52,02^2}} e^{-\frac{(x_7 - 262)^2}{2 \cdot 1,91^2}} dx_7 dx_{10} dx_9 = -2042,3, \end{aligned}$$

$$E(u_4, f(x)) = - \int_{692}^{260692} \int_{86}^{116} \int_{242}^{282} \frac{4204,6x_3 e^{-66,4 \cdot 10^{-6} \cdot 2014}}{(2\pi)^{1,5} \cdot 54040 \cdot 2,6 \cdot 1,91} \times$$

$$\times \frac{e^{-\frac{(x_3-130692)^2}{2 \cdot (54039)^2}} e^{-\frac{(x_{11}-100,95)^2}{2 \cdot 2,6^2}} e^{-\frac{(x_7-262)^2}{2 \cdot 1,91^2}}}{(1,59x_{11} + 2024,7x_7)} dx_7 dx_{11} dx_3 = -0,506,$$

$$E(u_5, f(x)) = \int_{11,5}^{15,5} \int_{70474}^{114474} \int_{43563}^{455632} \frac{10^{-5} e^{0,05} x_8^{0,132} x_6^{3,1}}{(2\pi)^{1,5} \cdot 0,5 \cdot 7058,6 \cdot 172,36 x_{12}^{5,03}} \times \\ \times e^{-\frac{(x_{12}-3,5)^2}{2 \cdot (0,5)^2}} e^{-\frac{(x_8-92474)^2}{2 \cdot 7058,6^2}} e^{-\frac{(x_6-44563)^2}{2 \cdot 172,4^2}} dx_6 dx_8 dx_{12} = 25605.$$

Тем самым получено прогнозируемое значение вектора показателей в следующем году. Сравнивая с предыдущим годом, делаем вывод, что увеличится количество нового жилья, снизится его доступность, повысится стоимость жилищно-коммунальных услуг и площади ветхого жилья, уменьшится объем выдаваемых кредитов (см. таблицу 3).

Таблица 3. Показатели

	2010	2011	2012	2013	2014
y_1	2660000	2710000	2576000	2580000	2750000
y_2	40,54	38,65	36,72	31,68	30,74
y_3	1375	1516	1797	1902	2042,3
y_4	—	0,65	0,53	0,4	0,5
y_5	11000	20923	25700	31154	25605

Рассмотрим теперь задачу векторной оптимизации показателей строительной отрасли.

Если предположить, что факторы не будут подчиняться модели линейной регрессии, то можно взять не точные значения a_i и σ_i , а некоторые интервалы, на которых они могут изменяться: $[a_{i1}, a_{i2}]$ и $[\sigma_{i1}, \sigma_{i2}]$. Построим функцию сравнительной полезности на основе функции полезности:

$$u(x, z) = \begin{pmatrix} y_1(x) - y_1(z) \\ y_2(x) - y_2(z) \\ -y_3(x) + y_3(z) \\ -y_4(x) + y_4(z) \\ y_5(x) - y_5(z) \end{pmatrix}.$$

Функции являются кососимметричными и обладают следующими свойствами:

$$x \succ y \Leftrightarrow u_i(x, y) > 0,$$

$$x \prec y \Leftrightarrow u_i(x, y) < 0.$$

Перейдем к ожидаемой сравнительной полезности, получим функции, зависящие от $a_i, \sigma_i, b_i, \nu_i$:

$$\begin{aligned} E(u, f_{a,\sigma}(x) \times f_{b,\nu}(x)) &= E(u, f_{a,\sigma}(x)) - E(u, f_{b,\nu}(x)) = \\ &= \int u(x) f_{a,\sigma} dx - \int u(x) f_{b,\nu} dx. \end{aligned}$$

Чтобы найденные значения факторов a_i^* и отклонения σ_i^* , которые принадлежат заданным интервалам $[a_{i1}, a_{i2}]$ и $[\sigma_{i1}, \sigma_{i2}]$, максимизировали ожидаемую полезность, необходимо выполнение условия

$$E(u, f_{a^*,\sigma^*}(x) \times f_{b,\nu}(x)) \geq 0, \quad \forall b_i \in [a_{i1}, a_{i2}], \quad \forall \nu_i \in [\sigma_{i1}, \sigma_{i2}].$$

Решение ищется как $A_i^* = \bigcap_{j=1}^5 A_{ij}^*$ и $\Sigma_i^* = \bigcap_{j=1}^5 \Sigma_{ij}^*$, где A_{ij}^* , Σ_{ij}^* — множество решений для показателя j . Если это пересечение будет пустым множеством, то воспользуемся моделью оптимизации в условиях толерантности. Под толерантностью понимают отношение безразличия, определенное на множестве исходов, а в нашем случае — на множестве показателей [2], т. е. зададим вектор $c^1 = (\tau_1^1, \dots, \tau_5^1)$ и перейдем к задаче

$$E(u, f_{a^*,\sigma^*}(x) \times f_{b,\nu}(x)) \geq -c^1, \quad \forall b_i \in [a_{i1}, a_{i2}], \quad \forall \nu_i \in [\sigma_{i1}, \sigma_{i2}].$$

Если и это пересечение будет пустым множеством, то увеличивая уровень толерантности на каждом этапе, придем в результате к решению искомой задачи a_i^* и σ_i^* .

Литература

1. Официальный сайт администрации Санкт-Петербурга [Электронный ресурс]: URL:<http://gov.spb.ru/> (дата обращения: 15.12.13).
2. Колбин В. В. Теория решений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 644 с.

УДК 519.25

Болотова В. И.

Статистический анализ телевизионных рейтингов

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. Потребность в анализе телевизионных рейтингов возникла вместе с задачей медиапланирования для привлечения наибольшего количества зрителей к тому или иному каналу, эфирному событию. Целью данной работы является разработка метода, позволяющего описать имеющиеся статистические данные. Для ее достижения рейтинги будут рассматриваться как временной ряд. Применяется классический подход построения линейной модели. Также рассматривается кусочно-линейная модель и ее программная реализация средствами MS Excel VBA.

2. Постановка задачи. Имеются данные о рейтингах TVR «Первого канала» с мая 2000 г. по апрель 2013 г. (см. рис. 1). Требуется построить модель, наиболее точно их описывающую, и сделать выводы о ее адекватности.

3. Построение эмпирических моделей. Так как данные анализируются как временной ряд, то при построении каждой модели будем выделять и удалять тренд и сезонную компоненту. Затем исследовать остатки, получившиеся после удаления перечисленных выше составляющих, по критерию Дарбина – Уотсона для проверки на адекватность построенной модели.

3.1. Линейная модель временного ряда. Построим аддитивную модель временного ряда [1–3]:

$$y_i = tr_i + s_i + e_i,$$

где y_i — значение рейтинга TVR «Первого канала» в i -ый момент времени t_i ; tr_i — линейный тренд временного ряда; s_i — сезонная компонента временного ряда; e_i — остаток (случайная компонента) временного ряда.

Болотова Виктория Игоревна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: viktoria151091@yandex.ru, тел.: +7(981)103-36-16

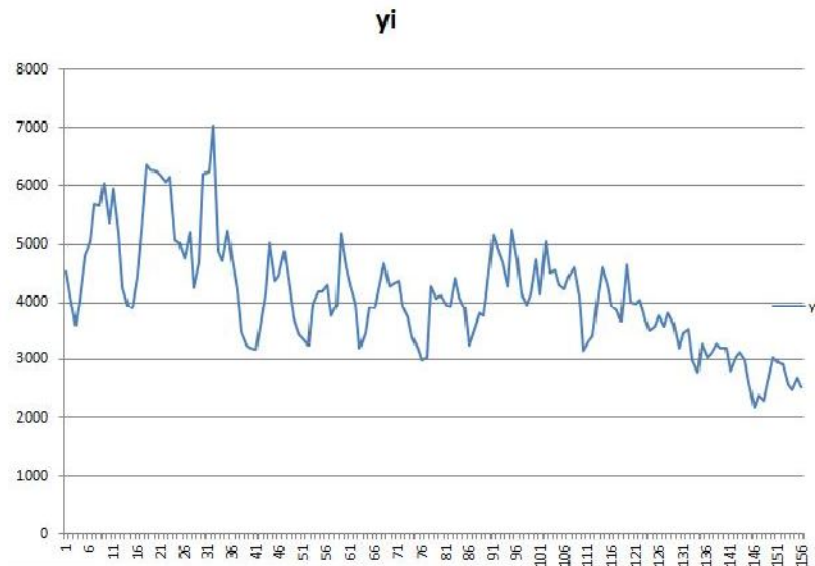


Рис. 1. График рейтингов TVR «Первого канала»

Тренд будет иметь вид $tr_i = \alpha t_i + \beta$. Коэффициенты α и β вычисляются с помощью метода наименьших квадратов [1] встроенными методами среды MS Excel. Получим

$$tr_i = -13,88354504t_i + 5194,886875.$$

После удаления тренда из временного ряда получаем данные для расчета сезонной компоненты. Так как данные представлены ежемесячно, то возьмем период сезонности, равный двенадцати. Найдем оценки сезонной составляющей s_i как средние полученных значений разности $y_i - tr_i$ за каждый месяц (по всем годам).

Оценки для значений временного ряда \tilde{y}_i рассчитываются как сумма тренда и сезонной компоненты:

$$\tilde{y}_i = tr_i + s_i.$$

Остатки рассчитываем как разность

$$e_i = y_i - tr_i - s_i.$$

Хорошо известна процедура проверки адекватности эмпирической модели по критерию Дарбина — Уотсона [2]. Если значения статистики $DW \in [1, 5; 2, 5]$, то построенную модель считают адекватной. В противном случае — неадекватной. Для нашей модели

$$DW = 0,435123299 \notin [1, 5; 2, 5].$$

Таким образом, построенная модель временного ряда не пригодна к использованию.

3.2. Линейная модель отдельных кусков временного ряда. Анализируя график рассматриваемого показателя (см. рис. 1), можно выделить четыре фрагмента, отличных друг от друга. Рассмотрим четыре ряда, для каждого из которых построим свою эмпирическую модель аналогично тому, как для всего ряда.

Первый фрагмент: значения y_i , соответствующие t_i , где $i \in [1, 31]$. Здесь

$$tr_i = 34,50066935t_i + 4629,983161,$$

$$DW = 1,586122966 \in [1, 5; 2, 5].$$

Второй фрагмент: значения y_i , соответствующие t_i , где $i \in [37, 96]$,

$$tr_i = 7,297621839t_i + 3802,449701,$$

$$DW = 0,886302917 \notin [1, 5; 2, 5].$$

Третий фрагмент: значения y_i , соответствующие t_i , где $i \in [97, 120]$,

$$tr_i = -19,48595217t_i + 4409,438986,$$

$$DW = 1,611667382 \in [1, 5; 2, 5].$$

Четвертый фрагмент: значения y_i , соответствующие t_i , где $i \in [121, 156]$,

$$tr_i = -39,12865251t_i + 3823,538127,$$

$$DW = 0,926906063 \notin [1, 5; 2, 5].$$

Таким образом, первый и третий ряд удается хорошо описать своей эмпирической моделью, для второго и четвертого построенные модели не пригодны к использованию. Это может быть связано с неправильным разбиением на промежутки.

3.3. Кусочно-линейная модель. В процессе исследования приходим к выводу, что временной ряд, следует разбивать на большее количество интервалов, чем в предыдущих попытках анализа. Целесообразно выделить в нем семь фрагментов. По ним будем строить непрерывный кусочно-линейный тренд с шестью точками переключения [2, 3]. Визуально подобрать точки переключения так, чтобы эмпирическая модель была статистически значимой, невозможно. Однако, можно определить интервалы для точек разбиения, а затем перебрать всевозможные комбинации, для каждой из которых построить эмпирическую модель и рассчитать статистику Дарбина — Уотсона. Для выбора наилучшего разбиения следует сравнить статистики. Ввиду большого объема данных было принято решение написать программу, осуществляющую методом совместного перебора автоматический выбор точек переключения кусочно-линейного тренда для построения наилучшей из возможных эмпирических моделей.

Входными данными в программе являются исходный ряд и интервалы для точек разбиения $t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}, t_{(4)}, t_{(5)}, t_{(6)}$.

При разбиении временного ряда конец одного фрагмента будем считать началом следующего за ним.

Рассматривая каждый вариант разбиения, кусочно-линейный тренд строим следующим образом [2]

$$tr_i(t) = \alpha + \beta_0 t + \beta_1(t - t_{(1)})^+ + \beta_2(t - t_{(2)})^+ + \beta_3(t - t_{(3)})^+ + \\ + \beta_4(t - t_{(4)})^+ + \beta_5(t - t_{(5)})^+ + \beta_6(t - t_{(6)})^+,$$

где для $i \in [1, 6]$ выполняется

$$(t - t_{(i)})^+ = \begin{cases} t - t_{(i)}, & t > t_{(i)}, \\ 0, & t \leq t_{(i)}. \end{cases}$$

Схемой расчета коэффициентов $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ является метод наименьших квадратов [1].

Рассмотрим сезонную компоненту. Известно, что пользователь знает, что период сезонности равен двенадцати. Но допускаем, что каждый фрагмент имеет свою сезонность. Это связано с тем, что на каждом из них амплитуда колебаний существенно менялась. Поэтому для каждой части разбиения сезонную составляющую рассчитываем отдельно как среднее арифметическое разностей фактических значений временного ряда и тренда.

Далее, удалив из временного ряда тренд и сезонную компоненту, получим остатки, по которым рассчитываем статистику Дарбина — Уотсона.

Разбиение i будем считать лучше разбиения $i-1$, если полученная для него статистика Дарбина — Уотсона ближе к двум, т. е.

$$|DW_i - 2| < |DW_{i-1} - 2|.$$

Найдем наилучшее разбиение ряда с помощью программы. Входные интервалы

$$t_{(1)} \in [29, 33], \quad t_{(2)} \in [41, 49], \quad t_{(3)} \in [59, 64],$$

$$t_{(4)} \in [87, 98], \quad t_{(5)} \in [120, 125], \quad t_{(6)} \in [132, 140].$$

Получаем, что модель будет наиболее адекватна при выборе следующих точек разбиения:

$$t_{(1)} = 33, \quad t_{(2)} = 45, \quad t_{(3)} = 64, \quad t_{(4)} = 95, \quad t_{(5)} = 122, \quad t_{(6)} = 136.$$

Модель кусочно-линейного тренда

$$\begin{aligned} tr_i(t) = & 4821,66922524 + 17,80664256 t - 150,19369593(t - t_{(1)})^+ + \\ & + 135,48654976(t - t_{(2)})^+ + 12,58918359(t - t_{(3)})^+ - 32,71304057(t - t_{(4)})^+ - \\ & - 41,85339383(t - t_{(5)})^+ + 28,44872463(t - t_{(6)})^+. \end{aligned}$$

Рассмотрим полученные значения сезонных колебаний на первом и пятом интервалах.

Первый интервал: $s_{(1)} = -445,62$; $s_{(2)} = -795,45$; $s_{(3)} = -853,2$; $s_{(4)} = -846,99$; $s_{(5)} = -211,58$; $s_{(6)} = 730,73$; $s_{(7)} = 912,28$; $s_{(8)} = 1146,3$; $s_{(9)} = 509,66$; $s_{(10)} = 608,21$; $s_{(11)} = 926,22$; $s_{(12)} = -12,91$.

Пятый интервал: $s_{(1)} = 302,13$; $s_{(2)} = -40,1$; $s_{(3)} = -385,48$; $s_{(4)} = -460,95$; $s_{(5)} = -98,9$; $s_{(6)} = -6,9$; $s_{(7)} = 690,03$; $s_{(8)} = 285,78$; $s_{(9)} = 146,24$; $s_{(10)} = -4,08$; $s_{(11)} = -113,86$; $s_{(12)} = 497,26$.

Статистика Дарбина — Уотсона

$$DW = 1,763145628.$$

Таким образом, данный подход позволяет найти эмпирическую модель, хорошо описывающую временной ряд. Найденные точки переключения являются временем перестройки. Это говорит о том, что в это время произошел какой-то ряд событий, который повлиял на изучаемый показатель. Значения сезонной составляющей на первом и пятом промежутках попарно различны. Это свидетельствует о том, что вместе с трендом меняется и сезонная компонента.

4. Заключение. Анализируя рейтинги TVR «Первого канала», приходим к выводу, что лучшим способом является построение кусочно-линейной модели. В дальнейшем планируется рассмотреть рейтинги других телевизионных каналов и попытаться применить к ним полученную модель.

Литература

1. Носко В. П. Эконометрика для начинающих. Основные понятия, элементарные методы, границы применимости, интерпретация результатов. М.: Институт экономики переходного периода, 2000. 255 с.
2. Буре В. М., Евсеев Е. А. Основы эконометрики. Учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004. 72 с.
3. Буре В. М. Методология статистического анализа опытных данных. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2007. 141 с.

УДК 519.83

Бутенко М. С.

Комбинированный принцип оптимальности в одной многошаговой сетевой игре

Рекомендовано к публикации профессором Петросяном Л. А.

1. Введение. В работе проводится исследование сетевых кооперативных игр с шокированными игроками.

Подобная постановка, моделируемая двухэтапной сетевой игрой, рассматривалась в работе [1]. В ней исследуется двухэтапная игра четырех игроков, где на первом этапе формировалась сеть, потом происходил один случайный шок, затем разыгрывалась некооперативная игра. Принципиальное отличие нашей работы в том, что на третьем этапе происходит кооперативная игра.

2. Формализация трехэтапной сетевой игры. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество игроков, которые могут взаимодействовать друг с другом. Взаимодействие между игроками подразумевает наличие между ними связи. Под сетью понимается объект (N, g) [2]. Далее будем обозначать её через g .

Рассмотрим трехэтапную игровую модель: на первом этапе игроки выбирают партнеров (других игроков), с которыми они хотят установить связи, тем самым формируя сеть. На втором этапе происходят случайные внешние воздействия (шоки), определяющие наборы стратегий каждого шокированного игрока. На последнем этапе игры, с учетом сформировавшейся сети и полученных игроками шок, игроки выбирают стратегии, которые впоследствии определяют их выигрыши. Рассмотрим подробнее каждый из этих этапов.

Стратегия игрока i во всей игре определяется вектором $(p_i, a_i(p, s))$, где первая компонента — выбор стратегии игроком на первом этапе игры, а вторая — на третьем этапе в зависимости от выбора на первом и полученного шока на втором.

2.1. Первый этап: формирование сети. Для множества игроков N определим правило формирования связей посредством одновременного и независимого выбора [2].

Бутенко Мария Сергеевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: butenko.marya@gmail.com, тел.: +7(952)369-23-62

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 9.38.245.2014

Определим стратегию игрока $i \in N$ на первом этапе игры как n -мерный вектор

$$p_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}), \quad p_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N. \quad (1)$$

Предполагается, что игрок не может предложить сам себе связь, т. е. $p_{ii} = 0$, что исключает возможность образования в сети петель.

Таким образом, образуется сеть

$$g = \{(i, j) \in N : p_{ji}p_{ij} = 1\} \in \Gamma,$$

где Γ — набор всевозможных сетей.

Обозначим соседей игрока i в сети g как множество всех игроков, с которыми он имеет связь:

$$N^i(g) = \{j : p_{ji}p_{ij} = 1, j \neq i\}.$$

Число соседей игрока i — это мощность множества $N^i(g)$: $n^i(g) = |N^i(g)|$.

2.2. Второй этап: распределение шоков. После того как сеть g образовалась, между игроками случайным образом распределяются шоки. Рассмотрим этот процесс.

Пусть множество $M = \{1, \dots, m\}$ — набор шоков. Процедура распределения шоков между игроками такова: m шоков поочередно и равновероятно распределяются между еще не шокированными игроками. Получаем, что если $m < n$, то m игроков шокированы различными и единственными шоками, а $(n - m)$ игроков «нормальные», а если $m > n$, то все n игроков шокированы различными, единственными шоками, а $(m - n)$ шоков просто исчезают.

Обозначим через $\Omega = \{\omega_{is}\}_{i \in N, s \in M}$ ($n \times m$)-матрицу шоков. Запись $\{\omega_{is}\}$ обозначает, что на игрока i действует шок s . Элементы матрицы Ω определяются по правилу:

$$\omega_{is} = \begin{cases} 1, & \text{игрок } i \text{ имеет шок } s, \\ 0, & \text{игрок } i \text{ не имеет шок } s. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что матрица Ω состоит из единиц и нулей, которые обозначают наличие, либо отсутствие шока соответственно.

