УДК 519.71 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
MSC 93C55

О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования циклов периодов три и шесть в двумерной дискретной системе*

Т. Е. Звягинцева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Звягинцева Т. Е.* О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования циклов периодов три и шесть в двумерной дискретной системе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 309–318. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.213

В работе исследуется система второго порядка с дискретным временем, нелинейность которой удовлетворяет обобщенному условию Рауса — Гурвица. Системы такого типа находят широкое применение при решении современных прикладных задач теории автоматического управления. Работа является продолжением исследований, представленных в статье автора «О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования цикла периода четыре в двумерной дискретной системе», где изучены системы с 2-периодической нелинейностью, лежащей в гурвицевом угле. В указанной статье выписаны условия на параметры, при выполнении которых система с 2-периодической нелинейностью может иметь семейство неизолированных циклов периода четыре, и предложен способ построения такой нелинейности. В этой работе предполагается, что нелинейность является 3-периодической и лежит в гурвицевом угле, и исследуется система при всех возможных значениях параметров. В статье в явном виде выписаны условия на параметры, при выполнении которых может быть построена такая 3-периодическая нелинейность, что система с указанной нелинейностью не будет глобально асимптотически устойчивой. Показано, что в системе с такой нелинейностью может существовать семейство циклов периода три и может существовать семейство циклов периода шесть. Предложен способ построения указанных нелинейностей. Циклы при этом не являются изолированными, любое решение системы с начальными данными, лежащими на некотором определенном луче, будет периодическим.

Ключевые слова: система второго порядка с дискретным временем, проблема Айзермана, абсолютная устойчивость, периодическое решение.

1. Введение. Задача абсолютной устойчивости систем дифференциальных уравнений с секторной нелинейностью, сформулированная А. И. Лурье и В. Н. Постниковым, является одной из основных задач теории автоматического управления, ее решению посвящено огромное количество работ в нашей стране и за рубежом. Обзор результатов и библиографию по данной тематике можно найти, например, в статье [1].

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00388).

М. А. Айзерманом [2] была сформулирована известная гипотеза о том, что система автоматического управления абсолютно устойчива в классе нелинейных характеристик, лежащих в гурвицевом угле. В. А. Плисс [3, 4] опроверг гипотезу Айзермана, построив контрпример для системы трех дифференциальных уравнений, и предложил метод, позволяющий находить периодические колебания в таких системах.

Несмотря на то, что гипотеза Айзермана оказалась неверной в общем случае, задача определения классов систем автоматического управления, для которых справедлива эта гипотеза, и задача поиска периодических колебаний в таких системах остаются актуальными до настоящего времени. Новые методы поиска периодических решений в системах с непрерывным временем можно найти, например, в работах Г. А. Леонова и его учеников [5, 6].

Наряду с теорией автоматического управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в течение последних десятилетий активно развивается аналогичная теория для систем с дискретным временем, что обусловлено широтой применения дискретных моделей при решении многих прикладных задач. В работах [7–9], например, исследуется вопрос абсолютной устойчивости дискретных систем с различными типами нелинейностей, в статьях [10, 11] представлены два контрпримера к аналогу гипотезы Айзермана для дискретных систем второго порядка. В одном из построенных примеров система имеет цикл периода три, а в другом — цикл периода четыре.

Данная работа является продолжением исследований, представленных в статье автора [12], где изучается при всех значениях параметров дискретная система второго порядка с 2-периодической нелинейностью, удовлетворяющей обобщенным условиям Рауса — Гурвица. В [12] в явном виде выписаны условия на параметры, при выполнении которых может быть построена указанная нелинейность таким образом, что в системе существует семейство циклов периода четыре.

В этой статье мы предполагаем, что нелинейная характеристика системы является 3-периодической и лежит в гурвицевом угле, и исследуем систему при всех возможных значениях параметров. Результаты работы сформулированы в виде двух теорем. В первой теореме выписаны условия на параметры, при выполнении которых может быть построена 3-периодическая нелинейность таким образом, что система с указанной нелинейностью будет иметь семейство циклов периода три. Во второй теореме указаны условия на параметры, при выполнении которых может быть построена такая нелинейность, что система будет иметь семейство циклов периода шесть. Предложен способ построения указанных нелинейностей. При этом циклы, существующие в системе, не являются изолированными, любое решение системы с начальными данными, лежащими на некотором определенном луче, будет периодическим.

