МЕХАНИКА

УДК 517.928+531.53
MSC 70F25, 70K60, 70K70

Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника*

А. С. Кулешов, И. И. Улятовская

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119234, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: *Кулешов А. С., Улятовская И. И.* Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 356–362. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.217

В 1986 году Я. В. Татаринов заложил основы теории слабо неголономных систем. В этой теории рассматриваются механические системы с неголономными связями, содержащими малый параметр. Предполагается, во-первых, что при нулевом значении параметра связи такой системы интегрируемы, то есть получается семейство голономных систем, зависящее от нескольких произвольных констант интегрирования. Во-вторых, эти голономные системы должны быть вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами. При ненулевом значении малого параметра поведение таких систем можно рассматривать при помощи асимптотических методов, представляя его как трансгрессию: сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением былых констант. В данной работе описан эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника.

Ключевые слова: слабо неголономные системы, почти голономный маятник, трансгрессия.

1. Введение. В 1986 году Я. В. Татаринов в докладе [1] ввел понятие «слабо неголономные системы». Дальнейшее развитие теория слабо неголономных систем получила в работах [2–4].

Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется $n + m$ обобщенными координатами $x_1, \dots, x_{n+m}$. Пусть на движение данной механической

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 19-01-00140, 20-01-00637).

системы наложены m неголономных связей вида

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_{si}\left(x_1, \ldots, x_{n+m},\, \varepsilon\right) \dot{x}_i = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \quad \operatorname{rank}\left(a_{si}\right) = n, \tag{1}$$

где ε — малый параметр. Предположим, что при $\varepsilon = 0$ эти уравнения интегрируются:

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{n+m} k_{rs}\left(x_1, \ldots, x_{n+m}\right) a_{si}\left(x_1, \ldots, x_{n+m},\, 0\right) \dot{x}_i = \frac{d}{dt}\varphi_r\left(x_1, \ldots, x_{n+m}\right),$$
$$\det k_{rs} \neq 0, \quad r = 1, \ldots, m.$$

Тогда при $\varepsilon \neq 0$ связи будем называть «слабо неголономными».

Введем новые обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_{n+m}$ такие, что $q_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, и

$$q_{n+\mu} = \varphi_\mu\left(x_1, \ldots, x_{n+m}\right), \quad \mu = 1, \ldots, m.$$

Тогда в координатах $q_1, \ldots, q_{n+m}$ уравнения связей (1) имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{q}_{n+\mu} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m, \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0; \\ &\dot{q}_{n+\mu} = \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{n} c_{s\lambda}\left(q_1, \ldots, q_{n+m}\, \varepsilon\right) \dot{q}_\lambda, \quad \mu = 1, \ldots, m, \quad \text{при} \quad \varepsilon \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Будем считать, что задана также функция Лагранжа

$$L = L\left(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n+m},\, q_1, \ldots, q_{n+m},\, \varepsilon\right).$$

В этом случае при $\varepsilon = 0$ получаем семейство гамильтоновых систем с параметрами $R_\mu \equiv q_{n+\mu}$, возникающими после интегрирования связей (2). Функция Гамильтона

$$H_0\left(p_1, \ldots, p_n,\, q_1, \ldots, q_n,\, R_1, \ldots, R_m\right)$$

стандартным образом получается из функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_0\left(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n,\, q_1, \ldots, q_n,\, R_1, \ldots, R_m\right) &= \\ &= L\left(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n,\, 0, \ldots, 0,\, q_1, \ldots, q_n,\, R_1, \ldots . R_m,\, 0\right). \end{aligned}$$

При $\varepsilon \neq 0$ величины $R_1, \ldots, R_m$ могут начать эволюционировать. Этот эффект назван в работах Я. В. Татаринова [2–4] трансгрессией. В данной работе на основании результатов Я. В. Татаринова описан эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника.

2. Постановка задачи. Основной результат. Пусть в вертикальной плоскости Oxy в однородном поле силы тяжести движется невесомая пластинка, несущая два T-образно расположенных лезвия, из которых поперечное медленно смещается вдоль себя; на линии продольного лезвия к пластинке прикреплена точечная масса M. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$, а также подвижную систему $M\xi\eta\zeta$, жестко связанную с пластинкой. Пусть начало подвижной системы находится в точке M (где расположена точечная масса), направление оси $M\xi$ совпадает с направлением поперечного лезвия A, а направление оси $M\eta$ совпадает с направлением

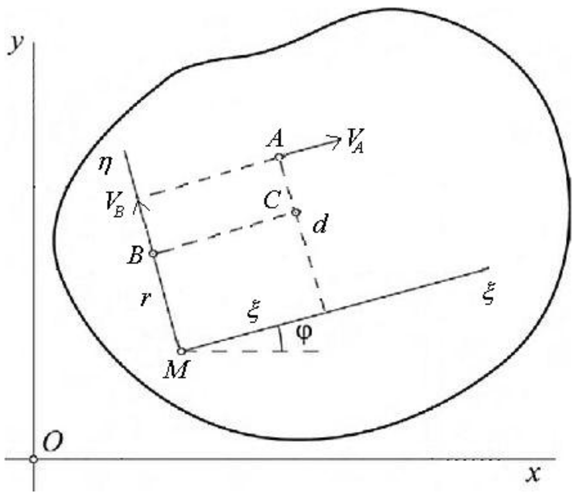

Рис. Почти голономный маятник.