2.3. Третий этап: кооперативная игра. Здесь рассматриваются стратегии игроков в зависимости от сформированной сети и

полученных шоков на втором этапе, вводится понятие выигрыша игрока, рассматривается игра в форме характеристической функции.

Множество возможных действий у игроков совпадают, обозначим это множество $X = \{X_1, \dots, X_l\}$, $l = |X|$. Шок s , полученный на втором этапе, влияет на игрока так, что исключает из множества X действие с номером s . Очевидно, что $s \leq \min\{l, m\}$. Обозначим множество стратегий игрока i , получившего шок s ,

$$A_{is} = A_{is}(\omega_{is}) = \begin{cases} X \setminus \{X_s\}, & \omega_{is} = 1, \\ X, & \omega_{is} = 0, \end{cases} \quad i \in N, \quad s \in M.$$

Таким образом, имеем сеть g из первого этапа игры, распределенные шоки, действующие на игроков на втором этапе, и на третьем этапе игрок выбирает действие $a_i \in A_{is}$, $i \in N$, которое влияет на выигрыш его соседей. Выигрыш игрока i от связи с игроком j (при наличии такой связи) определяется следующим образом:

$$K^i(a_i, a_j) = \{\alpha_{ij}\}, \quad \alpha_{ij} > 0, \quad a_i \in A_{is_1}, \quad a_j \in A_{js_2}, \quad s_1, s_2 \in \{1, \dots, m\}.$$

Общий выигрыш игрока i определяется взвешенной суммой выигрышей от всех его связей

$$H_i^g(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j \in N_i(g)} \frac{1}{n_i(g)} K^i(a_i, a_j).$$

Если игрок не состоит ни с кем в связи, то он получает выигрыш $K^i(a_i, \emptyset) = \alpha_0$, $0 < \alpha_0 < \alpha_{ij}$.

Построим для нашей подыгры характеристическую функцию с целью распределить максимальный суммарный выигрыш. Характеристическая функция для фиксированной сети g и полученного шока s определяется для любой коалиции $R \subseteq N$ по правилу

$$v(g, s, N) = \max \sum_{i \in N} H_i^g(a_1, \dots, a_n), \quad (2)$$

$$v(g, s, R) = \max_{j \in R} \min_{j \in N \setminus R} \sum_{i \in R, R \subseteq N} H_i^g(a_1, \dots, a_n), \quad (3)$$

$$v(g, s, \emptyset) = 0. \quad (4)$$

В качестве решения будем использовать вектор Шепли [3] $\phi(g, s) = (\phi_1(g, s), \dots, \phi_n(g, s))$, компоненты которого определяются для фиксированной сети g и полученного шока s согласно формуле для каждого игрока $i \in N$:

$$\phi_i(g, s) = \sum_{i \in R, R \subseteq N} \frac{(|N| - |R|)! (|R| - 1)!}{|N|!} [v(g, s, R) - v(g, s, R \setminus \{i\})]. \quad (5)$$

3. Построение решения в трехэтапной игре. Ищем равновесие по Нэшу [4] в трехэтапной игре, в предположении, что на последнем шаге игроки кооперируются и их выигрыш совпадает с соответствующей компонентой вектора Шепли, вычисленной для реализовавшейся сети и реализовавшегося шока.

Под решением в трехэтапной игре понимаем ситуацию равновесия по Нэшу в игре формирования сети первого этапа, при условии, что выигрыш игроков определяется как усредненные выигрыши в кооперативных играх с шоками третьего этапа. Объясним это на примере.

Пример. Рассмотрим игру для $n = 3, m = 1, p = 2$, т. е. три игрока, один шок, две возможные стратегии.

Рассмотрим первый этап игры. У каждого игрока есть стратегия, заключающаяся в том, чтобы предложить другим игрокам создать с ним связь или нет. Например, первый игрок выбрал трехмерное действие. Согласно формуле (1) $p_1 = (0, 1, 0)$ — это значит, что первый игрок предложил связь второму и не предложил связь третьему. В результате могут быть реализованы восемь сетей (рис. 1).

На втором этапе реализуется шок, который ограничивает множество стратегий шокированного игрока. Тогда с реализацией шока каждая сеть может преобразоваться в одну из трех сетей. В итоге к началу третьего этапа игры имеем одну из двадцати четырех сетей с реализованными шоками.

У каждого игрока по две стратегии X_1, X_2 , а когда игрок шокирован, остается только стратегия X_2 , и матрица выигрыша игрока от одной связи определяется, как и в [1], следующим образом:

$$K^i = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

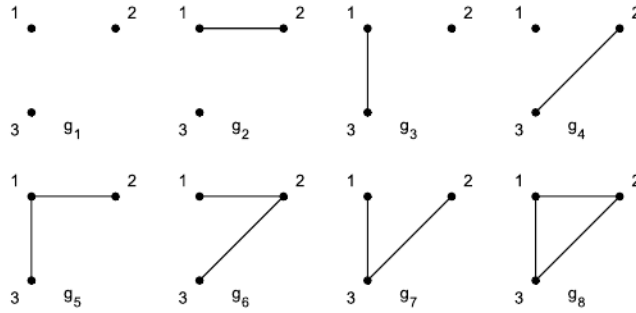


Рис. 1. Сети

Для каждой конфигурации сети (из первого этапа) выигрыш игрока i найдем как среднее значение его компонент вектора Шепли в играх третьего этапа с шоком, которые оказываются возможными для данной конкретной реализации.

Для первой сети максимальный суммарный выигрыш $v(g_1, N) = \frac{3}{2}$. Очевидно, что вектор Шепли по формуле (5) вне зависимости от шока будет $\phi(g_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Рассмотрим сеть g_2 с усредненным по шоку выигрышем. Построим характеристическую функцию согласно правилу (2)–(4): $v(g_2, \{1\}) = 4$, $v(g_2, \{2\}) = 4$, $v(g_2, \{3\}) = \frac{1}{2}$, $v(g_2, \{1, 2\}) = 9\frac{1}{3}$, $v(g_2, \{1, 3\}) = 4\frac{1}{2}$, $v(g_2, \{2, 3\}) = 4\frac{1}{2}$, $v(g_2, N) = 9\frac{5}{6}$. Вектор Шепли по формуле (5) $\phi(g_2) = (4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$.

Нетрудно заметить, что сети g_3 и g_4 такие же, как и сеть g_2 с точностью до перестановки игроков. Поэтому легко записать соответствующие векторы $\phi(g_3) = (4\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 4\frac{2}{3})$ и $\phi(g_4) = (\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3})$.

Далее рассмотрим сеть g_5 с усредненным по шоку выигрышем. Строим характеристическую функцию $v(g_5, \{1\}) = 4$, $v(g_5, \{2\}) = 4$, $v(g_5, \{3\}) = 4$, $v(g_5, \{1, 2\}) = 8\frac{1}{2}$, $v(g_5, \{1, 3\}) = 8\frac{1}{2}$, $v(g_5, \{2, 3\}) = 8$, $v(g_5, N) = 13$. Вектор Шепли $\phi(g_5) = (4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4})$. Аналогично для сетей g_6, g_7 векторы Шепли соответственно равны $\phi(g_6) = (4\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4})$, $\phi(g_7) = (4\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2})$. Легко показать, что вектор Шепли для сети g_8 имеет вид $\phi(g_8) = (4, 4, 4)$.

Можно показать, что векторы Шепли для сетей g_2, g_3, g_4 являются равновесными по Нэшу. Покажем это для сети g_2 , а для остальных

ных доказывається аналогічно. Розглянемо ситуацію, при якій можливо створення цієї мережі $p = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0))$. Нехай перший відхилився, т. є. вибрав стратегію або $p_1 = (0, 1, 1)$, або $p_1 = (0, 0, 1)$, або $p_1 = (0, 0, 0)$. Тоді в першому випадку це приведе до мережі g_5 , де він отримує менше. Во другому випадку відхилення веде до мережі g_3 , де він отримує стільки ж, а в третьому випадку відхилення веде до розриву зв'язі і мінімальному вииграшу. Таким чином, відхилення першому гравцю від своєї стратегії створення зв'язей не вигідно. Аналогічно для другого гравця. Якщо відхилиться третій, то його вииграш взагалі не зміниться. Таким чином показано, що вектори Шеплі $\phi(g_2) = (4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$, $\phi(g_3) = (4\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 4\frac{2}{3})$, $\phi(g_4) = (\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3})$, для мереж g_2, g_3, g_4 є рівноважними по Нэшу. Аналогічним чином можна показати, що інші вектори Шеплі не є рівноважними по Нэшу.

Приклад показує, наскільки трудомісткі обчислення навіть в простих випадках. В даний момент розробляється алгоритм знаходження рівноважних векторів Шеплі в більш загальному випадку.

Литература

1. Corbae D., Duffy J. Experiments with network formation // Games and Economic Behavior / ed. by J. Duffy. Pittsburgh, Pa: Department of Economics, University of Pittsburgh. 2008. P. 81–120.
2. Петросян Л. А., Седаков А. А., Бочкарев А. О. Двухступенчатые сетевые игры // Математическая теория игр и её приложения. 2013. Т. 5, вып. 4, С. 84–104.
3. Shapley L. S. A value for n -person games // Contributions to the Theory of Games II / ed. by Luce R. D. and Tucker A. W. Princeton, Pa: Princeton University Press, 1953. P. 307–317.
4. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. М.: Наука, 2011. 432 с.

УДК 330.4, 51-77, 517.9

Владимиров Е. В., Смирнов Н. В.

Сценарный подход моделирования развития предприятия, использующего кредитные ресурсы

1. Введение. Описание модели. В настоящее время в России постоянно растет число предприятий малого и среднего бизнеса. Для них одной из приоритетных и актуальных задач является решение вопроса о первоначальном капитале и его эффективном вложении при выходе на рынок. При помощи математического моделирования данной ситуации можно определить оптимальную сумму банковского кредита на развитие бизнеса и рассчитать сроки ее погашения при увеличении объемов производства. С этой целью рассмотрим математическую модель, описанную в [1, 2].

Предположим, что предприятие получает в банке единовременный кредит z_0 на развитие производства, который использует для приобретения основных производственных фондов, и затем в каждом t -ом периоде выплачивает банку из полученной прибыли денежные средства в размере H_{Cr} . В этом случае динамика величины долга z_t определяется разностным уравнением

$$z_{t+1} = z_t + \beta z_t - H_{Cr}, \quad (1)$$

где β — постоянная процентная ставка по кредиту.

Предполагая, что предприятие производит товар одного вида и спрос на него превышает предложение (на достаточно продолжительном отрезке времени, что может быть характерно для инновационного производства), динамику объема производства Q_t этого товара можно описать разностным уравнением

$$Q_{t+1} = Q_t + \lambda(pQ_t - C_t - H_t) - \mu Q_t, \quad (2)$$

где p — значение цены товара, C_t — полные издержки производства, H_t — величина, равная сумме выделенных денежных средств

Владимиров Евгений Викторович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vladimirov.92@mail.ru, тел.: +7(981)762-75-34

Смирнов Николай Васильевич — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nvs_v@mail.ru, тел.: +7(921)903-29-47

на погашение кредита и личного дохода владельца, μ — коэффициент выбытия, λ — коэффициент фондоотдачи. Полные издержки будем описывать как линейную функцию от объема производства $C_t = nQ_t + c$, где n, c — некоторые положительные постоянные.

От разностных уравнений (1), (2) несложно перейти к системе дифференциальных уравнений, что удобно с точки зрения дальнейшего анализа модели. Имеем

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = r(Q(t) - Q_e), \\ \dot{z}(t) = \beta(z(t) - z_e), \end{cases} \quad (3)$$

где $r = \lambda(p - n) - \mu$, точка фазовой плоскости (z_e, Q_e) — положение равновесия системы, где $Q_e = \frac{\lambda(c+H)}{\lambda(p-n)-\mu}$, $z_e = \frac{HCr}{\beta}$. Величина H считается постоянной, так как функция $H(t)$ является кусочно-постоянной:

$$H(t) = \begin{cases} H_F + H_{Cr}, & t \leq T_{Cr}, \\ H_F, & t > T_{Cr}. \end{cases} \quad (4)$$

В (4) H_F — часть прибыли, составляющая личный доход владельца предприятия, а T_{Cr} — время полного погашения кредита, которое может быть найдено по формуле

$$T_{Cr} = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{z_e}{z_e - z_0} \right). \quad (5)$$

Начальные условия для системы (3) вытекают из того, что объем производства в начальный момент определяется только стоимостью закупленного оборудования, на покупку которого потрачен кредит, и коэффициентом его фондоотдачи, т. е. $z(0) = z_0$ и $Q(0) = Q_0 = \lambda z_0$. Таким образом, начальная точка всегда лежит на прямой $Q = \lambda z$ фазовой плоскости (z, Q) .

В условиях задачи положение равновесия (z_e, Q_e) является неустойчивым узлом. При этом есть три варианта расположения прямой $Q = \lambda z$ относительно точки (z_e, Q_e) : выше, ниже или пройти через нее [1]. Из этих фактов сразу следуют первые рекомендации. А именно, имеет смысл приобретать технологию производства, параметры которой соответствуют первому варианту, когда прямая проходит выше положения равновесия. В этом случае существуют начальные условия, при которых долг сокращается, а производство товара растет (см. траекторию 1 на рис. 1) или рост долга незначителен при

существенном росте производства (см. траектории 2, 3 на рис. 1). Таким образом, оптимальный выбор соответствует положению начальной точки во втором квадранте относительно положения равновесия.

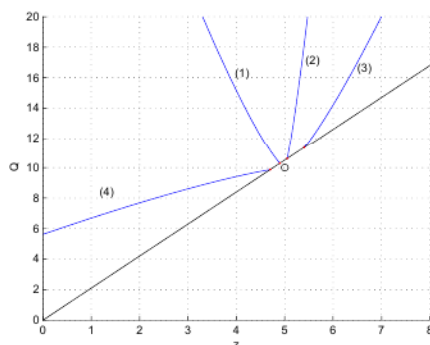


Рис. 1. Прямая $Q = \lambda z$ лежит выше точки равновесия (z_e, Q_e)

Формальные условия выбора величины начального капитала (объема соответствующего кредита z_0) и ежемесячной суммы для погашения кредита имеют вид

$$\frac{Q_e}{\lambda} < z_0 < z_e, \quad \frac{\beta(c + H_F)}{r - \beta} < H_{Cr} < H.$$

2. Сценарный подход. В реальной экономической практике вполне возможна следующая проблема. Дело в том, что вложения в основные производственные фонды объективно носят дискретный характер. Нельзя, например, купить полтора станка. С точки зрения математической модели (3), (4) это означает, что начальная точка не только лежит на прямой $Q = \lambda z$, но и может принимать лишь определенные значения, соответствующие возможным «квантам» комплектации оборудования. Другими словами, выгодная в указанном выше смысле технология при ее закупке будет соответствовать начальным данным и траекториям типа 2, 3 на рис. 1. При этом попадание начальной точки во второй квадрант невозможно. Для решения этой проблемы предлагается комбинированный метод развития предприятия на основе сценарного подхода.

2.1. Перераспределение ресурсов. Опишем один из возможных сценариев решения указанной выше проблемы. Предположим, что начальная точка (z_0, Q_0) , соответствующая привлекательной для вложений технологии производства, лежит в первом квадранте, т. е. с ростом объема производства товара будет расти и долг. С экономической точки зрения такая ситуация возможна, когда владелец хочет иметь от своего производства какой-то фиксированный личный доход именно на начальном этапе или же хочет в короткие сроки развить свое предприятие до более высокого уровня производства. Понятно, что нельзя долго придерживаться такого сценария развития событий, поскольку долг постоянно растет. В этом случае предлагается через какой-то момент времени поменять тактику и перераспределить ресурсы, чтобы долг начал сокращаться.

Пусть для начальной точки в первом квадранте объем производства товара вырос за время \bar{t} до уровня \bar{Q} , а уровень долга вырос до \bar{z} . Перераспределим сумму между личным доходом владельца и суммой, идущей на погашение долга: увеличим сумму H_{Cr} на величину U , т. е. $\bar{H}_{Cr} = H_{Cr} + U$. Тогда личный доход владельца H_F сократится соответственно на эту же величину: $\bar{H}_F = H_F - U$. Заметим, что $0 \leq U \leq H_F$, а величина H из первого уравнения системы (3), (4) остается неизменной, поскольку $H = H_F + H_{Cr}$. Таким образом, динамика объема производства остается такой же, но изменится динамика долга. В результате система (3), (4) примет вид

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = r(Q(t) - Q_e), \\ \dot{z}(t) = \beta(z(t) - \bar{z}_e), \end{cases} \quad (6)$$

где $\bar{z}_e = \frac{\bar{H}_{Cr}}{\beta}$, причем $\bar{z}_e \geq z_e$. Система (6) имеет положение равновесия в точке (\bar{z}_e, Q_e) . Таким образом, если выбрать величину U так, чтобы при $t = \bar{t}$ выполнялось $\bar{z}_e > z(\bar{t})$, то начальная точка для системы (6) $(\bar{z}, \bar{Q}) = (z(\bar{t}), Q(\bar{t}))$ будет находиться во втором квадранте, что позволит сокращать долг при росте производства.

Из условия $\bar{z}_e > z(\bar{t})$ следует

$$\frac{\bar{H}_{Cr}}{\beta} > z_e + (z_0 - z_e)e^{\beta\bar{t}} \quad \Rightarrow \quad U > (\beta z_0 - H_{Cr})e^{\beta\bar{t}}.$$

Поскольку $U \leq H_F$, то получаем $(\beta z_0 - H_{Cr})e^{\beta\bar{t}} < U \leq H_F$. Отсюда можно найти предельный момент времени, не позже которого необходимо перераспределить ресурсы на величину U , чтобы выплаты

долга приводили к его сокращению, и соответствующее ему значение объема производства:

$$\bar{t}_p = \frac{1}{\beta} \ln \frac{U}{\beta z_0 - H_{Cr}}, \quad Q(\bar{t}_p) = Q_e + (Q_0 - Q_e)e^{r\bar{t}_p} = \bar{Q}_p.$$

На рис. 2 показана точка перераспределения ресурсов $(z(\bar{t}_p), Q(\bar{t}_p))$

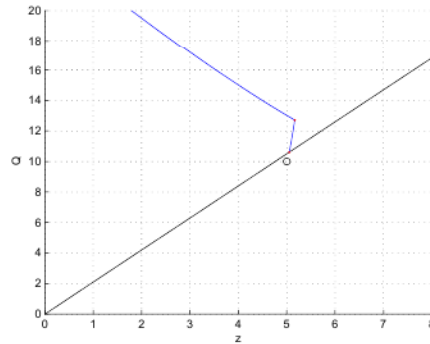


Рис. 2. Эффект перераспределения ресурсов

и траектория нового сценария развития предприятия.

2.2. Перекредитование. Из второго уравнения системы (6), используя новые начальные данные $(z(\bar{t}_p), Q(\bar{t}_p))$ и положение равновесия (\bar{z}_e, Q_e) , по формуле (5) найдем расчетное время погашения долга

$$\bar{T}_{Cr} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\bar{z}_e}{\bar{z}_e - z(\bar{t}_p)}. \quad (7)$$

Если величина \bar{H}_{Cr} мала, то время \bar{T}_{Cr} может оказаться больше установленного банком времени \hat{T} . Пусть разница $\hat{T} - \bar{T}_{Cr}$ невелика, тогда можно вновь перераспределить ресурсы за счет личных доходов владельца. Полагая в (7) $\bar{T}_{Cr} = \hat{T}$ и $\bar{z}_e = \frac{\bar{H}_{Cr}}{\beta}$, найдем величину выплаты долга $\hat{H}_{Cr} = \frac{\beta z(\bar{t}_p) e^{\beta \hat{T}}}{e^{\beta \hat{T}} - 1}$, до которой необходимо увеличить выплаты, чтобы погасить кредит в срок.

