УДК 512.547 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
MSC 20C33

Александру Ивановичу Генералову
по случаю его семидесятилетия

Теория суперхарактеров для борелевской контракции группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$*

А. Н. Панов

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева,
Российская Федерация, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1

Для цитирования: *Панов А. Н.* Теория суперхарактеров для борелевской контракции группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 254–268.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.208

Понятие теории суперхарактеров было введено П. Диаконисом и И. М. Айзексом в 2008 году. Теория суперхарактеров для заданной конечной группы — это пара, состоящая из некоторой системы комплексных характеров группы и ее разбиения на классы, которые имеют свойства, схожие с системой неприводимых характеров и разбиением группы на классы сопряженных элементов. В статье рассматривается группа, полученная борелевской контракцией полной матричной группы над конечным полем. Для этой группы строится теория суперхарактеров. В терминах расстановок ладей проводится классификация суперхарактеров и суперклассов, вычисляются значения суперхарактеров на суперклассах.

Ключевые слова: представления групп, неприводимые характеры, теория суперхарактеров, суперклассы, алгебра-группа.

1. Введение. В теории представлений конечных групп главной задачей считается задача классификации неприводимых представлений. Однако для ряда групп таких, как унитреугольная группа над конечным полем, параболические и борелевские подгруппы и другие, эта задача представляется чрезвычайно сложной, «дикой» задачей. То же относится и к задаче классификации классов сопряженных элементов.

П. Диаконис и И. Айзекс в работе 2008 года [1] ввели понятие теории суперхарактеров. По определению *теория суперхарактеров* заданной конечной группы G — это пара $(\mathfrak{S}, \mathcal{K})$, где $\mathfrak{S} = \{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$ — некоторая система комплексных характеров (представлений) группы G и $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ — разбиение группы G такие, что:
S1) характеры из $\mathfrak{S}$ попарно ортогональны;
S2) каждый характер χ_i постоянен на каждом K_j;
S3) $\{1\} \in \mathcal{K}$.

Характеры из $\mathfrak{S}$ называются *суперхарактерами*, а подмножества из $\mathcal{K}$ — *суперклассами*. Заметим, что число суперклассов равно числу суперхарактеров. Примером теории суперхарактеров является пара, состоящая из системы всех неприводимых характеров группы и разбиения группы на классы сопряженных элементов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-01-00091а).

Суперхарактеры, вообще говоря, не являются неприводимыми характерами; носители суперхарактеров (множества неприводимых компонент) образуют разбиение множества $\mathrm{Irr}(G)$ всех комплексных неприводимых характеров [1, 2]. В свою очередь суперклассы разлагаются на классы сопряженных элементов.

Теории суперхарактеров можно сравнивать: одна теория суперхарактеров грубее другой, если ее суперклассы распадаются на суперклассы другой теории. Поэтому любая теория суперхарактеров грубее теории неприводимых характеров. В случае, если не удается классифицировать неприводимые характеры и классы сопряженных элементов, то ставится задача построения теории суперхарактеров, в которой суперхарактеры и суперклассы имеют явное описание и которая дает наилучшее приближение теории неприводимых характеров.

Классическим примером теории суперхарактеров является теория суперхарактеров для алгебра-групп над конечным полем из [1] (по определению алгебра-группа — это группа вида $G = 1+\mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — нильпотентная ассоциативная конечномерная алгебра). В случае унитреугольной группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ эта теория совпадает с теорией базисных характеров К. Андре [3–5].

В настоящей работе рассматривается группа G^a, которая получается контракцией из группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, в смысле определения [6, 7]. Коммутант U^a группы G^a является алгебра-группой и поэтому допускает теорию суперхарактеров из [1]. Группа G^a является группой обратимых элементов в ассоциативной приведенной алгебре $\mathfrak{g}^a$ и для нее теория суперхарактеров может быть построена, следуя работе [8].

Цель настоящей работы — провести классификацию суперхарактеров и суперклассов для U^a и G^a, получить формулы для значений суперхарактеров на суперклассах в явном виде.

