ПАМЯТИ В. А. ПЛИССА

УДК 517.925
MSC 34D20, 93D05, 34D10

Памяти В. А. Плисса

Об устойчивости нелинейного центра при квазипериодических возмущениях

В. В. Басов, Ю. Н. Бибиков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Басов В. В., Бибиков Ю. Н.* Об устойчивости нелинейного центра при квазипериодических возмущениях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 269–276.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.209

Рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения с особой точкой типа «центр» в начале координат. Впервые такая задача изучалась А. М. Ляпуновым для автономных систем. Исследования А. М. Ляпунова были продолжены авторами для систем с периодической зависимостью от времени. В данной работе рассматриваются квазипериодические по времени системы при выполнении стандартного условия диофантового типа, накладываемого на базисные частоты квазипериодических функций. Рассматриваемую задачу можно интерпретировать как вопрос об устойчивости положения равновесия осциллятора $\ddot{x} + x^{2n-1} = 0$ ($n \geq 2$ — целое) при «малых» квазипериодических возмущениях.

Ключевые слова: устойчивость, центр, квазипериодическая функция.

1. Введение. С 19 февраля 1960 года и до последнего дня своей жизни — 4 января 2019 года — Виктор Александрович Плисс был бессменным заведующим кафедрой дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского (до 1992 года Ленинградского) государственного университета. За это время ему удалось создать научную школу, которая так и называется «школа Плисса».

Характерной особенностью этой школы являлся неизменный интерес к работам Александра Михайловича Ляпунова по теории устойчивости движения. Некоторые работы участников школы являются непосредственным продолжением работ самого А. М. Ляпунова.

Предлагаемая статья продолжает эту традицию. В работе [1] 1893 года А. М. Ляпунов исследовал вопрос об устойчивости нулевого решения автономной системы двух дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = y + X, \quad \dot{y} = Y, \tag{1}$$

где X и Y — вещественно аналитические функции переменных x и y, не содержащие в своих разложениях членов ниже второго порядка. Ляпунов замечает, что заменой переменной y эту задачу можно свести к исследованию системы того же вида (1), в которой Y будет произвольно заданной вещественно аналитической функцией.

Предполагая выполнение условия

$$X(x, 0) = 0, \tag{2}$$

Ляпунов записывает функцию $Y(x, y)$ в виде $Y = f(x) + \varphi(x)y + O(y^2)$, где функция $f(x)$ либо тождественно равна нулю, либо $f(x) = ax^{\alpha} + O(x^{\alpha+1})$ $(a \neq 0)$. Аналогично, если функция $\varphi(x)$ не равна тождественно нулю, то $\varphi(x) = bx^{\beta} + O(x^{\beta+1})$ $(b \neq 0)$. При этом постоянные a, α являются инвариантными относительно преобразований, сохраняющих условие (2), а постоянные b и β инвариантны, если $\beta < \alpha$.

Поставленную задачу А. М. Ляпунов решил полностью. При этом оказалось, что из десяти возможных случаев в восьми задача решается в нулевом приближении, т. е. на основании свойств постоянных a, b, α, β, и только в двух из них требуются дополнительные вычисления. В обоих этих случаях α — нечетное число и $a < 0$.

Положим $\alpha = 2n - 1$, где $n \geqslant 2$ — целое. Тогда в первом случае либо $\varphi(x) = 0$, либо $\beta > n - 1$, а во втором случае n — четное, $\beta = n - 1$ и $b^2 + 4na < 0$.

Как отмечалось выше, не нарушая общности, можно считать, что в системе (1) $X = 0$. Тогда система (1) имеет вид дифференциального уравнения второго порядка.

В первом случае — это уравнение

$$\ddot{x} - ax^{2n-1} = Q(x, \dot{x}), \tag{3}$$

а во втором — уравнение

$$\ddot{x} - ax^{2n-1} = Q(x, \dot{x}) - bx^{n-1}\dot{x}, \tag{4}$$

причем в обоих случаях разложение $Q(x, \dot{x})$ по степеням x, $\dot{x}$ не содержит членов порядка ниже $2n$, если переменной x приписать порядок один, а переменной $\dot{x}$ — порядок n.

