УДК 517.925.53 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
MSC 37C75, 37C29, 34C37

Памяти В. А. Плисса

Устойчивость периодических решений периодических систем дифференциальных уравнений с гетероклиническим контуром*

Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Васильева Е. В.* Устойчивость периодических решений периодических систем дифференциальных уравнений с гетероклиническим контуром // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 297–308. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.212

Рассматривается двумерная периодическая система дифференциальных уравнений с двумя гиперболическими периодическими решениями. Предполагается, что в пересечении устойчивых и неустойчивых многообразий неподвижных точек лежат гетероклинические решения, точнее, предполагается наличие гетероклинического контура. Исследуется случай, когда устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются нетрансверсально в точках хотя бы одного гетероклинического решения. Существуют различные способы нетрансверсального пересечения устойчивого многообразия с неустойчивым многообразием в точках гетероклинического решения. Ранее в работах Л. П. Шильникова, С. В. Гонченко, Б. Ф. Иванова и других авторов предполагалось, что в точках нетрансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразия имеется касание не более чем конечного порядка. Из работ этих авторов следует, что существуют системы, у которых в окрестности гетероклинического контура имеются устойчивые периодические решения. В данной работе изучаются гетероклинические контуры в предположении, что в точках нетрансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразия в точках гетероклинического решения касание не является касанием конечного порядка. Показано, что в окрестности такого гетероклинического контура может лежать счетное множество периодических решений, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Ключевые слова: периодические системы дифференциальных уравнений, гиперболические решения, гетероклинические решения, нетрансверсальное пересечение, устойчивость.

В предлагаемой работе исследуются двумерные периодические системы дифференциальных уравнений с негрубым гетероклиническим контуром. Основная цель работы — выделить множество систем, у которых в ограниченной окрестности гетероклинического контура лежит бесконечное множество устойчивых траекторий с отделенными от нуля характеристическими показателями. Пример такой системы приведен в монографии [1].

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00388).
© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

Пусть
$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) \tag{1}$$
— двумерная система дифференциальных уравнений, где x, X — двумерные векторы, $X(t,x)$ непрерывна при любых $(t,x) \in \mathbb{R}^3$, периодична по независимой переменной t с периодом, равным единице, и непрерывно дифференцируема по координатам вектора x. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, $n \geq 1$, — различные гиперболические периодические решения системы (1) с периодом, равным единице. Предполагается, что характеристические показатели этих решений имеют разные знаки. Ясно, что $\varphi_i(0) \neq \varphi_j(0)$ при $i \neq j$. Пусть $x(t,x_0)$ — решение системы (1) с начальными данными $t = 0$, $x = x_0$.

Определим
$$W^s(\varphi_i(0)) = \left\{x_0 \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t\to+\infty} \|x(t,x_0) - \varphi_i(t)\| = 0\right\}, i = 1,2,\dots,n,$$
$$W^u(\varphi_i(0)) = \left\{x_0 \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t\to-\infty} \|x(t,x_0) - \varphi_i(t)\| = 0\right\}, i = 1,2,\dots,n.$$
Эти множества лежат в устойчивых и неустойчивых многообразиях решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…,$\varphi_n(t)$.

Устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических решений $W^s(\varphi_i(t))$, $W^u(\varphi_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$, имеют вид
$$W^s(\varphi_i(t)) = \{(t,x) : x = x(t,x_0), x_0 \in W^s(\varphi_i(0))\},$$
$$W^u(\varphi_i(t)) = \{(t,x) : x = x(t,x_0), x_0 \in W^u(\varphi_i(0))\}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Предположим, что существуют такие решения $x(t,w_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, что
$$\lim_{t\to-\infty} \|x(t,w_i) - \varphi_i(t)\| = \lim_{t\to+\infty} \|x(t,w_i) - \varphi_{i+1}(t)\| = 0, \quad i = 1,2,\dots,n-1,$$
$$\lim_{t\to-\infty} \|x(t,w_n) - \varphi_n(t)\| = \lim_{t\to+\infty} \|x(t,w_n) - \varphi_1(t)\| = 0,$$
где точки $w_i \in W^s(\varphi_{i+1}(0)) \bigcap W^u(\varphi_i(0))$ для $i = 1,2,\dots,n-1$ и $w_n \in W^s(\varphi_1(0)) \bigcap W^u(\varphi_n(0))$. При $n > 1$ решения $x(t,w_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, называются *гетероклиническими* решениями. При $i = 1, 2, \dots, n-1$ траектории решений $\varphi_i(t)$ и $\varphi_{i+1}(t)$ лежат в предельных множествах решений $x(t,w_i)$, а траектории решений $\varphi_n(t)$ и $\varphi_1(t)$ — в предельных множествах решения $x(t,w_n)$. Множество, состоящее из траекторий решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…,$\varphi_n(t)$, $x(t,w_1)$, $x(t,w_2)$,…,$x(t,w_n)$, называется *гетероклиническим контуром* системы (1). Ясно, что такой контур лежит в ограниченном множестве фазового пространства. Гетероклинические контуры исследуются достаточно давно, в работах [2, 3] изучались трехмерные автономные системы с гетероклиническим контуром.

