

Монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации на неравномерных сетках для двумерного квазилинейного параболического уравнения типа конвекции-диффузии

Ле М. Хиеу¹, Данг Н. Х. Тхань², В. Б. Сурия Прасат^{3,4,5,6}

¹ Экономический университет, Университет Дананга, Дананг, Вьетнам

² Кафедра информационной технологии, Факультет информационной технологии в бизнесе, Университет экономики Хошимина, Хошимин, Вьетнам

³ Медицинский центр детской больницы Цинциннати, Огайо, 45229 США

⁴ Департамент педиатрии, Университет Цинциннати, Огайо, США

⁵ Департамент биомедицинской информатики, Медицинский колледж, Университет Цинциннати, Огайо, 45267 США

⁶ Факультет электротехники и компьютерных наук, Университет Цинциннати, Огайо, 45221 США

Для цитирования: Хиеу Ле М., Тхань Д. Н. Х., Прасат В. Б. С. Монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации на неравномерных сетках для двумерного квазилинейного параболического уравнения типа конвекции-диффузии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 343–355. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.216>

Настоящая работа посвящена построению монотонных разностных схем второго порядка локальной аппроксимации на неравномерных сетках по пространству для двумерного квазилинейного параболического уравнения конвекции-диффузии. С помощью разностного принципа максимума устанавливаются двусторонние оценки разностного решения и доказывается важная априорная оценка в равномерной норме C . Интересно отметить, что максимальное и минимальное значения разностного решения не зависят от коэффициентов диффузии и конвекции.

Ключевые слова: неравномерная сетка, принцип максимума, принцип регуляризации, монотонная разностная схема, уравнение конвекции-диффузии.

1. Введение. В теории разностных схем [1, 2] принцип максимума применяется для исследования устойчивости и сходимости разностного решения в равномерной норме. Вычислительные методы, удовлетворяющие принципу максимума, принято называть монотонными [1, 2]. Монотонные схемы играют важную роль в вычислительной практике. Они позволяют получать численное решение без осцилляций даже в случае негладких решений [3].

При построении монотонных разностных схем желательно сохранить второй порядок аппроксимации по пространственной переменной. Такие схемы построены для параболических и гиперболических уравнений с наличием младших производных. Например, в [1, 2] приводится неконсервативная схема второго порядка аппроксимации для линейных параболических уравнений общего вида на равномерных сетках. В случае неравномерных сеток для стационарных и нестационарных задач с переменными коэффициентами без младших производных в [4] получена схема, для которой выполняется принцип максимума без ограничений на соотношения коэф-

фициентов и шагов пространственной сетки (безусловная монотонность для стационарных уравнений). В работе [5] построены экономичные безусловно монотонные схемы второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке для нестационарных многомерных задач конвекции-диффузии.

Настоящая работа посвящена построению монотонных разностных схем второго порядка локальной аппроксимации на неравномерных сетках по пространству для двумерного квазилинейного параболического уравнения конвекции-диффузии. Построение таких схем основано на применении специального дифференциального тождества и принципа регуляризации [1, 2, 5]. Устанавливаются двусторонние оценки разностного решения [6] и доказывается важная априорная оценка в равномерной норме C .

2. Вспомогательные результаты. Пусть Ω_h — конечное множество узлов (сетка) в некоторой ограниченной области n -мерного евклидова пространства, $x \in \Omega_h$ — точка сетки Ω_h . Рассмотрим уравнение

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \Omega_h, \quad (1)$$

называемое канонической формой записи разностной схемы [1]. Здесь $\mathcal{M}'(x) = \mathcal{M}(x) \setminus x$, $\mathcal{M}(x)$ — шаблон схемы. Так как любая разностная схема может быть записана в канонической форме (1), то под монотонностью понимают выполнение следующих условий на коэффициенты уравнений:

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{M}'(x), \quad (2)$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x, \xi) > 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{M}'(x). \quad (3)$$

Для получения двусторонней оценки решения разностной схемы более удобной является следующая:

Лемма [7]. Пусть выполнены условия положительности коэффициентов (2), (3). Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы (1) принадлежит интервалу изменения входных данных:

$$\min_{x \in \Omega_h} \frac{F(x)}{D(x)} \leq y(x) \leq \max_{x \in \Omega_h} \frac{F(x)}{D(x)}, \quad x \in \Omega_h. \quad (4)$$

Следствие. Пусть выполнены условия леммы. Тогда для решения разностной задачи (1) имеет место оценка в сеточном аналоге нормы C :

$$\|y\|_C = \max_{x \in \Omega_h} |y(x)| \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

3. Постановка задачи и разностная схема. Пусть в области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0 \leq t \leq T]$, где $\bar{\Omega} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ — прямоугольник с границей Γ . Требуется найти функцию $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющую начально-краевой задаче для двумерного квазилинейного параболического уравнения типа конвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 v_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q(x)u + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (5)$$

с граничными условиями Дирихле

$$\begin{aligned} u(0, x_2, t) = \mu_1(x_2, t), \quad u(l_1, x_2, t) = \mu_2(x_2, t), \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x_1, 0, t) = \mu_3(x_1, t), \quad u(x_1, l_2, t) = \mu_4(x_1, t), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (6)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (7)$$

Предполагаем, что $q(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, и существуют такие значения k_{\min} и k_{\max} , что выполнено условие параболичности уравнения (5) на решении [8]

$$0 < k_{\min} \leq k_\alpha(u) \leq k_{\max}, \quad \forall u \in \bar{D}_u, \quad k_{\min}, k_{\max} = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\bar{D}_u = \{u(x, t) : m_1 \leq u(x, t) \leq m_2, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T\},$$