2. Постановка задачи. Основной результат. Рассмотрим систему второго порядка с дискретным временем

$$\begin{cases} x_{j+1} = y_j, \\ y_{j+1} = -\alpha y_j - \beta x_j - \varphi(\sigma_j), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma_j = ay_j + bx_j$, $j \in N$, $a^2\beta - ab\alpha + b^2 \neq 0$. Считаем, что при $\varphi(\sigma) \equiv 0$ система (1) асимптотически устойчива, то есть $|\alpha| - 1 < \beta < 1$. Для определенности полагаем $a > 0$.

Обозначим через Ω множество таких $S = \mathrm{const}$, для которых система (1) с линейной функцией $\varphi(\sigma_j) = S(ay_j + bx_j)$ асимптотически устойчива:

$$\Omega = \{S: \ |\alpha + aS| - 1 < \beta + bS < 1\}.$$

Положим в системе (1)

$$\varphi(\sigma_j) = S_j \sigma_j = S_j (ay_j + bx_j), \tag{2}$$

где $S_j \in \Omega$, $j \in N$. Определенная таким образом нелинейность удовлетворяет обобщенным условиям Рауса—Гурвица.

Если $4\beta \le \alpha^2$, то положим $b_\pm = \frac{a}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)$.

Пусть $b^* \in \left[-a, -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$ — корень многочлена

$$(a-b)^2 (a+b) + (b(1+\alpha) - a\beta)(b(1-\alpha) + a\beta)^2,$$

как функции от b при фиксированных параметрах a, α, β (такое значение b^* существует и единственно на указанном промежутке, это будет показано ниже).

Для упрощения формулировки теоремы 1 при $0 < \alpha < 1$ введем обозначения:
$b_1 = \min\left(b^*, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$, $B_1 = \max\left(b^*, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$,
$b_2 = \min\left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha}, \frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}\right)$, $B_2 = \max\left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha}, \frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}\right)$.

Заметим, что $b_1 = b^*$, если $\beta \ge 1 - \alpha$, и $b_1 = -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}$ в противном случае; $b_2 = \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$, если $\beta \le 2\alpha - 1$, и $b_2 = \frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}$ в противном случае.

Теорема 1. *Если выполнено одно из следующих условий на параметры системы:*

1) $\alpha > 1$, $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha-1}, \ b^*\right) \cup \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha}, \ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$;
2) $\alpha > 1$, $4\beta \le \alpha^2$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha-1}, \ b^*\right) \cup \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha}, \ b_-\right) \cup \left(b_+, \ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$;
3) $\alpha = 1$, $4\beta > 1$, $b \in (-\infty, \ b^*) \cup (-a(1-\beta), \ a(1+\beta))$;
4) $\alpha = 1$, $4\beta \le 1$, $b \in (-\infty, \ b^*) \cup (-a(1-\beta), \ b_-) \cup (b_+, \ a(1+\beta))$;
5) $0 < \alpha < 1$, $4\beta > \alpha^2$, $b \in (-\infty, \ b_1) \cup (B_1, \ b_2) \cup (B_2, \ +\infty)$;
6) $0 < \alpha < 1$, $4\beta \le \alpha^2$, $b \in (-\infty, \ b_1) \cup (B_1, \ b_-) \cup (b_+, \ b_2) \cup (B_2, \ +\infty)$;
7) $\alpha \le 0$, $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left(b^*, \ \frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}\right)$;
8) $\alpha \le 0$, $4\beta \le \alpha^2$, $b \in (b^*, \ b_-) \cup \left(b_+, \ \frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}\right)$,

то существует 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, *такая, что система* (1) *с нелинейностью вида* (2) *имеет циклы периода три. Решение системы с начальными условиями* $\binom{x_1}{y_1}$ *является циклом периода три, если* $x_1 \in R$, $x_1 \ne 0$, $y_1 = \frac{1-(\alpha+aS_2)(\beta+bS_1)}{(\alpha+aS_1)(\alpha+aS_2)-(\beta+bS_2)} x_1$.