Гетероклинический контур называется *грубым*, если устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических решений пересекаются трансверсально во всех точках решений $x(t,w_i)$, в противном случае контур называется *негрубым* гетероклиническим контуром.

При $n = 1$ говорят, что у системы (1) имеется гиперболическое периодическое решение и гомоклиническое к нему решение. Гомоклинические решения бывают грубыми и негрубыми (трансверсальными и нетрансверсальными) в зависимости от способа пересечения устойчивого и неустойчивого многообразия. Как следует из работ [4, 5], свойства множества устойчивых периодических решений, траектории которых лежат в достаточно малой окрестности гомоклинического решения, зависят от характера касания устойчивого многообразия с неустойчивым. В работе [5] исследуются системы дифференциальных уравнений с нетрансверсальным гомоклиническим решением, предполагается, что устойчивое и неустойчивое многообразия имеют касание конечного порядка в точках этого решения. Получены условия, при которых в произвольной окрестности гомоклинического решения лежит бесконечное множество устойчивых периодических решений, но один из характеристических показателей этих решений стремится к нулю с возрастанием периода. В работе [6] показано, что в случае, если касание устойчивого многообразия с неустойчивым не является касанием конечного порядка, в окрестности гомоклинического решения может лежать бесконечное множество устойчивых траекторий, с отделенными от нуля характеристическими показателями.

В данной работе изучаются системы с негрубыми гетероклиническими контурами.

Определим преобразование Пуанкаре системы (1) как

$$T(x_0) = x(1, x_0).$$

При $n = 2$ преобразование Пуанкаре имеет две неподвижные гиперболические точки $\varphi_i(0)$, $i = 1, 2$, и точки w_i, $i = 1, 2$, траектории которых стремятся к неподвижным точкам с возрастанием и убыванием степени преобразования Пуанкаре,

$$\lim_{k\to+\infty} \|T^k(w_1) - \varphi_2(0)\| = \lim_{k\to+\infty} \|T^{-k}(w_1) - \varphi_1(0)\| = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \|T^k(w_2) - \varphi_1(0)\| = \lim_{k\to+\infty} \|T^{-k}(w_2) - \varphi_2(0)\| = 0.$$

Траектории этих точек лежат в пересечениях устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических точек, точнее $w_1 \in W^u(\varphi_1(0)) \bigcap W^s(\varphi_2(0))$, $w_2 \in W^s(\varphi_1(0)) \bigcap W^u(\varphi_2(0))$. Точки, лежащие в пересечениях устойчивых и неустойчивых многообразий, называются *гетероклиническими* точками. Множество, состоящее из траекторий точек $\varphi_i(0)$, $i = 1, 2$, w_i, $i = 1, 2$, назовем *гетероклиническим контуром диффеоморфизма* T. Гетероклинический контур называется *грубым*, если устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально во всех гетероклинических точках. В противном случае контур называется *негрубым*.

В работе [7] исследуется окрестность негрубого гетероклинического контура диффеоморфизма плоскости в себя. Контур состоит из двух гиперболических периодических точек и орбит двух точек, неограниченно приближающихся к периодическим с возрастанием и убыванием степени диффеоморфизма. Предполагается, что устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболических точек имеют не более чем квадратичное касание. Показано, что существуют диффеоморфизмы, близкие к заданному, у которых имеется бесконечное множество устойчивых периодических точек.

В предлагаемой работе рассматриваются двумерные периодические системы с негрубым гетероклиническим контуром с $n = 2$. Основная цель работы — показать, что при определенном способе касания устойчивого многообразия с неустойчивым в гетероклинических точках в произвольной окрестности такого контура лежит бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями. Заметим, что в исследуемом случае касание устойчивого многообразия с неустойчивым не является касанием конечного порядка, тем самым оно не является квадратичным.

Решение системы (1) $x(t, x_0)$ является периодическим решением с наименьшим периодом m тогда и только тогда, когда $T^j(x_0) \neq x_0$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $T^m(x_0) = x_0$. Пусть x_0 — периодическая точка преобразования Пуанкаре с наименьшим периодом m, а ρ_i, $i = 1, 2$, — собственные числа матрицы $DT^m(x_0)$. Тогда характеристические показатели решения $x(t, x_0)$ и периодической точки x_0 могут быть найдены по формулам

$$\nu_i = m^{-1} \ln |\rho_i|, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Решение $x(t, x_0)$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все характеристические показатели отрицательны.