где m_1 и m_2 — константы, определяемые из условий

$$m_1 = \min \left\{ 0, \mu_{\min}(x, t), \min_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x) \right\} + T \min \left\{ 0, \inf_{(x, t) \in Q_T} f(x, t) \right\},$$

$$m_2 = \max \left\{ 0, \mu_{\max}(x, t), \max_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x) \right\} + T \max \left\{ 0, \sup_{(x, t) \in Q_T} f(x, t) \right\},$$

$$\mu_{\min}(x, t) = \min_{(x, t) \in \bar{Q}_T} \{\mu_1(x_2, t), \mu_2(x_2, t), \mu_3(x_1, t), \mu_4(x_1, t)\},$$

$$\mu_{\max}(x, t) = \max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} \{\mu_1(x_2, t), \mu_2(x_2, t), \mu_3(x_1, t), \mu_4(x_1, t)\}.$$

Далее предполагаем, что решение задачи (5)–(7) существует и единственно, а все входящие в уравнение (5) коэффициенты и искомая функция обладают непрерывными ограниченными производными необходимого по ходу изложения порядка.

В области $\bar{\Omega}$ введем произвольную неравномерную сетку

$$\hat{\omega}_h = \{x_{i_1 i_2} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}), \quad x_\alpha^{i_\alpha} = x_\alpha^{i_\alpha - 1} + h_\alpha^{i_\alpha}, \\ i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \quad x_\alpha^0 = 0, \quad x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\},$$

для которой $\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} h_\alpha^{i_\alpha} = l_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Через $\hat{\omega}_h$ обозначим множество внутренних узлов сетки $\hat{\omega}_h$, а через γ_h — множество граничных узлов. Кроме того, будем рассматривать неравномерную сетку по временной переменной

$$\hat{\omega}_\tau = \{t_0 = 0, t_n = t_{n-1} + \tau_n, n = 1, 2, \dots, N_0\},$$

т. е.

$$\hat{\omega}_\tau = \hat{\omega}_\tau \cup \{T\}, \quad \sum_{n=1}^{N_0} \tau_n = T.$$

Для простоты будем использовать безындексные обозначения для независимых переменных

$$x = x_{i_1 i_2}, \quad x_\alpha = x_\alpha^{i_\alpha}, \quad x_{\alpha \pm} = x_\alpha^{i_\alpha \pm 1}, \quad h_\alpha = h_\alpha^{i_\alpha}, \quad h_{\alpha+} = h_\alpha^{i_\alpha+1}, \quad t = t_n, \quad \hat{t} = t_{n+1},$$

и для сеточных функций

$$g = g_{i_1 i_2} = g(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, t_n) = g(x, t), \quad g^{\pm 1_1} = g_{i_1 \pm 1, i_2},$$

$$g^{\pm 1_2} = g_{i_1, i_2 \pm 1}, \quad \hat{g} = g^{n+1} = g(x, t_{n+1}).$$

При построении монотонных схем второго порядка точности на трехточечном шаблоне для задачи (5)–(7) на неравномерной сетке $\omega = \hat{\omega}_h \times \hat{\omega}_\tau$ будем ориентироваться на соотношение [9]

$$u_{(2)\bar{x}_1 \hat{x}_1} - \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial x_1^2} = O(h_1^2 + h_2^2), \quad u_{(1)\bar{x}_2 \hat{x}_2} - \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial x_2^2} = O(h_1^2 + h_2^2). \quad (8)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} (y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}), \quad y_{x_\alpha} = \frac{1}{h_{\alpha+}} (y^{(+1_\alpha)} - y), \quad y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} (y - y^{(-1_\alpha)}),$$

$$y_{(1)} = y(x^2) = y + \delta_1^+ y_{x_1} + \delta_1^- y_{\bar{x}_1}, \quad y_{(2)} = y(x^1) = y + \delta_2^+ y_{x_2} + \delta_2^- y_{\bar{x}_2},$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad \bar{x}_\alpha = x_\alpha + \tilde{h}_\alpha, \quad \tilde{h}_\alpha = (h_{\alpha+} - h_\alpha)/3, \quad h_\alpha = 0.5(h_\alpha + h_{\alpha+}),$$

$$x^1 = (x_1, \bar{x}_2), \quad x^2 = (\bar{x}_1, x_2), \quad \bar{g} = g(\bar{x}), \quad \delta_\alpha^\pm = 0.5(\tilde{h}_\alpha \pm |\tilde{h}_\alpha|), \quad \alpha = 1, 2.$$

Отметим, что значения искомой сеточной функции y в неузловых точках x^1, x^2 усредняются по формулам второго порядка аппроксимации с учетом направленных разностей. Выражения (8) означают, что относительно нерасчетной точки \bar{x} (в случае равномерной сетки $\bar{x} \equiv x$) $u_{(3-\alpha)\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ аппроксимирует вторую частную производную по компоненте $x_\alpha, \alpha = 1, 2$, со вторым порядком. Для построения монотонных разностных схем второго порядка аппроксимации для уравнения (5) на неравномерной сетке $\omega = \hat{\omega}_h \times \hat{\omega}_\tau$ воспользуемся тождеством $(ku')' = ku'' + k'u'$ и принципом регуляризации. Уравнение (5) может быть записано в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial k_\alpha(u)}{\partial x_\alpha} + v_\alpha(u) \right) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q(x)u + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T]. \quad (9)$$

Тогда задачу (9), (6)–(7) аппроксимируем разностной схемой вида

$$y_{(\delta)t} = \sum_{\alpha=1}^2 \bar{\kappa}_\alpha \bar{k}_\alpha \hat{y}_{(3-\alpha)\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 (\bar{r}_\alpha^+ \hat{y}_{(3-\alpha)x_\alpha} + \bar{r}_\alpha^- \hat{y}_{(3-\alpha)\bar{x}_\alpha}) - \bar{q} \hat{y}_{(\delta_*)} + \hat{f}, \quad x \in \hat{\omega}_h,$$

$$y_{0i_2}^{n+1} = \mu_1(x_2^{i_2}, t_{n+1}), \quad y_{N_1 i_2}^{n+1} = \mu_2(x_2^{i_2}, t_{n+1}), \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1},$$

$$y_{i_1 0}^{n+1} = \mu_3(x_1^{i_1}, t_{n+1}), \quad y_{i_1 N_2}^{n+1} = \mu_4(x_1^{i_1}, t_{n+1}), \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1},$$

$$y_{i_1 i_2}^0 = u_0(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}), \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (10)$$