Предположим теперь, что величина $\hat{T} - T_{Cr}$ велика, т. е. нельзя погасить кредит в срок перераспределением ресурсов. В этом случае

необходимо осуществить перекредитование. Пусть в момент времени \hat{T} объем производства товара вырос до уровня \hat{Q} , а долг сократился до величины \hat{z} . Возьмем новый кредит на сумму \hat{z} под процентную ставку α . Обозначим новую величину выплат по кредиту через \tilde{H}_{Cr} , а доход собственника — \tilde{H}_F . Второе уравнение системы (6) примет вид

$$\dot{z}(t) = \alpha(z(t) - \tilde{z}_e), \quad \tilde{z}_e = \frac{\tilde{H}_{Cr}}{\alpha}. \quad (8)$$

Кроме того, $\tilde{H} = \tilde{H}_{Cr} + \tilde{H}_F$, а значит изменится и первое уравнение системы (6):

$$\dot{Q}(t) = r(Q(t) - \tilde{Q}_e), \quad \tilde{Q}_e = \frac{\lambda(c + \tilde{H})}{r}. \quad (9)$$

Чтобы объем производства товара продолжал расти, а долг снижался, начальная точка системы (8), (9) должна лежать во втором квадранте, т. е. $\hat{Q} > \tilde{Q}_e$ и $\hat{z} < \tilde{z}_e$. Отсюда $\tilde{H} < \frac{r\hat{Q}}{\lambda} - c$ и $\tilde{H}_{Cr} > \alpha\hat{z}$. Если процентная ставка α фиксирована, то из последних двух неравенств получаем ограничение на \tilde{H} и \tilde{H}_{Cr} :

$$\alpha\hat{z} < \tilde{H}_{Cr} \leq \tilde{H} < \frac{r\hat{Q}}{\lambda} - c. \quad (10)$$

Если же фиксирована величина \tilde{H}_{Cr} , то имеем ограничение для процентной ставки: $\alpha < \frac{\tilde{H}}{\hat{z}}$.

Таким образом, если имеет место неравенство (10), то складывается благоприятная ситуация: объем производства будет расти при сокращении долга. Если же неравенство (10) не будет выполнено, то можно повторно реализовать описанные сценарии. Либо допустить временный рост долга и в дальнейшем перераспределить доходы внутри предприятия, либо повторно взять новый кредит таким образом, чтобы начальная точка для новой системы оказалась во втором квадранте.

3. Заключение. Рассмотренная модель вполне адекватно описывает динамику производства и долговых обязательств по кредиту. Она может быть адаптирована для анализа развития нового производства при других вариантах реальных экономических условий. Как было показано выше, величины H_F , H_{Cr} , по сути, являются

управляемыми параметрами. В этом случае уравнения (3), (4) можно рассматривать как линейную управляемую систему. Тогда для нее можно развить сценарный подход на основе принципов многопрограммного управления [3–5].

Литература

1. Лебедев В. В., Лебедев К. В. Исследование кредитного механизма, используемого для развития рынка новой продукции, на основе математического моделирования // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов VI Международной школы-симпозиума АМУР–2012. Севастополь, 17–23 сентября 2012 / отв. ред. М. Ю. Кусый, А. В. Сигал. Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2012. С. 227–229.
2. Михель Н. В., Смирнов Н. В. Анализ математической модели кредитного механизма, используемого фирмой для развития нового производства // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 617–619.
3. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Синтез многопрограммных управлений в билинейных системах // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. № 6. С. 929–932.
4. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Шахов Я. А. Стабилизация заданного набора положений равновесия нелинейных систем // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 3–9.
5. Smirnov N. V., Smirnova T. E., Smirnov M. N., Smirnova M. A. Multiprogram digital control // Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, IMECS 2014, March 12–14, Hong Kong, 2014. Vol. 1. P. 268–271.

УДК 519.22

Дорофеев Б. В., Закройщиков С. А.

Приложение актуарных расчетов в страховании жизни

1. Введение. Актуарные расчеты представляют собой оценивание нетто-тарифов в страховании жизни. На качество оценки в наибольшей степени влияют следующие факторы:

- *Демографические таблицы.* В то время, как предметом страхования является здоровье и жизнь человека, страховой случай – утрата одного из этих качеств. На основании статистики, подготавливаемой ежегодно государством, строятся таблицы смертности, описывающие вероятности дожития до любого возраста, и статистика заболеваемости. Общие данные предоставляет государство, а более специализированные таблицы (вероятности получения инвалидности в отрасли или собственная статистика характерных для рода деятельности заболеваний) – результат исследований компании-страховщика.
- *Темп роста инфляции.* Договор страхования жизни зачастую заключается на длительный срок и между моментом заключения договора и страховой выплатой может пройти несколько лет. За этот период стоимость денег уменьшится из-за инфляции, однако страховой фонд инвестирует часть своего капитала, чтобы не только компенсировать инфляцию, но и обеспечить некоторый доход от инвестиций.

Обычно темп роста инфляции представляется в виде технической ставки, которая гарантирует неразoreние страховой компании; в данной работе предлагается считать величину темпа роста случайной величиной. Так как нормальное распределение изучено наиболее полно и обладает набором замечательных качеств, выдвигается гипотеза о нормальном распределении. Представим договор о пожизненном пенсионном обеспечении в виде двух финансовых потоков:

Дорофеев Борис Вячеславович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: b.dorofeev@spbu.ru, тел.: +7(911)004-20-07

Закройщиков Сергей Александрович – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: zakroishikov@gmail.com, тел.: +7(950)038-09-02

- страхователь вносит в фонд страховую премию P согласно условиям договора страхования;
- страховщик производит серию фиксированных платежей R с момента, определяемого договором (обычно платежи отсрочены от момента заключения договора на несколько лет) до наступления смерти застрахованного (см. рис. 1).

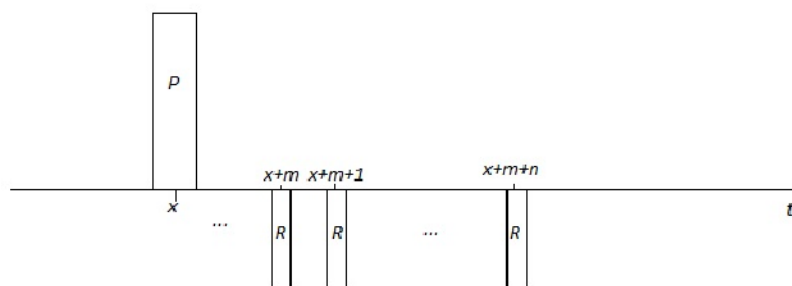


Рис. 1. Серия платежей

Периодичность платежей может быть различной для каждой схемы страхования — вклады и выплаты могут быть ежегодными, ежемесячными, еженедельными. В случае фиксированной процентной ставки современная стоимость серии единичных фиксированных ежегодных платежей есть

$$a_{\overline{m}|} = \sum_{k=1}^n \nu^k = \frac{1 - \nu^n}{1 - \nu}, \quad \nu = (1 + i)^{-1},$$

где i — ставка наращивания. По принципу финансовой эквивалентности $A = S$ [1], дисконтированная стоимость страховых выплат по договору страхования на n лет $A = \sum_{k=1}^n \nu^k$ равна дисконтированной на тот же момент стоимости уплаченных застрахованным лицом премий. В нашем случае $S = P$, тогда

$$P = \sum_{k=1}^n \nu^k.$$

2. Математическая модель. В качестве базовой модели выбираем поток единичных ежегодных платежей в течение n лет с неизвестной на каждом периоде времени ставкой наращения i_j :

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^k \frac{1}{1+i_j}.$$

Если i_j — случайная величина, то распределение $\nu_j = \frac{1}{1+i_j}$ очень сложно зависит от i_j , что значительно затрудняет оценку суммы произведений ν_j . Поэтому предлагается ввести величину, называемую силой роста процента: $\delta_j = \ln(1+i_j)$. Тогда

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^k e^{\delta_j}$$

и по свойству экспоненты

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n e^{-\sum_{j=1}^k \delta_j}.$$

Обозначим $\xi_k = \sum_{j=1}^k \delta_j$, тогда $a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n e^{-\xi_k}$.

Предположим, что для каждого интервала времени j сила роста процента — случайная величина, распределенная нормально с одинаковыми параметрами m, σ : $\delta_j \in N(m, \sigma)$.

Как известно, сумма нормально распределенных случайных величин также является случайной величиной, распределенной нормально: $\xi_k \in N(km, \sqrt{k}\sigma)$.

Введем новую случайную величину $\eta_k = e^{-\xi_k}$. Тогда современная стоимость серии платежей описывается следующей случайной величиной

$$A = \sum_{k=1}^n \eta_k.$$

В работе [2] показано, что $E(\eta_k) = \mu^k$, где $\mu = e^{-m} e^{\sigma^2/2}$. Данный результат обобщает случай фиксированной процентной ставки: если положить дисперсию распределения равной нулю, то $\mu = e^{-m}$, где μ — коэффициент дисконтирования, а m — сила роста процента.

3. Постановка задачи. Требуется определить современную стоимость бессрочного пенсионного обеспечения с ежегодными единичными выплатами в условиях нормально распределенной случайной силы роста процента.

В общем случае момент смерти застрахованного лица неизвестен, поэтому величина обязательств составит

$$S(x) = \sum_{k=1}^{K(x)+1} \eta_k,$$

где x — возраст застрахованного, $K(x)$ — целочисленная случайная величина, описывающая ожидаемую продолжительность жизни человека, дожившего до x лет. Её распределение может быть описано

$$P\{K(x) = n\} = {}_nq_x, \quad n \in [0, \omega - x],$$

где ω — предельная продолжительность жизни (обычно принимается за 100–110 лет), а ${}_nq_x$ — вероятность для человека в возрасте x лет умереть через n лет, определяемая по таблицам смертности:

$${}_nq_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}.$$

Здесь l_x — количество человек из контрольной группы l_0 (обычно 100000 человек), доживших до возраста x лет. Обозначим бессрочный аннуитет с параметром μ :

$$a_x(\mu) = \sum_{k=1}^{\omega-x} \mu^k {}_kp_x.$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия равны соответственно

$$E(S) = E\left(\sum_{k=1}^n \mu^k \middle| K(x) = n\right) = a_x(\mu),$$

$$D(S) = \frac{2\nu}{\mu - \nu} a_x(\mu) - \frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} a_x(\nu) - a_x^2(\mu),$$

где $\nu = e^{-2m} e^{2\sigma^2}$.

4. Приложение модели. Рассмотрим структуру аккумулируемых средств страхового фонда более подробно. В любой произвольный момент времени совокупные финансовые обязательства фонда могут быть представлены в виде суммы двух составляющих:

- текущие обязательства — обязательства по договорам, по которым уже производятся выплаты;
- отложенные обязательства — обязательства, выплаты по которым начнутся в будущем.

Обычно страховые компании формируют инвестиционный портфель из различных ценных бумаг, поэтому будем рассматривать страховой фонд в виде линейной комбинации краткосрочных и долгосрочных государственных облигаций [3] (см. рис. 2).



Рис. 2. Гистограмма

Подобная частотная структура описывается нормальным распределением. Согласно критерию Пирсона, гипотезу о нормальном распределении данной гипотезы можно принять на 0,9 уровне доверия. В данном случае коэффициент дисконтирования $\mu = 0,95$. Расчеты сделаны на основе статистики изменения ставок по государственным облигациям Российской Федерации и таблице смертности для мужчин РФ за 2010 год.

Результат проиллюстрируем на примере. Допустим, что клиент — мужчина в возрасте 40 лет и хочет получать пенсию в размере 5000 рублей в месяц до конца жизни, начиная с достижения возраста 50 лет. Для рассматриваемого инвестиционного портфеля страхового фонда рассчитаем параметры модели: математическое ожидание стоимости бессрочной ежегодной ренты с единичными платежами

равно 6,63, а нетто-премия договора на пожизненную пенсию в условиях примера составит 397983 рубля.

5. Выводы. На основе построенной модели можно получить точечные и доверительные оценки страховых премий, которые более адекватно описывают финансовые потоки страховых компаний по договорам страхования жизни.

Литература

1. Кудрявцев А.А. Актуарная математика. Оценка обязательств компании страхования. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2005. 344 с.
2. Дорофеев Б.В. Актуарные расчеты страховых тарифов // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. 2014. Вып. 2. С. 313-317.
3. Официальный сайт Центрального Банка Российской Федерации [Электронный ресурс]: URL:http://www.cbr.ru/hd_base/default.aspx?prtid=gkoofz_mr&pid=finr&sid=GKO_stavki (дата обращения: 08.03.14).

УДК 519.81

Егорова Н. В.

Прогнозирование и многоцелевая оптимизация электроэнергетической отрасли Санкт-Петербурга

Рекомендовано к публикации профессором Колбиным В. В.

1. Производственные функции. В данной работе исследованы закономерности, возникающие в процессе производства и распределения потребительской (220, 110 кВт/ч) электрической энергии в г. Санкт-Петербурге. Данные о значениях факторов производства и полезном отпуске электрической энергии в сеть были взяты из годовых отчетов отраслеобразующих предприятий за последние четыре года [1].

Таблица 1. Полезный отпуск электроэнергии в сеть

y_i	20 222,00	21 244,00	21 297,00	21 811,00
x_1	5 746,00	5 883,00	5 975,00	6 007,00
x_2	12,08	12,32	12,95	12,41
x_3	96 085,00	94 315,00	95 924,00	97 312,00
x_4	370,00	372,00	373,00	377,00
x_5	13 309,00	14 361,00	14 770,00	15 025,00
x_6	8 670,00	12 704,00	11 446,00	12 337,00
x_7	20 815,00	27 488,00	31 758,00	32 830,00
x_8	4 174,00	4 386,00	5 223,00	5 502,00

Вектор факторов имеет вид $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$, где x_1 — среднесписочная численность основного производственного персонала (чел.), x_2 — потери в сетях (%), x_3 — протяженность воздушных и кабельных линий 0,4–110 кВ (км), x_4 — количество подстанций (шт.), x_5 — количество трансформаторных подстанций (шт.), x_6 — капитальные вложения (млн. руб.), x_7 — затраты на производство и реализацию (млн. руб.), x_8 — затраты на транспортировку электроэнергии (млн. руб.).

Для определения вида зависимости отпуска электроэнергии от факторов построены степенная, экспоненциальная, линейная и обратная производственные функции, параметры которых определя-

Егорова Наталья Витальевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nat16507417@yandex.ru, тел.: +7(911)953-13-71

лись методом наименьших квадратов, минимизацией функции отклонений

$$\sum_{i=1}^4 (y_i - f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8))^2 \rightarrow \min.$$

Из-за того, что линейный вид производственной функции дает минимальную среднюю относительную погрешность при максимальном коэффициенте детерминации, он был выбран для аппроксимирующей функции

$$f(X) = 0,0403 + 0,5903x_1 + 2,0851 \cdot 10^{-7}x_2 + 0,139x_3 + 0,989x_4 + \\ + 1,58616x_5 \cdot 10^{-4} + 0,2853x_6 + 1,3253 \cdot 10^{-4}x_7 + 0,1594x_8.$$

Так как значение функции возрастают при увеличении значений факторов ($f(X_1) < f(X_2), X_1 < X_2$), то полученную производственную функцию можно считать функцией полезности и строить прогноз на следующий год. Прогноз для каждого фактора осуществляется в отдельности.

Чтобы проверить точность аппроксимации были исследованы линейная, полиномиальная, логарифмическая, степенная, экспоненциальная типы регрессий и подсчитаны соответствующие коэффициенты детерминации. Аппроксимирующие функции по каждому фактору имеют следующий вид:

$$x_1 = -26,25p^2 + 218,75p + 5552,8, \quad R^2 = 0,9997,$$

$$x_2 = -0,26p^3 + 1,755p^2 - 3,205p + 13,79, \quad R^2 = 1,$$

$$x_3 = 789,5p^2 - 3418,5p + 98534, \quad R^2 = 0,8573,$$

$$x_4 = 0,5p^2 - 0,3p + 370, \quad R^2 = 0,9692,$$

$$x_5 = 81,5p^3 - 810,5p^2 + 2913p + 11125, \quad R^2 = 1,$$

$$x_6 = 1240,2p^3 - 10087p^2 + 25614p - 8097, \quad R^2 = 1,$$

$$x_7 = 9003,4 \ln(p) + 21069, \quad R^2 = 0,986,$$

$$x_8 = 16,75p^2 + 398,35p + 3699,8, \quad R^2 = 0,9433,$$

где $p = \overline{1,4}$. С помощью данных уравнений регрессий вычислены прогнозные значения на следующий год:

$$x_1 = 5990,3, \quad x_2 = 9,14, \quad x_3 = 101179, \quad x_4 = 381,$$

$$x_5 = 15615, \quad x_6 = 22823, \quad x_7 = 35559,4, \quad x_8 = 6110,3.$$

По полученным прогнозным значениям факторов рассчитано значение полезного отпуска электрической энергии на ближайший год

$$f(X) = 25469,378.$$

2. Многоцелевая оптимизация. В связи с тем, что улучшение одного критерия может приводить к ухудшению другого, применяется метод многоцелевой оптимизации критериев производства. Рассмотрим неблагоприятное стечение обстоятельств, при котором факторы производства являются случайными величинами. Введем несколько критериев, подчинение которым мы хотим получить от поставляемой электрической энергии [2]. Распределение данных критериев считаем нормальным [3].

Надежность поставки электрической энергии. Под надежностью будем понимать электроэнергетический баланс

$$E_{prognoz} \geq E_{polez} + E_{poteri},$$

где $E_{prognoz}$ — прогнозируемый отпуск электроэнергии в сеть, E_{polez} — полезный отпуск электроэнергии в сеть, E_{poteri} — потери в сетях.

Оптимизируя данный критерий, уменьшаем отклонения отпуска в сеть электроэнергии от прогнозируемого значения, ограничивая их допустимыми 7%.

Качество поставки. Вероятность получения требуемого напряжения к потребителю

$$P\{U_{treb} - q\% \leq U \leq U_{treb} + q\%\} \geq 0,95. \quad (1)$$

$$P\{U_{treb} - q\% \leq U \leq U_{treb} + q\%\} = \\ = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{(U_{treb} + q\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) - \Phi \left(\frac{(U_{treb} - q\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) \right],$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа, U — напряжение, получаемое потребителем, U_{treb} — заявленное напряжение, q — допустимый процент отклонения получаемого напряжения от заявленного, σ_U — среднеквадратическое отклонение получаемого напряжения.

Функцию ущерба η можно рассматривать как разницу требуемого условия и расширенного интервала, куда попадает текущее напряжение ($r > q$):

$$\begin{aligned} \eta(U) &= P\{U_{treb} - r\% \leq U \leq U_{treb} + r\%\} - \\ &\quad - P\{U_{treb} - q\% \leq U \leq U_{treb} + q\%\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{(U_{treb} + r\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) - \Phi \left(\frac{(U_{treb} - r\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{(U_{treb} + q\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) - \Phi \left(\frac{(U_{treb} - q\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) \right]. \end{aligned}$$

Значение функции полезности считаем максимальным $f(U) = \max f(U) = 1$, если выполняется критерий качества поставки (1). Таким образом, функция полезности критерия будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_{kachestvo}(U) &= \max f(U) - \eta(U) = 1 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{(U_{treb} + r\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) - \Phi \left(\frac{(U_{treb} - r\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{(U_{treb} + q\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) - \Phi \left(\frac{(U_{treb} - q\%) - U_{treb}}{\sqrt{2}\sigma_U} \right) \right]. \end{aligned}$$

Экономичность. Критерий экономичности рассмотрен как отношение затрат на производство, транспортировку и реализацию к объему производства в натуральных единицах:

$$f_{econom} = \frac{Z_{przv\&rlz} + Z_{trns}}{\sum E},$$

где $Z_{przv\&rlz}$ — затраты на производство и реализацию, Z_{trns} — затраты на транспортировку, $\sum E$ — общий объем реализованной энергии. Под оптимизацией данного критерия понимается его минимизация.

Функционалы критериев надежности и экономичности должны стремиться к минимуму, качества — к максимуму. Свертку критериев можно проводить следующим образом [4]:

- суммарная эффективность $\sum \alpha_i f_i$;
- среднее значение $\bar{f} = \frac{1}{3} \sum \alpha_i f_i$;
- доминирующий результат $\max f_i$;

- гарантированный результат $\min f_i$.

В условиях случайности оптимальным является тот выбор режима поставки электроэнергии, который обладает максимальной полезностью среди всех минимальных полезностей по данным критериям:

$$\max \min f(K) = \max_U \min_K \{f_{kachestvo}, f_{nadeg}, f_{econom}\}.$$

3. Выводы. Исследованы закономерности, действующие в процессе производства и распределения электрической энергии в г. Санкт-Петербурге. Построена аппроксимирующая производственная функция, характеризующая отпуск электрической энергии в сети. С использованием свойства регрессий, получены прогнозные значения факторов производства и значение функции на ближайший год. Рассмотрено неблагоприятное стечение обстоятельств, при котором факторы производства являются случайными величинами, и введены три критерия: качество, надежность и экономичность поставки электрической энергии. Для данных критериев построена многоцелевая оптимизационная модель.