Наряду с системой (1) рассмотрим двумерную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = Y_1(t, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = Y_2(t, y_1, y_2), \end{cases} \tag{3}$$

где $t \in [0, 1]$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, Y_1, Y_2 — непрерывные и непрерывно дифференцируемые по y_1, y_2 функции. Предположим, что частные производные $\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}$, $\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_2}$,$\dfrac{\partial Y_2}{\partial y_1}$, $\dfrac{\partial Y_2}{\partial y_2}$ ограничены при любых y_1, y_2, и $t \in [0, 1]$. Через $y_1(t, {y_1}^0 {y_2}^0)$, $y_2(t, {y_1}^0 {y_2}^0)$ обозначим решение системы (3) с начальными данными $t = 0$, $y_1 = {y_1}^0$, $y_2 = {y_2}^0$.

Определим диффеоморфизм плоскости в себя

$$F \begin{pmatrix} {y_1}^0 \\ {y_2}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(1, {y_1}^0, {y_2}^0) \\ y_2(1, {y_1}^0, {y_2}^0) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Дана система* (3), Y_1, Y_2 *— непрерывные при* $t \in [0, 1]$ *и любых* y_1, y_2, *непрерывно дифференцируемые по* y_1, y_2 *функции. Пусть* $\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}$, $\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_2}$, $\dfrac{\partial Y_2}{\partial y_1}$, $\dfrac{\partial Y_2}{\partial y_2}$ *ограничены при любых* y_1, y_2 *и* $t \in [0, 1]$. *Тогда существует двумерная система дифференциальных уравнений вида* (1), *правые части которой непрерывны по всем переменным, непрерывно дифференцируемы по* x_1, x_2, *периодичны по переменной* t *с периодом, равным единице, преобразование Пуанкаре которой совпадает с* F.

Доказательство теоремы 1 приведено в [1].

В данной работе рассмотрим множество систем вида (3), у которых соответствующий диффеоморфизм F имеет гетероклинический контур, в окрестности которого лежит бесконечное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Пусть система (3) такова, что существуют $a > 0$, $b < 0$ такие, что $Y_i(t, 0, 0) = 0$, $Y_i(t, a, b) = 0$, последние равенства выполняются при любых $t \in [0, 1]$ и $i = 1, 2$. Начало координат и точка $M = (a, b)$ являются неподвижными точками диффеоморфизма F. Пусть λ_1, μ_1 — собственные числа матрицы $DF(0)$, а λ_2, μ_2 — собственные числа матрицы $DF(M)$.

Пусть λ_i, $i=1,2$, μ_i, $i=1,2$, таковы, что

$$0<\lambda_1<1<\mu_1, \quad 0<\lambda_2<1<\mu_2. \tag{5}$$

Пусть $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0, \theta>0$ таковы, что

$$\lambda_1(\mu_2)^{\gamma_2}=1, \quad \lambda_2(\mu_1)^{\gamma_1}=1, \quad (\mu_2)^{\theta}=\mu_1.$$

Предположим, что

$$(\gamma_1)^{-1}<\gamma_2. \tag{6}$$

Из (6) следует, что хотя бы одно из произведений $\lambda_1\mu_2$, $\lambda_2\mu_1$ строго меньше единицы.

Точки $(0,0)$, (a,b) являются гиперболическими неподвижными точками диффеоморфизма F.

Пусть положительные величины A, B, p_1, p_2, q_1, q_2 таковы, что $a-2B>\mu_1 A$, $b+B>A$, $\sqrt{\lambda_1}A<p_1<A$, $b+\sqrt{\mu_2}B<p_2<b+\mu_2 B$, $A<q_1<\mu_1 A$, $a-B<q_2<a-\sqrt{\lambda_2}B$, а положительная величина α меньше любой из следующих величин: $p_1-\sqrt{\lambda_1}A$, $A-p_1$, $p_2-\left(b+\sqrt{\mu_2}B\right)$, $b+\mu_2 B-p_2$, q_1-A, $\mu_1 A-q_1$, $q_2-(a-B)$, $a-\sqrt{\lambda_2}B-q_2$.

Пусть $f(t)$, $g(t)$ — такие непрывно дифференцируемые при $t\in[-\alpha,\alpha]$ функции, что $f(0)=g(0)=0$.

Определим множества $V_i(t)\subset\mathbb{R}^3$, $i=1, \ldots, 5$,

$$V_1(t)=\left\{0\le t\le 1, |y_1|\le {\mu_1}^t A,\ |y_2|\le {\lambda_1}^t A\right\},$$

$$V_2(t)=\left\{\begin{array}{c} 0\le t\le 1, \\ |y_1-(q_2-q_1)t-q_1|\le\alpha, \\ |y_2-f(-y_1+(q_2-q_1)t+q_1)t-bt|\le\alpha \end{array}\right\},$$

$$V_3(t)=\left\{0\le t\le 1, |y_1-a|\le {\lambda_2}^t B,\ |y_2-b|\le {\mu_2}^t B\right\},$$

$$V_4(t)=\left\{\begin{array}{c} 0\le t\le 1, \\ |(y_1-q_2)\cos(\pi t)+(y_2-p_2)\sin(\pi t)+q_2-a|\le\alpha, \\ |(-y_1+q_2)\sin(\pi t)+(y_2-p_2)\cos(\pi t)|\le\alpha \end{array}\right\},$$

$$V_5(t)=\left\{\begin{array}{c} 0\le t\le 1, \\ |y_1-g(y_2-(p_1-p_2)t-p_2)t-a(t-1)+2q_2(t-1)|\le\alpha, \\ |y_2-(p_1-p_2)t-p_2|\le\alpha \end{array}\right\}.$$