где

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau_+}, \quad \hat{y} = y(x_{i_1 i_2}, t_{n+1}), \quad \tau_+ = \tau_{n+1},$$

$$\begin{aligned}
y_{(\delta)} &= y + \sum_{\alpha=1}^2 (\delta_{\alpha}^{+} y_{x_{\alpha}} + \delta_{\alpha}^{-} y_{\bar{x}_{\alpha}}), \quad y_{(\delta_{*})} = y + \sum_{\alpha=1}^2 (\delta_{\alpha}^{-} y_{x_{\alpha}} + \delta_{\alpha}^{+} y_{\bar{x}_{\alpha}}), \\
\bar{r}_{\alpha}^{+} &= 0.5 (\bar{r}_{\alpha} + |\bar{r}_{\alpha}|) \geq 0, \quad \bar{r}_{\alpha}^{-} = 0.5 (\bar{r}_{\alpha} - |\bar{r}_{\alpha}|) \leq 0, \\
\bar{k}_{\alpha} &= k_{\alpha} (y_{(\delta)}), \quad \bar{r}_{\alpha} = (k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}))_{\bar{x}_{\alpha}} + v_{\alpha} (y_{(\delta)}), \\
(k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}))_{\bar{x}_{\alpha}} &= \frac{(k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}))_{x_{\alpha}} + (k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}))_{\bar{x}_{\alpha}} + (k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}))_{\dot{x}_{\alpha}}}{3}, \\
(k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}))_{x_{\alpha}} &= \frac{k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}^{+1}) - k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)})}{h_{+}}, \\
(k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}))_{\bar{x}_{\alpha}} &= \frac{k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}) - k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}^{-1})}{h}, \\
(k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}))_{\dot{x}_{\alpha}} &= \frac{k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}^{+1}) - k_{\alpha} (y_{(3-\alpha)}^{-1})}{h + h_{+}}, \\
\bar{k}_{\alpha} &= \frac{1}{1 + \bar{R}_{\alpha}}, \quad \bar{R}_{\alpha} = \bar{b}_{\alpha}^{+} \frac{h_{\alpha+} + 2h_{\alpha}}{6} - \bar{b}_{\alpha}^{-} \frac{2h_{\alpha+} + h_{\alpha}}{6}, \quad \bar{b}_{\alpha}^{\pm} = \frac{\bar{r}_{\alpha}^{\pm}}{\bar{k}_{\alpha}}.
\end{aligned}$$

4. Погрешность аппроксимации. Невязку схемы (10)

$$\Psi(\bar{x}, \hat{t}) = -u_{(\delta)t} + \sum_{\alpha=1}^2 \bar{k}_{\alpha} \bar{k}_{\alpha} \hat{u}_{(3-\alpha)\bar{x}_{\alpha}\hat{x}_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^2 (\bar{r}_{\alpha}^{+} \hat{u}_{(3-\alpha)x_{\alpha}} + \bar{r}_{\alpha}^{-} \hat{u}_{(3-\alpha)\bar{x}_{\alpha}}) - \bar{q} \hat{u}_{(\delta_{*})} + \hat{f}$$

запишем в виде

$$\begin{aligned}
\Psi &= \sum_{\alpha=1}^2 \psi_{\alpha}^D + \sum_{\alpha=1}^2 \psi_{\alpha}^C + \sum_{\alpha=1}^2 (\bar{k}_{\alpha} - 1) \bar{k}_{\alpha} \frac{\partial^2 u(\bar{x}, \hat{t})}{\partial x_{\alpha}^2} + \\
&+ \sum_{\alpha=1}^2 (\bar{k}_{\alpha} - k_{\alpha}(u(\bar{x}, t))) \frac{\partial^2 u(\bar{x}, \hat{t})}{\partial x_{\alpha}^2} - \bar{q} (\hat{u}_{(\delta_{*})} - \hat{u}(\bar{x})) - \left(u_{(\delta)t} - \frac{\partial u(\bar{x}, \hat{t})}{\partial t} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\psi_{\alpha}^D = \bar{k}_{\alpha} \left(\hat{u}_{(3-\alpha)\bar{x}_{\alpha}\hat{x}_{\alpha}} - \frac{\partial^2 u(\bar{x}, \hat{t})}{\partial x_{\alpha}^2} \right), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha}^C &= \bar{r}_{\alpha}^{+} (\hat{u}_{(3-\alpha)} - \hat{u}(x^{\alpha}))_{x_{\alpha}} + \bar{r}_{\alpha}^{-} (\hat{u}_{(3-\alpha)} - \hat{u}(x^{\alpha}))_{\bar{x}_{\alpha}} + \\
&+ \bar{r}_{\alpha}^{+} (\hat{u}(x^{\alpha}))_{x_{\alpha}} + \bar{r}_{\alpha}^{-} (\hat{u}(x^{\alpha}))_{\bar{x}_{\alpha}} - \left(\frac{\partial k_{\alpha}(u(\bar{x}, t))}{\partial x_{\alpha}} + v_{\alpha}(u(\bar{x}, t)) \right) \frac{\partial u(\bar{x}, \hat{t})}{\partial x_{\alpha}}.
\end{aligned}$$

На основании отношений

$$u_t(\bar{x}, t) - u_{(\delta)t} = O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2), \quad \frac{\partial u(\bar{x}, \hat{t})}{\partial t} - u_t(\bar{x}, t) = O(\tau_{+})$$