В настоящей работе исследуется вопрос об устойчивости нулевого решения уравнений (3) и (4) при условии, что их правые части являются квазипериодическими функциями времени t, вещественно аналитическими в области $|\mathrm{Im}\, t| < \gamma\, (\gamma > 0)$.

Поставленная задача для периодической по времени функции Q и постоянного коэффициента b была исследована в работе [2].

Дополнительно потребуем, чтобы базисные частоты $\omega_1, \ldots, \omega_s$ функций $Q(x, \dot{x}, t)$ и коэффициента $b(t)$ удовлетворяли неравенству

$$|k_1\omega_1 + \cdots + k_s\omega_s| > K|k|^{-\tau}, \tag{5}$$

где $K > 0$, $\tau > 0$, $k_1, \ldots, k_s$ — целые числа, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_s|$.

2. Квазипериодические функции. Функция $f(t)$ называется *квазипериодической с базисными частотами* $\omega_1, \dots, \omega_s$, где $\omega_1, \dots, \omega_s$ — положительные числа, если существует такая 2π-периодическая по всем аргументам функция $g(\theta_1, \dots, \theta_s)$, что $f(t) = g(\omega_1 t, \dots, \omega_s t)$. При этом величины $T_1 = 2\pi\omega_1^{-1}, \dots, T_s = 2\pi\omega_s^{-1}$ называются периодами функции $f(t)$, а величина $\overline{f} = \dfrac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} g(\theta_1, \dots, \theta_s) d\theta_1 \dots d\theta_s$ — ее средним значением. Функцию $g(\theta_1, \dots, \theta_s)$ будем называть *порождающей* для квазипериодической функции $f(t)$.

Лемма 1. *Пусть функция $f(t)$ — квазипериодическая, $\overline{f} = 0$ и выполняется условие* (5)*. Тогда найдется квазипериодическая функция $F(t)$ с теми же базисными частотами, что и у $f(t)$, для которой $dF(t)/dt = f(t)$.*

Доказательство. Должно выполняться условие

$$\omega_1 \frac{\partial G}{\partial \theta_1}(\omega_1 t, \dots, \omega_s t) + \dots + \omega_s \frac{\partial G}{\partial \theta_s}(\omega_1 t, \dots, \omega_s t) = f(t), \tag{6}$$

где $G(\theta_1, \dots, \theta_s)$ — порождающая функция для $F(t)$.

Но уравнение $\omega_1 \dfrac{\partial G}{\partial \theta_1}(\theta_1, \dots, \theta_s) + \dots + \omega_s \dfrac{\partial G}{\partial \theta_s}(\theta_1, \dots, \theta_s) = g(\theta_1, \dots, \theta_s)$ имеет 2π-периодическое по $\theta_1, \dots, \theta_s$ решение при условии (5). Доказательство этого факта можно найти в монографии [3].

Полагая $\theta_1 = \omega_1 t, \dots, \theta_s = \omega_s t$, получаем равенство (6). $\square$

Замечание. $F(t)$ вещественно аналитична, если $f(t)$ вещественно аналитична.

В дальнейшем нам придется рассматривать функции $F(\varphi, t)$, периодические по φ и квазипериодические по t. Для них будем использовать следующее представление:

$$F = \overline{F} + \widehat{F}(\varphi) + \widetilde{F}(\varphi, t), \tag{7}$$

где $\overline{F}$ — среднее значение F по φ и t, $\widehat{F}$ — среднее значение $F - \overline{F}$ по t.

В частности, если $F = F_1(t)F_2(\varphi)$, то $\overline{F} = \overline{F}_1\overline{F}_2$, $\widehat{F} = \overline{F}_1(F_2 - \overline{F}_2)$, $\widetilde{F} = (F_1 - \overline{F}_1)F_2$.

3. Исследование случая 1. Прежде всего будем считать, что в (3) $a = -1$, так как к такому случаю приводит подстановка

$$x = (-a)^{-1/(2n-2)} x_1. \tag{8}$$

Таким образом, мы рассматриваем уравнение

$$\ddot{x} + x^{2n-1} = Q(x, \dot{x}, t) \tag{9}$$

при сохранении сделанных выше предположений. В частности, разложение Q по степеням x и $\dot{x}$ не содержит членов порядка ниже $2n$, если переменной x приписывать первый порядок, а переменной $\dot{x}$ — порядок n.