Считаем, что величина $\alpha>0$ настолько мала, что замкнутые ограниченные множества $V_i(t)$, $i=1, \ldots, 5$, попарно не пересекаются.

Предположим, что правые части системы (3) удовлетворяют следующим условиям:

$$Y_1(t,y_1,y_2)=(\ln\mu_1)y_1, \quad Y_2(t,y_1,y_2)=(\ln\lambda_1)y_2 \tag{7}$$

при $(t,y_1,y_2)\in V_1(t)$,

$$Y_1(t,y_1,y_2)=q_2-q_1, \quad Y_2(t,y_1,y_2)=f(-y_1+(q_2-q_1)t+q_1)+b \tag{8}$$

при $(t, y_1, y_2) \in V_2(t)$,

$$Y_1(t, y_1, y_2) = (\ln \lambda_2)(y_1 - a), \quad Y_2(t, y_1, y_2) = (\ln \mu_2)(y_2 - b) \tag{9}$$

при $(t, y_1, y_2) \in V_3(t)$,

$$Y_1(t, y_1, y_2) = -\pi(y_2 - p_2), \quad Y_2(t, y_1, y_2) = \pi(y_1 - q_2) \tag{10}$$

при $(t, y_1, y_2) \in V_4(t)$,

$$Y_1(t, y_1, y_2) = g(y_2 - (p_1 - p_2)t - p_2) + a - 2q_2, \quad Y_2(t, y_1, y_2) = p_1 - p_2 \tag{11}$$

при $(t, y_1, y_2) \in V_5(t)$.

Предположим, что система (3) удовлетворяет условиям (7)–(11). Тогда диффеоморфизм F, определенный условиями (4), имеет гетероклинический контур, который состоит из начала координат, точки $M = (a, b)$ и орбит точек $(0, p_1)$, $(q_1, 0)$. Этот контур является негрубым, если справедливо хотя бы одно из равенств $\dfrac{df(0)}{dt} = 0$, $\dfrac{dg(0)}{dt} = 0$. Пусть функция $f(t)$ s раз непрерывно дифференцируема в точке ноль $(s > 1)$, причем $\dfrac{df(0)}{dt} = \cdots = \dfrac{d^{(s-1)}f(0)}{dt^{(s-1)}} = 0$, $\dfrac{d^s f(0)}{dt^s} \neq 0$. В этом случае говорят, что касание устойчивого и неустойчивого многообразия гиперболической точки является *касанием конечного порядка* s, при $s = 2$ касание является квадратичным. В работе [7] изучалась окрестность негрубого гетероклинического контура, предполагалось, что касания устойчивых и неустойчивых многообразий являются либо квадратичными, либо трансверсальными. В предлагаемой работе рассматривается случай, когда среди касаний устойчивых и неустойчивых многообразий имеются такие касания, которые не являются касаниями конечного порядка.

Способ касания устойчивых и неустойчивых многообразий диффеоморфизма F в точках (q_2, b), $(0, p_1)$ определяется свойствами функций $f(t)$, $g(t)$. Определим свойства этих функций с помощью нескольких последовательностей. Пусть m_k, n_k — такие возрастающие последовательности натуральных чисел, что

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{n_k}{m_k} = \gamma.$$

Предположим, что

$$\gamma \in \left((\gamma_1)^{-1}, \gamma_2\right), \quad \gamma\gamma_1 - 1 \neq \theta(\gamma_2 - \gamma). \tag{12}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{k \to +\infty} {\lambda_1}^{m_k} {\mu_2}^{n_k} = \lim_{k \to +\infty} {\lambda_2}^{n_k} {\mu_1}^{m_k} = 0.$$

Пусть σ_k, ε_k, Δ_k — такие последовательности действительных чисел, что

$$\sigma_k > \sigma_{k+1} > 0, \quad \varepsilon_k > 0, \quad \Delta_k > \Delta_{k+1} > 0,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \sigma_k = \lim_{k \to +\infty} \varepsilon_k = \lim_{k \to +\infty} \Delta_k = 0.$$

Предположим, что

$$\sigma_k - \varepsilon_k - \sigma_{k+1} - \varepsilon_{k+1} > 0. \tag{13}$$

Пусть $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям при любых k:

$$\left|f(\sigma_k) - (p_2 - \Delta_k - b){\mu_2}^{-n_k} + {\lambda_1}^{m_k}(p_1 + \Delta_k)\right| < 0.5\varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}{\mu_2}^{-n_k}. \tag{14}$$