получаем

$$\frac{\partial u(\bar{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}} - u_{(\delta)t} = O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2 + \tau_+). \quad (11)$$

Из (8) следует, что

$$\psi_\alpha^D = O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2), \quad \alpha = 1, 2. \quad (12)$$

Нетрудно показать, что (см. [9])

$$\bar{k}_\alpha = k_\alpha(u(\bar{x}, t)) + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2), \quad (13)$$

$$\bar{r}_\alpha = \frac{\partial k_\alpha(u(\bar{x}, t))}{\partial x_\alpha} + v_\alpha(u(\bar{x}, t)) + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2). \quad (14)$$

Теперь покажем, что

$$\psi_\alpha^C = \bar{R}_\alpha \bar{k}_\alpha \frac{\partial^2 u(\bar{x}, \hat{t})}{\partial x_\alpha^2} + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2). \quad (15)$$

Для этого воспользуемся следующими разложениями:

$$u_{x_{3-\alpha}} = \frac{\partial u}{\partial x_{3-\alpha}} + \frac{h_{3-\alpha+}}{2} \frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial x_{3-\alpha}^2}, \quad u_{\bar{x}_{3-\alpha}} = \frac{\partial u}{\partial x_{3-\alpha}} - \frac{h_{3-\alpha}}{2} \frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial x_{3-\alpha}^2},$$

где черта сверху обозначает, что берутся значения аргументов в соответствующих промежуточных точках (в данном случае — на интервалах $(x_{3-\alpha}, x_{3-\alpha} + h_{3-\alpha+})$ и $(x_{3-\alpha} - h_{3-\alpha}, x_{3-\alpha})$). В силу этого получаем

$$u_{(3-\alpha)} = u + \tilde{h}_{3-\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{3-\alpha}} + \eta_0(x),$$

$$\eta_0(x) = \frac{\delta_{3-\alpha}^+ h_{3-\alpha+}}{2} \frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial x_{3-\alpha}^2} - \frac{\delta_{3-\alpha}^- h_{3-\alpha}}{2} \frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial x_{3-\alpha}^2} = O(\hbar_{3-\alpha}^2).$$

Учитывая, что

$$u(x^\alpha) = u + \tilde{h}_{3-\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{3-\alpha}} + \eta_1(x), \quad \eta_1(x) = \frac{\tilde{h}_{3-\alpha}^2}{2} \frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial x_{3-\alpha}^2},$$

для $\xi_1 = (u_{(3-\alpha)} - u(x^\alpha))_{x_\alpha}$, $\xi_2 = (u_{(3-\alpha)} - u(x^\alpha))_{\bar{x}_\alpha}$ получаем представление

$$\xi_1 = \eta_{2x_\alpha}, \quad \xi_2 = \eta_{2\bar{x}_\alpha}, \quad \eta_2(x) = \eta_0(x) - \eta_1(x) = O(\hbar_{3-\alpha}^2).$$

Так как

$$|\eta_{2x_\alpha}| = \left| \frac{1}{h_{\alpha+}} \int_{x_\alpha}^{x_\alpha+h_{\alpha+}} \frac{\partial \eta_2(\zeta, x_{3-\alpha})}{\partial \zeta} d\zeta \right| \leq h_{3-\alpha}^2 \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha \partial x_{3-\alpha}^2} \right\|_{C(\bar{\Omega})},$$

$$|\eta_{2\bar{x}_\alpha}| = \left| \frac{1}{h_{\alpha}} \int_{x_\alpha-h_{\alpha}}^{x_\alpha} \frac{\partial \eta_2(\zeta, x_{3-\alpha})}{\partial \zeta} d\zeta \right| \leq h_{3-\alpha}^2 \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha \partial x_{3-\alpha}^2} \right\|_{C(\bar{\Omega})},$$

то

$$\xi_1 = O(h_{3-\alpha}^2), \quad \xi_2 = O(h_{3-\alpha}^2). \quad (16)$$

Далее, используя разложение функции в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} (u(x^\alpha))_{x_\alpha} &= \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_\alpha} + \frac{h_{\alpha+} + 2h_\alpha}{6} \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_\alpha^2} + O(h_\alpha^2), \\ (u(x^\alpha))_{\bar{x}_\alpha} &= \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_\alpha} - \frac{2h_{\alpha+} + h_\alpha}{6} \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_\alpha^2} + O(h_\alpha^2), \end{aligned}$$

закключаем, что

$$\bar{r}_\alpha^+(u(x^\alpha))_{x_\alpha} + \bar{r}_\alpha^-(u(x^\alpha))_{\bar{x}_\alpha} = \bar{r}_\alpha \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_\alpha} + \bar{R}_\alpha \bar{k}_\alpha \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_\alpha^2} + O(h_\alpha^2). \quad (17)$$

Из (14), (16), (17) получаем (15). В силу (11)–(13), (15) имеем

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\bar{R}_\alpha^2}{1 + \bar{R}_\alpha} \bar{k}_\alpha \frac{\partial^2 u(\bar{x})}{\partial x_\alpha^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Пусть $|h| = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$, $h_\alpha = \max_{i_\alpha} h_\alpha^{i_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Погрешность аппроксимации разностной схемы (10) является величиной второго порядка малости относительно $|h|$.*

5. Монотонность, двусторонние и априорные оценки. Для простоты дальнейших исследований ограничимся рассмотрением случая сгущения сеток по переменным x_1, x_2 к началу соответствующего отрезка. Тогда $h_{\alpha+}^{i_\alpha+1} - h_{\alpha+}^{i_\alpha} > 0$, $\delta_\alpha^- = 0$, $\alpha = 1, 2$, и схема (10) примет более простой вид