Следуя А. М. Ляпунову (см. [1, стр. 290]), введем в системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^{2n-1} + Q(x, y, t), \tag{10}$$

соответствующей уравнению (9), «полярные координаты» r, φ равенствами

$$x = r\,\mathrm{Cs}\varphi, \quad y = -r^n \mathrm{Sn}\varphi \quad (r > 0), \tag{11}$$

где $\mathrm{Cs}\varphi$, $\mathrm{Sn}\varphi$ — периодические функции, определяемые условиями

$$\frac{d\mathrm{Cs}\varphi}{d\varphi} = \mathrm{Sn}\varphi, \quad \frac{d\mathrm{Sn}\varphi}{d\varphi} = -\mathrm{Cs}^{2n-1}\varphi, \quad \mathrm{Cs}\,0 = 1, \quad \mathrm{Sn}\,0 = 0.$$

При $n = 1$ функции Cs и Sn превращаются в обычные cos и sin, а основному тригонометрическому тождеству соответствует тождество $n\mathrm{Sn}^2\varphi + \mathrm{Cs}^{2n}\varphi = 1$.

В результате замены (11) получим систему

$$\dot{r} = -r^{1-n}Q(r\mathrm{Cs}\varphi, -r^n\mathrm{Sn}\varphi, t)\mathrm{Sn}\varphi, \quad \dot{\varphi} = r^{n-1} - r^{-n}Q(r\mathrm{Cs}\varphi, -r^n\mathrm{Sn}\varphi, t)\mathrm{Cs}\varphi, \tag{12}$$

которую можно представить в виде

$$\dot{r} = R_{n+1}(\varphi, t)r^{n+1} + \ldots = R(r, \varphi, t), \quad \dot{\varphi} = r^{n-1} + \Phi_n(\varphi, t)r^n + \ldots = r^{n-1} + \Phi(r, \varphi, t), \tag{13}$$

где многоточием обозначены члены порядка по r выше выписанных.

Лемма 2. *Существует формальный ряд*

$$r = \rho + h_2(\varphi)\rho^2 + \ldots + h_n(\varphi)\rho^n + h_{n+1}(\varphi, t)\rho^{n+1} + \ldots = \rho + h(\rho, \varphi, t), \tag{14}$$

приводящий систему (13) *к виду*

$$\dot{\rho} = g_{n+1}\rho^{n+1} + \ldots = \Xi(\rho), \quad \dot{\varphi} = \rho^{n-1} + \Psi(\rho, \varphi, t), \tag{15}$$

где $g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots$ *— постоянные.*

Доказательство. Дифференцируя замену (14) по t в силу систем (13) и (15), получаем соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi}\rho^{n-1} + \frac{\partial h}{\partial t} = R(\rho + h, \varphi, t) - \frac{\partial h}{\partial \varphi}\Psi - \frac{\partial h}{\partial \rho}\Xi - \Xi.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при ρ^{n+1}, получим уравнение

$$\frac{\partial h_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_{n+1}}{\partial t} = g_{n+1} + R_{n+1}. \tag{16}$$

Полагая $g_{n+1} = \overline{R}_{n+1}$ и используя разложение (7) для функции R_{n+1}, разобьем (16) на два уравнения

$$\frac{dh_2}{d\varphi} = \widehat{R}_{n+1}(\varphi), \quad \frac{\partial \widetilde{h}_{n+1}}{\partial t} = \widetilde{R}_{n+1}(\varphi, t). \tag{17}$$

Первое из этих уравнений определяет $h_2(\varphi)$ как первообразную функции $\widehat{R}_{n+1}(\varphi)$. Рассматривая φ как параметр во втором уравнении, используя лемму 1, определим и $\widetilde{h}_{n+1}$.