2. Контракция группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$**.** Рассмотрим группу $G = \mathrm{GL}(n, K)$, определенную над произвольным полем K характеристики, отличной от 2. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$ допускает разложение $\mathfrak{gl}(n, K) = \mathfrak{n} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_-$, где $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+$ (соответственно, $\mathfrak{n}_-$) подалгебра Ли строго верхнетреугольных (соответственно, нижнетреугольных) матриц, $\mathfrak{h}$ — подалгебра диагональных матриц. Борелевская подалгебра $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ совпадает с алгеброй Ли треугольных матриц. Форма Киллинга позволяет отождествить $\mathfrak{n}_-$ с сопряженным пространством $\mathfrak{n}^*$ к $\mathfrak{n}$.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}^a$, которая является полупрямой суммой борелевской подалгебры $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ и коммутативной алгебры Ли $\mathfrak{n}^*$, совпадающей с $\mathfrak{n}_-$ как линейное пространство; действие $x \in \mathfrak{b}$ на $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ задается как $\mathrm{ad}^*_x(\lambda)$. Алгебру Ли $\mathfrak{g}^a$ будем называть *борелевской контракцией* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Группа G содержит треугольную группу $B = HN$, где H — подгруппа диагональных матриц и N — унитреугольная группа. Обозначим через G^a группу, которая является полупрямым произведением B и абелевой подгруппы $N^a_- = 1 + \mathfrak{n}^*$ с умножением $(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) = 1 + \lambda_1 + \lambda_2$; действие $b \in B$ на N^a_- определяется как $b(1 + \lambda)b^{-1} = 1 + \mathrm{Ad}^*_b(\lambda)$. Группу G^a будем называть *борелевской контракцией* группы G.

Покажем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}^a$ допускает структуру ассоциативной алгебры, для которой $[X, Y] = XY - YX$. Действительно, $\mathfrak{b}$ в нашем случае является ассоциативной алгеброй верхнетреугольных матриц, $\mathfrak{n}^a$ — алгеброй с нулевым умножением. Определены левое и правое действия алгебры $\mathfrak{b}$ (соответственно для групп B, N) на $\mathfrak{n}^*$ по формулам

$$t\lambda(x) = \lambda(xt) \quad \text{и} \quad \lambda t(x) = \lambda(tx), \tag{1}$$

где $t \in \mathfrak{b}$, $x \in \mathfrak{n}$ и $\lambda \in \mathfrak{n}^*$. Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{g}^a$ является ассоциативной алгеброй относительно умножения

$$(t_1 + \lambda_1)(t_2 + \lambda_2) = t_1 t_2 + t_1 \lambda_2 + \lambda_1 t_2,$$

где $t_1, t_2 \in \mathfrak{b}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{n}^*$.

Радикал $\mathfrak{U} = \mathfrak{n} + \mathfrak{n}^*$ ассоциативной алгебры $\mathfrak{g}^a$ является нильпотентной ассоциативной алгеброй.

Заметим, что группа G^a является группой обратимых элементов ассоциативной алгебры $\mathfrak{g}^a$. Группа G^a содержит нормальную подгруппу $U^a = 1 + \mathfrak{U}$, которая является алгебра-группой.

Определим на $\mathfrak{U}$ симметрическую билинейную форму

$$(X_1, X_2) = \lambda_2(x_1) + \lambda_1(x_2) \tag{2}$$

для $X_1 = x_1 + \lambda_1$ и $X_2 = x_2 + \lambda_2$ из $\mathfrak{U}$. Непосредственно проверяется, что

$$(gX_1, X_2) = (X_1, X_2 g) \tag{3}$$

для любых $g \in G^a$ и $X_1, X_2 \in \mathfrak{U}$. Билинейная форма (2) невырождена, что позволяет отождествить $\mathfrak{U}$ с сопряженным пространством $\mathfrak{U}^*$. При этом присоединенные орбиты в $\mathfrak{U}$ отождествляются с коприсоединенными орбитами в $\mathfrak{U}^*$.

Назовем *корнем* любую пару (i, j), где $i \neq j$ и $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Это определение принято в теории базисных характеров и удобно для изучения расстановок ладей, правых стабилизаторов и других. Пара $\alpha = (i, j)$ соответствует корню $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$ в теории алгебр Ли.

Для всякого корня $\alpha = (i, j)$ назовем i *номером строки корня* α и j — *номером столбца* (обозначения $i = \mathrm{row}(\alpha)$ и $j = \mathrm{col}(\alpha)$). На множестве корней Δ определена частичная операция сложения $(i, j) + (j, k) = (i, k)$. Для корня $\alpha = (i, j)$ определен противоположный корень $\alpha^t = (j, i)$.