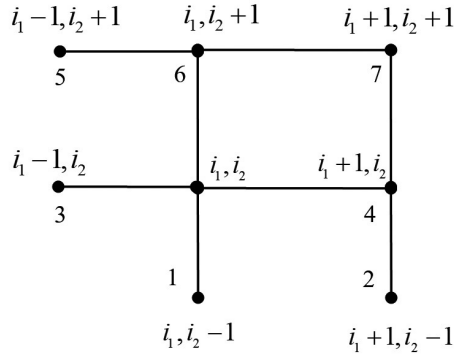
$$\begin{aligned} y_t + \frac{h_{1+} - h_1}{3} y_{tx_1} + \frac{h_{2+} - h_2}{3} y_{tx_2} &= \sum_{\alpha=1}^2 \bar{k}_\alpha \bar{k}_\alpha \left(\hat{y} + \frac{h_{3-\alpha+} - h_{3-\alpha}}{3} \hat{y}_{x_{3-\alpha}} \right)_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} + \\ + \sum_{\alpha=1}^2 \bar{r}_\alpha^+ \left(\hat{y} + \frac{h_{3-\alpha+} - h_{3-\alpha}}{3} \hat{y}_{x_{3-\alpha}} \right)_{x_\alpha} &+ \sum_{\alpha=1}^2 \bar{r}_\alpha^- \left(\hat{y} + \frac{h_{3-\alpha+} - h_{3-\alpha}}{3} \hat{y}_{x_{3-\alpha}} \right)_{\bar{x}_\alpha} - \\ - q(\bar{x}) \left(\hat{y} + \frac{h_{1+} - h_1}{3} \hat{y}_{\bar{x}_1} + \frac{h_{2+} - h_2}{3} \hat{y}_{\bar{x}_2} \right) &+ f(\bar{x}, \hat{t}), \quad x \in \hat{\omega}_h. \end{aligned} \quad (18)$$

Для применения принципа максимума схему (18) приведем к каноническому виду (1) и проверим достаточные условия на коэффициенты (2), (3).

В рассматриваемом нами случае шаблон схемы 8-точечный и состоит из узлов, изображенных на фигуре. Узлы шаблона пронумеруем согласно рисунку.

Тогда для схемы (18) получим

$$\sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B^n(x, \xi) = \sum_{j=1}^7 B_j^n.$$



8-точечный шаблон для разностной схемы (12).

Для того чтобы выписать коэффициенты A^n , B^n , F^n , необходимо записать схему (18) в индексной форме. После элементарных преобразований находим

$$B_1^n = \tau_+ \left(\frac{\bar{\kappa}_2 \bar{k}_2}{\bar{h}_2} - \bar{r}_2^- \right) \frac{h_1 + 2h_{1+}}{3h_2 h_{1+}} + \bar{q} \frac{\delta_2^+}{h_2}, \quad B_2^n = \tau_+ \left(\frac{\bar{\kappa}_2 \bar{k}_2}{\bar{h}_2} - \bar{r}_2^- \right) \frac{\delta_1^+}{h_2 h_{1+}},$$

$$B_3^n = \tau_+ \left(\frac{\bar{\kappa}_1 \bar{k}_1}{\bar{h}_1} - \bar{r}_1^- \right) \frac{h_2 + 2h_{2+}}{3h_1 h_{2+}} + \bar{q} \frac{\delta_1^+}{h_1}, \quad B_5^n = \tau_+ \left(\frac{\bar{\kappa}_1 \bar{k}_1}{\bar{h}_1} - \bar{r}_1^- \right) \frac{\delta_2^+}{h_1 h_{2+}},$$

$$B_4^n = -\frac{\delta_1^+}{h_{1+}} + \frac{\tau_+}{h_{1+} h_{2+}} \left(\frac{\bar{\kappa}_1 \bar{k}_1 (h_2 + 2h_{2+})}{3h_1} + \frac{\bar{r}_1^+ (h_2 + 2h_{2+})}{3} - \frac{\delta_1^+}{h_2} (2\bar{\kappa}_2 \bar{k}_2 + \bar{r}_2^+ h_2 - \bar{r}_2^- h_{2+}) \right),$$

$$B_6^n = -\frac{\delta_2^+}{h_{2+}} + \frac{\tau_+}{h_{1+} h_{2+}} \left(\frac{\bar{\kappa}_2 \bar{k}_2 (h_1 + 2h_{1+})}{3h_2} + \frac{\bar{r}_2^+ (h_1 + 2h_{1+})}{3} - \frac{\delta_2^+}{h_1} (2\bar{\kappa}_1 \bar{k}_1 + \bar{r}_1^+ h_1 - \bar{r}_1^- h_{1+}) \right),$$

$$B_7^n = \frac{\tau_+}{h_{1+} h_{2+}} \left(\frac{\bar{\kappa}_1 \bar{k}_1 \delta_2^+}{\bar{h}_1} + \frac{\bar{\kappa}_2 \bar{k}_2 \delta_1^+}{\bar{h}_2} + \bar{r}_1^+ \delta_2^+ + \bar{r}_2^+ \delta_1^+ \right), \quad F^n = y_{(\delta)}^n + \tau_+ f(\bar{x}, \hat{t}),$$

$$A^n = 1 + \tau_+ \bar{q} + \sum_{j=1}^7 B_j^n, \quad D^n = A^n - \sum_{j=1}^7 B_j^n = 1 + \tau_+ \bar{q}.$$

Нам нужно найти условие, чтобы $\bar{k}_{\alpha, i_1 i_2}^n > 0$ для всех $i_\alpha = \overline{1, N-1}$, $\alpha = 1, 2$, $n = \overline{0, N_0}$. Очевидно, что, когда $n = 0$, имеем $\bar{k}_{\alpha, i_1 i_2}^0 = k_\alpha \left(y_{(\delta)}^0(i_1 i_2) \right)$, где

$$\begin{aligned} y_{(\delta)}^0(i_1 i_2) &= u_{0, i_1 i_2} + \delta_1^+(u_{0, i_1 i_2})_{x_1} + \delta_2^+(u_{0, i_1 i_2})_{x_2} = \\ &= \left(1 - \frac{\tilde{h}_1}{h_{1+}} - \frac{\tilde{h}_2}{h_{2+}} \right) u_{0, i_1 i_2} + \frac{\tilde{h}_1}{h_{1+}} u_{0, i_1+1 i_2} + \frac{\tilde{h}_2}{h_{2+}} u_{0, i_1 i_2+1}. \end{aligned}$$