Пусть $\hat{b} \in \left(\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, \ a\right]$ — корень многочлена

$$(b(1-\alpha) + a\beta)(b(1+\alpha) - a\beta)^2 - (a-b)(a+b)^2,$$

как функции от b при фиксированных параметрах a, α, β (такое значение $\hat{b}$ существует и единственно на указанном промежутке).

Для упрощения формулировки теоремы 2 при $-1 < \alpha < 0$ введем обозначения: $b_3 = \min\left(-\frac{a(1-\beta)}{1+\alpha},\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$, $B_3 = \max\left(-\frac{a(1-\beta)}{1+\alpha},\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$,
$b_4 = \min\left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ \hat{b}\right)$, $B_4 = \max\left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ \hat{b}\right)$.

Заметим, что $b_3 = -\frac{a(1-\beta)}{1+\alpha}$, если $\beta \le -1-2\alpha$, и $b_3 = \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$ в противном случае; $b_4 = \hat{b}$, если $\beta \le 1+\alpha$, и $b_4 = -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}$ в противном случае.

Теорема 2. *Если выполнено одно из следующих условий на параметры системы:*

1) $\alpha < -1$, $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ \hat{b}\right) \cup \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ -\frac{a(1-\beta)}{1+\alpha}\right)$;

2) $\alpha < -1$, $4\beta \le \alpha^2$, $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ b_-\right) \cup \left(b_+,\ \hat{b}\right) \cup \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ -\frac{a(1-\beta)}{1+\alpha}\right)$;

3) $\alpha = -1$, $4\beta > 1$, $b \in \left(-a(1+\beta),\ \hat{b}\right) \cup (a(1-\beta),\ +\infty)$;

4) $\alpha = -1$, $4\beta \le 1$, $b \in (-a(1+\beta),\ b_-) \cup \left(b_+,\ \hat{b}\right) \cup (a(1-\beta),\ +\infty)$;

5) $-1 < \alpha < 0$, $4\beta > \alpha^2$, $b \in (-\infty,\ b_3) \cup (B_3,\ b_4) \cup (B_4,\ +\infty)$;

6) $-1 < \alpha < 0$, $4\beta \le \alpha^2$, $b \in (-\infty,\ b_3) \cup (B_3,\ b_-) \cup (b_+,\ b_4) \cup (B_4,\ +\infty)$;

7) $\alpha \ge 0$, $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{1+\alpha},\ \hat{b}\right)$;

8) $\alpha \ge 0$, $4\beta \le \alpha^2$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{1+\alpha},\ b_-\right) \cup \left(b_+,\ \hat{b}\right)$,

то существует 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ *такая, что система* (1) *с нелинейностью вида* (2) *имеет циклы периода шесть. Решение системы с начальными условиями* $\binom{x_1}{y_1}$ *является циклом периода шесть, если* $x_1 \in R$, $x_1 \ne 0$, $y_1 = -\frac{1+(\alpha+aS_2)(\beta+bS_1)}{(\alpha+aS_1)(\alpha+aS_2)-(\beta+bS_2)}x_1$.

3. Доказательство теорем. Запишем систему (1) с нелинейностью (2) в виде

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $P_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_j & -\alpha_j \end{pmatrix}$,

$$\alpha_j = \alpha + aS_j, \beta_j = \beta + bS_j, \tag{4}$$

$S_j \in \Omega$, $j \in N$.

Для каждого фиксированного набора параметров a, b, α, β системы (3) множество Ω есть интервал $(S_{\min},\ S_{\max})$, где $S_{\min}$ и $S_{\max}$ зависят от параметров и определяются неравенством

$$|\alpha_j| - 1 < \beta_j < 1. \tag{5}$$

В явном виде $S_{\min}$, $S_{\max}$ выписаны в работе [12].

Пусть последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ — 3-периодическая (следовательно, и матрица P_j — 3-периодическая). Наряду с системой (3) рассмотрим линейную систему

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_{j+2}P_{j+1}P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \tag{6}$$

с постоянной матрицей

$$P_{j+2}P_{j+1}P_j = P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 - \beta_2 \\ \beta_1\beta_2 - \alpha_2\alpha_3\beta_1 & \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$j = 3m-2$, $m \in N$.