Будем говорить, что $\alpha = (i, j)$ — *положительный корень* (соответственно, *отрицательный корень*), если $i < j$ (соответственно, $i > j$). Множество корней Δ является объединением подмножества положительных корней Δ_+ и подмножества отрицательных корней Δ_-. Сопоставим положительному корню $\alpha = (i, j)$, $i < j$, матричную единицу $E_\alpha = E_{ij} \in \mathfrak{n}$. Соответственно, отрицательному корню $\beta = (i, j)$, $i > j$, сопоставим матричную единицу $F_\beta = F_{ij} \in \mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}^*$. Отметим, что $(E_{ij}, F_{km}) = \delta(j, k)\delta(i, m)$.

Ассоциативная алгебра $\mathfrak{U} = \mathfrak{n} + \mathfrak{n}^*$ реализуема как подпространство в пространстве $(n \times n)$-матриц, натянутое на объединение двух систем матричных единиц $\{E_{ij} : \ i < j\}$ из $\mathfrak{n}$ и $\{F_{ij} : i > j\}$ из $\mathfrak{n}^*$. Структурные соотношения имеют вид

$$E_{ij} E_{km} = \delta(j, k) E_{im}, \qquad F_{ij} F_{km} = 0,$$

$$E_{ij} F_{km} = \begin{cases} F_{im} & \text{, если } \ j = k \ \text{ и } \ i > m, \\ 0 & \text{, в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$F_{ij} E_{km} = \begin{cases} F_{im} & \text{, если } \ j = k \ \text{ и } \ i > m, \\ 0 & \text{, в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определение 2.1. Подмножество $D \subset \Delta$ назовем *расстановкой ладей*, если в каждой строке и столбце есть не более одного корня из D. Подмножество D распадается: $D = D_+ \cup D_-$, где $D_+ = D \cap \Delta_+$ и $D_- = D \cap \Delta_-$.

Отметим, что здесь число ладей может быть меньше размера доски n. Пусть ϕ — отображение из D в $\mathbb{F}_q^*$. Отображение ϕ определяется своими ограничениями ϕ_+ и ϕ_- на D_+ и D_- соответственно. Сопоставим паре (D, ϕ) элемент $u_{D,\phi} = 1 + X_{D,\phi}$, где

$$X_{D,\phi} = \sum_{\gamma_+ \in D_+} \phi(\gamma_+) E_{\gamma_+} + \sum_{\gamma_- \in D_-} \phi(\gamma_-) F_{\gamma_-}. \tag{4}$$

3. Теория суперхарактеров для группы U^a. В дальнейшем поле K является конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики, отличной от 2. Поскольку группа U^a является алгебра-группой, то для нее имеет место теория супехарактеров П. Диакониса и И. Айзекса [1].

3.1. Теория суперхарактеров для алгебра-групп. Пусть $G = 1 + \mathcal{J}$ — алгебра-группа, где $\mathcal{J}$ — ассоциативная конечномерная нильпотентная алгебра над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Группа G действует на J умножениями слева и справа. Суперклассы в G — подмножества вида $K(x) = 1 + GxG$.

По формулам вида (1) определяются левое и правое действия группы G в сопряженном пространстве $\mathcal{J}^*$. Соответственно определено действие группы $G \times G$ в $\mathcal{J}^*$ лево-правым умножением. Сопряженное пространство $\mathcal{J}^*$ распадается на $(G \times G)$-орбиты. Для любого $\lambda \in \mathcal{J}^*$ рассмотрим стабилизатор $G_{\lambda,\mathrm{right}}$ правого действия G на $\mathcal{J}^*$. Подгруппа $G_{\lambda,\mathrm{right}}$ является алгебра-группой $G_{\lambda,\mathrm{right}} = 1 + \mathcal{J}_{\lambda,\mathrm{right}}$, где

$$\mathcal{J}_{\lambda,\mathrm{right}} = \{x \in \mathcal{J} :\ \lambda(xy) = 0 \text{ для любого } y \in \mathcal{J}\}.$$

Фиксируем нетривиальный характер $t \to \varepsilon^t$ аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ со значением в $\mathbb{C}^*$. Формула $\xi_\lambda(1+x) = \varepsilon^{\lambda(x)}$ определяет линейный характер подгруппы $G_{\lambda,\mathrm{right}}$. Рассмотрим индуцированный характер χ_λ с характера ξ_λ подгруппы $G_{\lambda,\mathrm{right}}$ на G.