Литература

1. Годовые отчеты «Ленэнерго» // Официальный сайт компании «Ленэнерго»: URL:http://lenenergo.ru/shareholders/open_info/ (дата обращения: 10.11.2013).
2. Дерзский В. Г., Скиба В. Ф. Многоцелевая структурная оптимизация режимов распределительных электрических сетей в реальных условиях эксплуатации. // Энергетический эксперт [Электронный ресурс]: URL:<http://www.energyexpert.com.ua/pub/61-multi-criterion-approach> (дата обращения: 03.02.2014).
3. Гмурман В. Е. Теория вероятности и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. Изд. 4-е, дополн. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
4. Колбин В. В. Теория решения. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 644 с.

УДК 519.8

Захаров В. В., Крылатов А. Ю.

Конкурентное равновесие Вардропа на транспортной сети из параллельных неоднородных маршрутов

1. Введение. В работе [1] показано, что в задаче распределения транспортных потоков мегаполиса главную роль играет возможность создания эффективных приложений для решения конкретных транспортных проблем. Можно сказать, что требуется найти различные конфигурации транспортных сетей, на которых оптимальные стратегии распределения транспортного потока получаются в явном виде. Стремление найти равновесие по Вардропу [2] в явном виде обусловлено тем, что явный вид распределений дает возможность существенно сократить временные затраты на вычисления и, следовательно, повысить эффективность соответствующих алгоритмов. Детально ознакомиться с проблемами численных методов в области распределения транспортных потоков можно в [3, 4].

В [1] показано, что *конкурентное равновесие* и *системный оптимум Вардропа* могут быть найдены в явном виде для сети из параллельных каналов и BPR-функции задержки [5]. В настоящей статье также рассмотрим сеть, состоящую из района отправления, района прибытия и n параллельных маршрутов. Только теперь каждый из маршрутов представляет собой последовательное соединение определенного количества дуг с разной пропускной способностью. Оказывается, что и для такой сети равновесие по Вардропу может быть найдено в явном виде. Приведем доказательство данного утверждения для случая конкурентного равновесия.

2. Математическая модель распределения потоков на сети из параллельных неоднородных маршрутов. Сформулируем задачу нахождения конкурентного равновесия по Вардропу для транспортной сети из параллельных неоднородных маршрутов.

Захаров Виктор Васильевич – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: mcvictor@mail.ru, тел.: +7(812)428-41-19

Крылатов Александр Юрьевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: aukrylatov@yandex.ru, тел.: +7(911)276-26-18

Введем обозначения. Пусть i — номер маршрута, $i \in \{1, n\}$; l_i — количество последовательно пронумерованных дуг маршрута i ; $F > 0$ — объем общего транспортного потока из района отправления в район прибытия; $f_i \geq 0$ — объем транспортного потока, направляемого по i -му маршруту; $f = (f_1, \dots, f_n)$ — вектор распределения транспортного потока по n маршрутам; t_{il}^0 — время свободного движения по l -ой дуге i -го маршрута; $t_i^0 = \sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0$ — время свободного движения по i -му маршруту; $c_{il} > 0$ — пропускная способность l -ой дуги i -го маршрута; $d_{il}(f_i) > 0$ — функция задержки потока f_i на l -ой дуге маршрута i . Также для последующего упрощения введем $r_i = \left(\sum_{l=1}^{l_i} \frac{t_{il}^0}{c_{il}} \right)^{-1}$.

В предложенных обозначениях BPR-функция имеет следующий явный вид:

$$d_{il}(f_i) = t_{il}^0 \left[1 + \left(\frac{f_i}{c_{il}} \right)^\beta \right] \quad \forall i \in \{1, n\}, \quad l \in \{1, l_i\}.$$

В общем случае β является параметром, который определяется в процессе калибровки функции на реальных данных. Здесь будем считать $\beta = 1$:

$$d_{il}(f_i) = t_{il}^0 \left(1 + \frac{f_i}{c_{il}} \right) \quad \forall i \in \{1, n\}, \quad l \in \{1, l_i\}.$$

С учетом этого задача нахождения конкурентного равновесия по Вардропу сводится к следующей оптимизационной задаче [6]:

$$v^{ue}(f^{ue}) = \min_f \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{l_i} \int_0^{f_i} t_{il}^0 \left(1 + \frac{u}{c_{il}} \right) du \quad (1)$$

с ограничениями

$$\sum_{i=1}^n f_i = F, \quad (2)$$

$$f_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Решение оптимизационной задачи (1)–(3) приводит транспортный поток к конкурентному равновесию по Вардропу.

3. Оптимальные стратегии в модели распределения потоков на сети из параллельных неоднородных маршрутов. Найдем решение оптимизационной задачи (1)–(3) в явном виде.

Лемма. *Распределение f^{ue} приводит транспортный поток к конкурентному равновесию (задача (1)–(3)) тогда и только тогда, когда существует неотрицательное ω^{ue} (множитель Лагранжа) такое, что*

$$\sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0 \left(1 + \frac{f_i^{ue}}{c_{il}} \right) \begin{cases} = \omega^{ue}, & \text{при } f_i^{ue} > 0, \\ \geq \omega^{ue}, & \text{при } f_i^{ue} = 0, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, n\}.$$

Доказательство. Воспользуемся условиями теоремы Куна – Таккера. Заметим, что в силу выпуклости целевого функционалов (1), а также области допустимых решений (2), (3), условия Куна – Таккера являются как необходимыми, так и достаточными. Построим лагранжианы для задачи (1)–(3):

$$L^{ue} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{l_i} \int_0^{f_i} t_{il}^0 \left(1 + \frac{u}{c_{il}} \right) du + \omega^{ue} \left(F - \sum_{i=1}^n f_i \right) + \sum_{i=1}^n \eta_i^{ue} (-f_i).$$

Продифференцируем лагранжиан по f_i и, приравняем полученное выражения к нулю. Получим

$$\omega^{ue} = \sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0 \left(1 + \frac{f_i^{ue}}{c_{il}} \right) - \eta_i^{ue}.$$

Воспользовавшись условием дополняющей нежесткости для L^{ue} , находим, что $\eta_i^{ue} f_i^{ue} = 0$. Данное равенство имеет место, когда по крайней мере один из сомножителей равен нулю. Таким образом, если $f_i^{ue} > 0$, то с необходимостью $\eta_i^{ue} = 0$, и тогда

$$\omega^{ue} = \sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0 \left(1 + \frac{f_i^{ue}}{c_{il}} \right).$$

Если же $f_i^{ue} = 0$, то $\eta_i^{ue} \geq 0$, откуда

$$\omega^{ue} = \sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0 - \eta_i^{ue}. \quad (4)$$

Из этого вытекает, что $\omega^{ue} \leq \sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0$. Следовательно, можно утверждать, что $\omega^{ue} \leq \sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0 (1 + \frac{f_i^{ue}}{c_{il}})$ при $f_i^{ue} = 0$.

Лемма доказана.

Следствие. *Распределение f^{ue} приводит транспортный поток к конкурентному равновесию (задача (1)–(3)) тогда и только тогда, когда существует неотрицательное ω^{ue} (множитель Лагранжа) такое, что*

$$f_i^{ue} = \begin{cases} (\omega^{ue} - t_i^0) r_i, & \text{при } t_i^0 < \omega^{ue}, \\ 0, & \text{при } t_i^0 \geq \omega^{ue}, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, n\}. \quad (5)$$

Доказательство. Для (1)–(3) выразим f_i^{ue} через ω^{ue} при $f_i^{ue} > 0$:

$$f_i^{ue} = \frac{\omega^{ue} - \sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0}{\sum_{l=1}^{l_i} \frac{t_{il}^0}{c_{il}}} > 0.$$

Таким образом,

$$\omega^{ue} > \sum_{l=1}^{l_i} t_{il}^0. \quad (6)$$

Используя выражения (6), получаем правило определения номеров i маршрутов, потоки по которым должны быть положительными, а благодаря выражениям (4) — правило определения номеров i маршрутов, поток по которым должен быть нулевым в случаях конкурентного равновесия по Вардропу.

Следствие доказано.

Без умаления общности, перенумеруем маршруты так, чтобы

$$t_1^0 < t_2^0 < \dots < t_n^0. \quad (7)$$

Тогда справедлива следующая

Теорема. *Конкурентное равновесие в задаче (1)–(3) при условии (7) достигается реализацией следующих стратегий распределения транспортного потока:*

$$f_i^{ue} = \begin{cases} r_i \frac{F + \sum_{j=1}^k t_j^0 r_j}{\sum_{j=1}^k r_j} - t_i^0 r_i, & \text{при } i < k, \\ 0, & \text{при } i \geq k, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, n\}, \quad (8)$$

где k может быть найдено из условий

$$\sum_{i=1}^k r_i(t_k^0 - t_i^0) < F \leq \sum_{i=1}^k r_i(t_{k+1}^0 - t_i^0). \quad (9)$$

Доказательство. Введем $k \in \{1, n\}$ такое, что при условии выполнения (7) $t_k^0 = \sum_{l=1}^k t_{kl} < \omega^{ue}$, а $t_{k+1}^0 = \sum_{l=1}^{k+1} t_{(k+1)l} \geq \omega^{ue}$. Тогда, подставив в (2) выражение из (5), имеем

$$\sum_{j=1}^n f_j = \sum_{j=1}^k (\omega^{ue} - t_j^0) r_j = F.$$

Следовательно,

$$\omega^{ue} = \frac{F + \sum_{j=1}^k t_j^0 r_j}{\sum_{i=1}^k r_i}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (5), с учетом (7) получаем (8).

Для нахождения значения k рассмотрим следующую функцию:

$$S(\omega^{ue}) = \sum_{j=1}^k (\omega^{ue} - t_j^0) r_j,$$

которая является возрастающей. Тогда из неравенств $t_k^0 < \omega^{ue} \leq t_{k+1}^0$ следует $S(t_k^0) < S(\omega^{ue}) \leq S(t_{k+1}^0)$, что окончательно позволяет вывести условия (9).

Теорема доказана.

4. Заключение. В данной работе рассмотрена задача нахождения конкурентного равновесия Вардропа распределения транспортных потоков на сети из параллельных неоднородных маршрутов с линейной ВРР-функцией задержки. Решения сформулированной оптимизационной задачи получены в явном виде. Явный вид полученных решений расширяет возможности разработки быстродействующих приложений для систем навигации автомобилей в потоках большого объема, опирающихся при оценке транспортного потока автомобилей, не пользующихся навигационным оборудованием, на принципы Вардропа. Более того, полученные результаты могут быть учтены при решении инфраструктурных проблем улично-дорожных сетей большой размерности.

Литература

1. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2014. Вып. 2. С. 121–130.
2. Wardrop J. G. Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Institution of Civil Engineers. 1952. Vol. 2. P. 325–378.
3. Frank M., Wolfe P. An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3. P. 95–110.
4. Швецов В. И. Алгоритмы распределения транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 148–157.
5. Horowitz A. J. Delay/Volume Relations for Travel Forecasting Based upon the 1985 Highway Capacity Manual. Milwaukee: Department of Civil Engineering and Mechanics University of Wisconsin – Milwaukee, 1991. 87 p.
6. Sheffi Y. Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods. New Jersey: Prentice-Hall Inc; Englewood Cliffs, 1985. 416 p.

УДК 314.1

Лукина А. А.

Прогноз демографической ситуации в РФ с применением переменной матрицы Лесли

Рекомендовано к публикации профессором Прасоловым А. В.

1. Введение. В последнее время крайне актуальной проблемой является резкое снижение численности населения Российской Федерации, ожидаемое в ближайшие десятилетия. В работе строится прогноз численности собственного населения России (без учета миграции) до 2040 г. с применением метода передвижки по возрастам (когортно-компонентного метода). В анализе используются матрицы Лесли, в которые включены спрогнозированные с учетом современных тенденций возрастные коэффициенты рождаемости.

2. Методика прогнозирования численности и половозрастной структуры населения. Наиболее распространенным методом прогнозирования численности населения является когортно-компонентный метод. Суть метода состоит в следующем: численность мужчин и женщин в каждом возрасте на начало года умножается на соответствующий коэффициент дожития, являющийся вероятностью дожить до возраста $x + 1$ при условии уже состоявшегося дожития до возраста x . В результате получается численность населения возраста $x + 1$ на начало следующего года. Такой расчет может быть применен к численностям всех возрастных групп на начало следующего года, кроме группы детей до одного года.

Для расчета численности детей в возрасте до одного года среднегодовая численность женщин в каждом из репродуктивных возрастов умножается на соответствующий возрастной коэффициент рождаемости (в статистике чаще всего приводимый как количество детей, родившихся на тысячу женщин данного возраста), соответствующие произведения складываются по всем репродуктивным возрастам, и полученная общая численность распределяется на девочек и мальчиков с использованием коэффициента, характеризующего долю девочек среди всех новорожденных.

Лукина Александра Андреевна – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; магистрант, Европейский университет в Санкт-Петербурге; e-mail: alukina@eu.spb.ru, тел.: +7(812)428-71-59

Коэффициенты дожития находятся из таблиц смертности, которые можно найти в базе данных о смертности [1]. Там же приведена ежегодная половозрастная структура населения. Возрастные коэффициенты рождаемости приводятся в базе данных о показателях рождаемости [2].

В стандартной схеме метода передвижки по возрастам к каждой из численностей возрастных групп также прибавляется сальдо миграции, соответствующее данному возрасту. В предлагаемой работе миграция исключена из рассмотрения, так как основной акцент приходится на динамику численности именно собственного населения (к которому, очевидно, относятся и мигранты, ставшие гражданами России до начального момента времени рассмотрения).

Наглядно и удобно метод передвижки по возрастам представляется с помощью матрицы Лесли. Пусть $n^s(t) \in \mathbb{R}^{\omega+1}$ — вектор возрастного распределения женского ($s = f$) или мужского ($s = m$) населения, где ω — наибольший возможный возраст. Компонента n_x^s вектора n^s равна числу женщин (мужчин) возраста от x до $x + 1$ лет. Тогда вектор возрастного распределения, например, женского закрытого (без учета миграции) населения удовлетворяет уравнению $n^f(t+1) = L^f n^f(t)$, где L^f — матрица Лесли, имеющая вид

$$L^f = \begin{pmatrix} F_0^f & F_1^f & \cdots & F_{\omega-1}^f & F_{\omega}^f \\ P_0^f & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_1^f & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{\omega-1}^f & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $P_x^f = \frac{N_{x+1}^f}{N_x^f}$ — коэффициент дожития (передвижки), $F_x^f = \frac{\delta}{2}(m_x + P_x^f m_{x+1}) \frac{N_1^f}{l_0}$, где N_x^f — численность женщин возраста x в стационарном населении таблицы смертности, m_x — возрастной коэффициент рождаемости, δ — доля девочек среди новорожденных, l_0 — так называемый корень таблицы смертности (в стандартном случае 100 тыс. человек). Формула $F_x^f = \frac{\delta}{2}(m_x + P_x^f m_{x+1}) \frac{N_1^f}{l_0}$ имеет место при предположениях о том, что все женщины, возраст которых на момент времени t составляет x лет, достигают возраста $x + 1$ в момент времени $t + \frac{1}{2}$; кроме того, все смерти, произошедшие в году t , произошли в момент времени $t + \frac{1}{2}$. Также очевидно, что часть

элементов первой строки матрицы Лесли, соответствующих непродуктивным возрастам, равна нулю. Аналогичная процедура может быть реализована и для мужского населения. С подробностями применения метода передвижки по возрастам можно ознакомиться в учебном пособии [3].

3. Демографическая ситуация в РФ. В качестве начального года в данной работе выбран 2010 г. Население было разбито на пятилетние возрастные группы, начиная с группы 0–4 года и заканчивая группой 105–109 лет. Прогнозирование осуществляется с пятилетним шагом вплоть до 2040 г. При этом также используются возрастные коэффициенты рождаемости, рассчитанные на пятилетние возрастные группы (источник данных: федеральная служба государственной статистики [4]) и коэффициенты передвижки из одной пятилетней группы в другую (источник данных: [1]). В качестве источника данных относительно половозрастного распределения населения на 2010 г. был выбран демографический ежегодник [5].

Матрица Лесли в исследовании является переменной в том смысле, что в ней используются спрогнозированные вплоть до 2035 г., исходя из данных за 1990–2010 гг., значения возрастных коэффициентов рождаемости. Точнее, некоторые из коэффициентов первой строки матрицы Лесли оказываются зависящими от времени за счет коэффициентов рождаемости $m_x = m_x(t)$. Таким образом, $L^f = L^f(t)$.

Доля девочек среди новорожденных с 1990 г. по 2010 г. практически не менялась, поэтому в качестве соответствующего показателя было выбрано среднее за 20 лет значение, равное 0,485.

Коэффициенты передвижек из одной пятилетней возрастной группы в другую ведут себя крайне нестабильно в течение всего периода с 1990 г. по 2010 г., однако, разброс значений минимален (не более двух сотых), в силу чего можно ограничиться рассмотрением средних значений за период.

Динамика возрастных коэффициентов рождаемости является намного более интересной. Во-первых, поведение этих коэффициентов в течение 1990–2000 гг. кардинально отличается от их поведения в течение следующего десятилетнего периода. Во всех возрастных группах наличие структурного сдвига очевидно, поэтому прогнозирование следует осуществлять, опираясь на данные 2000–2010 г. Во-вторых, данные подтверждают наблюдаемый на бытовом уровне процесс перемещения более высоких уровней рождаемости в старшие

возрастные группы. Так, на рис. 1, 2 можно видеть резкое снижение возрастного коэффициента рождаемости (ВКР) для группы женщин в возрасте от 20 до 24 лет и, напротив, резкое повышение в группе от 35 до 39 лет, соответственно.

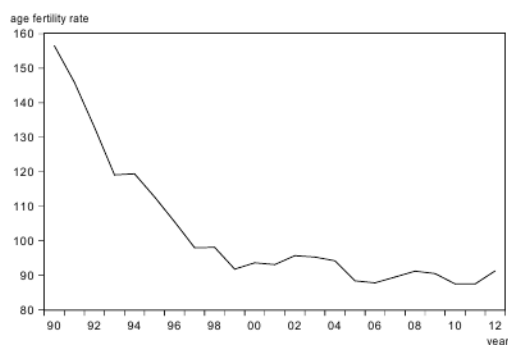


Рис. 1. Динамика ВКР в группе 20–24 года за 1990–2012 гг.

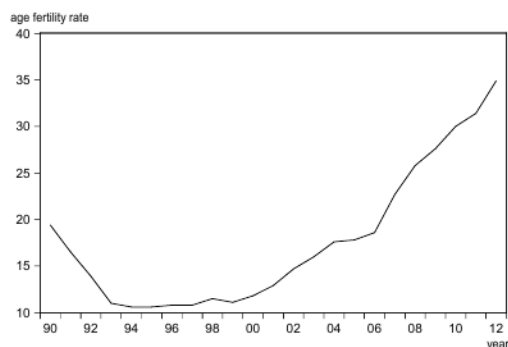


Рис. 2. Динамика ВКР в группе 35–39 лет за 1990–2012 гг.

Здесь очевидным образом возникает вопрос о том, когда же рост возрастных коэффициентов рождаемости для старших возрастных групп замедлится. Для ответа на этот вопрос были проанализированы данные по возрастным коэффициентам рождаемости для Германии, в которой такой структурный переход наметился крайне давно, а именно, приблизительно с середины 70-х гг. Текущие данные по

Германии свидетельствуют о том, что возрастание коэффициентов рождаемости в старших группах продолжается и по сей день. Таким образом, данные соображения дают основания для выделения возрастающих трендов в динамике возрастных коэффициентов рождаемости для старших возрастных групп при их прогнозировании вплоть до 2035 г.

Возрастные коэффициенты рождаемости, соответствующие группам женщин от 15 до 19 и от 20 до 24 лет, после 2000 г. относительно стабилизировались. Поэтому будем считать их равными константам, а именно, средним за период с 2000 г. по 2010 г. (27,89 и 91,53 рождений на 1000 женщин этого возраста соответственно).

В динамике возрастных коэффициентов, соответствующих более старшим возрастным группам (25–29 лет, 30–34 года, 35–39 лет, 40–44 года), были выделены линейные по времени тренды, давшие неплохую «подгонку» данных (всюду значение статистики $R^2 \geq 0,9$). Спрогнозированные значения данных коэффициентов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Прогноз возрастных коэффициентов рождаемости (ВКР)

Год	2015	2020	2025	2030	2035
ВКР 25-29	113,15	128,4	143,9	159,4	174,9
ВКР 30-34	82	98,4	114,8	131,2	147,6
ВКР 35-39	38,55	48,05	57,55	67,05	76,55
ВКР 40-44	7,66	9,66	11,66	13,66	15,66

Значения возрастного коэффициента рождаемости, соответствующего группе женщин от 45 до 49 лет, нестабильны, но уже практически пренебрежимо малы. Будем считать его равным среднему за период с 1990 г. по 2010 г. (0,14 рождений на 1000 женщин этого возраста).