Далее, приравнивая в (16) коэффициенты при $i > n + 1$, получим уравнение

$$\frac{\partial h_{i-n+1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_i}{\partial t} = g_i + R_i(\varphi, t) - G_i(\varphi, t), \tag{18}$$

где функции G_i известны, если уже определены $h_2, \ldots, h_{i-1}$, и $\widetilde{h}_2 = 0, \ldots, \widetilde{h}_n = 0$.

Пусть g_i равны средним значениям функций $R_i - G_i$. Положим $F_i = R_i - G_i$ и каждое из уравнений (18) разобьем на два следующих:

$$\frac{dh_{i-n+1}}{d\varphi} = \widehat{F}_i(\varphi), \quad \frac{\partial \widetilde{h}_i}{\partial t} = \widetilde{F}_i(\varphi, t),$$

которые решаем так же как и уравнения (17).

В результате мы последовательно с ростом $i \geqslant n+1$ определим $\widehat{h}_{i-n+1}$ и $\widetilde{h}_i$. □

Обозначим через g первую при возрастании i ненулевую среди постоянных g_i.

Поскольку задача об устойчивости по отношению к переменным x, y эквивалентна задаче об устойчивости по отношению к переменной ρ, из вида системы (15) вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Если в системе* (15) *постоянная* $g < 0$, *то нулевое решение системы* (10) *асимптотически устойчиво, а если* $g > 0$, *то оно не устойчиво.*

Рассмотрим наинизшие члены разложения функции Q в уравнении (9). Они имеют вид $a_1(t)x^{2n} + a_2(t)x^n\dot{x} + a_3(t)\dot{x}^2$, где a_1, a_2, a_3 — квазипериодические функции. Их порядок равен $2n$ в соответствии со сделанным выше соглашением.

В силу (12) $R_{n+1} = -a_1(t)\mathrm{Cs}^{2n}\varphi\mathrm{Sn}\varphi + a_2(t)\mathrm{Cs}^n\varphi\mathrm{Sn}^2\varphi - a_3(t)\mathrm{Sn}^3\varphi$, а значит, величина g_{n+1}, равная среднему значению функции $a_2(t)\mathrm{Cs}^n\varphi\mathrm{Sn}^2\varphi$, отлична от нуля, если $\overline{a_2} \neq 0$ и n — четное число. При этом знак g_{n+1} совпадает со знаком $\overline{a_2}$.

Таким образом, если n четно, то вопрос об устойчивости в общем случае решается в первом приближении.

Возможен случай, когда все постоянные $g_{n+1}, \ldots$ в системе (15) равны нулю. Он возникает, если возмущение Q в уравнении (3) консервативно, т. е. функция Q не зависит от $\dot{x}$, либо обратимо, т. е. выполняется условие $Q(x, -\dot{x}, -t) = Q(x, \dot{x}, t)$. В каждой из этих ситуаций нулевое решение устойчиво по Ляпунову (см. [4]).

4. Исследование случая 2. Выполнив в уравнении (4) подстановку (8), будем рассматривать уравнение

$$\ddot{x} + x^{2n-1} = Q(x, \dot{x}) - b(t)x^{n-1}\dot{x}$$

или соответствующую ему систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^{2n-1} + b(t)x^{n-1}y + Q(x, y, t), \tag{19}$$

в которой n — четное, функции $b(t)$ и $Q(x, y, t)$ являются квазипериодическими с базисными частотами $\omega_1, \ldots, \omega_s$, удовлетворяющими условию (5), $b^2(t) < 4n$ для всякого t и разложение Q по степеням x, y не содержит членов порядка ниже $2n$ при условии, что x имеет порядок один, а y — порядок n.

Сделав в системе (19) замену (11), получим систему

$$\dot{r} = \alpha(\varphi, t)r^n + R(r, \varphi, t), \quad \dot{\varphi} = \beta(\varphi, t)r^{n-1} + \Phi(r, \varphi, t), \tag{20}$$

в которой $\alpha = b(t)S^2(\varphi)C^{n-1}(\varphi)$, $\beta = 1 + b(t)S(\varphi)C^n(\varphi)$, $R = R_{n+1}(\varphi, t)r^{n+1} + \ldots$, $\Phi = \Phi_n(\varphi, t)r^n + \ldots$, причем $\beta(\varphi, t) > 0$ в силу условия $b^2(t) < 4n$ и свойств функций Cs и Sn.