Теорема 3.1 [1]. *Система подмножеств $\{K(x)\}$ и характеров $\{\chi_\lambda\}$, где x и λ пробегают множества представителей $(G \times G)$-орбит в J и J^* соответственно, задают теорию суперхарактеров для алгебра-группы G.*

Замечание 3.2. В определении характера χ_λ можно правый стабилизатор заменить на левый (см. [1]).

Для группы $N = \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ эта теория суперхарактеров совпадает с теорией базисных характеров К. Андре и допускает явное описание в терминах расстановок ладей. Алгебра $\mathcal{J}$ совпадает с $\mathfrak{n}$ и сопряженное пространство $\mathcal{J}^*$ с $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}_-$.

Предложение 3.3 [1, 4, 5]. *1. В любой $(N \times N)$-орбите в $\mathfrak{n}$ есть единственный элемент вида X_{D_+,ϕ_+}. 2. В любой $(N \times N)$-орбите в $\mathfrak{n}^*$ есть единственный элемент вида X_{D_-,ϕ_-}.*

3.2. Суперклассы в U^a. Группа $U^a = 1 + \mathfrak{U}$ является алгебра-группой. Суперкласс элемента $u = 1 + X$ из U^a определяется как $K(u) = 1 + U^a X U^a$ (см. [1]). Следующая теорема дает классификацию суперклассов.

Теорема 3.4. *1. Всякий суперкласс содержит элемент $u_{D,\phi}$ для некоторой расстановки ладей D в системе корней Δ и отображения $\phi : \Delta \to \mathbb{F}_q^*$. 2. Два элемента $u_{D,\phi}$ и $u_{D',\phi'}$ лежат в одном суперклассе тогда и только тогда, когда $(D, \phi) = (D', \phi')$.*

Доказательство. *Пункт 1.* Пусть $X = x + \lambda \in \mathfrak{U}$, где $x \in \mathfrak{n}$ и $\lambda \in \mathfrak{n}^*$. Покажем, что существует $X_{D,\phi}$, принадлежащий $U^a X U^a$. Доказательство разбивается на несколько подпунктов.

1) Существуют $a, b \in N$ такие, что $axb = X_{D_+,\phi_+}$ для некоторой расстановки ладей D_+ в Δ_+ и отображения $\phi_+ : D_+ \to \mathbb{F}_q^*$ (см. предложение 3.3). Положим $x_+ = X_{D_+,\phi_+}$. Получаем $aXb = x_+ + a\lambda b$.

2) Доказательство пункта 1 сводится к случаю $X = x_+ + \lambda$. В этом подпункте мы рассмотрим разложения $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}^*$, ассоциированные с D_+, и покажем, что на $(U^a \times U^a)$-орбите элемента X есть элемент вида $x_+ + \lambda$ с условием $\lambda \in \ell_0^\perp \cap r_0^\perp$ (см. формулу (5)).

Рассмотрим разложение $\mathfrak{n} = \ell_+ \oplus \ell_0$ в сумму левых идеалов

$$\ell_+ = \mathrm{span}\{E_{ij} : \ j \notin \mathrm{row}(D_+)\} = \{y \in \mathfrak{n} : \ yx_+ = 0\}, \quad \ell_0 = \mathrm{span}\{E_{ij} : \ j \in \mathrm{row}(D_+)\}.$$

Имеем $\mathfrak{n}^* = \ell_+^\perp \oplus \ell_0^\perp$, где

$$\ell_+^\perp = \mathrm{span}\{F_{km} : \ k \in \mathrm{row}(D_+)\} = x_+\mathfrak{n}^*, \qquad \ell_0^\perp = \mathrm{span}\{F_{km} : \ k \notin \mathrm{row}(D_+)\}.$$

Получаем $\mathfrak{n}^* = x_+\mathfrak{n}^* \oplus \ell_0^\perp$.

Пример. Пусть $n = 4$, $D = \{\gamma = (2,3)\}$. Тогда

$$x_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \ell_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\ell_+^\perp = x_+\mathfrak{n}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \ell_0^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Аналогично рассмотрим разложение $\mathfrak{n} = r_+ \oplus r_0$ в сумму правых идеалов

$$r_+ = \mathrm{span}\{E_{ij} : \ i \notin \mathrm{col}(D_+)\} = \{y \in \mathfrak{n} : \ x_+y = 0\}, \quad r_0 = \mathrm{span}\{E_{ij} : \ i \in \mathrm{col}(D_+)\}.$$

Имеем $\mathfrak{n}^* = r_+^\perp \oplus r_0^\perp$, где

$$r_+^\perp = \mathrm{span}\{F_{km} : \ m \in \mathrm{col}(D_+)\} = \mathfrak{n}^*x_+, \qquad r_0^\perp = \mathrm{span}\{F_{km} : \ m \notin \mathrm{col}(D_+)\}.$$

Получаем $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}^*x_+ \oplus r_0^\perp$.