Предположим, что существует такая, не зависящая от k величина $\omega > \min\left[\gamma\gamma_1 - 1, \theta(\gamma_2 - \gamma)\right] + 1$, что для производной функции $f(t)$ при любых k при $t \in (\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k)$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{df(t)}{dt}\right| < {\mu_1}^{-\omega m_k}{\mu_2}^{-n_k}. \tag{15}$$

Пусть $g(t)$ при любых k удовлетворяет следующим условиям:

$$\left|g(\Delta_k) - (q_1 - \sigma_k){\mu_1}^{-m_k} - {\lambda_2}^{n_k}(q_2 - \sigma_k - a)\right| < 0.25\varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}. \tag{16}$$

Предположим, что в достаточно малой окрестности нуля верно неравенство

$$\left|\frac{dg(t)}{dt}\right| < 0.5. \tag{17}$$

Из (14), (15) следует, что все существующие производные функции $f(t)$ равны нулю в точке 0, следовательно, касание устойчивого многообразия с неустойчивым не является касанием конечного порядка.

Теорема 2. *Пусть дана система* (3), *выполнены условия теоремы* 1 *и условия* (5)–(17). *Тогда диффеоморфизм F, определенный формулами* (4), *имеет в произвольной окрестности точки* $(0, p_1)$ *бесконечное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Следствие. *Даны системы* (1), (3). *Пусть система* (3) *удовлетворяет условиям теоремы* 2, *а преобразование Пуанкаре системы* (1) *совпадает с диффеоморфизмом F, определенным формулами* (4). *Тогда система* (1) *имеет бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями, траектории которых лежат в ограниченном множестве фазового пространства.*

Для доказательства теоремы 2 следует ввести обозначения.

Пусть $U_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, 5$ — замкнутые ограниченные окрестности точек $(0, p_1)$, $(q_1, 0)$, (q_2, b), (a, p_2), $(2q_2 - a, p_2)$ вида

$$U_1 = \left\{|y_1| \le \alpha,\ |y_2 - p_1| \le \alpha\right\},$$

$$U_2 = \left\{|y_1 - q_1| \le \alpha,\ |y_2| \le \alpha\right\},$$

$$U_3 = \left\{|y_1 - q_2| \le \alpha,\ |y_2 - b| \le \alpha\right\},$$

$$U_4 = \left\{|y_1 - a| \le \alpha,\ |y_2 - p_2| \le \alpha\right\},$$

$$U_5 = \left\{|y_1 - (2q_2 - a)| \le \alpha,\ |y_2 - p_2| \le \alpha\right\}.$$

На этих множествах диффеоморфизм F имеет вид

$$F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 y_1 \\ \lambda_1 y_2 \end{pmatrix}$$

при $(y_1, y_2) \in U_1$,

$$F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 - q_1 + y_1 \\ f(-y_1 + q_1) + b + y_2 \end{pmatrix}$$

при $(y_1, y_2) \in U_2$,

$$F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda_2(y_1 - a) \\ b + \mu_2(y_2 - b) \end{pmatrix}$$

при $(y_1, y_2) \in U_3$

$$F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q_2 - y_1 \\ 2p_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

при $(y_1, y_2) \in U_4$,

$$F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(y_2 - p_2) + a - 2q_2 + y_1 \\ p_1 - p_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

при $(y_1, y_2) \in U_5$.

Определим следующие последовательности множеств:

$$U_1{}^{(k)} = \left\{ \begin{array}{c} |y_1 - (q_1 - \sigma_k)\mu_1{}^{-m_k}| \le \varepsilon_k \mu_1{}^{-m_k} \\ |y_2 - (p_1 + \Delta_k)| \le \varepsilon_k \mu_1{}^{-m_k} \end{array} \right\},$$

$$U_2{}^{(k)} = F^{m_k}(U_1{}^{(k)}) = \left\{ \begin{array}{c} |y_1 - (q_1 - \sigma_k)| \le \varepsilon_k \\ |y_2 - \lambda_1{}^{m_k}(p_1 + \Delta_k)| \le \varepsilon_k \mu_1{}^{-m_k} \lambda_1{}^{m_k} \end{array} \right\},$$

$$U_3{}^{(k)} = \left\{ \begin{array}{c} |y_1 - (q_2 - \sigma_k)| \le \varepsilon_k \\ |y_2 - (b + \mu_2{}^{-n_k}(p_2 - b - \Delta_k))| \le \varepsilon_k \mu_1{}^{-m_k} \mu_2{}^{-n_k} \end{array} \right\},$$

$$U_4{}^{(k)} = F^{n_k}(U_3{}^{(k)}) = \left\{ \begin{array}{c} |y_1 - (a + \lambda_2{}^{n_k}(q_2 - \sigma_k - a))| \le \varepsilon_k \lambda_2{}^{n_k} \\ |y_2 - (p_2 - \Delta_k)| \le \varepsilon_k \mu_1{}^{-m_k} \end{array} \right\},$$

$$U_5{}^{(k)} = F(U_4{}^{(k)}) = \left\{ \begin{array}{c} |-y_1 - (a + \lambda_2{}^{n_k}(q_1 - \sigma_k - a)) + 2q_2| \le \varepsilon_k \lambda_2{}^{n_k} \\ |-y_2 + p_2 + \Delta_k| \le \varepsilon_k \mu_1{}^{-m_k} \end{array} \right\}.$$