Система (6) асимптотически устойчива, если и только если

$$|Sp\,(P_3P_2P_1)| - 1 < \mathrm{Det}\,(P_3P_2P_1) < 1,$$

то есть верны неравенства

$$-1 - \beta_1\beta_2\beta_3 < -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2 < 1 + \beta_1\beta_2\beta_3, \tag{7}$$

$$\beta_1\beta_2\beta_3 < 1. \tag{8}$$

Заметим, что неравенство (8) верно всегда в силу условия (5).

Если неравенство (7) не выполнено, то система (6) не является асимптотически устойчивой.

Утверждение 1. *Пусть верно равенство*

$$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2 = 1 + \beta_1\beta_2\beta_3, \tag{9}$$

тогда решения системы (3) *с начальными условиями* $\binom{x_1}{y_1}$ *— циклы периода три, если* $x_1 \in R$, $x_1 \neq 0$, $y_1 = \frac{1-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$.

Доказательство утверждения 1. Точки $\binom{x_j}{y_j}$, $j = 1-3$, определяют нетривиальное 3-периодическое решение системы (3), если

$$\begin{cases} x_2 = y_1, \\ y_2 = -\alpha_1 y_1 - \beta_1 x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = y_2, \\ y_3 = -\alpha_2 y_2 - \beta_2 x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_3, \\ y_1 = -\alpha_3 y_3 - \beta_3 x_3. \end{cases} \tag{10}$$

Если верно равенство (9), то определитель линейной системы (10) равен нулю, и система имеет нетривиальные решения: $x_1 \neq 0$, $y_1 = \frac{1-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$, $x_2 = y_1$, $y_2 = -\frac{\alpha_1-\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$, $x_3 = y_2$, $y_3 = x_1$, которые составляют 3-периодические решения системы (3) ($x_{j+3} = x_j$, $y_{j+3} = y_j$, $j \in N$). Утверждение доказано.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть верно равенство*

$$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2 = -1 - \beta_1\beta_2\beta_3, \tag{11}$$

тогда решения системы (3) с начальными условиями $\binom{x_1}{y_1}$ *— циклы периода шесть, если* $x_1 \in R$, $x_1 \neq 0$, $y_1 = -\frac{1+\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$.

При выполнении условия (11) точки $\binom{x_j}{y_j}$, $j = 1-6$, где $x_1 \neq 0$, $y_1 = -\frac{1+\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$, $x_2 = y_1$, $y_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$, $x_3 = y_2$, $y_3 = -x_1$, $x_4 = -x_1$, $y_4 = -y_1$, $x_5 = -x_2$, $y_5 = -y_2$, $x_6 = -x_3$, $y_6 = -y_3$, определяют 6-периодическое решение системы (3) ($x_{j+6} = x_j$, $y_{j+6} = y_j$, $j \in N$).

Если ни одно из условий (7), (9), (11) не выполнено, то система (3) имеет решения, неограниченные при $j \to +\infty$.

Доказательство теоремы 1. Найдем условия на параметры системы, при выполнении которых существует указанная в формулировке теоремы последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$.

Из (4) следует, что $\beta_j = \frac{b\alpha_j + c}{a}$, где $c = a\beta - b\alpha$.

Равенство (9) верно, если $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, где

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \frac{(b\alpha_1+c)}{a}\frac{(b\alpha_2+c)}{a}\frac{(b\alpha_3+c)}{a} - \\ -\alpha_1\frac{(b\alpha_3+c)}{a} - \alpha_2\frac{(b\alpha_1+c)}{a} - \alpha_3\frac{(b\alpha_2+c)}{a}.$$

Положим $\alpha_{\max} = \alpha + aS_{\max}$, $\alpha_{\min} = \alpha + aS_{\min}$, $F(\alpha_{\max}, \alpha_{\min}, \alpha_{\min}) = F_1$, $F(\alpha_{\min}, \alpha_{\max}, \alpha_{\max}) = F_2$.