Пример. Пусть $n = 4$, $D = \{\gamma = (2,3)\}$. Тогда

$$x_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad r_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$r_+^\perp = \mathfrak{n}^*x_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad r_0^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Поскольку подпространства ℓ_+, ℓ_0, r_+ и r_0 натянуты на векторы стандартного базиса $\{E_{ij}, F_{km}\}$, то

$$\mathfrak{n}^* = (x_+\mathfrak{n}^* + \mathfrak{n}^*x_+) \oplus \left(\ell_0^\perp \cap r_0^\perp\right). \tag{5}$$

Пример. Пусть $n=4$, $D=\{\gamma=(2,3)\}$. Тогда

$$x_+=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad x_+\mathfrak{n}^*+\mathfrak{n}^*x_+=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ *&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&*&0\end{pmatrix}\right\},$$

$$\ell_0^\perp\cap r_0^\perp=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\ *&*&0&0\\ *&*&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Пусть $X=x_++\lambda\in\mathfrak{U}$. Элемент λ разлагается: $\lambda=x_+\nu_1+\nu_2x_++\lambda_0$, где $\lambda_0\in\ell_0^\perp\cap r_0^\perp$, $\nu_1,\nu_2\in\mathfrak{n}^*$. Получаем

$$(1-\nu_2)X(1-\nu_1)=(1-\nu_2)(x_++\lambda)(1-\nu_1)=x_+-x_+\nu_1-\nu_2x_++\lambda=x_++\lambda_0.$$

3) Итак, можно считать, что $X=x_++\lambda_0$, где $\lambda_0(\ell_0)=\lambda_0(r_0)=0$. Покажем, что на $(U^a\times U^a)$-орбите элемента X есть элемент вида $x_++\lambda'$, где

$$\lambda'=X_{D'_-,\phi'_-}$$

для некоторой расстановки ладей D'_- в Δ_- и $\phi'_-:D'_-\to\mathbb{F}_q^*$.

Для λ_0 существуют $a,b\in N$ такие, что $a\lambda_0b=\lambda'$, где λ' имеет вид, указанный выше (см. предложение 3.3). Осталось показать, что можно выбрать a,b так, что $ax_+b=x_+$.

Рассмотрим алгебра-подгруппы $L_+=1+\ell_+=\{a_+\in N:\ \ a_+x_+=x_+\}$ и $L_0=1+\ell_0$. Покажем, что $a_0\lambda_0=\lambda_0$ для любого $a_0\in L_0$. Действительно, пусть $a_0=1+y_0,\ \ y_0\in\ell_0$. Так как ℓ_0 — левый идеал и $\lambda_0(\ell_0)=0$, то для любого $x\in\mathfrak{n}$ имеем $a_0\lambda_0(x)=\lambda_0(xa_0)=\lambda_0(x+xy_0)=\lambda_0(x)$.

Заметим, что любой элемент из $a\in N$ однозначно представим в виде произведения $a=a_+a_0$, $a_+\in L_+$ и $a_0\in L_0$. Получаем $a\lambda_0=a_+a_0(\lambda_0)=a_+\lambda_0$, где $a_+x_+=x_+$.

Аналогично определятся подгруппы $R_+=1+r_+=\{b_+\in N:\ \ x_+b_+=x_+\}$ и $R_0=1+r_0$. Отсюда получим $\lambda_0b_0=\lambda_0$ для любого $b_0\in R_0$. Любой элемент из $b\in N$ однозначно представим в виде $b=b_0b_+$, $\ b_+\in R_+$ и $b_0\in R_0$. Получаем $\lambda_0b=\lambda_0b_0b_+=\lambda_0b_+$, где $x_+b_+=x_+$.

В итоге будем иметь $\lambda'=a\lambda_0b=a_+\lambda_0b_+$, где $a_+x_+b_+=x_+$. Значит, $a_+(x_++\lambda)b_+=x_++\lambda'$.