В результате процесса прогнозирования были получены численности населения по всем выделенным 22 возрастным группам с разделением по полу. Укажем основные полученные в работе результаты. При выделенных положительных трендах в динамике возрастных коэффициентов рождаемости для большинства возрастных групп общая численность населения незначительно вырастет к 2015 г., а затем пойдет стремительное снижение вплоть до 133 млн. чел. к 2040 г. Численность трудоспособного населения (к которому отнесем в рамках нашего исследования население в возрасте от 15 до 60 лет) будет снижаться в течение всего наблюдаемого периода времени: показатель в 102,94 млн. чел. в 2010 г. упадет до 80,62 в

2040 г. Очевидной причиной наблюдаемого явления можно назвать крайне низкие уровни рождаемости в период 1990–2000 гг. Соответствующие численные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2. Прогноз общей численности населения и численности населения трудоспособного возраста

Год	2015	2020	2025	2030	2035	2040
Общая числ. насел.	149,68	145,92	142,03	138,28	135,18	133,22
Числ. трудосп. насел.	101,4	94,8	88,94	85,19	83,24	80,62

4. Выводы. По результатам построенного прогноза общая численность собственного населения России упадет к 2040 г. до приблизительно 133 млн. чел. даже в предположении весьма существенного роста возрастных коэффициентов рождаемости в следующих группах: 25–29 лет, 30–34 года, 35–39 лет, 40–44 года. Численность трудоспособного населения (к которому мы относим население в возрасте от 15 до 60 лет) сократится еще более существенно, а именно, больше, чем на 20 млн. чел. (соответствующий показатель в 2010 г. составлял 102,9 млн. чел., прогнозное значение на 2040 г. — 80,6 млн. чел.).

Литература

1. The Human Mortality Database [Электронный ресурс]: URL: <http://www.mortality.org/> (дата обращения: 20.01.14).
2. The Human Fertility Database [Электронный ресурс]: URL: <http://www.humanfertility.org/cgi-bin/main.php> (дата обращения: 20.01.14).
3. Денисенко М. Б., Калмыкова Н. М. Демография: Учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2009. 432 с.
4. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]: URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения: 07.01.14).
5. Демографический ежегодник России 2013 [Электронный ресурс]: URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1137674209312 (дата обращения: 07.01.14).

УДК 519.874.2

Любич С. Я., Чугунов Е. С.

Применение LP/NLP алгоритма в многопродуктовой задаче управления запасами

Рекомендовано к публикации профессором Захаровым В. В.

1. Введение. В современном экономическом мире многие компании уделяют большое внимание оптимизации производства. Именно поэтому изучение моделей управления запасов и цепей поставок [1] является одной из актуальных проблем последних десятилетий. При этом наиболее известной концепцией является Vendor Managed Inventory (VMI) [2]. VMI преимущественно используется для определения объема заказов и моментов размещения заказов ритейлерами. Причем решение принимает поставщик, основываясь на информации, предоставленной ему ритейлером. В данной концепции используется одна из двух моделей: объем экономического заказа (Economic Order Quantity — EOQ) [3] и объем экономического производства (Economic Production Quantity — EPQ) [4]. В первой модели считается, что в момент поступления заказа поставщик имеет в наличии товар в необходимом объеме, во второй модели — часть необходимого объема товара может находиться еще в производстве. Данные модели являются не идеальными, в силу чего постоянно возникает потребность в разработке новых моделей и способов их решения.

В данной статье рассмотрена многопродуктовая модель, относящаяся к классу EOQ, а также способ ее решения.

2. Математическая постановка задачи. Рассмотрим задачу: поставщик поставляет ритейлеру n различных товаров. У ритейлера есть детерминированный спрос в размере D_j на j -ый товар, $j = \overline{1, n}$, в течение периода T . Дефицит товаров допускается и учитывается в виде денежных штрафов. Цены на все виды товаров считаются фиксированными в течение периода T . У поставщика есть ограничение F на вместимость склада для всех видов

Любич Сергей Яковлевич — магистрант, Сеульский национальный университет; e-mail: liubich.sergei@gmail.com, тел.: +82(102)185-05-21

Чугунов Евгений Сергеевич — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: mail@evgenius.org, тел.: +7(921)408-22-07

товаров. Поставки осуществляются только целыми партиями одинакового размера. Партии поставляются через равные промежутки времени τ (длина цикла). Необходимо определить, сколько поставок каждого товара и в каком объеме нужно сделать поставщику, чтобы у ритейлера запас каждого из n товаров не опускался ниже критического минимума b_j в течение временного промежутка между поставками, а общее количество заказов не должно превышать M . При этом необходимо минимизировать суммарные затраты поставщика на оформление заказа, хранение товаров, их транспортировку, штрафы за дефицит (отсутствие на складе ритейлера) товаров и т. д.

Для математического описания задачи существуют различные модели, например, можно использовать монопродуктовую модель [5]. Мы предлагаем использовать многопродуктовую модель, в которой поставщик за один раз может поставить ритейлеру товары всех n типов одновременно [6].

Введем следующие обозначения: n — количество различных видов товаров в заказываемой партии; Q_j — объем заказа товара вида j , $j = \overline{1, n}$, в каждой партии; D_j — спрос на товар вида j ; π — фиксированные штрафы на дефицит единицы товара; $\hat{\pi}$ — линейные штрафы на дефицит единицы товара в единицу времени; h_j — издержки поставщика на хранение единицы товара вида j ; f_j — пространство склада, занимаемое единицей товара вида j ; F — общее доступное пространство склада поставщика для всех видов товаров; M — максимальное количество заказов для всех видов товаров; τ — длина цикла (временного промежутка между поставками), измеряется в единицах измерения периода планирования T ($\tau = \frac{Q_j}{D_j}, j = \overline{1, n}$); b_j — максимальный уровень дефицита товара вида j в промежутке времени между поставками; A_S — фиксированные издержки поставщика на размещение заказа многопродуктовой партии; A_R — фиксированные издержки ритейлера на размещение заказа многопродуктовой партии.

В данной математической модели целевая функция, которую нужно минимизировать по τ и b_j , имеет вид

$$Z = \left(\frac{1}{\tau}\right) (A_S + A_R) + \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^n \left(\frac{(D_j \tau - b_j)^2 h_j}{2D_j} + \frac{\hat{\pi} b_j^2}{2D_j} + \pi b_j \right). \quad (1)$$

Ограничение на доступное пространство склада:

$$\sum_{j=1}^n f_j(D_j\tau - b_j) \leq F. \quad (2)$$

Ограничение на дефицит товара вида j :

$$b_j \leq \tau D_j. \quad (3)$$

Ограничение на количество заказов:

$$1 \leq \left\lceil \frac{1}{\tau} \right\rceil \leq M. \quad (4)$$

Дополнительные ограничения:

$$b_j \geq 0, \quad b_j \in Z, \quad (5)$$

$$Q_j = D_j\tau \in Z, \quad (6)$$

$$\tau > 0, \quad \tau \in R, \quad j = \overline{1, n}.$$

Решением данной задачи будет вектор $(\tau, b_1, \dots, b_n, Q_1, \dots, Q_n)$.

3. Методы решения. Рассматриваемая задача относится к классу выпуклых смешанно-целочисленных нелинейных задач оптимизации (Mixed Integer Nonlinear Programming — MINLP), который является NP-сложным [7]. Для решения сформулированной задачи можно применить один из алгоритмов:

- метод ветвей и границ [8];
- метод внешней аппроксимации [9];
- алгоритм обобщенной декомпозиции [10];
- расширенный метод секущих плоскостей [11].

Также существуют другие методы, в том числе и эвристические [5].

Мы предлагаем использовать точный LP/NLP метод. Данный метод описан в работе [12] и является расширением метода ветвей и границ для выпуклых задач MINLP. Основная идея данного метода заключается в использовании метода ветвей и границ для решения задачи класса MILP^k, полученной для решения x^0 — решения NLP

релаксации, т. е. когда находится целочисленное допустимое решение $MILP^k$, решается задача NLP^k , находится ее решение x^k . Генерируется сечение внешней аппроксимации из x^k и добавляется во все открытые узлы текущего дерева.

В работе [7] доказана сходимость метода LP/NLP для задачи со спросом на товары, не подчиняющимся нормальному закону распределения, но все условия сходимости также выполняются и для математической модели (1)–(6). Следовательно, сходимость метода LP/NLP для решения сформулированной задачи может быть доказана. Вычислительные затраты на каждый узел ветвления составляют $O(\frac{32}{3}n^{\frac{7}{2}}\log\frac{1}{\varepsilon})$.

Для использования метода LP/NLP необходимо задать начальное решение. Предлагается использовать эвристический алгоритм поиска начального решения: зафиксируем значения τ с учетом ограничения (4). Для каждого фиксированного значения τ определим оптимальные значения непрерывных переменных b_j , не учитывая ограничение (2). Если найденные значения удовлетворяют (2), то непрерывное решение найдено. В противном случае, решаем задачу оптимизации с учетом ограничения (2) с помощью метода множителей Лагранжа. Далее для каждого τ и полученных значений b_j определяем значение целевой функции и выбираем наименьшее ($\tau = \tau^*$). Проверяем ограничение (6), если оно выполнено, то алгоритм останавливается, иначе определяем все общие делители для D_j , $j = \overline{1, n}$, не превосходящие M : x_1, \dots, x_l , ($x_l \leq M$, $l = \overline{1, L}$). Находим значения целевой функции для $\tau^{**} = \frac{1}{x_l}$, $l = \overline{1, L}$. Также определяем значение целевой функции, подставив вместо значений $D_j\tau^*$ значения $Q_j^* = [D_j\tau^*] + 1$, для тех случаев, где $Q_j = D_j\tau^* \notin Z$. Здесь $[D_j\tau^*]$ — целая часть от $D_j\tau^*$. Среди всех значений целевой функции, полученных для каждого τ^{**} и $Q_j^* = [D_j\tau^*] + 1$, выбираем наименьшее, которое достигается при $\tau = \tau^{***}$. Таким образом, непрерывное решение, удовлетворяющее всем ограничениям, найдено. Алгоритм останавливается.

Используя метод LP/NLP, определяются целочисленные значения переменных b_j .

4. Пример использования алгоритма. Поставщик должен доставить ритейлеру 10 различных видов товаров ($n = 10$). Исходные данные (см. таблицу): $F = 1800$, $M = 12$, $\hat{\pi} = 3$, $\pi = 0$, $A_S = 26$, $A_R = 24$.

Таблица. Исходные данные

Товар j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_j	420	360	540	390	480	510	530	380	430	580
h_j	4	9	7	2	4	6	5	3	2	8
f_j	3	2	3	1	4	3	2	1	3	4

Целевая функция принимает оптимальное решение, равное 846,42, при $\tau = 1/9$. В то же время, решение данной задачи, полученное при использовании монопродуктовой модели [5], дает оптимальное значение целевой функции равное 3443,1787. Данный пример наглядно показывает, что предложенный LP/NLP метод может быть использован для решения EOQ задач.

5. Заключение. Современный рынок изменчив и неопределен, из-за чего логистические компании ищут новые способы повышения эффективности своей работы. Именно поэтому потребность в использовании методов оптимизации в определении размера заказов постоянно увеличивается.

В данной работе рассмотрена многопродуктовая модель определения оптимальных объемов заказа, и описан LP/NLP метод ее решения.

Приведенный численный пример показал эффективность предложенного метода решения многопродуктовой модели по сравнению с эвристическим методом решения монопродуктовой модели, но в то же время нельзя утверждать, что данный метод будет всегда давать лучшее решение, чем эвристический. Для доказательства этого предположения необходимо провести широкий сравнительный анализ моделей и методов их решения на наборах задач с различными значениями параметров. Если это предположение будет верным, то использование LP/NLP метода позволит существенно сократить время на поиск решения в задачах класса EOQ и повысить производительность логистических компаний.

Литература

1. Chopra S., Meindl P. Supply chain management: Strategy, planning, operation (1st ed.). USA: Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001. 543 p.

2. Cheung L., Lee H. L. The inventory benefit of shipment coordination and stock rebalancing in a supply chain // *Management Science*. 2002. Vol. 48(2). P. 300–306.
3. Лукинский В. В. Актуальные проблемы формирования теории управления запасами. СПб.: СПбГИЭУ, 2008. 213 с.
4. Silver E. A., Pyke D. F., Peterson R. *Inventory management and production planning and scheduling* (3rd ed.). USA: John Wiley and Sons, 1998. 737 p.
5. Cardenas-Barron L. E., Trevino-Garza G., Wee H. M. A simple and better algorithm to solve the vendor managed inventory control system of multi-product multi-constraint economic order quantity model // *Expert Systems with Applications*. 2012. Vol. 39(3). P. 3888–3895.
6. Рыжиков Ю. И. Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер, 2001. 376 с.
7. Leyffe S. PhD Thesis: *Deterministic Methods for Mixed Integer Nonlinear Programming*. USA: Department of Mathematics and Computer Science, University of Dundee, 1993. 117 p.
8. Dakin R. A tree-search algorithm for mixed integer programming problems // *Computer*. 1965. Vol. 8(3). P. 250–255.
9. Duran M., Grossmann I. An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs // *Mathematical Programming*. 1986. Vol. 36. P. 307–339.
10. Geoffrion A. Generalized Benders decomposition // *Optimization Theory and Applications*. 1972. Vol. 10. P. 237–260.
11. Westerlund T., Pettersson F. A cutting plane method for solving convex MINLP problems // *Computers and Chemical Engineering*. 1995. Vol. 19. P. 131–136.
12. Quesada I., Grossmann I. An LP/NLP based branch and bound algorithm for convex MINLP optimization problems // *Computers and Chemical Engineering*. 1992. Vol. 16. P. 937–947.

УДК 519.248

Прудникова Т. М.

Одна модель системы массового обслуживания с приоритетом

Рекомендовано к публикации доцентом Домановской Е. Ф.

1. Введение. Описание системы. В книге [1] описана модель одноканальной системы массового обслуживания (СМО) с абсолютным приоритетом. Рассмотрим аналогичную двухканальную систему.

В двухканальную систему на обслуживание поступают два пуассоновских потока заявок с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Первый поток имеет приоритет выше, чем второй. Места для ожидания отсутствуют. Если в момент поступления заявки первого типа оба канала заняты обслуживанием заявок второго типа, то теряется одна из них с вероятностью $\frac{1}{2}$. Время обслуживания потоков распределено экспоненциально с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно и не зависит от номера обслуживающего устройства. В начальный момент времени система свободна.

Обозначим все состояния системы парой чисел (i, j) , где i — число устройств, занятых обслуживанием заявок первого типа, j — второго типа, $i \geq 0, j \geq 0, i + j \leq n$.

Ориентированный граф переходов для такой СМО изображен на рис. 1, где на правой половине рисунка показана перенумерация состояний системы.

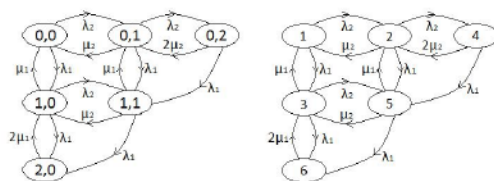


Рис. 1. Интенсивности переходов

Прудникова Татьяна Михайловна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: tatiana.m.prudnikova@gmail.com, тел.: +7(911)763-69-00

Составим систему уравнений Чепмена — Колмогорова

$$\begin{cases} P_1'(t) = P_1(t)(-\lambda_1 - \lambda_2) + P_2(t)\mu_2 + P_3(t)\mu_1, \\ P_2'(t) = P_2(t)(-\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2) + P_1(t)\lambda_2 + P_4(t)(2\mu_2) + P_5(t)\mu_1, \\ P_3'(t) = P_3(t)(-\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1) + P_1(t)\lambda_1 + P_5(t)\mu_2 + P_6(t)(2\mu_1), \\ P_4'(t) = P_4(t)(-\lambda_1 - 2\mu_2) + P_2(t)\lambda_2, \\ P_5'(t) = P_5(t)(-\lambda_1 - \mu_1 - \mu_2) + P_2(t)\lambda_1 + P_3(t)\lambda_2 + P_4(t)\lambda_1, \\ P_6'(t) = P_6(t)(-2\mu_1) + P_3(t)\lambda_1 + P_5(t)\lambda_1, \end{cases} \quad (1)$$

начальные условия $P_1(0) = 1, P_i(0) = 0, i \neq 1$.

Для вероятностей в установившемся состоянии имеем

$$\begin{cases} 0 = P_1(-\lambda_1 - \lambda_2) + P_2\mu_2 + P_3\mu_1, \\ 0 = P_2(-\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2) + P_1\lambda_2 + P_4(2\mu_2) + P_5\mu_1, \\ 0 = P_3(-\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1) + P_1\lambda_1 + P_5\mu_2 + P_6(2\mu_1), \\ 0 = P_4(-\lambda_1 - 2\mu_2) + P_2\lambda_2, \\ 0 = P_5(-\lambda_1 - \mu_1 - \mu_2) + P_2\lambda_1 + P_3\lambda_2 + P_4\lambda_1, \\ 0 = P_6(-2\mu_1) + P_3\lambda_1 + P_5\lambda_1, \end{cases} \quad (2)$$

условие нормировки $\sum_{i=1}^6 P_i = 1$.

2. Характеристики обслуживания заявок первого потока.

Обслуживание первого потока (с высшим приоритетом) не зависит от обслуживания заявок второго потока.

Значит, все характеристики для него можно вычислить по формулам для марковского процесса с одним простейшим потоком заявок (с параметром λ_1) и двумя каналами с экспоненциальным распределением времени обслуживания (с параметром μ_1) с потерями.

Выпишем эти характеристики [2]:

1. Вероятности того, что заявками из первого потока занято 0, 1, 2 обслуживающих устройства находят по формулам Эрланга, где вероятности обозначены строчными буквами p с первым индексом, соответствующим номеру потока, в данном случае 1

$$\begin{cases} p_{1_0} = \left(\sum_{k=0}^2 \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^k}{k!} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1}, \\ p_{1_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} p_{1_0} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1}, \\ p_{1_2} = \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1}. \end{cases}$$

Состояние, в котором оба обслуживающих устройства заняты заявками первого типа — состояние 6 (см. рис. 1).

$$\text{Значит, } P_6 = p_{1_2} = \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1}.$$

2. Вероятность того, что заявка первого типа получит отказ

$$p_{1_{ref}} = P_6 = \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1}.$$

3. Вероятность того, что заявка первого типа будет принята на обслуживание

$$q_1 = 1 - p_{1_{ref}} = 1 - \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1}.$$

4. Вероятность того, что заявка первого типа будет обслужена

$$p_{1_{serv}} = q_1 = 1 - \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1}.$$

5. Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок первого типа

$$A_1 = \lambda_1 p_{1_{serv}} = \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1} \right).$$

6. Среднее число каналов, занятых заявками первого типа

$$k_1 = \frac{A_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1} \right).$$

3. Решение системы уравнений для стационарных вероятностей. Чтобы найти характеристики обслуживания второго потока заявок, необходимо решить систему уравнений (2) для стационарных вероятностей. Выразим вероятности P_1, \dots, P_5 через найденную ранее вероятность P_6 .

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = P_6 \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) 2\mu_1^2 - (2\mu_1\lambda_1 + 2\mu_1^2 + \lambda_1^2) (2\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_1^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} - \frac{2(\lambda_1 + \mu_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ P_2 = P_6 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_2) (2\mu_1\lambda_1 + 2\mu_1^2 + \lambda_1^2)}{\lambda_1^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1 + 2\mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ P_3 = P_6 \frac{2\mu_1 (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) (\lambda_2 - \lambda_1) - (2\mu_1\lambda_1 + 2\mu_1^2 + \lambda_1^2) (2\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_1} + \\ + \frac{2\lambda_2\lambda_1 + 2\mu_2\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ P_4 = P_6 \frac{\lambda_2 (2\mu_1\lambda_1 + 2\mu_1^2 + \lambda_1^2)}{\lambda_1^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ P_5 = P_6 \frac{(2\mu_1\lambda_1 + 2\mu_1^2 + \lambda_1^2) (2\lambda_2 + 2\mu_2) + 2\mu_1\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_1} - \\ - \frac{2\lambda_2\lambda_1 + 2\mu_2\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) (\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{array} \right.$$

4. Характеристики обслуживания заявок второго потока.