Найдем значения параметров, при которых F_1 и F_2 имеют разные знаки. Если $F_1F_2 < 0$, то, в силу непрерывности функции F, существует значение $t \in (0, 1)$ такое, что $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ при

$$\alpha_1 = t\alpha_{\min} + (1-t)\alpha_{\max}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = (1-t)\alpha_{\min} + t\alpha_{\max}. \tag{12}$$

1. Если $\alpha > 0$, $b \geq \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a-c}{b}$, $\alpha_{\min} = \frac{a+c}{a-b}$,

$$F_1 = \frac{1}{b(a-b)^2}\left((a-b)^2(a+b) + (b-c)(b+c)^2\right),$$

$$F_2 = \frac{1}{b^2(b-a)}\left(c^2 - a^2\right)(a-b-c).$$

Не трудно показать, что $F_1 > 0$ при таких значениях параметров. $F_2 < 0$, если $\alpha < 1$, $\beta < 2\alpha - 1$, $b \in \left(\frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}, +\infty\right)$ или $\alpha < 1$, $\beta \geq 2\alpha - 1$, $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha}, +\infty\right)$.

2. Если $\alpha > 0$, $\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha} \leq b < \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a-c}{b}$, $\alpha_{\min} = -\frac{a+c}{a+b}$,

$$F_1 = \frac{1}{b(a+b)^2}(a+2b-c)\left((a+b)(a+c) + (b-c)^2\right), \tag{13}$$

$$F_2 = \frac{1}{b^2(a+b)}(a+c)(b+c-a)(a+2b-c). \tag{14}$$

В этом случае $F_1 > 0$, поскольку $b > 0$, $a + 2b - c > 0$, и множитель

$$M_1(a, b, \alpha, \beta) = (a+b)(a+c) + (b-c)^2 = \\ = b^2\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right) + ab(1 - 2\alpha\beta - \alpha - \beta) + a^2\left(\beta^2 + \beta + 1\right)$$

положителен при всех значениях параметров (квадратный трехчлен M_1 как функция от b при фиксированных параметрах a, α, β имеет положительный старший коэффициент и отрицательный дискриминант).

$F_2 < 0$, если $\alpha \geq 1$ или $\alpha < 1$, $\beta < 2\alpha - 1$, $b \in \left[\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$ или $\alpha < 1$, $\beta \geq 2\alpha - 1$, $b \in \left[\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, \frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}\right)$.

3. Если $\alpha > 0$, $-\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha} \leq b < \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a+c}{a-b}$, $\alpha_{\min} = -\frac{a+c}{a+b}$,

$$F_1 = \frac{2}{(a-b)(a+b)^2}(a+c)\left((a+b)(a+c) + (b-c)^2\right), \tag{15}$$

$$F_2 = -\frac{4}{(a-b)^2(a+b)}(a+c)\left(ac+b^2\right). \tag{16}$$

В этом случае $F_1 > 0$. $F_2 < 0$, если $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left[-\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha},\ \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}\right)$ или $4\beta \le \alpha^2$, $b \in \left[-\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha},\ b_-\right) \cup \left(b_+,\ \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}\right)$.

4. Если $\alpha > 0$, $b < -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a+c}{a-b}$, $\alpha_{\min} = \frac{a-c}{b}$,

$$F_1 = \frac{1}{b^2(a-b)}\left(c^2-a^2\right)(b+c-a); \tag{17}$$

и $F_1 > 0$, если $\alpha \le 1$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$ или $\alpha > 1$, $b \in \left(-\infty,\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha-1}\right) \cup \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$.

$$F_2 = \frac{1}{b(a-b)^2}\left((a-b)^2(a+b) + (b-c)(b+c)^2\right). \tag{18}$$

Многочлен

$$\begin{aligned} M_2(a,b,\alpha,\beta) = (a-b)^2(a+b) + (b-c)(b+c)^2 = b^3\left(\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2\right) + \\ +ab^2\left(-3\alpha^2\beta+2\alpha\beta+\beta-1\right) + a^2b\left(3\alpha\beta^2-\beta^2-1\right) + a^3\left(1-\beta^3\right), \end{aligned} \tag{19}$$