При достаточно больших k получаем $U_i{}^{(k)} \subset U_i$, $i = 1, \ldots, 5$. В дальнейшем предполагается, что последние включения выполняются для всех k.

Доказательству теоремы 2 предпошлем лемму.

Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *тогда справедливы следующие включения:*

$$F^{(m_k + n_k + 3)}\left(U_1{}^{(k)}\right) \subset U_1{}^{(k)}. \tag{18}$$

Доказательство леммы. Для того чтобы доказать включения (18), достаточно доказать следующие соотношения:

$$F\left(U_2{}^{(k)}\right) \subset U_3{}^{(k)},\ F\left(U_5{}^{(k)}\right) \subset U_1{}^{(k)}. \tag{19}$$

Пусть $(y_1, y_2) \in U_2{}^{(k)}$, $y_1 = q_1 - \sigma_k + u$, $y_2 = \lambda_1{}^{m_k}(p_1 + \Delta_k) + v$, где $|u| \le \varepsilon_k$, $|v| \le \varepsilon_k \mu_1{}^{-m_k} \lambda_1{}^{m_k}$, тогда

$$F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 - \sigma_k + u \\ f(\sigma_k - u) + b + \lambda_1{}^{m_k}(p_1 + \Delta_k) + v \end{pmatrix}.$$

По теореме о среднем значении имеем $f(\sigma_k - u) = f(\sigma_k) + \dfrac{df(\sigma_k - \eta u)}{dy_1}u$, где $|\eta| < 1$. Ясно, что справедливы следующие неравенства:

$$\left|f(\sigma_k - u) + b + {\lambda_1}^{m_k}(p_1 + \Delta_k) + v - \left(b + {\mu_2}^{-n_k}(p_2 - b - \Delta_k)\right)\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{df(\sigma_k - \eta u)}{dy_1}\right| |u| + |v| + 0.5\varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}{\mu_2}^{-n_k},$$

$$\left|\frac{df(\sigma_k - \eta u)}{dy_1}\right| |u| < \varepsilon_k {\mu_1}^{-\omega m_k}{\mu_2}^{-n_k} < 0.25\varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}{\mu_2}^{-n_k},$$
$$|v| \leq \varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}{\lambda_1}^{m_k} < 0.25\varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}{\mu_2}^{-n_k}.$$

Из этих неравеств следует первое из включений (19).

Пусть $(y_1, y_2) \in {U_5}^{(k)}$, $y_1 = -\left(a + {\lambda_2}^{n_k}(q_2 - \sigma_k - a)\right) + 2q_2 + u$, $y_2 = (p_2 + \Delta_k) + v$, где $|u| \leq \varepsilon_k {\lambda_2}^{n_k}$, $|v| \leq \varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}$, тогда

$$F\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\Delta_k + v) - {\lambda_2}^{n_k}(q_2 - \sigma_k - a) + u \\ p_1 + \Delta_k + v \end{pmatrix}.$$

По теореме о среднем значении имеем $g(\Delta_k + v) = g(\Delta_k) + \dfrac{dg(\Delta_k + \eta v)}{dy_2}v$, где $|\eta| < 1$, следовательно, с учетом (16), (17), получаем

$$\left|g(\Delta_k + v) - {\lambda_2}^{n_k}(q_2 - \sigma_k - a) + u - (q_1 - \sigma_k){\mu_1}^{-m_k}\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{dg(\Delta_k + \eta v)}{dy_2}\right| |v| + |u| + 0.25\varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k},$$

где

$$\left|\frac{dg(\Delta_k + \eta v)}{dy_2}\right| |v| < 0.5\varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k},$$
$$|u| \leq \varepsilon_k {\lambda_2}^{n_k} < 0.25\varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}.$$