Для краткости выразим все характеристики для второго потока заявок через найденные стационарные вероятности P_1, \dots, P_6 :

1. Вероятности того, что заявками из второго потока занято 0, 1, 2 обслуживающих устройства

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{2_0} = P_1 + P_3 + P_6, \\ p_{2_1} = P_2 + P_5, \\ p_{2_2} = P_4. \end{array} \right.$$

2. Вероятность того, что заявка второго типа получит отказ

$$p_{2_{ref}} = P_4 + P_5 + P_6.$$

3. Вероятность того, что заявка второго типа будет принята на обслуживание

$$q_2 = 1 - p_{2_{ref}} = 1 - P_4 + P_5 + P_6 = P_1 + P_2 + P_3.$$

4. Найдем вероятность того, что заявка второго типа будет обслужена. Пусть за время обслуживания заявки второго типа в систему поступает l заявок первого типа. Чтобы обслуживаемую заявку второго типа не «выбила» из системы ни одна из них, необходимо, чтобы в моменты их поступления система находилась в состояниях 2 или 4 (см. рис. 1). Тогда вероятность того, что заявка второго типа будет принята на обслуживание и за время ее обслуживания ее не «выбьет» ни одна заявка первого типа

$$\begin{aligned}
p_{2_{serv}} &= q_2 \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{l!} (\lambda_1 t)^l (P_2^* + \frac{1}{2} P_4^*)^l \right) d(1 - e^{-\mu_2 t}) = \\
&= (P_1 + P_2 + P_3) \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{l!} (\lambda_1 t)^l (P_2^* + \frac{1}{2} P_4^*)^l \right) \mu_2 e^{-\mu_2 t} dt,
\end{aligned}$$

$$\text{где } P_2^* = \frac{P_2}{P_2 + P_4 + P_5}, \quad P_4^* = \frac{P_4}{P_2 + P_4 + P_5}.$$

5. Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок второго типа

$$\begin{aligned}
A_2 &= \lambda_2 p_{2_{serv}} = \\
&= \lambda_2 (P_1 + P_2 + P_3) \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{l!} (\lambda_1 t)^l (P_2^* + \frac{1}{2} P_4^*)^l \right) \mu_2 e^{-\mu_2 t} dt.
\end{aligned}$$

5. Абсолютная пропускная способность системы. Общее количество обслуживаемых в единицу времени заявок равняется сумме интенсивностей выходящих потоков обслуженных заявок первого и второго типов.

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 = \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} \right)^{-1} \right) + \\
&+ \lambda_2 (P_1 + P_2 + P_3) \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{l!} (\lambda_1 t)^l (P_2^* + \frac{1}{2} P_4^*)^l \right) \mu_2 e^{-\mu_2 t} dt.
\end{aligned}$$

6. Постановка задачи оптимизации. Рассмотрим установившийся режим работы системы.

С целью получения прибыли системой устанавливается плата за обслуживание заявок каждого из типов. Плата пропорциональна времени обслуживания, т. е. задается целочисленная цена за единицу времени обслуживания c , а итоговая плата получается умножением этой цены на время обслуживания.

При исследовании рынка устанавливается вид зависимости интенсивности поступления заявок конкретного типа от цены их обслуживания, а также λ_{10} , λ_{20} — интенсивность поступления заявок при нулевой цене (максимальный спрос) и c_{1m} , c_{2m} — максимальная цена на обслуживание, при которой спрос пропадает.

Из общих соображений следует наложить ограничение на интенсивность входного потока заявок каждого типа $\lambda_i \leq \mu_i$, чтобы избежать переполнения системы, и ограничения на цену $0 \leq c_i \leq c_{im}$.

Задача: найти такие цены на обслуживание заявок, которые обеспечат максимальное математическое ожидание прибыли за единицу времени работы системы.

Будем рассматривать два типа рынка (линейный и экспоненциальный) и два вида работы системы (с выплатой штрафов за поте-

рянные при обслуживании заявки и без штрафа).

Линейный рынок. Зная λ_{10} , λ_{20} и c_{1m} , c_{2m} , а также то, что интенсивность поступления заявок линейно зависит от цены их обслуживания, установим зависимость $\lambda_i(c_i) = \lambda_{i0} - c_i \frac{\lambda_{i0}}{c_{im}}$.

Из соображений $0 \leq \lambda_i \leq \mu_i$ получаем дополнительное ограничение на цену $c_{im} - \mu_i \frac{c_{im}}{\lambda_{i0}} \leq c_i$.

Экспоненциальный рынок. Известно, что $\lambda_i(c_i) = f_i + g_i e^{-c_i k_i}$. Здесь k_i устанавливается в ходе исследования рынка, а f_i и g_i , исходя из известных значений λ_{i0} и c_{im}

$$f_i = \frac{-\lambda_{i0} e^{-c_{im} k_i}}{1 - e^{-c_{im} k_i}}, \quad g_i = \frac{\lambda_{i0}}{1 - e^{-c_{im} k_i}}.$$

Дополнительное ограничение на цену $-\frac{1}{k_i} \ln \frac{\mu_i - f}{g} \leq c_i$.

Работа без штрафов. Система не выплачивает штраф при потере заявки во время обслуживания, а только получает плату за все время обслуживания заявки.

Тогда математическое ожидание прибыли за единицу времени

$$M(b) = c_1 (P_3 + P_5 + 2P_6) + c_2 (P_2 + 2P_4 + P_5).$$

Работа со штрафами. Заявка, не принятая на обслуживание, штрафом не облагается. При потере обслуживаемой заявки второго типа система выплачивает фиксированный штраф d и не получает платы за обслуживание этой заявки.

Тогда математическое ожидание прибыли за единицу времени

$$M(b) = \lambda_1 p_{serv} \mu_1^{-1} c_1 + \lambda_2 (p_{serv} \mu_2^{-1} c_2 - d (q_2 - p_{serv})).$$

7. Заключение. Для СМО были составлены описывающие ее системы уравнений, получены формулы для вычисления характеристик обслуживания, а также формулы для нахождения ожидаемой прибыли. Дальнейшее исследование возможно с использованием вычислительной техники.

Литература

1. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982. 256 с.
2. Самаров К. Л. Элементы теории массового обслуживания // Учебный центр «Резольвента», 2009. [Электронный ресурс]: URL: <http://www.resolventa.ru/data/metodstud/servtheory.pdf> (дата обращения: 16.05.2013).

УДК 519.23

Свиркина Н. М.

Метод кривых Пирсона в анализе баллов ЕГЭ абитуриентов, поступивших в вуз

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

Введение. Рассматривается задача идентификации закона распределения данных, представляющих собой полученные абитуриентами баллы ЕГЭ, изучается задача проверки их статистической однородности.

Актуальность работы обуславливается необходимостью объективного анализа, на основе которого осуществляется принятие важных управленческих решений. Примером такого решения является установление порогового балла по предмету как результат анализа плотности распределения, где баллы ЕГЭ — реализации случайных величин.

Работа предполагает вероятностно-статистический анализ приёма студентов в высшее учебное заведение. Следует отметить, что проводимые на сегодняшний день исследования не используют всю имеющуюся информацию и не отвечают на некоторые важные вопросы. К настоящему времени наиболее известным исследованием является мониторинг «Качество приёма в вузы», проводимый НИУ ВШЭ совместно с РИА Новости по заказу Общественной палаты РФ, начиная с 2009 г [1]. Методика расчёта показателей мониторинга (средних, минимальных баллов) основана на использовании элементов дескриптивной статистики. Для проведения всестороннего анализа необходимо определение закона распределения данных по заданной выборке.

Постановка задачи. В работе рассматриваются следующие задачи:

- 1) проведение статистического анализа с использованием дескриптивной статистики;
- 2) идентификация закона распределения данных (баллов ЕГЭ) с помощью *метода кривых Пирсона*;

Свиркина Наталья Михайловна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: strelana92@mail.ru, тел.: +7(904)512-88-29

3) анализ однородности выборок, представляющих собой баллы абитуриентов по выбранным предметам.

Статистический анализ на основе дескриптивной статистики. Первым шагом обработки данных является анализ, основанный на определении основных числовых характеристик случайной величины. Такой подход принят в проводимых исследованиях по данной тематике (в частности, он использовался в вышеупомянутом мониторинге «Качество приёма в вузы»). Наиболее часто используемыми статистическими показателями являются следующие характеристики: минимум, максимум, среднее значение, выборочная дисперсия (стандартное отклонение).

В работе дополнительно использованы такие числовые характеристики, как медиана, мода, асимметрия, эксцесс.

Задача идентификации закона распределения. Для проведения подробного анализа помимо вычисления статистических характеристик необходимо идентифицировать закон распределения случайной величины. В связи с тем, что число градаций баллов ЕГЭ велико, визуальное представление распределения удобно рассматривать в виде графика плотности. Метод кривых Пирсона [2–5] является методом определения закона распределения путём установления кривой, пропорциональной плотности распределения изучаемой случайной величины. Достоинством метода является то, что он охватывает практически все известные виды непрерывных статистических распределений [4].

Для описания статистического распределения случайной величины x используется решение дифференциального уравнения Пирсона

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x - M}{b_2x^2 + b_1x + b_0}dx,$$

где началом отсчета служит его среднее значение, M — мода. Коэффициенты в этом уравнении вычисляются с помощью центральных моментов. При введении обозначений $\sigma^2 = \mu_2$, $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$, $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ они находятся из соотношений

$$b_2 = \frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}, \quad b_1 = -M = \frac{\sigma\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)},$$

$$b_0 = \frac{\sigma^2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}.$$

Дискриминант знаменателя в уравнении Пирсона имеет вид

$$D = b_1^2 - 4b_0b_2 = b_1^2 \left(1 - \frac{4b_0b_2}{b_1^2} \right).$$

Введём в рассмотрение критерий Пирсона (каппу Пирсона)

$$\kappa = \frac{b_1^2}{4b_0b_2} = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^3}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)}.$$

Тогда дискриминант примет вид

$$D = b_1^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right).$$

В зависимости от значения каппы можно выделить три случая, каждому из которых соответствует один из основных типов кривых Пирсона — I, IV и VI соответственно (см. таблицу 1).

Таблица 1. Основные типы кривых Пирсона

Критерий	Тип кривой	Уравнение кривой
$\kappa < 0 \Rightarrow D > b_1^2$	I	$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1} \right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{m_2},$ $-a_1 < x < a_2, a_1 > 0, a_2 > 0,$ $m_1 > -1, m_2 > -1$
$0 < \kappa < 1 \Rightarrow D < 0$	IV	$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{-m} e^{-\mu \operatorname{arctg} \frac{x}{a}},$ $-\infty < x < \infty, m > 0$
$\kappa > 1 \Rightarrow D < b_1^2$	VI	$y = y_0(x - a)^{m_1} x^{-m_2}$ $a < x < \infty, m_1 > -1, m_2 > 0,$ $m_2 > m_1 + 1$

Остальные девять типов и кривая нормального распределения — их частные или граничные случаи. Типы II, VI, VII, VIII, IX представляют специальные случаи кривой типа I, тип X — специальный случай типа III, а тип XI — типа VI. Более детальный разбор и систематическое описание типов кривых Пирсона можно найти в [5].

Таким образом, задача сводится к определению значения каппы Пирсона, с помощью которого возможно установление типа кривых

Пирсона. Исследуя полученные в ходе применения метода коэффициенты, можно идентифицировать закон распределения.

Анализ однородности данных. Проверка однородности в работе также осуществляется на основе применения метода кривых Пирсона. Рассматривается основной вопрос: имеют ли данные выборки одинаковый тип кривых Пирсона. Также задача проверки на однородность данных включает анализ параметров закона распределения и числовых характеристик случайной величины.

Статистический анализ распределения баллов ЕГЭ по математике, информатике и русскому языку абитуриентов факультета ПМ–ПУ. Рассмотрим три выборки, состоящие из баллов ЕГЭ по математике, информатике и русскому языку абитуриентов, поступивших на факультет ПМ–ПУ по направлению «Прикладная математика и информатика» в 2011 г. [6].

Требуется идентифицировать закон распределения, представленный в виде одной из кривых Пирсона, с определёнными параметрами кривой и проверить статистическую однородность данных по трём предметам путём сравнения полученных типов кривых Пирсона, а также вычисления и сравнения числовых характеристик распределений.

В работе исследуются баллы абитуриентов, поступивших на общих основаниях (по конкурсу).

Исследование было проведено с использованием программ МАТ-LAB и Excel. Создана программная реализация метода кривых Пирсона, посредством которого определены типы и параметры искоемых кривых. Также произведены все необходимые расчёты для проверки однородности данных.

Таблица 2. Числовые характеристики распределений

Коэффициент	Математика	Информатика	Русский язык
Минимум	56	59	54
Максимум	98	98	98
Среднее значение	76,9	80,9	78,01
Станд. отклонение	9,41	7,08	10,32
Медиана	77	81	76
Мода	75	81	90
Асимметрия	–0,06	0,39	0,08
Эксцесс	–0,59	0,28	–0,94

Таблица 3. Парная зависимость между баллами ЕГЭ

	Математика и информатика	Математика и русский язык	Информатика и русский язык
Корреляция	0,975	0,983	0,954

Таблица 4. Результаты применения метода кривых Пирсона

Математика	Информатика	Русский язык
$\kappa = -0,0113$	$\kappa = -0,2769$	$\kappa = -0,0123$
Тип I кривых Пирсона	Тип I кривых Пирсона	Тип I кривых Пирсона
$m_1 = 3,7148 > 1$	$m_1 = 32,4569 > 1$	$m_1 = 0,2854 \in (0, 1)$
$m_2 = 2,8123 > 1$	$m_2 = 11,1971 > 1$	$m_2 = 0,6033 \in (0, 1)$
$a_1 = 6,4068$	$a_1 = 16,8125$	$a_1 = 2,7115$
$a_2 = 4,8503$	$a_2 = 5,8000$	$a_2 = 5,7330$

Исследование показало, что три распределения относятся к одному типу кривых Пирсона, но числовые параметры кривых значительно отличаются. В связи с этим кривые имеют различную форму.

Можно заметить, что коэффициенты m_1 и m_2 во всех трёх случаях положительны, что свидетельствует о том, что концы кривых достигают оси абсцисс. В промежутке между конечными точками функция достигает своего максимума и относительно соответствующей ему точки функция асимметрична. У кривой баллов русского языка параметры m_1 и m_2 принадлежат интервалу $(0, 1)$, из чего следует, что касательные на концах кривой имеют большой угол наклона по отношению к оси абсцисс. Значения параметров остальных двух кривых больше 1, поэтому положение касательных далеко от вертикального. Чем больше значения параметров, тем более горизонтальный вид принимают касательные. Поэтому «хвосты» кривой распределения баллов по информатике в сравнении с кривой, соответствующей баллам по математике, являются более пологими.

При рассмотрении коэффициентов a_1 и a_2 можно заметить, что размах кривой Пирсона баллов по информатике ($a_i \approx 22,61$) примерно в два раза больше, чем размах остальных двух кривых ($a_m \approx 11,25$); ($a_r \approx 8,44$).

Полученные результаты исследования отражают степень статистической однородности данных.

Распределение баллов ЕГЭ по информатике имеет меньший разброс, чем по математике и по русскому языку. Математическое ожидание и медиана, характеризующие баллы по русскому языку и по математике, примерно одинаковы между собой. Экзамен по информатике абитуриенты сдали в среднем лучше (на 3–4 балла). Однако интересно, что значение моды является наибольшим именно для

русского языка (90 баллов). Коэффициенты асимметрии баллов по математике и по русскому языку близки к нулю, что говорит о практически симметричном распределении.


Рассматривая коэффициенты корреляции, можно заметить, что наблюдается сильная (почти линейная) прямая парная зависимость баллов по предметам.

Закключение. Для получения всестороннего вероятностно-статистического анализа баллов ЕГЭ абитуриентов вузов необходима идентификация закона распределения данных. Для этого успешно применим метод кривых Пирсона.

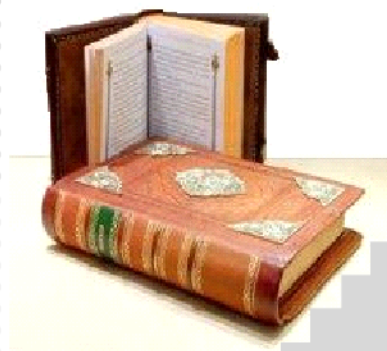
Исходя из результатов анализа, можно сказать, что баллы ЕГЭ по различным необходимым для сдачи при поступлении на направление «Прикладная математика и информатика» предметам абитуриентов факультета ПМ–ПУ имеют определённую статистическую однородность. Уровень подготовки абитуриентов в области всех рассмотренных дисциплин на момент поступления достаточно высок.

Литература

1. Качество приёма в вузы — 2013 // Официальный сайт НИУ «Высшая школа экономики»: URL:http://www.hse.ru/ege/second_section2013/ (дата обращения: 10.03.14)
2. Кендалл М., Стюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.
3. Митропольский А. К. Техника статистических решений. М.: Наука, 1971. 576 с.
4. Романовский В. И. Математическая статистика / под ред. технико-теорет. лит. М.–Л.: Гос. объедин. научно-тех. изд. НКТП СССР, 1938. 527 с.
5. Эльдертон У. П. Кривые распределения численностей и корреляция. М.: ЦСУ, 1924. 199 с.
6. Буре В. М., Свиркин М. В., Степанов А. Г. Методология построения информационно-аналитического программного комплекса деятельности организационных систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2012. Вып. 2. С. 75–80.



*6. Прикладная
математика и
процессы управления
на факультете
ПМ–ПУ СПбГУ*



УДК 519.853

Утешев А. Ю.

От Ферма до Максвелла: о стационарных точках семейства потенциалов

1. Постановки задач. В настоящей статье будут рассмотрены несколько задач, связанных с минимизацией функций, зависящих от расстояний до нескольких фиксированных точек евклидова пространства.

Задача 1. Пусть заданы координаты K точек пространства $\mathbb{R}^n : \{P_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn})\}_{j=1}^K$. Требуется определить координаты точки $P_* = (x_{*1}, \dots, x_{*n})$, решающей задачу оптимизации:

$$\min_{P \in \mathbb{R}^n} F(P) \quad \text{при} \quad F(P) = \sum_{j=1}^K m_j |PP_j|. \quad (1)$$

Здесь $|\cdot|$ означает евклидово расстояние, а величины $\{m_j\}_{j=1}^K$ обычно считаются положительными и называются **весами**.

Будем говорить о наборе

$$\begin{matrix} P_1 & \dots & P_K \\ m_1 & \dots & m_K \end{matrix} \quad (2)$$

как о **конфигурации весов**.

Задача известна под различными названиями: обобщенная задача Ферма — Торричелли, задача Ферма — Торричелли — Штейнера, задача Вебера, задача о взвешенной геометрической медиане [1, 2]. В случае $n = 2$ задаче можно дать следующую экономическую интерпретацию.

Пример 1. В городах P_1, P_2, P_3 расположены источники полезных ископаемых: железной руды, угля и воды соответственно. Известно, что для производства одной тонны стали необходимо иметь m_1 тонн руды, m_2 тонн угля и m_3 тонн воды. В предположении, что

Утешев Алексей Юрьевич – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexeiuteshev@gmail.com, тел.: +7(812)428-41-19

Работа выполнена при финансовой поддержке исследовательского гранта СПбГУ № 9.38.674.2013

стоимость перевозки одной тонны груза не зависит от его природы, где следует расположить сталелитейное производство так, чтобы минимизировать транспортные издержки?

С конца XIX века подобные задачи стали предметом изучения в экономической географии. Систематические исследования были начаты Лаунхардтом и позднее развиты Альфредом Вебером. Последний ввел понятие **штандорта** — оптимального места размещения производства, «склада».

«Каков должен быть первый общий подход к отысканию таких пунктов? С угловыми вершинами штандортной фигуры штандорт связан линиями — их Вебер называет «компонентами», — по которым и происходит передвижение соответствующих тяжестей. Положим, что мы имеем перед собой производство, работающее с двумя локализованными материалами, причем на выработку 1 тонны продукта требуется $3/4$ тонны одного материала и $1/2$ тонны другого. В таком случае мы получаем штандортную фигуру, на «материальных компонентах» которой передвигаются веса в $3/4$ и $1/2$, в то время как «потребительская компонента» отягощена 1» [3].