стоящий в правой части (18), как функция от b при фиксированных параметрах a, α, β, меняет знак на промежутке $\left(-a, -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$, если $\beta \ne 1-\alpha$:

$$M_2\left(a,\ -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}, \alpha, \beta\right) = \frac{8a^3}{(2+\alpha)^3}(1-\beta)(1+\alpha+\beta)^2 > 0, \tag{20}$$

$$M_2(a,\ -a, \alpha, \beta) = -a^3(1+\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)^2 < 0. \tag{21}$$

Следовательно, существует корень b^* многочлена (19), лежащий на промежутке $\left[-a,\ -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$. Если $\beta = 1-\alpha$, то $b^* = -a$.

Покажем, что b^* — единственный корень M_2 на промежутке $\left(-\infty,\ -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$. Старший коэффициент M_2 больше нуля при $\alpha > 0$, дискриминант Δ_{M_2} многочлена M_2 меняет знак при рассматриваемых значениях параметров.

Если $\Delta_{M_2} < 0$, то b^* — единственный вещественный корень M_2. Если $\Delta_{M_2} \ge 0$, то обозначим через k_1, k_2 ($k_1 > k_2$) точки локальных экстремумов функции M_2. В этом случае не трудно показать, что $k_1 > -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}$, поэтому корни многочлена M_2, не равные b^*, лежат вне промежутка $\left(-\infty,\ -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$.

Таким образом, $F_2 > 0$, если $b \in (-\infty,\ b^*)$, и $F_2 < 0$, если $b \in \left(b^*,\ -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$.

Для сравнения b^* с $b = -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}$ и с $b = -\frac{a(1-\beta)}{\alpha-1}$ при $\alpha > 1$ заметим, что $M_2\left(a,\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}, \alpha, \beta\right) > 0$, если $\beta > 1-\alpha$, и, кроме того, $M_2\left(a,\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha-1}, \alpha, \beta\right) < 0$ при $\alpha > 1$.

Следовательно, F_1 и F_2 имеют разные знаки, если $\alpha \leq 1$, $\beta \geq 1-\alpha$, $b \in (-\infty,\, b^*) \cup \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\, -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$ или $\alpha \leq 1$, $\beta < 1-\alpha$, $b \in \left(-\infty,\, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right) \cup \left(b^*,\, -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$ или $\alpha > 1$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha-1},\, b^*\right) \cup \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\, -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$.

5. Если $\alpha \leq 0$, $b \geq \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a-c}{b}$, $\alpha_{\min} = -\frac{a+c}{a+b}$. F_1 и F_2 задаются формулами (13) и (14). Легко показать, что здесь $F_1 > 0$. И $F_2 < 0$, если $b \in \left[\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha},\, \frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}\right)$.

6. Если $\alpha \leq 0$, $-\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha} \leq b < \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a+c}{a-b}$, $\alpha_{\min} = -\frac{a+c}{a+b}$. F_1 определяется формулой (15), а F_2 — формулой (16). И в этом случае $F_1 > 0$. $F_2 < 0$, если $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left[-\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha},\, \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}\right)$ или $4\beta \leq \alpha^2$, $b \in \left[-\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha},\, b_-\right) \cup \left(b_+,\, \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}\right)$.

7. Если $\alpha = 0$, $b < -\frac{a(1-\beta)}{2}$ или $\alpha < 0$, $\frac{a(1+\beta)}{\alpha} \leq b < -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a+c}{a-b}$, $\alpha_{\min} = \frac{a-c}{b}$, F_1 и F_2 определяются формулами (17) и (18). Здесь $F_1 > 0$, если $\alpha = 0$ или $\alpha < 0$, $b > \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$.

Многочлен M_2, стоящий множителем в F_2, как функция от b при фиксированных a, α, β, имеет корень b^* на промежутке $\left(-a,\, -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$, согласно (20), (21).

Не трудно показать (аналогично доказательству в пункте 4), что b^* — единственный корень M_2 на рассматриваемом здесь промежутке, и $F_2 < 0$ при $b \in \left(b^*,\, -\frac{a(1-\beta)}{2+\alpha}\right)$.