Лемма 3. *Существует периодическая по* φ *и квазипериодическая по* t *замена*

$$r = p(\varphi)\rho + q(\varphi, t)\rho^n \tag{21}$$

с $p(\varphi) > 0$, *преобразующая систему* (20) *в квазипериодическую по* t *систему*

$$\dot{\rho} = R^*(\rho, \varphi, t), \quad \dot{\varphi} = \gamma(\varphi, t)\rho^{n-1} + \Phi^*(\rho, \varphi, t), \tag{22}$$

в которой $\gamma = \beta(\varphi, t)p^{n-1}(\varphi) > 0$, $R^* = \xi(\varphi, t)\rho^{n+1} + \ldots$, $\Phi^* = \Phi_n^*(\varphi, t)\rho^n + \ldots$.

Доказательство. Дифференцируя замену (21) по t в силу систем (20) и (22) и приравнивая коэффициенты при ρ^n, получаем уравнение

$$\beta(\varphi, t)p^{n-1}(\varphi)\frac{dp}{d\varphi} - \alpha(\varphi, t)p^n(\varphi) + \frac{\partial q}{\partial t} = 0. \tag{23}$$

Используя разложение (7), представим функции α и β из (20) в виде

$$\alpha(t, \varphi) = \overline{b}\alpha^*(\varphi) + \tilde{b}(t)\alpha^*(\varphi), \quad \beta(t, \varphi) = 1 + \overline{b}\beta^*(\varphi) + \tilde{b}(t)\beta^*(\varphi), \tag{24}$$

где $b(t) = \overline{b} + \tilde{b}(t)$, $\alpha^* = S^2(\varphi)C^{n-1}(\varphi)$, $\beta^* = S(\varphi)C^n(\varphi)$.

Тогда (23) распадается на два уравнения

$$(1 + \overline{b}\beta^*)p^{n-1}\frac{dp}{d\varphi} - \overline{b}\alpha^* p^n = 0, \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \tilde{b}\beta^* p^{n-1}\frac{dp}{d\varphi} - \tilde{b}\alpha^* p^n = 0,$$

решениями которых с учетом леммы 1 являются следующие квазипериодические по t и периодические по φ функции:

$$p(\varphi) = \exp\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\overline{b}\alpha^*(\eta)\,d\eta}{1 + \overline{b}\beta^*(\eta)}, \quad q(t, \varphi) = p^{n-1}(\varphi)\left(\alpha^*(\varphi)p(\varphi) - \beta^*(\varphi)\frac{dp}{d\varphi}\right)\int_{t_0}^{t}\tilde{b}(\tau)\,d\tau.$$

Здесь используется доказанный еще А. М. Ляпуновым факт (см. [1, стр. 298]), что при четном n подынтегральная функция в формуле для $p(\varphi)$ имеет нулевое среднее значение. □

Усредним теперь коэффициент $\xi(\varphi, t)$, стоящий при младшей степени ряда R^* в первом уравнении системы (22).

Лемма 4. *Существует периодическая по* φ *и квазипериодическая по* t *замена*

$$\rho = \zeta + u(\varphi)\zeta^2 + v(\varphi, t)\zeta^{n+1}, \tag{25}$$

преобразующая систему (22) *в квазипериодическую по* t *систему*

$$\dot{\zeta} = g\zeta^{n+1} + \Upsilon(\zeta, \varphi, t), \quad \dot{\varphi} = \gamma(\varphi, t)\zeta^{n-1} + \Psi(\rho, \varphi, t), \tag{26}$$

в которой $\gamma(\varphi, t) > 0$ *из* (20), $\Upsilon = \Upsilon(\varphi, t)\zeta^{n+2} + \ldots$, $\Psi = \Psi_n(\varphi, t)\zeta^n + \ldots$.