В XX веке эти задачи выделились в подраздел теории исследования операций, известный в настоящее время как **facility location problem** или **location theory** (location analysis) [2].

Частный случай задачи при $n = 2$, $K = 3$ и $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ известен как (классическая) задача Ферма — Торричелли: для трех неколлинеарных точек плоскости $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ и $P_3 = (x_3, y_3)$ требуется определить

$$\min_{(x,y)} F(x,y) \quad \text{при} \quad F(x,y) = \sum_{j=1}^3 \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}. \quad (3)$$

Поставленная Ферма в 1640 г. задача (3) была решена Торричелли в парадигме, господствующей в XVII веке: геометрическим построением с помощью циркуля и линейки. Решением оказалась, так называемая, **точка Ферма — Торричелли** треугольника $P_1P_2P_3$, т. е. точка P_* , удовлетворяющая условию

$$\widehat{P_1P_*P_2} = \widehat{P_2P_*P_3} = \widehat{P_1P_*P_3} = 2\pi/3.$$

Эта точка существует только для треугольников $P_1P_2P_3$ с углами меньшими $2\pi/3$. В случае, если угол треугольника при вершине P_j

не удовлетворяет этому ограничению, то $\min F$ достигается в этой вершине.

Еще один случай геометрического решения получен Фаньяно для конфигурации четырех одинаковых весов.

Теорема 1. *Если точки $\{P_j\}_{j=1}^4$ плоскости образуют выпуклый четырехугольник, то минимум $\sum_{j=1}^4 |PP_j|$ достигается в точке P_* , лежащей на пересечении диагоналей четырехугольника. Если точки $\{P_j\}_{j=1}^4$ не образуют выпуклый четырехугольник, и точка P_i лежит внутри треугольника, образованного тремя оставшимися точками, то минимум $\sum_{j=1}^4 |PP_j|$ достигается в точке P_i .*

Этими двумя случаями исчерпываются успехи геометрического подхода к решению задачи. Альтернативным способом решения для плоского случая и произвольных весов является механический. На плоской доске, располагаемой горизонтально к поверхности Земли, рисуют многоугольник, подобный многоугольнику $P_1P_2 \dots P_K$ и просверливают в его вершинах отверстия, через которые опускают нити, связанные одним узлом. Если к свободным концам этих нитей подвесить грузы массами, пропорциональными m_j , то при равновесии этой системы общий узел нитей будет находиться в искомой точке P_* . Еще один метод решения — численный — изложен в пункте 2.

Настоящая статья посвящена обзору аналитического подхода к решению задачи. Речь идет об анализе градиентной системы уравнений, задающей стационарные точки функции (1)

$$\frac{DF}{DP} = \sum_{j=1}^K m_j \frac{P - P_j}{|PP_j|} = \mathbb{O}_{n \times 1}. \quad (4)$$

В случае $n = 2$, $K = 3$ удается получить явное аналитическое решение этой системы в радикалах. Однако уже в случае $n = 2$, $K = 4$ такого решения, в общем случае, не существует. Тем не менее, анализ множества решений системы (4) в зависимости от параметров конфигурации (2) удастся произвести сведением этой системы к подходящей алгебраической. К этой последней возможно применить алгебраические методы преобразования, позволяющие упростить ее вид и проанализировать динамику ее множества решений; эти методы составляют предмет раздела высшей алгебры известного как **теория исключения** переменных и локализации решений систем алгебраических уравнений [4].

В рамках аналитического подхода будет затронута и более общая задача.

Задача 2. Найти стационарные точки функции

$$F(P) = \sum_{j=1}^K m_j |PP_j|^L. \quad (5)$$

Здесь величины L и $\{m_j\}_{j=1}^K$ могут быть произвольными ненулевыми вещественными числами.

При $L = 1$ мы получаем задачу 1, поставленную выше. Для $L = 2$ решением задачи является единственная точка

$$P_* = \sum_{j=1}^K m_j P_j / \sum_{j=1}^K m_j$$

— точка глобального минимума функции (5). В случае всех положительных $\{m_j\}_{j=1}^K$ и $n \in \{2, 3\}$ точка P_* является центром масс (барицентром) системы материальных точек, расположенных в точках $\{P_j\}_{j=1}^K$.

Особый интерес представляет случай $n \in \{2, 3\}$ при показателе $L = -1$. Ему соответствуют два физических потенциала — кулоновский (электростатический) и, с точностью до смены знака, ньютоновский (гравитационный).

Замечание. При изложении известных результатов автор будет ссылаться не на первоисточники, но на обзорные статьи, в которых эти результаты приводятся с достаточной библиографией.

2. Существование решения. Для обобщенной задачи Ферма — Торричелли известны как общий результат существования решения, так и способ его численного нахождения.

Теорема 2 [1]. *Минимум функции (1) существует и единствен. При этом*

1) *если существует точка P_i такая, что выполняется условие*

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K m_j \frac{P_j - P_i}{|P_j P_i|} \right| \leq m_i,$$

то этот минимум достигается в точке P_i ;

2) если для любого значения $i \in \{1, \dots, K\}$ выполняется условие

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K m_j \frac{P_j - P_i}{|P_j P_i|} \right| > m_i,$$

то этот минимум достигается в точке P_* , удовлетворяющей градиентной системе уравнений (4), и, в этом случае, $P_* \notin \{P_j\}_{j=1}^K$.

Заметим, что попадание точки P_* в вершину P_i происходит при значениях m_i меньших, чем сумма оставшихся весов.

Приближенное решение задачи может быть получено по алгоритму Вайсфельда [1]. Если уравнения системы (4) переписать в виде $P = \Phi(P)$ при

$$\Phi(P) = \sum_{j=1}^K \frac{m_j P_j}{|P P_j|} / \sum_{j=1}^K \frac{m_j}{|P P_j|},$$

то поиск точки P_* осуществляется методом простых итераций:

$$\{P^{(k)} = \Phi(P^{(k-1)})\} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P_* \text{ при } P^{(0)} \notin \{P_j\}_{j=1}^K.$$

Метод плохо сходится, если искомая точка P_* находится близко к одной из точек $\{P_j\}_{j=1}^K$.

Для случая кулоновского потенциала даже вопрос о количестве его стационарных точек является открытым.

Гипотеза Максвелла [5, 6]. Число стационарных точек кулоновского поля любой конфигурации K стационарных зарядов в \mathbb{R}^3 не превосходит $(K - 1)^2$.

3. Аналитическое решение. Аналитическое решение задачи 1 получено для случая $K = 3$ произвольных весов. Мы приведем его здесь для случая одинаковых весов.

Теорема 3 [7]. Обозначим $r_{jk} = |P_j P_k|$ для $\{j, k\} \subset \{1, 2, 3\}$. Пусть все углы треугольника $P_1 P_2 P_3$ меньше $2\pi/3$, или, что то же, выполнены условия:

$$\begin{aligned} r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{12}r_{13} - r_{23}^2 > 0, \quad r_{23}^2 + r_{12}^2 + r_{12}r_{23} - r_{13}^2 > 0, \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{13}r_{23} - r_{12}^2 > 0. \end{aligned}$$

Точка P_* Ферма – Торричелли имеет координаты

$$x_* = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{2\sqrt{3}|S|d} \left(\frac{x_1}{\kappa_1} + \frac{x_2}{\kappa_2} + \frac{x_3}{\kappa_3} \right), \quad y_* = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{2\sqrt{3}|S|d} \left(\frac{y_1}{\kappa_1} + \frac{y_2}{\kappa_2} + \frac{y_3}{\kappa_3} \right) \quad (6)$$

при

$$|P_1P_*| + |P_2P_*| + |P_3P_*| = \sqrt{d}.$$

Здесь

$$d = \frac{1}{\sqrt{3}}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2}{2} + \sqrt{3}|S|,$$

$$\begin{cases} \kappa_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(r_{12}^2 + r_{13}^2 - r_{23}^2) + |S|, \\ \kappa_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(r_{23}^2 + r_{12}^2 - r_{13}^2) + |S|, \\ \kappa_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(r_{13}^2 + r_{23}^2 - r_{12}^2) + |S| \end{cases}$$

и

$$S = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Обратим внимание, что в общем выражении для знаменателей формул (6) входит явным образом выражение для минимального значения функции $F(P)$. Отметим, при этом, что зависимость знаменателя от величины $|S|$ — удвоенной площади треугольника $P_1P_2P_3$ — не критическая: от нее можно избавиться поскольку этот множитель неявно присутствует и в числителях формул (6).

Для случая $K = 4$ произвольных весов решение задачи в радиалах не существует [1].

4. Дерево Штейнера. Задача 1 послужила отправной точкой для следующей задачи, имеющей существенное практическое значение.

Задача 3. Для заданной конфигурации точек $\{P_j = (x, y)\}_{j=1}^K$ на плоскости построить сеть связывающих их отрезков суммарной минимальной длины. Искомая сеть называется (минимальным) деревом Штейнера.

Историческая несправедливость заключается в том, что задача названа именем ученого, не имевшего к ней отношения; первыми ее исследователями были Жергонн и Гаусс [8].

Решение задачи для случая $K = 3$ точек, удовлетворяющих условиям теоремы 3, сводится к построению точки P_* Ферма — Торричелли треугольника $P_1P_2P_3$: система отрезков $\{P_*P_j\}_{j=1}^3$ составляет дерево Штейнера для конфигурации. В случае $K = 4$ точек возникает несколько возможных вариантов (топологий) дерева Штейнера в зависимости от конфигурации.

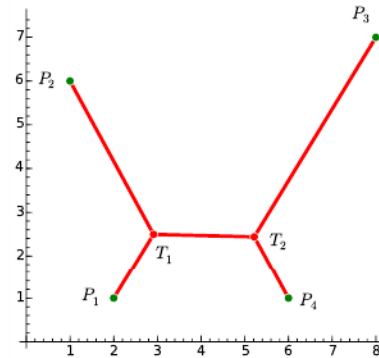


Рис. 1. Дерево Штейнера

На рис. 1 показана одна из таких возможностей: минимальная длина дерева достигается не при наличии одного дополнительного узла (как можно было бы предположить из результата теоремы 1), а при наличии двух дополнительных узлов — точек T_1 и T_2 таких, что T_1 является точкой Ферма — Торричелли для треугольника $P_1P_2T_2$, а точка T_2 — точкой Ферма — Торричелли для треугольника $P_3P_4T_1$.

Теорема 4. Если дерево Штейнера для конфигурации точек $\{P_j = (x_j, y_j)\}_{j=1}^4$ строится с помощью двух вспомогательных точек T_1 и T_2 , то координаты последних представляют из себя рациональные функции от $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^4$. Знаменатели этих выражений (с точностью до множителя) равны

$$d = \frac{1}{4} \left(\left[x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \sqrt{3}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) \right]^2 + \left[\sqrt{3}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) + y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \right]^2 \right).$$

Длина дерева Штейнера равна \sqrt{d} .

Следствие 1. При выполнении условия теоремы 4 длина дерева Штейнера равна длине стороны треугольника, построенного на диагоналях четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ как на сторонах, и при угле между этими сторонами равном $\pi/3 + \alpha$; здесь α — величина острого угла между диагоналями.

5. Обратная задача. Некоторые трудности в получении аналитического решения задачи 1 удается преодолеть с помощью «обходного маневра» — за счет решения следующей вспомогательной задачи.

Задача 4. Подобрать величины весов $\{m_j\}_{j=1}^K$ так, чтобы минимум функции (1) находился в наперед заданной точке $P_* \notin \{P_j\}_{j=1}^K$.

Теорема 5 [7]. Пусть вершины треугольника $P_1P_2P_3$ пронумерованы против часовой стрелки. Обозначим

$$S_1(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$S_2(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}, \quad S_3(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix}.$$

Тогда для значений

$$\{m_j^* = |P_*P_j|S_j(x_*, y_*)\}_{j=1}^3 \quad (9)$$

функция

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^3 m_j^* \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$$

имеет стационарную точку $P_* = (x_*, y_*)$. Если последняя выбирается внутри треугольника $P_1P_2P_3$, то величины (8) все положительны и

$$F(x_*, y_*) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_* & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_* & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_*^2 + y_*^2 & x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Этот результат можно получить, если рассмотреть систему (4) как линейную систему однородных уравнений относительно величин весов: формулы (9) определяют фундаментальную систему решений.

Для случая, когда количество точек конфигурации (2) превосходит размерность пространства на единицу, т.е. $K = n + 1$, этот результат допускает естественное обобщение как для задачи 1, так и

для задачи 2. Так, при $n = 2$ утверждение теоремы останется справедливым и для функции

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^3 m_j [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2]^{L/2} \quad (10)$$

при выборе

$$\{m_j = |P_* P_j|^{2-L} S_j(x_*, y_*)\}_{j=1}^3.$$

Для случая кулоновского потенциала, мы, тем самым, получаем решение задачи управления: подбором величин зарядов конфигурации можно обеспечить заданное положение равновесия пробной частицы.

Теорема 6. *Любая стационарная точка функции (10) удовлетворяет отношению*

$$\begin{aligned} m_1 : m_2 : m_3 = \\ = (|PP_1|^{2-L} S_1(x, y)) : (|PP_2|^{2-L} S_2(x, y)) : (|PP_3|^{2-L} S_3(x, y)). \end{aligned}$$

Следствием этой теоремы является возможность исключения радикалов из градиентной системы, т. е. построения системы алгебраических уравнений, задающих стационарные точки функции. Так, в случае нечетного показателя L такой системой является

$$\begin{cases} m_2^2 S_1^2(x, y) |PP_1|^{2(2-L)} - m_1^2 S_2^2(x, y) |PP_2|^{2(2-L)} = 0, \\ m_2^2 S_3^2(x, y) |PP_3|^{2(2-L)} - m_3^2 S_2^2(x, y) |PP_2|^{2(2-L)} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

К системе такого вида уже вполне возможно применить процедуру из названия следующего параграфа.

6. Исключение переменных. Целью ставится получение из двух уравнений одного, но с меньшим числом переменных.

Пример 2. Выяснить динамику поведения точки минимума P_* функции (1) для конфигурации

$$\begin{array}{cccc} P_1 = (1, 1) & ; & P_2 = (3, 5) & ; & P_3 = (7, 2) & ; & P_4 = (6, 6) \\ m_1 = 1 & ; & m_2 = 1 & ; & m_3 = 1 & ; & m_4 = m \end{array}$$

в зависимости от изменения параметра m .

Решение. Нас интересует хоть какое-то функциональное представление для $P_*(m)$. Преобразование градиентной системы (4) в алгебраическую может быть произведено различными способами. Подход, идея которого была изложена в пункте 5, позволяет получить эту систему в виде

$$F_1(x, y, m) = 0, \quad F_2(x, y, m) = 0.$$

Здесь F_1 и F_2 полиномы степени 6 по каждой переменной x или y и степени 12 по обоим переменным. Из этой системы, посредством вычисления результата [4], можно исключить параметр m с целью нахождения неявного представления кривой, на которой расположены стационарные точки при всевозможных значениях m . Результат $\mathcal{R}_m(F_1, F_2)$ оказывается полиномом степени 96 по x и y , и этот полином факторизуется в виде

$$65536(2x - y - 1)^8(x^2 - 14x + 53 - 4y + y^2)^8(x^2 - 12x + 72 - 12y + y^2)^8 \times \\ \times \Theta_6^2(x, y)\Theta^2(x, y).$$

Собственно кривая стационарных точек задается одним множителем:

$$\Theta(x, y) = 0, \quad \deg \Theta = 12$$

при

$$\Theta(x, y) \equiv 3y(-7y + 10x)(8x - y)(2x - 9y)(x^2 + y^2)^4 + \\ + \dots + 4409856(1491x + 1234y) - 2110116096.$$

На рис. 2 изображена сама кривая и утолщением выделена ее ветвь, соответствующая реальной динамике точки $P_*(m)$.

Перейдем теперь к рассмотрению кулоновского потенциала

$$F(P) = \frac{m_1}{|PP_1|} + \frac{m_2}{|PP_2|} + \frac{m_3}{|PP_3|} \quad (12)$$

в случае \mathbb{R}^2 .

Пример 3. Для конфигурации

$$\begin{array}{ccc} P_1 = (1, 1) & ; & P_2 = (5, 1) & ; & P_3 = (2, 6) \\ m_1 = 1 & & m_2 & & m_3 \end{array}$$

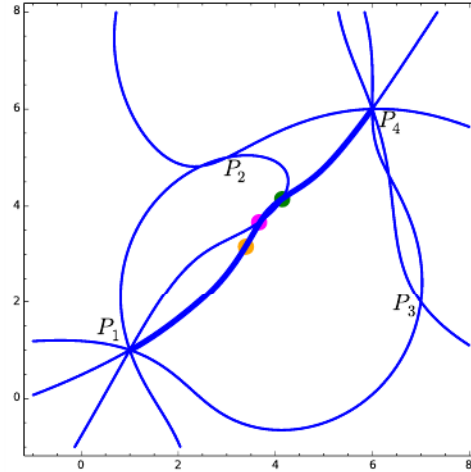


Рис. 2. Обобщенная задача Ферма — Торричелли: кривая стационарных точек

проанализировать поведение множества стационарных точек потенциала (12) в зависимости от параметров m_2, m_3 .

Решение. Для этой задачи уравнения системы (11) имеют вид

$$\begin{cases} F_1 = m_2^2 (5x + 3y - 28)^2 (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2)^3 - \\ \quad - (5x - y - 4)^2 (x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26)^3 = 0, \\ F_2 = m_2^2 (4y - 4)^2 (x^2 + y^2 - 4x - 12y + 40)^3 - \\ \quad - m_3^2 (5x - y - 4)^2 (x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26)^3 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Предположим, что мы хотим исследовать динамику множества стационарных точек при различных фиксированных значениях m_2 при возможности вариации для m_3 . Для этого нужно исключить параметр m_3 из системы (13). Но он, фактически, уже исключен: первое уравнение от m_3 не зависит. Иными словами, при каждом фиксированном значении m_2 уравнение $F_1 = 0$ определяет на плоскости (x, y) кривую, целиком состоящую из стационарных точек семейства кулоновских потенциалов, определяемых параметром m_3 . На рис. 3

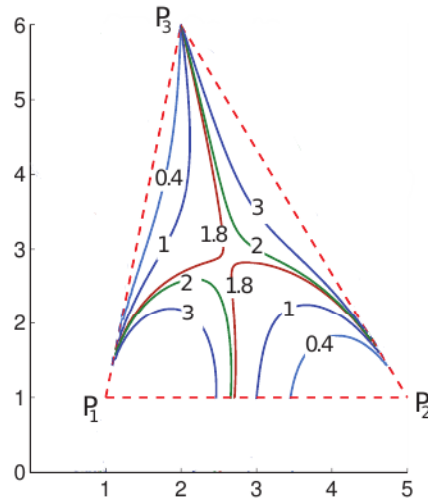


Рис. 3. Кулоновский потенциал: кривые стационарных точек

изображены несколько таких кривых (числа на них обозначают величины параметра m_2).

7. Устойчивость. В рамках разработанного подхода удастся получить и условия бифуркации множества стационарных точек, т. е. определить многообразие в пространстве параметров, разделяющие области с различными количествами стационарных точек.

Пример 4. Для конфигурации примера 3 определить количество стационарных точек в зависимости от значений параметров.

Решение. Исключение из системы (13) — посредством вычисления результата — переменной x приводит к алгебраическому уравнению, отвечающему за ординаты стационарных точек

$$\mathcal{Y}(y, m_2, m_3) = 0, \quad \deg_y \mathcal{Y} = 34.$$

Бифуркационные значения параметров m_2 и m_3 ищутся из условия изменения количества вещественных корней последнего уравнения. Для этой цели вычислим дискриминант полинома \mathcal{Y} по переменной y :

$$\mathcal{D}_y(\mathcal{Y}(y, m_2, m_3)) \equiv \Xi^2(m_2, m_3)\Psi(m_2, m_3); \quad \deg \Xi = 444, \deg \Psi = 48.$$

Обращение его в нуль возможно в результате двух принципиально различных сценариев. Условие $\Xi(m_2, m_3) = 0$ соответствует ситуации, когда две различные стационарные точки кулоновского потенциала имеют одинаковую ординату. Уравнение же

$$\Psi(m_2, m_3) = 0 \quad (14)$$

соответствует случаю, когда две различные стационарные точки сливаются в одну вырожденную (т. е. обе их координаты становятся одинаковыми). Таким образом, уравнение (14) неявным образом задает на плоскости (m_2, m_3) дискриминантную кривую, разделяющую области параметров, соответствующие различным количествам стационарных точек.