продольного лезвия B. Ось $M\zeta$ сонаправлена с осью Oz. Тогда радиусы — векторы точек A и B в системе координат $M\xi\eta\zeta$ имеют вид

$$\mathbf{r}_A = \xi \mathbf{e}_\xi + d\mathbf{e}_\eta, \quad d = \text{const}, \quad \mathbf{r}_B = r\mathbf{e}_\eta, \quad r = \text{const}.$$

Будем считать, что переменная ξ меняется по закону $\xi = \xi_0 + \varepsilon v t$, где ε — малый параметр. Обозначим через C мгновенный центр скоростей пластинки. В системе $M\xi\eta\zeta$ радиус-вектор точки C имеет вид

$$\mathbf{r}_C = \xi \mathbf{e}_\xi + r\mathbf{e}_\eta = (\xi_0 + \varepsilon v t)\, \mathbf{e}_\xi + r\mathbf{e}_\eta.$$

В качестве переменных, определяющих положение данной системы, выберем координаты x и y точки C относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ и угол φ поворота пластинки (угол между осями Ox и $M\xi$). Тогда уравнения неголономных связей, наложенных на систему, будут иметь вид

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos\varphi = \varepsilon v \cos\varphi, \quad \dot{y} = \dot{\xi} \sin\varphi = \varepsilon v \sin\varphi.$$

Эти уравнения можно переписать следующим образом:

$$x' = \frac{dx}{d\xi} = \cos\varphi, \quad y' = \frac{dy}{d\xi} = \sin\varphi \tag{3}$$

(здесь переменная ξ играет роль медленного времени). Поскольку пластинка движется в однородном поле силы тяжести, то на точку M действует сила $\mathbf{F} = -Mg\mathbf{e}_y$.

Динамические уравнения движения данной системы запишем в форме уравнений Аппеля. Для этого найдем сначала энергию ускорений данной системы. Она определяется формулой

$$S = \frac{M}{2}\mathbf{a}_M^2,$$

где $\mathbf{a}_M$ — ускорение точки M. В явном виде данное выражение записывается следующим образом:

$$S = \frac{M}{2}\left(\left(\xi^2 + r^2\right)\left(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4\right) + \dot{\xi}^2\dot{\varphi}^2 + 2\xi\dot{\xi}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - 2r\dot{\xi}\dot{\varphi}^3\right).$$

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$V = Mg\left(y - \xi\sin\varphi - r\cos\varphi\right).$$

Уравнение, описывающее изменение угла φ, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{\varphi}} = -\frac{\partial V}{\partial\varphi}$$

или, в явном виде,

$$\left(\xi^2 + r^2\right)\ddot{\varphi} + \dot{\xi}\xi\dot{\varphi} + gr\sin\varphi - g\xi\cos\varphi = 0. \qquad (4)$$

Сделаем теперь в уравнении (4) замену переменных по формуле

$$\varphi = \psi + \arctan\frac{\xi}{r}$$

и отбросим в полученном уравнении члены порядка ε^2 и выше. В результате получим

$$\left(\xi^2 + r^2\right)\ddot{\psi} + \dot{\xi}\xi\dot{\psi} + g\sqrt{\xi^2 + r^2}\sin\psi = 0,$$

то есть

$$\ddot{\psi} + \frac{\varepsilon v\xi}{\xi^2 + r^2}\dot{\psi} + \frac{g}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}\sin\psi = 0. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что невозмущенная система (соответствующая значению параметра $\varepsilon = 0$) может интерпретироваться как математический маятник длины

$$l = \sqrt{\xi_0^2 + r^2}.$$

При этом медленными переменными в задаче являются ξ, x, y, а также полная механическая энергия h невозмущенной системы, которая определяется формулой

$$h = 1 - \cos\psi + \frac{\dot{\psi}^2\sqrt{\xi^2 + r^2}}{2g} \qquad (6)$$

и для которой в соответствии с (5) имеет место уравнение

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\xi\dot{\xi}}{\left(\xi^2 + r^2\right)}\left(h - 1 + \cos\psi\right)$$

или, аналогично (3),

$$h' = \frac{dh}{d\xi} = -\frac{\xi}{\left(\xi^2 + r^2\right)}\left(h - 1 + \cos\psi\right). \qquad (7)$$