8. Если $\alpha < 0$, $b < \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$, то $\alpha_{\max} = -\frac{a+c}{a+b}$, $\alpha_{\min} = \frac{a-c}{b}$, и в этом случае $F_1 > 0$ и $F_2 > 0$.

Собирая все значения параметров, при которых $F_1 F_2 < 0$, получим требуемое. Теорема доказана.

Замечание 1. Из (9) следует, что 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, указанная в формулировке теоремы 1, строится следующим образом: S_1 принадлежит промежутку $(S_{\min},\, S_{\max})$ и удовлетворяет уравнению

$$mS_1^3 - (2mS_{sum} + n)\, S_1^2 + \left(mS_{sum}^2 - r\right) S_1 + \left(nS_{sum}^2 + 2rS_{sum} + l\right) = 0,$$

где $S_{sum} = S_{\min} + S_{\max}$, $m = a^3 + b^3$, $n = a^2\alpha + b^2\beta - ab$, $r = a\alpha^2 + b\beta^2 - a\beta - b\alpha$, $l = \alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta + 1$, и $S_2 = S_3 = S_{sum} - S_1$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Равенство (11) верно, если $G\,(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = 0$, где

$$G\,(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = 1 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \frac{(b\alpha_1+c)}{a}\frac{(b\alpha_2+c)}{a}\frac{(b\alpha_3+c)}{a} + \\ + \alpha_1\frac{(b\alpha_3+c)}{a} + \alpha_2\frac{(b\alpha_1+c)}{a} + \alpha_3\frac{(b\alpha_2+c)}{a}.$$

Как и в доказательстве теоремы 1, находим значения параметров, при которых $G\,(\alpha_{\max},\, \alpha_{\min},\, \alpha_{\min})$ и $G\,(\alpha_{\min},\, \alpha_{\max},\, \alpha_{\max})$ имеют разные знаки. При таких значениях параметров, в силу непрерывности функции G, существует значение $t \in (0,\, 1)$ такое, что $G\,(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) = 0$, если α_j $(j = 1-3)$ определены равенствами (12).

Замечание 2. Из (11) следует, что 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, указанная в формулировке теоремы 2, строится следующим образом:

S_1 принадлежит промежутку $(S_{\min},\ S_{\max})$ и удовлетворяет уравнению

$$\tilde{m}S_1^3 - (2\tilde{m}S_{sum} - \tilde{n})\,S_1^2 + \left(\tilde{m}S_{sum}^2 + \tilde{r}\right)S_1 - \left(\tilde{n}S_{sum}^2 + 2\tilde{r}S_{sum} + \tilde{l}\right) = 0,$$

где $\tilde{m} = b^3 - a^3$, $\tilde{n} = a^2\alpha - b^2\beta - ab$, $\tilde{r} = a\alpha^2 - b\beta^2 - a\beta - b\alpha$, $\tilde{l} = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta - 1$, и $S_2 = S_3 = S_{sum} - S_1$.

Литература

1. *Либерзон М. Р.* Очерки о теории абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 86–119.

2. *Айзерман М. А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем // Успехи математических наук. 1949. Т. 4. Вып. 4. С. 187–188.

3. *Плисс В. А.* О проблеме Айзермана для случая системы трех дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1958. Т. 121, № 3. С. 422–425.

4. *Плисс В. А.* Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1958.

5. *Леонов Г. А.* О проблеме Айзермана // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 37–49.

6. *Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Брагин В. О.* О проблемах Айзермана и Калмана // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2010. Вып. 3. С. 31–47.

7. *Gonzaga C. A., Jungers M., Daafouz J.* Stability analysis of discrete-time Lur'e systems // Automatica. 2012. Vol. 48, no. 9. P. 2277–2283.

8. *Ahmad N. S., Heath W. P., Li G.* LMI-based stability criteria for discrete-time Lur'e systems with monotonic, sector- and slope-restricted nonlinearities // IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. Vol. 58, no. 2. P. 459–465.

9. *Park B. J., Park P., Kwon N. K.* An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with sector- and slope-restrictions // Automatica. 2015. Vol. 51, no. 1. P. 255–258.

10. *Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M.* Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture // Proceedings of the European Control Conference (ECC15). 2015. Linz, Austria. P. 981–985.