Так как

$$0 < \frac{\tilde{h}_1}{h_{1+}} < \frac{1}{3}, \quad 0 < \frac{\tilde{h}_2}{h_{2+}} < \frac{1}{3}, \quad 1 - \frac{\tilde{h}_1}{h_{1+}} - \frac{\tilde{h}_2}{h_{2+}} > 0,$$

то $\min_{x \in \Omega} u_0(x) \leq y_{(\delta)_{i_1 i_2}}^0 \leq \max_{x \in \Omega} u_0(x)$ или $y_{(\delta)_{i_1 i_2}}^0 \in [m_1, m_2]$, т. е. $\bar{k}_{\alpha, i_1 i_2}^0 = k_\alpha (y_{(\delta)_{i_1 i_2}}^0) > 0$. Предположим, что для произвольного n тоже верно неравенство $\bar{k}_{\alpha, i_1 i_2}^n > 0$. Тогда из этого предположения имеем $B_j^n > 0$, $j = 1, 2, 3, 5, 7$. Остальные коэффициенты $B_j^n > 0$, $j = 4, 6$, будут положительными, если выполнены следующие условия:

$$\frac{h_{1+} - h_1}{h_1} < \frac{3\bar{k}_1^n \bar{k}_1^n}{2\bar{k}_2^n \bar{k}_2^n + \bar{r}_2^{n+} h_2 - \bar{r}_2^n h_{2+}} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2, \quad (19)$$

$$\frac{h_{2+} - h_2}{h_2} < \frac{3\bar{k}_2^n \bar{k}_2^n}{2\bar{k}_1^n \bar{k}_1^n + \bar{r}_1^{n+} h_1 - \bar{r}_1^n h_{1+}} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2, \quad (20)$$

$$\tau_+ \geq \max \{ \|\Delta t_1^n\|_C, \|\Delta t_2^n\|_C \}, \quad (21)$$

где

$$\Delta t_1^n = \frac{h_{2+} (h_{1+} - h_1)}{3} \left(\frac{\bar{k}_1^n \bar{k}_1^n (h_2 + 2h_{2+})}{3h_1} - \frac{\delta_1^+}{h_2} (2\bar{k}_2^n \bar{k}_2^n + \bar{r}_2^{n+} h_2 - \bar{r}_2^n h_{2+}) \right)^{-1},$$

$$\Delta t_2^n = \frac{h_{1+} (h_{2+} - h_2)}{3} \left(\frac{\bar{k}_2^n \bar{k}_2^n (h_1 + 2h_{1+})}{3h_2} - \frac{\delta_2^+}{h_1} (2\bar{k}_1^n \bar{k}_1^n + \bar{r}_1^{n+} h_1 - \bar{r}_1^n h_{1+}) \right)^{-1}.$$

На основании оценки (4) леммы для произвольного $t = t_n \in \omega_\tau$ и всех $i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} \min \left\{ \mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_3^{n+1}, \mu_4^{n+1}, \min_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq i_2 \leq N_2 - 1}} \left(\frac{y_{(\delta)_{i_1 i_2}}^n + \tau_{n+1} \bar{f}_{i_1 i_2}^{n+1}}{1 + \tau_{n+1} \bar{q}_{i_1 i_2}} \right) \right\} &\leq y_{i_1 i_2}^{n+1} \leq \\ &\leq \max \left\{ \mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_3^{n+1}, \mu_4^{n+1}, \max_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq i_2 \leq N_2 - 1}} \left(\frac{y_{(\delta)_{i_1 i_2}}^n + \tau_{n+1} \bar{f}_{i_1 i_2}^{n+1}}{1 + \tau_{n+1} \bar{q}_{i_1 i_2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из очевидных неравенств $\min_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq i_2 \leq N_2 - 1}} (y_{(\delta)_{i_1 i_2}}^n) \geq \min_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq i_2 \leq N_2 - 1}} y_{i_1 i_2}^n, \max_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq i_2 \leq N_2 - 1}} (y_{(\delta)_{i_1 i_2}}^n) \leq \max_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq i_2 \leq N_2 - 1}} y_{i_1 i_2}^n$ из (22) следует, что

$$\begin{aligned} \min \left\{ 0, \mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_3^{n+1}, \mu_4^{n+1}, \min_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq i_2 \leq N_2 - 1}} y_{i_1 i_2}^n + \tau_{n+1} \inf_{(x,t) \in Q_T} f(x,t) \right\} &\leq y_{i_1 i_2}^{n+1} \leq \\ &\leq \max \left\{ 0, \mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_3^{n+1}, \mu_4^{n+1}, \max_{\substack{1 \leq i_1 \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq i_2 \leq N_2 - 1}} y_{i_1 i_2}^n + \tau_{n+1} \sup_{(x,t) \in Q_T} f(x,t) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя индукцию по n , из (23) получаем двустороннюю оценку через входные данные без предположения о знакоопределенности входных данных

$$m_1^{n+1} \leq y_{i_1 i_2}^{n+1} \leq m_2^{n+1}, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (24)$$

где

$$m_1^{n+1} = \min \left\{ 0, \mu_{\min}(x, t), \min_{x \in \Omega} u_0(x) \right\} + t_{n+1} \min \left\{ 0, \inf_{(x,t) \in Q_T} f(x, t) \right\} \geq m_1,$$

$$m_2^{n+1} = \max \left\{ 0, \mu_{\max}(x, t), \max_{x \in \Omega} u_0(x) \right\} + t_{n+1} \max \left\{ 0, \sup_{(x,t) \in Q_T} f(x, t) \right\} \leq m_2.$$