Доказательство. Дифференцируя замену (25) по t в силу систем (22) и (26) и приравнивая коэффициенты при ζ^{n+1}, получаем уравнение

$$\xi(t, \varphi) = g + \gamma(\varphi, t)\frac{du}{d\varphi} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{27}$$

Поскольку в (22) $\gamma = \beta(\varphi, t)p^{n-1}(\varphi)$, а в (24) $\beta = 1 + \overline{b}\beta^*(\varphi) + \tilde{b}(t)\beta^*(\varphi)$, то, используя разложение (7), запишем (27) в виде двух уравнений

$$\overline{\xi} + \hat{\xi} = g + (1 + \overline{b}\beta^*)p^{n-1}\frac{du}{d\varphi}, \qquad \tilde{\xi} = \tilde{b}\beta^* p^{n-1}\frac{du}{d\varphi} + \frac{\partial q}{\partial t}. \tag{28}$$

Заметим, что коэффициент при $du/d\varphi$ в уравнении (28_1) положителен, так как в системе (19) предполагается выполнение неравенства $|b(t)| < 2\sqrt{n}$, остающегося верным и для среднего значения функции $b(t)$. Поэтому константа g однозначно находится из условия, заключающегося в том, что функция $(\overline{\xi} + \hat{\xi} - g)(1 + \overline{b}\beta^*)^{-1}p^{1-n}$ имеет нулевое среднее значение. После этого уравнения (28) последовательно решаются, причем $v = \tilde{v}(\varphi, t)$. $\square$

Теперь, если окажется, что постоянная g отлична от нуля, то для системы (19) будет справедлив аналог приведенной в пункте 3 теоремы, а если $g = 0$, то процесс усреднения можно продолжить (см. лемму 2 и последующие рассуждения).

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. *Басов В. В., Бибиков Ю. Н.* Об устойчивости положения равновесия в одном случае периодического возмущения центра // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 5. С. 583–586.

3. *Moser J. K.* A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations — I // Ann. Scuola Norm. Pisa. Ser. III. 1966. Vol. 20, no. 2. P. 265–315 (Рус. перев.: Усп. мат. наук. 1968. Т. 23, № 4. С. 179–238).

4. *Бибиков Ю. Н.* Локальные проблемы теории многочастотных нелинейных колебаний. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003.

Статья поступила в редакцию 10 ноября 2019 г.;
после доработки 12 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Басов Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlvlbasov@rambler.ru
Бибиков Юрий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; bibicoff@yandex.ru

On the stability of “nonlinear center” under quasiperiodic perturbations

V. V. Basov, Yu. N. Bibikov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Basov V. V., Bibikov Yu. N. On the stability of “nonlinear center” under quasiperiodic perturbations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 269–276. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.209 (In Russian)

The problem of the stability of the zero solution of a system with critical point of the “center” type at the origin, is considered. Such problem for autonomous systems was investigated by Liapunov. Investigations of Liapunov were continued by the authers for systems periodic in time. In the present paper systems with quasi-periodic dependence on time, are considered. It is supposed that the basic frequencies of quasi-periodic functions sutisfy the standard condition of diophantine type. The problem under consideration can be intepreted as the problem of the stability of the state of equilibrium of the oscillator $\ddot{x} + x^{2n-1} = 0$, n is a integer, $n \geq 2$, under “small” quasiperiodic pertubations.

Keywords: stability, center, quasi-periodic function.

References

1. Lyapunov A. M., *Investigation of a particular case of the problem of the stability of motion.* Collected works in 2 vol. **2**, 272–331 (Izd. AN SSSR, Moscow, Leningrad, 1956). (In Russian)

2. Basov V. V., Bibikov Yu. N., "On the stability of the state of equilibrium under periodic perturbations of a center", *Differentsial'nye Uravneniya* **33**(5), 583–586 (1997). (In Russian)

3. Moser J. K., "A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations — I", *Ann. Scuola Norm. Pisa.* Ser. III **20**(2), 265–315 (1966).

4. Bibikov Yu. N., *Local problems of the theory of multi-frequency nonlinear oscillations.* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2003). (In Russian)

Received: November 10, 2019
Revised: December 12, 2019
Accepted: December 12, 2019

Authors' information:

Vladimir V. Basov — vlvlbasov@rambler.ru
Yuri N. Bibikov — bibicoff@yandex.ru