Включения (18) следуют из последних неравенств.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. По теореме Брауэра в силу (18) при любом k множество ${U_1}^{(k)}$ содержит периодическую точку диффеоморфизма F. Пусть $\overline{u}^1(k) \in {U_1}^{(k)}$ — периодическая точка. Ясно, что

$$F^{m_k+n_k+3}\left(\overline{u}^1(k)\right) = \overline{u}^1(k).$$

Пусть $\overline{u}^2(k) = F^{m_k}(\overline{u}^1(k))$, $\overline{u}^3(k) = F(\overline{u}^2(k))$, $\overline{u}^4(k) = F^{n_k}(\overline{u}^3(k))$, $\overline{u}^5(k) = F(\overline{u}^4(k))$. Ясно, что $\overline{u}^i(k) \in {U_i}^{(k)}$, $i = 1, \ldots, 5$. Обозначим координаты точек $\overline{u}^2(k)$, $\overline{u}^5(k)$ как $\overline{u}^2(k) = ({\overline{y}_1}^2(k), {\overline{y}_2}^2(k))$, $\overline{u}^5(k) = ({\overline{y}_1}^5(k), {\overline{y}_2}^5(k))$. Ясно, что

$${\overline{y}_1}^2(k) \in (q_1 - \sigma_k - \varepsilon_k, q_1 - \sigma_k + \varepsilon_k),$$
$${\overline{y}_2}^5(k) \in \left(p_2 + \Delta_k - \varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}, p_2 + \Delta_k + \varepsilon_k {\mu_1}^{-m_k}\right).$$

Пусть

$$\Psi_k = DF^{m_k+n_k+3}\left(\overline{u}^1(k)\right).$$

Введем обозначения $f_k = \dfrac{df(-\overline{y}_1{}^2(k)+q_1)}{dy_1}$, $g_k = \dfrac{dg(\overline{y}_2{}^5(k)-p_2)}{dy_2}$. Из (15), (17) имеем
$$|f_k| < \mu_1{}^{-\omega m_k}\mu_2{}^{-n_k}, \quad |g_k| < 0.5.$$

Матрицу Ψ_k можно представить как произведение двух матриц
$$\Psi_k = \begin{pmatrix} -\lambda_2{}^{n_k} & -g_k\mu_2{}^{n_k} \\ 0 & -\mu_2{}^{n_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1{}^{m_k} & 0 \\ f_k\mu_1{}^{m_k} & \lambda_1{}^{m_k} \end{pmatrix},$$
причем след и определитель этой матрицы имеют вид
$$\det\Psi_k = \lambda_1{}^{m_k}\mu_2{}^{n_k}\lambda_2{}^{n_k}\mu_1{}^{m_k},$$
$$\mathrm{Tr}\Psi_k = -\lambda_1{}^{m_k}\mu_2{}^{n_k} - \lambda_2{}^{n_k}\mu_1{}^{m_k} - f_k g_k\mu_2{}^{n_k}\mu_1{}^{m_k}.$$

Предположим, что $\gamma\gamma_1 - 1 < \theta(\gamma_2-\gamma)$, обозначим через β_k, τ_k следующие последовательности:
$$\beta_k = \gamma_1 n_k - m_k, \quad \tau_k = \theta(\gamma_2 m_k - n_k).$$

Из (12) следует
$$\beta_k = m_k\left(\gamma_1\frac{n_k}{m_k} - 1\right) > 0, \quad \lim_{k\to+\infty}\beta_k = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty}\frac{\beta_k}{m_k} = \gamma_1\gamma - 1 > 0,$$
$$\tau_k = m_k\left(\theta\left(\gamma_2 - \frac{n_k}{m_k}\right)\right) > 0, \quad \lim_{k\to+\infty}\tau_k = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty}\frac{\tau_k}{m_k} = \theta(\gamma_2-\gamma) > 0,$$
$$\lim_{k\to+\infty}(\beta_k - \tau_k) = -\infty, \quad \lim_{k\to+\infty}\frac{(\beta_k-\tau_k)}{m_k} = \gamma_1\gamma - 1 - \theta(\gamma_2-\gamma) < 0.$$

Пользуясь последними соотношениями и условиями (15), имеем
$$\det\Psi_k = \mu_1{}^{-\tau_k-\beta_k}, \quad \mathrm{Tr}\Psi_k = -\mu_1{}^{-\beta_k} - \mu_1{}^{-\tau_k} - f_k g_k\mu_1{}^{m_k}\mu_2{}^{n_k} = -\mu_1{}^{-\beta_k}(1+\psi_k),$$
где $\lim\limits_{k\to+\infty}\psi_k = 0$.

Пусть $\rho_i(k)$, $i=1,2,$ — собственные числа матрицы Ψ_k. Ясно, что
$$\rho_i(k) = 0.5\mathrm{Tr}\Psi_k \mp 0.5\left((\mathrm{Tr}\Psi_k)^2 - 4\det\Psi_k\right)^{0.5}.$$
Легко видеть, что
$$|\rho_1(k)| = 0.5\mu_1{}^{-\beta_k}\left|1+\psi_k+\left[(1+\psi_k)^2 - 4\mu_1{}^{(\beta_k-\tau_k)}\right]^{0.5}\right| = 0.5\mu_1{}^{-\beta_k}S_k,$$
где S_k определяются последними соотношениями. Ясно, что S_k положительны, ограничены и отделены от нуля.