Из (24) получаем $y_{i_1 i_2}^{n+1} \in [m_1, m_2]$, $i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, т.е. $\bar{k}_{\alpha, i_1 i_2}^{n+1} = k_\alpha \left(y_{(\delta) i_1 i_2}^{n+1} \right) > 0$. Таким образом, неравенства (19), (21) гарантируют выполнение условия монотонности (2), (3). Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (19)–(21). Тогда разностная схема (18) монотонна, ее решение принадлежит окрестности точного решения $y \in \bar{D}_u$ и справедливы двусторонние оценки вида (24).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (19)–(21). Тогда для решения разностной схемы (18) при любом $t_n \in \hat{\omega}_\tau$ верна априорная оценка

$$\|y(t_{n+1})\|_{\bar{C}} \leq \max \left\{ \|u_0\|_{\bar{C}}, \max_{1 \leq k \leq n+1} \|\mu(t_k)\|_{C_\gamma} \right\} + t_{n+1} \max_{1 \leq k \leq n+1} \|\bar{f}(t_k)\|_C, \quad (25)$$

где

$$\|v\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |v(x)|, \quad \|v\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |v(x)|,$$

$$\|\mu(t_k)\|_{C_\gamma} = \max \left\{ \|\mu_1(t_k)\|_{C_\gamma}, \|\mu_2(t_k)\|_{C_\gamma}, \|\mu_3(t_k)\|_{C_\gamma}, \|\mu_4(t_k)\|_{C_\gamma} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании следствия заключаем, что

$$\|y(t_{n+1})\|_{\bar{C}} \leq \max \left\{ \|\mu(t_{n+1})\|_{C_\gamma}, \left\| \frac{F^n}{D^n} \right\|_C \right\}.$$

Подставляя оценку

$$\begin{aligned} \|F^n\|_C &= \left\| \frac{y_{(\delta)}^n + \tau_{n+1} \bar{f}(t_{n+1})}{1 + \tau_{n+1} \bar{q}} \right\|_C \leq \\ &\leq \|y_{(\delta)}^n\|_C + \tau_{n+1} \|\bar{f}(t_{n+1})\|_C \leq \|y(t_n)\|_{\bar{C}} + \tau_{n+1} \|\bar{f}(t_{n+1})\|_C \end{aligned}$$

в последнее неравенство, находим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|y(t_{n+1})\|_{\bar{C}} &\leq \max \left\{ \|\mu(t_{n+1})\|_{C_\gamma}, \|y(t_n)\|_{\bar{C}} + \tau_{n+1} \|\bar{f}(t_{n+1})\|_C \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \|\mu(t_{n+1})\|_{C_\gamma}, \|\mu(t_n)\|_{C_\gamma} + \tau_{n+1} \|\bar{f}(t_{n+1})\|_C, \|y(t_{n-1})\|_{\bar{C}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\tau_n \|\bar{f}(t_n)\|_C + \tau_{n+1} \|\bar{f}(t_{n+1})\|_C) \leq \\
\leq \dots \leq \max & \left\{ \max_{1 \leq k \leq n+1} \|\mu(t_k)\|_{C_\gamma} + \sum_{k=0}^n \tau_{k+1} \|\bar{f}(t_{k+1})\|_C, \|u_0\|_{\bar{C}} + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^n \tau_{k+1} \|\bar{f}(t_{k+1})\|_C \right\}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=0}^n \tau_{k+1} \|\bar{f}(t_{k+1})\|_C \leq \sum_{k=0}^n \tau_{k+1} \max_{1 \leq k \leq n+1} \|f(t_k)\|_C = t_{n+1} \max_{1 \leq k \leq n+1} \|\bar{f}(t_k)\|_C,$$

получаем требуемое соотношение (25). \square

6. Выводы. В этой работе предложена новая монотонная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству на неравномерной сетке, которая приближает задачу Дирихле для двумерного квазилинейного уравнения типа конвекции-диффузии с неограниченной нелинейностью. При некоторых ограничениях на сетку устанавливаются двусторонние оценки решения схемы. Такие оценки позволяют не только доказать неотрицательность точного решения, важную для физических задач, но и найти достаточные условия на входные данные, когда нелинейная задача является параболической. В результате доказаны априорные оценки приближенного решения в сеточной норме C , зависящие только от начальных и граничных условий и от правой части. Предложенные схемы не являются абсолютно стабильными, и подробный анализ устойчивости, связанный с отношением шагов интеграции, является важной проблемой, которую мы планируем изучить в будущем, также как и анализ сходимости [10–12] и применений.

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Самарский А. А., Гудин А. А. Численные методы. М.: Наука, 1989.
3. Матус П. П., Во Тхи Ким Туен, Гаспар Ф. Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа // Доклады НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 5. С. 18–22.
4. Мажукин В. И., Малафеев Д. А., Матус П. П., Самарский А. А. Разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений математической физики с переменными коэффициентами // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41, № 3. С. 407–419.
5. Малафеев Д. А. Экономичные монотонные разностные схемы для многомерных задач конвекции-диффузии на неравномерных сетках // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 4. С. 21–25.
6. Matus P. P., Poliakov D., Hieu L. M. On the consistent two-side estimates for the solutions of quasilinear convection-diffusion equations and their approximations on non-uniform grids // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 340. P. 571–581. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.09.020>
7. Матус П. П., Хиеу Л. М., Волков Л. Г. Принцип максимума для разностных схем с непостоянными входными данными // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 5. С. 13–17.
8. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. New York: Dover Publication Inc., 2013.
9. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N., Matus P. P. Difference schemes with operator factors. Boston; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
10. Prasath V. B. S., Moreno J. C. On convergent finite difference schemes for variational — PDE based image processing // Comp. Appl. Math. 2018. Vol. 37, no. 2. P. 1562–1580. <https://doi.org/10.1007/s40314-016-0414-9>
11. Koide S., Furuhata D. Nonlinear and linear conservative finite difference schemes for regularized long wave equation // Japan J. Indust. Appl. Math. 2009. Vol. 26. Issue 1. Art. no. 15. <https://doi.org/10.1007/BF03167544>