11. *Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M.* Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture // Automatica. 2015. Vol. 60. Issue C. P. 140–144.

12. *Звягинцева Т. Е.* О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования цикла периода четыре в двумерной дискретной системе // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 50–59.

Статья поступила в редакцию 17 ноября 2019 г.;
после доработки 9 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Звягинцева Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; zv_tatiana@mail.ru, t.zvyagintceva@spbu.ru

On the problem of Aizerman: Coefficient conditions for an existence of three-period and six-period cycles in a second-order discrete-time system*

T. E. Zvyagintseva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zvyagintseva T. E. On the problem of Aizerman: Coefficient conditions for an existence of three-period and six-period cycles in a second-order discrete-time system. *Vestnik*

*The work is supported in part by Russian Foundation for Basic Research (grant N 19-01-00388).

of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 309–318. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.213 (In Russian)

In this paper, an automatic control discrete-time system of the second order is studied. Nonlinearity of this system satisfies the generalized Routh — Hurwitz condition. Systems of this type are widely used in solving modern applied problems of the theory of automatic control. This work is a continuation of the research presented in the author's paper "On the problem of Aizerman: Coefficient conditions for an existence of four-period cycle in a second-order discrete-time system", where systems with two-periodic nonlinearity lying in the Hurwitz angle are studied. In the referenced paper, the conditions on the parameters under which a system with two-periodic nonlinearity can have a family of non-isolated four-period cycles are indicated and a method for constructing such nonlinearity is proposed. In this paper, it is assumed that the nonlinearity is three-periodic and lies in the Hurwitz angle. The system is studied for all possible values of the parameters. We explicitly indicate the conditions on the parameters under which it is possible to construct such a three-periodic nonlinearity that the system with specified nonlinearity is not globally asymptotically stable. It is shown that a family of three-period cycles and a family of six-period cycles can exist in the system with indicated nonlinearity. A method for constructing such nonlinearities is proposed. The cycles are not isolated, any solution of the system with the initial data lying on some specified ray is periodic.

Keywords: second-order discrete-time system, Aizerman conjecture, absolute stability, periodic solution.

References

1. Liberzon M. R., "Essays on the absolute stability theory", *Avtomatika i Telemekhanika* **67**, 1610–1644 (2006).

2. Aizerman M. A., "On a problem concerning the stability "in the large" of dynamical systems", *Uspekhi Mat. Nauk* **4**(4), 186–188 (1949). (In Russian)

3. Pliss V. A., "On the Aizerman's problem in the case of three simultaneous differential equations", *Dokl. Acad. Nauk USSR. Mathematics* **121**(3), 422–425 (1958). (In Russian)

4. Pliss V. A., *Some Problems of Theory of Motion Stability* (Leningrad Univ. Press, 1958). (In Russian)

5. Leonov G. A., "On the Aizerman problem", *Avtomatika i Telemekhanika* **70**(7), 1120–1131 (2009).

6. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Bragin V. O., "On problems of Aizerman and Kalman", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **43**, iss. 3, 148–162 (2010).

7. Gonzaga C. A., Jungers M., Daafouz J., "Stability analysis of discrete-time Lur'e systems", *Automatica* **48**(9), 2277–2283 (2012).

8. Ahmad N. S., Heath W. P., Li G., "LMI-based stability criteria for discrete-time Lur'e systems with monotonic, sector- and slope-restricted nonlinearities", *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(2), 459–465 (2013).

9. Park B. J., Park P., Kwon N. K., "An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with sector- and slope-restrictions", *Automatica* **51**(1), 255–258 (2015).

10. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M., "Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture", *Proceedings of the European Control Conference, ECC15, Linz*, 981–985 (2015).

11. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M., "Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture", *Automatica* **60**, issue C, 140–144 (2015).

12. Zvyagintseva T. E., "On the problem of Aizerman: coefficient conditions for an existence of four-period cycle in a second-order discrete-time system", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **53**, iss. 1 (2020).

Received: November 17, 2019
Revised: December 9, 2019
Accepted: September 12, 2019

Authors' information:

Tatiana E. Zvyagintseva — zv_tatiana@mail.ru, t.zvyagintceva@spbu.ru