Выражение для полинома $\Psi(m_2, m_3)$ крайне громоздко, его разложение содержит 325 мономов. Удивительной кажется сама возможность получения этого выражения, но еще более удивителен тот факт, что удастся определить геометрию кривой (14). На плоскости параметров эта кривая состоит из четырех ветвей вида «наконечник копья». Точки, расположенные на самой кривой, соответствуют случаю наличия ровно трех положений равновесия у кулоновского потенциала.

Условие $\Psi(m_2, m_3) < 0$ задает точки плоскости параметров, лежащие внутри «наконечников». Это условие является необходимым для наличия четырех стационарных точек у кулоновского потенциала; оно, тем не менее, не является достаточным. Только одна из четырех полученных областей соответствует случаю наличия четырех стационарных точек — она расположена внутри ветви кривой, изображенной на рис. 4. Все остальные точки плоскости параметров соответствуют наличию ровно двух положений равновесия.

В каком случае хотя бы одно из положений равновесия является точкой минимума кулоновского потенциала, т. е. является асимптотически устойчивым? Оказывается, условие для этого совпадает с условием существования четырех стационарных точек. Именно, в этом случае три из этих точек имеют топологическую структуру седла, а одна — устойчивого узла. Таким образом, необходимое и достаточное условие устойчивости в пространстве параметров имеет вид системы алгебраических неравенств относительно этих параметров. При выполнении этих условий удастся даже указать возможное (допустимое) местоположение устойчивых положений равновесия на «физической» плоскости.

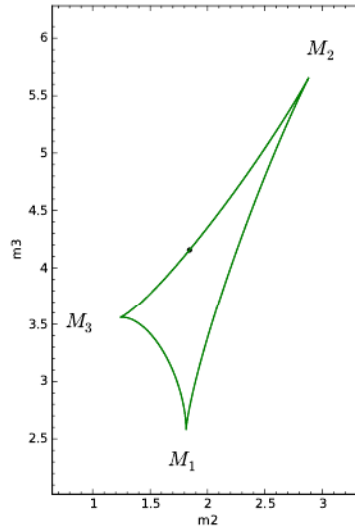


Рис. 4. Кулоновский потенциал: граница устойчивости на плоскости параметров

Теорема 7 [9]. Если существует устойчивое положение равновесия кулоновского потенциала (12), то оно находится внутри области \mathbb{R}^2 , задаваемой неравенством

$$\Phi(x, y) > \frac{2}{9}S^2. \quad (15)$$

Обратно, для любой точки P_* плоскости, координаты которой удовлетворяют неравенству (15), можно подобрать величины зарядов $\{m_j\}_{j=1}^3$ так, чтобы соответствующий потенциал имел устойчивое положение равновесия в указанной точке. Здесь S определяется (7), а

$$\Phi(x, y) = \frac{S_1(x, y)S_2(x, y)S_3(x, y)}{|PP_1|^2|PP_2|^2|PP_3|^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x^2 + y^2 & x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix}$$

при $\{S_j\}_{j=1}^3$, заданных формулами (8).

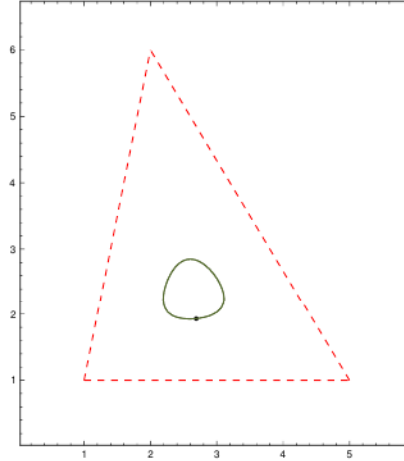


Рис. 5. Граница множества устойчивых стационарных точек

Пример 5. Для конфигурации примера 3 определить возможное расположение устойчивых положений равновесия.

Решение. Для этого примера $S = 20$ и

$$\Phi(x, y) = \frac{16(28 - 5x - 3y)(5x - y - 4)(y - 1)(-52 + 30x + 32y - 5x^2 - 5y^2)}{((x - 1)^2 + (y - 1)^2)((x - 5)^2 + (y - 1)^2)((x - 2)^2 + (y - 6)^2)}.$$

Область (15) лежит внутри овала алгебраической кривой порядка 6, изображенного на рис. 5.

К сожалению, результат последней теоремы не обобщается на случай пространства: теорема Ирншоу утверждает, что конфигурация точечных зарядов в \mathbb{R}^3 не может поддерживаться в устойчивом положении равновесия, находясь под воздействием исключительно только электростатического взаимодействия этих зарядов [10].

Литература

1. Martini H. Fermat–Torricelli problem / In Encyclopedia of Mathematics. Supplement III. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 149–151.

2. Drezner Z., Klamroth K., Schöbel A., Wesolowsky G. O. The Weber problem / In Facility Location: Application and Theory. Berlin: Springer, 2002. P. 1–36.
3. Вебер А. Теория размещения промышленности. М.-Л.: «Книга», 1929. 223 с.
4. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. 72 с.
5. Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. 1. New York: Dover, 1954. 553 p.
6. Gabrielov A., Novikov D., Shapiro B. Mystery of point charges // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 2007. Vol. 95. P. 443–472.
7. Uteshev A. Yu. Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem // Amer. Math. Monthly. 2014. Vol. 121, No 4. P. 318–331.
8. Brazil M., Graham R. I., Thomas D. A., Zachariasen M. On the history of the Euclidean Steiner tree problem // Arch. Hist. Exact Sci. 2014. Vol. 68. P. 327–354.
9. Uteshev A. Yu., Yashina M. V. Stationary points for the family of Fermat–Torricelli–Coulomb-like potential functions // Proc. 15th Workshop CASC, Berlin 2013 / Ed. by V. Gerdt, Berlin: Springer. Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8136. P. 412–426.
10. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Физматлит, 2003. 616 с.

Contents

1. Mathematical theory of control processes	9
<i>Gnilitskaya Y. A.</i> Control of parabolic system with distributed parameters on the graph in a Banach space with a time derivative	9
<i>Lakrisenko P. A.</i> Stability analysis of equilibrium position of nonlinear mechanical switched system	15
<i>Medvedeva I. V.</i> Stability analysis of linear differential equation with two incommensurate delays	21
<i>Ponomarev A. A.</i> Lyapunov functional for a controllable linear system with delay compensation	26
<i>Popkov A. S., Baranov O. V.</i> On optimal control of the rotational movement of the electric motor shaft	31
<i>Slupko K. A.</i> Approximate method for constructing Lyapunov — Krasovskii functionals for periodic differential-difference systems	37
<i>Tamasyan G. S., Udot M. V.</i> Generalized L'Huilier point	44
<i>Fominyh A. V.</i> Exact penalties in variation problem under constraints in the form of differential inequalities	50
<i>Kholinova A. A.</i> An estimate of the domain of asymptotic stability of the solutions of homogeneous difference-differential equations systems of retarded type	56
<i>Chumakov A. A., Tamasyan G. S.</i> Search the shortest distance between ellipsoids by the method of conjugate gipogradients	62
<i>Shuliak A. S.</i> Numerical solution of chebyshev approximation problem with constraints	65
<i>Shayakhmetova L. V.</i> Stabilization problem for a scalar equation with one state and two input delays	70
<i>Zgonnikov A. V., Lubashevsky I. A.</i> Optimal feedback approximation of human open-loop control in virtual stick balancing	76
2. Mathematical methods in mechanics and physics	82
<i>Abdulina K. A., Starkov V. N.</i> A qualitative research of the dynamics of the forest system based on felling and conveyance	82
<i>Abdushukurov D. V.</i> Parametric simulation of admissions on the example of complex dynamic systems	87
<i>Altsybeyev V. V., Skudnova I. S.</i> On the drift tube linear accelerator parameters calculation method	93
<i>Andreeva T. A.</i> Vibrational spectrum of cyanobiphenyls	99

<i>Bashkankova E. A., Grekov M. A.</i> The perturbation method in a problem on an elastic plane with an elliptical inclusion	105
<i>Vakaeva A. B., Grekov M. A.</i> Investigation of the stress-strain state of an elastic body with almost circular defects	111
<i>Gromov A. O.</i> Estimation of parameters for generalized-isothermal model of Galaxy	117
<i>Domanskaya T. O., Mal'kov V. M.</i> The nonlinear problem of concentrated force at the interface of two half-planes	123
<i>Dorofeeva A. A., Eremin A. S.</i> Solving retarded differential equations with state-dependent delays with functional continuous Runge — Kutta methods	129
<i>Ezhakova T. R.</i> Simulation in hydrodynamics based on the method of large particles	135
<i>Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I., Lebedev T. V.</i> Modeling of the glaciation process of a sea gas-pipeline	140
<i>Zhdanov K. E.</i> Optimal control of a spin-1/2 particle's evolution in magnetic field	146
<i>Kobyshev S. S.</i> The normalization coefficient for the approximate calculation of functional integral	152
<i>Kozynchenko V. A., Boyko A. A.</i> About a method of considering the interaction of charged particles in linear accelerators.	157
<i>Kostyrko S. A., Chepinoga S. V.</i> Stress state of the film coating with weakly curved free surface and interface.	163
<i>Kostyrko S. A., Shuvalov G. M.</i> Surface defect formation in multilayer film coating due to diffusion processes	169
<i>Kostyukova A. V., Pavlovskij V. A.</i> Dynamics of processes emptying tanks with compressed real gases.	175
<i>Krasnova A. A., Nikiforov K. A.</i> Model of field electron emitter surface structure	179
<i>Listrukova A. V., Vinogradova E. M.</i> Mathematical modeling of the emission system	185
<i>Marinaki M.</i> On design optimization problem for the magnetic gear	191
<i>Mikheev S. A., Krivovichev G. V.</i> Stability analysis of two-step finite-difference schemes for the system of kinetic equations.	196
<i>Nikiforov K. A., Sayfullin M. F., Trofimov V. V.</i> Study fringe field effect of a field emitter arrays	202
<i>Oskirko A. D., Peregudin S. I., Kholodova S. E., Shirobokov M. V.</i> MHD-waves with allowance effects of dynamic of magnetic field	208

<i>Sedova O. S., Khaknazarova L. A.</i> Stress analysis of a notched thick spherical member.....	212
<i>Sorokina V. A., Nikiforov K. A.</i> Ab initio study field emission current density of carbon nanotube.....	218
<i>Televnyy D. S., Vinogradova E. M.</i> Calculating of diode-type system based on the field emitter with dielectrical substrate.....	224
<i>Ustimenko S. S., Raspopova N. V.</i> The orbits in the three-parametric family of nonspherical generalized isochrone models of stellar systems.....	230
<i>Ustinov R. N., Vinogradova E. M.</i> The electron-optical system with a dielectric diaphragm of a finite thickness modeling.....	236
<i>Chernyaeva N. N.</i> Identifying chaotic appearance depending of the coefficients Hamiltonian for the Henon — Heiles model.....	242
3. Mathematical models of medical and biological systems.....	247
<i>Bazhanov P. V.</i> Modeling of PET projection data acquisition....	247
<i>Kulikova K. U.</i> Statistical analysis of medical data with missing values.....	253
<i>Pasechnaya G. A.</i> Determining of velocity field for radionuclide image processing problems.....	259
<i>Smirnov B. V., Kir'yanen A. I.</i> Mathematical models of infectious diseases spread considering latent period.....	265
<i>Smirnov K. V.</i> Method of optical flow in the problem of image processing.....	272
<i>Smirnov N. V.</i> Optimal control of a wastewater treatment bioprocess in aeration tank.....	277
4. Information and computer technologies.....	283
<i>Balyan S. G., Ralovets R. V., Abrahamyan S. A., Yuzhanin N. V.</i> Functionalities of virtual cluster management system FishDirector and check of its efficiency.....	283
<i>Bobyleva V. V.</i> Synthesis of the astatic MPC regulator for magnetic levitation system.....	289
<i>Gankevich I. G., Degtyarev A. B.</i> Load distribution approach for multiprocessor system.....	295
<i>Gippiyev M. B.</i> Lines recognition algorithms in shorthand documents.....	301
<i>Grishkin V. M., Iakushkin O. O.</i> Solving Round-Robin node selection problem in P2P networks.....	304

<i>Gushchanskiy D. E.</i> A method of text extraction from scientific articles in PDF format	308
<i>Kartashov D. N.</i> Decreasing program execution time in client-server systems	314
<i>Kiktenko A. A., Nikiforov K. A.</i> Studying informational sensitivity of computer algorithm solving traveling salesman problem (TSP)	319
<i>Klimov N. S.</i> Face recognition using artificial neural network.....	325
<i>Knyazkin Y. V.</i> Fault detection and isolation in marine ship control process.	330
<i>Komarov I. I., Yur'eva R. A., Drannik A. L., Maslennikov O. S., Kovalenko M. E., Egorov D. A.</i> Research on destructive impact of robots-saboters' influence on multi-agent system's productivity	336
<i>Korotkova N. Y.</i> Dynamic positioning of a mobile robot.....	341
<i>Lashkov A. A.</i> Solution of SLAE with sparse matrix by reducing to a bordered block-diagonal form.....	347
<i>Novopashin D. V.</i> Statistical data processing of the secondary radiolocation using orthogonal Chebyshev polynomials	352
<i>Ogiiko A. A.</i> Application of the Borda count to the webometrics ranking	357
<i>Orekhov M. Y.</i> C++ quick-operating string system	363
<i>Ponomareva E. S.</i> Communities detection algorithms in the graphs on the example of users network of twitter.com.....	369
<i>Pristavko M. V.</i> Robust stability analysis for feedback control system of the vehicle motion	375
<i>Ryabusha V. A.</i> Cellular automaton simulating the motion of the intensive charged particles beam	379
<i>Sevostyanov R. A.</i> Motion control of a mobile robot with transport delay	385
<i>Sevryukov S. Y., Solovyev P. A., Polonskiy V. A.</i> A survey and analysis of raster operation implementations in web-GIS.....	391
<i>Smirnov M. N., Smirnova M. A.</i> Modern information technologies in the process of training of technical specialists.....	397
<i>Xue Yuanyuan</i> Computer modeling system of the stability course using prognosis	401
<i>Tipikin Y. A.</i> Transactional Mechanism for RESTful Web Services.....	407
<i>Yuzhanin N. V., Zolotarev V. I.</i> The solution of supercomputer tasks tracking problem with use of service desk system	413

<i>Iakushkin O. O.</i> P2P network with extendable messaging patterns and horizontal scaling	419
<i>Yalov A. L.</i> Railway number recognition with perceptron	424
<i>Yuhei Akama, Keitaro Naruse.</i> A tool for visualizing multiple agents using the Octree algorithm	428
5. Control problems in social and economical systems ...	434
<i>Alferov G. V., Malafeev O. A., Maltseva A. S.</i> Dynamic model of inspections	434
<i>Asanova N. S.</i> Using the method of production functions in terms of tolerance	440
<i>Bolotova V. I.</i> Statistical analysis of television ratings	446
<i>Butenko M. S.</i> On a combined optimality principle in a multistage network game	452
<i>Vladimirov E. V., Smirnov N. V.</i> The scenario approach of development modeling of an enterprise that uses credit resources	458
<i>Dorofeev B. V., Zakroishchykov S. A.</i> Applications of actuarial calculations in life insurance	465
<i>Egorova N. V.</i> Forecasting and multipurpose optimization of the electric power industry of St. Petersburg	471
<i>Zakharov V. V., Krylatov A. Yu.</i> Wardrop user equilibrium on the transportation network of parallel inhomogeneous routes ...	476
<i>Lukina A. A.</i> The Russian Population Forecast Based on Variable Leslie Matrix	482
<i>Lyubich S. Y., Chugunov E. S.</i> Application of LP/NLP algorithm in multi-product inventory management problem	488
<i>Prudnikova T. M.</i> A model of priority serving system	494
<i>Svirkina N. M.</i> Pearson curves method in the analysis of unified state exam scores of school graduates who have entered the university	500
6. Applied mathematics and control processes theory at the AM & CP Faculty of Saint Petersburg State University	506
<i>Uteshev A. Yu.</i> From Fermat to Maxwell: on the stationary points of a family of potential functions	506
Contents	522
Author index	527

Именной указатель

Абдулина К. А.	82	Громов А. О.	117
Абдушукуров Д. В.	87	Гущанский Д. Е.	308
Абраамян С. А.	283	Дегтярев А. Б.	295
Алферов Г. В.	434	Доманская Т. О.	123
Алцыбеев В. В.	93	Дорофеев Б. В.	465
Андреева Т. А.	99	Дорофеева А. А.	129
Асанова Н. С.	440	Дранник А. Л.	336
Бажанов П. В.	247	Егоров Д. А.	336
Балян С. Г.	283	Егорова Н. В.	471
Баранов О. В.	31	Ежакова Т. Р.	135
Башканкова Е. А.	105	Еремин А. С.	129
Бобылева В. В.	289	Ермолаева Н. Н.	140
Бойко А. А.	157	Жданов К. Е.	146
Болотова В. И.	446	Закройщиков С. А.	465
Бутенко М. С.	452	Захаров В. В.	476
Вакаева А. Б.	111	Золотарев В. И.	413
Виноградова Е. М.	185, 224, 236	Карташов Д. Н.	314
Владимиров Е. В.	458	Киктенко А. А.	319
Ганкевич И. Г.	295	Кириянен А. И.	265
Гипшиев М. Б.	301	Климов Н. С.	325
Гнилицкая Ю. А.	9	Князькин Я. В.	330
Греков М. А.	105, 111	Кобышев С. С.	152
Гришкин В. М.	304	Коваленко М. Е.	336

Козычченко В. А.	157	Новопашин Д. В.	352
Комаров И. И.	336	Огийко А. А.	357
Короткова Н. Ю.	341	Орехов М. Ю.	363
Костырко С. А.	163, 169	Оскирко А. Д.	208
Костюкова А. В.	175	Павловский В. А.	175
Краснова А. А.	179	Пасечная Г. А.	259
Кривовичев Г. В.	196	Перегудин С. И.	208
Крылатов А. Ю.	476	Полонский В. А.	391
Куликова К. Ю.	253	Пономарев А. А.	26
Курбатова Г. И.	140	Пономарева Е. С.	369
Лакрисенко П. А.	15	Попков А. С.	31
Лашков А. А.	347	Приставко М. В.	375
Лебедев Т. В.	140	Прудникова Т. М.	494
Листрукова А. В.	185	Раловец Р. В.	283
Лукина А. А.	482	Распопова Н. В.	230
Любич С. Я.	488	Рябуша В. А.	379
Малафеев О. А.	434	Сайфуллин М. Ф.	202
Мальков В. М.	123	Свиркина Н. М.	500
Мальцева А. С.	434	Севостьянов Р. А.	385
Маринаки М.	191	Севрюков С. Ю.	391
Масленников О. С.	336	Седова О. С.	212
Медведева И. В.	21	Скуднова И. С.	93
Михеев С. А.	196	Слупко К. А.	37
Никифоров К. А.	179, 202, 218, 319	Смирнов Б. В.	265

Смирнов К. В.	272	Холинова А. А.	56
Смирнов М. Н.	397	Холодова С. Е.	208
Смирнов Н. В.	277	Чепинога С. В.	163
Смирнов Н. В.	458	Черняева Н. Н.	242
Смирнова М. А.	397	Чугунов Е. С.	488
Соловьев П. А.	391	Чумаков А. А.	62
Сорокина В. А.	218	Широбоков М. В.	208
Старков В. Н.	82	Шувалов Г. М.	169
Сюэ Юаньюань	401	Шуляк А. С.	65
Тамасян Г. Ш.	44, 62	Южанин Н. В.	283, 413
Телевный Д. С.	224	Юрьева Р. А.	336
Типикин Ю. А.	407	Якушкин О. О.	304, 419
Трофимов В. В.	202	Ялов А. Л.	424
Удот М. В.	44	Keitaro Naruse	428
Устименко С. С.	230	Lubashevsky I. A.	76
Устинов Р. Н.	236	Shayakhmetova L. V.	70
Утешев А. Ю.	506	Yuhei Akama	428
Фоминых А. В.	50	Zgonnikov A. V.	76
Хакназарова Л. А.	212		

Ежегодное научное издание

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Том 1 (17)

Труды 45-й международной научной конференции
аспирантов и студентов

Компьютерная верстка: *М. Н. Смирнов, М. А. Смирнова*

Редактор текста на английском языке: *М. А. Смирнова*

Подписано в печать 04.08.14

Тираж 180 экз.

198504, Россия, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35