Статья поступила в редакцию 31 июля 2019 г.;
после доработки 1 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Хиену Ле Минь — Ph.D.; hieulm@due.edu.vn

Тхань Данг Нгок Хоанг — Ph.D.; thanh.dnh.cs@gmail.com; thanhdnh@ueh.edu.vn

Прасат В. В. Сурия — Ph.D.; prasatsa@uc.edu; surya.prasath@cchmc.org

Second order monotone difference schemes with approximation on non-uniform grids for two-dimensional quasilinear parabolic convection-diffusion equations

Le M. Hieu¹, Dang N. H. Thanh², V. B. Surya Prasath^{3,4,5,6}

¹ University of Economics, The University of Danang, Danang, Vietnam

² Department of Information Technology, School of Business Information Technology, University of Economics Ho Chi Minh city, Vietnam

³ Cincinnati Children’s Hospital Medical Center, Cincinnati, USA

⁴ Department of Pediatrics, University of Cincinnati, Ohio USA

⁵ Department of Biomedical Informatics, College of Medicine, University of Cincinnati, Ohio USA

⁶ Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Cincinnati, Ohio USA

For citation: Hieu Le M., Thanh D. N. H., Prasath V. B. S. Second order monotone difference schemes with approximation on non-uniform grids for two-dimensional quasilinear parabolic convection-diffusion equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 343–355.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.216> (In Russian)

The present communication is devoted to the construction of monotone difference schemes of the second order of local approximation on non-uniform grids in space for 2D quasilinear parabolic convection-diffusion equation. With the help of difference maximum principle, two-sided estimates of the difference solution are established and an important a priori estimate in a uniform norm C is proved. It is interesting to note that the maximal and minimal values of the difference solution do not depend on the diffusion and convection coefficients.

Keywords: non-uniform grid, maximum principle, regularization principle, monotone difference scheme, convection-diffusion equation.

References

1. Samarskii A. A., *The theory of difference schemes* (Marcel Dekker Inc., Bassel, 2001).
2. Samarskii A. A., Gulin A. A., *Numerical Methods* (Nauka Publ., Moscow, 1989). (In Russian)
3. Matus P. P., Vo T. K. T., Gaspar F., “Monotone difference schemes for linear parabolic equations with mixed boundary conditions”, *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus* **58** (5), 18–22 (2014). (In Russian)
4. Mazhukin V. I., Malafei D. A., Matus P. P., Samarskii A. A., “Difference schemes on irregular grids for equations of mathematical physics with variable coefficients”, *Comput. Math. Math. Phys.* **41**(3), 379–391 (2001).
5. Malafei D. A., “Efficient monotone difference schemes for multidimensional convection–diffusion problems on nonuniform grids”, *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus* **44** (4), 21–25 (2000). (In Russian)
6. Matus P. P., Poliakov D., Hieu L. M., “On the consistent two-side estimates for the solutions of quasilinear convection-diffusion equations and their approximations on non-

uniform grids”, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **340**, 571–581 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.09.020>

7. Matus P. P., Hieu L. M., Volkov L. G., “Maximum principle for difference schemes with varying input data”, *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus* **59** (5), 13–17 (2015). (In Russian)

8. Friedman A., *Partial differential equations of parabolic type* (Dover Publication Inc., New York, 2013).

9. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N., Matus P. P., *Difference schemes with operator factors* (Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 2002).

10. Prasath V. B. S., Moreno J. C., “On convergent finite difference schemes for variational — PDE based image processing”, *Comp. Appl. Math.* **37**(2), 1562–1580 (2018). <https://doi.org/10.1007/s40314-016-0414-9>

11. Koide S., Furihata D., “Nonlinear and linear conservative finite difference schemes for regularized long wave equation”, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **26**, 15 (2009). <https://doi.org/10.1007/BF03167544>

12. Kalantari R., Shahmorad S., “A Stable and Convergent Finite Difference Method for Fractional Black–Scholes Model of American Put Option Pricing”, *Comput. Econ.* **53**, iss. 1, 191–205 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10614-017-9734-0>

Received: July 31, 2019

Revised: December 1, 2019

Accepted: December 12, 2019

Authors' information:

Le Minh Hieu — hieulm@due.edu.vn

Dang Ngoc Hoang Thanh — thanh.dnh.cs@gmail.com; thanhdnh@ueh.edu.vn

V. B. Surya Prasath — prasatsa@uc.edu; surya.prasath@cchmc.org

ХРОНИКА

20 ноября 2019 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН выступили член-корреспондент РАН, профессор, доктор физ.-мат. наук Д. А. Индейцев (Институт Проблем Машиноведения РАН) и ассистент И. А. Попов (Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого) с докладом на тему «К вопросу о построении математической модели прецессии упругих форм во вращающейся осесимметричной оболочке».

Краткое содержание доклада:

Рассматривается вопрос построения математической модели прецессии упругих форм во вращающейся осесимметричной оболочке: цилиндре и полусфере. Отмечается существенное отличие известных решений от результата прямого численного моделирования. С применением асимптотических методов строится приближение в задаче о собственных свободных колебаниях, результат сравнивается с решением, полученным вариационным методом для различных координатных функций. Отмечается существенное влияние краевых условий для цилиндрических консольно-защемленных оболочек средней длины, определяющих медленную сходимость асимптотического ряда и ограничивающих применение стандартных методов разделения напряженного состояния на основное состояние и краевой эффект. Проводится анализ решения Рэлея для форм колебаний полусферы и сравнение дискретных моделей прецессии.