Очевидно, что
$$|\rho_2(k)| = |\det\Psi_k|\,|\rho_1(k)|^{-1},$$
откуда
$$|\rho_2(k)| = \mu_1{}^{-\tau_k}Q_k,$$
где Q_k положительны, ограничены и отделены от нуля.

Характеристические показатели $\nu_i(k)$, $i = 1, 2$, точек $\overline{u}_k^1$ находим по формулам (2), получаем

$$\nu_i(k) = (m_k + n_k + 3)^{-1} \ln |\rho_i(k)| .$$

С учетом (12) получим

$$\nu_1(k) \le -\frac{(\gamma_1 \gamma - 1) \ln \mu_1}{2(\gamma + 1)},$$

$$\nu_2(k) \le -\frac{\theta(\gamma_2 - \gamma) \ln \mu_1}{2(\gamma + 1)}.$$

Предположим, что $\gamma\gamma_1 - 1 > \theta(\gamma_2 - \gamma)$, тогда можно положить

$$\beta_k = \theta(\gamma_2 m_k - n_k), \quad \tau_k = \gamma_1 n_k - m_k,$$

и рассуждения, аналогичные приведенным, покажут, что характеристические показатели точек $\overline{u}^1(k)$ отрицательны и отделены от нуля.

Теорема доказана.

Литература

1. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.

2. *Чернышев В. Е.* Структура окрестности гомоклинического контура с седловой точкой покоя // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 9. С. 1531–1536.

3. *Чернышев В. Е.* Возмущение гетероклинических циклов, содержащих седло-фокусы // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 5. С. 712–713.

4. *Newhouse Sh.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. Vol. 12. P. 9–18.

5. *Иванов Б. Ф.* Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1411–1419.

6. *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические решения периодических систем дифференциальных уравнений // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 14–21. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.102

7. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 216. С. 76–125.

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2019 г.;
после доработки 28 ноября 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук, проф.; ekvas1962@mail.ru

Stability of periodic solutions of periodic systems of differential equations with a heteroclinic contour*

E. V. Vasil'eva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vasil'eva E. V. Stability of periodic solutions of periodic systems of differential equations with a heteroclinic contour. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 297–308.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.212 (In Russian)

A two-dimensional periodic system of differential equations with two hyperbolic periodic solutions is considered, it is assumed that heteroclinic solutions lie at the intersection of stable and unstable manifolds of fixed points, more precisely, the existence of a heteroclinic contour is assumed. We study the case when stable and unstable manifolds intersect non-transversally at points of at least one heteroclinic solution. There are various ways of non-transversally intersecting a stable manifold with an unstable manifold at the points of a heteroclinic solution. Earlier in the works of L. P. Shil'nikov, S. V. Gonchenko, B. F. Ivanov and other authors, it was assumed that at the points of non-transversal intersection of a stable and unstable manifold there is a tangency of no more than finite order. It follows from the works of these authors that there exist systems in which there are stable periodic solutions in the neighborhood of the heteroclinic contour. In this paper, heteroclinic contours are studied under the assumption that at the points of non-transversal intersection of the stable and unstable manifold at the points of the heteroclinic solution, tangency is not a tangency of finite order. It is shown that in the neighborhood of such a heteroclinic contour there is situated a countable set of periodic solutions whose characteristic exponents are separated from zero.

Keywords: periodic systems of differential equations, hyperbolic solutions, heteroclinic solutions, nontransversal intersection, stability.

References

1. Pliss V. A., *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations* (Nauka Publ., Moscow, 1977). (In Russian)

2. Chernyshev V. E., "Structure of the Neighborhood of a Homoclinic Contour with a Saddle Point of Rest", *Differ. Uravn.* **21** (9), 1531–1536 (1985). (In Russian)

3. Chernyshev V. E., "Perturbation of the Heteroclinic Cycles That Contains Saddle-foci", *Differ. Equ.* **33** (5), 717–719 (1997).

4. Newhouse Sh., "Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks", *Topology* **12**, 9–18 (1973).

5. Ivanov B. F., "Stability of the Trajectories That Do Not Leave the Neighborhood of a Homoclinic Curve", *Differ. Uravn.* **15** (8), 1411–1419 (1979). (In Russian)

6. Vasil'eva E. V., "Stable Periodic Solutions of Periodic Systems of Differential Equations", *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **51**, issue 1, 9–14 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118010119

7. Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shil'nikov L. P., "On Newhouse Domains of Two-dimensional Diffeomorphisms that are Close to a Diffeomorphism with a Structurally Unstable Heteroclinic Contour", *Proc. Steklov Inst. Math.* **216**, 70–118 (1997).

Received: November 1, 2019
Revised: November 28, 2019
Accepted: December 12, 2019

Author's information:

Ekaterina V. Vasil'eva — ekvas1962@mail.ru

*The work is supported in part by Russian Foundation for Basic Research (grant N 19-01-00388).