Для качественного описания движения данной системы осредним уравнения (3), (7) для x', y' и h' по периоду невозмущенного колебания $\psi(t)$, $\xi = \mathrm{const}$ с энергией (6). При этой процедуре

$$\langle\sin\psi\rangle = 0, \quad \langle\cos\psi\rangle = f(h) = \frac{2E\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\right)}{K\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\right)} - 1,$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Следовательно, осредненные уравнения (3), (7) имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{d\xi} = \frac{r}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} f(h), \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}} f(h), \\ &\frac{dh}{d\xi} = -\frac{\xi}{(\xi^2 + r^2)} (h + f(h) - 1). \end{aligned} \tag{8}$$

Функция $E(k)/K(k)$ с ростом $k \in [0, 1)$ монотонно убывает от 1 до 0. При этом модуль ее производной неограниченно растет, но не быстрее, чем $k/\sqrt{1-k^2}$.

Следовательно, при росте $h \in [0, 2)$ функция $f(h)$ изменяется от $+1$ до -1, но ее производная неограничена и оценивается неравенством

$$|f'(h)| \leq \frac{1}{2\sqrt{4-2h}}.$$

Равномерной близости решений осредненной системы к решениям точной системы нет. Однако при значениях h, близких к нулю, решения точной системы будут близки к решениям осредненной системы. Раскладывая правые части уравнений (8) в ряд по h, из первых двух уравнений получаем

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{r}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}. \tag{9}$$

Интегрирование системы (9) дает следующие выражения для $x(\xi)$ и $y(\xi)$:

$$x(\xi) = r \ln\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + r^2} + \xi}{r}\right), \quad y(\xi) = \sqrt{\xi^2 + r^2}.$$

Отсюда находим зависимость между x и y:

$$y = r \cosh \frac{x}{r}. \tag{10}$$

Уравнение (10) представляет собой уравнение цепной линии.

Таким образом, движение почти голономного маятника можно представить себе как колебания около медленно поворачивающего направления закрепленного лезвия; мгновенный центр скоростей смещается по цепной линии (трансгрессия), а энергия качания убывает.

Литература

1. *Татаринов Я. В.* Слабо неголономные системы // Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 года. Аннотации докладов. Ташкент: ФАН, 1986. С. 592.

2. *Татаринов Я. В.* Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торам // Механика твердого тела. 1988. №1. С. 538–545.

3. *Татаринов Я. В.* Неголономные системы в сопоставлении с гамильтоновыми. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Москва, 1990. 205 с.

4. *Татаринов Я. В.* Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: нелинейные эффекты вблизи многообразия равновесий // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 604–614.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2019 г.;
после доработки 11 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kuleshov@mech.math.msu.su
Улятовская Ирина Игоревна — студент; ira4599@mail.ru

The transgression effect in the problem of motion of an almost holonomic pendulum*

A. S. Kuleshov, I. I. Ulyatovskaya

Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119234, Russian Federation

For citation: Kuleshov A. S., Ulyatovskaya I. I. The transgression effect in the problem of motion of an almost holonomic pendulum. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 356–362.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.217 (In Russian)

In 1986, Ya. V. Tatarinov presented the basis of the theory of weakly nonholonomic systems. Mechanical systems with nonholonomic constraints depending on a small parameter are considered. It is assumed that when the value of this parameter is zero, the constraints of such a system become integrable, i. e. in this case we have a family of holonomic systems depending on several arbitrary integration constants. We will assume that these holonomic systems are integrable hamiltonian systems. When the small parameter is not zero, the methods of perturbation theory can be used to represent, to a first approximation, the motion of the system with nonzero parameter values, as a combination of the motion of a slightly modified holonomic system with slowly varying previous integration constants (transgression effect). In this paper, we describe the transgression effect in the problem of motion of an almost holonomic pendulum.

Keywords: weakly nonholonomic systems, almost holonomic pendulum, transgression.

References

1. Tatarinov Ya. V., “Weakly nonholonomic systems”, *Proceedings of the Sixth All-Union Conference on Theoretical and Applied Mechanics. Tashkent, September 24–30, 1986* (FAN Publ., Tashkent, 1986). (In Russian)

2. Tatarinov Ya. V., “Weakly nonholonomic representation of the problem of the rolling of a solid and the possibility of averaging over phase tori”, *Mechanics of Solids* **23**(1), 25–33 (1988).

3. Tatarinov Ya. V., *Nonholonomic Systems in Comparison with Hamiltonian Ones* (Doctoral Thesis, Moscow State University, 1990, Moscow). (In Russian)

4. Tatarinov Ya. V., “Consequences of nonintegrable perturbations of integrable constraints: nonlinear effect of motion near the equilibrium”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **56**, 507–517 (1992).

Received: October 22, 2019
Revised: December 11, 2019
Accepted: December 12, 2019

Authors’ information:

Alexander S. Kuleshov — kuleshov@mech.math.msu.su
Irina I. Ulyatovskaya — ira4599@mail.ru

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grants 19-01-00140, 20-01-00637).