4) Выше показано существование на $(U^a\times U^a)$-орбите элемента X элемента $X'=x_++\lambda'$, где $x_+=X_{D_+,\phi_+}$ и $\lambda'=X_{D'_-,\phi'_-}$. Наконец, как в 3, переходя от X' к некоторому элементу вида $(1+\nu_1)X'(1+\nu_2)$, можно уничтожить ладьи из D'_-, лежащие в строках $\mathrm{row}(D_+)$ и столбцах $\mathrm{col}(D_+)$. Получаем элемент $X_{D,\phi}$, где $D=(D_+,D_-)$ — расстановка ладей в Δ и ϕ — отображение $D\to\mathbb{F}_q^*$, совпадающее с ϕ_+ на D_+ и с ϕ'_- на D_-. Утверждение пункта 1 доказано.

Пункт 2. Предположим, что $u_{D,\phi}$ и $u_{D',\phi'}$ лежат в одном суперклассе. Покажем, что эти элементы совпадают. Существуют $A,B\in U^a$ такие, что $X_{D',\phi'}=AX_{D,\phi}B$. Элементы A и B разлагаются в произведения $A=(1+\nu_1)a$ и $B=b(1+\nu_2)$, где $a,b\in N$ и $\nu_1,\nu_2\in\mathfrak{n}^*$. Получаем

$$X_{D'_+,\phi'_+}=X_{D',\phi'}\bmod N_-^a=AX_{D,\phi}B\bmod N_-^a=aX_{D_+,\phi_+}b.$$

Из предложения 3.3 вытекает, что $(D'_+, \phi'_+) = (D'_+, \phi_+)$. Положим $x_+ = X_{D_+, \phi_+}$, $\lambda = X_{D_-, \phi_-}$ и $\lambda' = X_{D'_-, \phi'_-}$. Получаем $ax_+b = x_+$, $X_{D,\phi} = x_+ + \lambda$ и $X_{D',\phi'} = x_+ + \lambda'$. Имеем $x_+ + \lambda' = A(x_+ + \lambda)B = (1+\nu_1)a(x_+ + \lambda)b(1+\nu_2) = x_+ + x_+\nu_2 + \nu_1 x_+ + a\lambda b$ и

$$\lambda' = x_+\nu_2 + \nu_1 x_+ + a\lambda b. \tag{6}$$

Рассмотрим разложение $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_0$ в сумму правых идеалов

$$\mathfrak{m}_+ = \mathrm{span}\{E_{ij} :\ i \notin \mathrm{row}(D_+)\} = \{x \in \mathfrak{n} :\ \ell_0 x = 0\}, \quad \mathfrak{m}_0 = \mathrm{span}\{E_{ij} :\ i \in \mathrm{row}(D_+)\}.$$

Пример. Пусть $n = 4$, $D = \{\gamma = (2,3)\}$. Тогда

$$x_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{m}_+ = \left\{\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathfrak{m}_0 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Определены алгебра-подгруппы $M_+ = 1 + \mathfrak{m}_+$ и $M_0 = 1 + \mathfrak{m}_0$. Любой элемент $a \in N$ записывается в виде $a = c_0 c_+$, где $c_0 \in M_0$ и $c_+ \in M_+$. Заметим, что

$$\mathfrak{m}_0\mathfrak{n}^* = \mathrm{span}\{F_{ij} :\ i \in \mathrm{row}(D_+)\} = x_+\mathfrak{n}^*.$$

Получаем $a\lambda = c_0 c_+ \lambda = c_+\lambda \bmod x_+\mathfrak{n}^*$.

Аналогично $\mathfrak{n}$ разлагается в сумму левых идеалов $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_0$, где

$$\mathfrak{p}_+ = \mathrm{span}\{E_{ij} :\ j \notin \mathrm{col}(D_+)\} = \{x \in \mathfrak{n} :\ xr_0 = 0\}, \qquad \mathfrak{p}_0 = \mathrm{span}\{E_{ij} :\ j \in \mathrm{col}(D_+)\}.$$

Пример. Пусть $n = 4$, $D = \{\gamma = (2,3)\}$. Тогда

$$x_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{p}_+ = \left\{\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathfrak{p}_0 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Определены алгебра-подгруппы $P_+ = 1 + \mathfrak{m}_+$ и $P_0 = 1 + \mathfrak{m}_0$. Любой элемент $b \in N$ записывается в виде $b = d_+ d_0$, где $d_0 \in P_0$ и $d_+ \in P_+$. Заметим, что

$$\mathfrak{n}^*\mathfrak{p}_0 = \mathrm{span}\{F_{ij} :\ j \in \mathrm{col}(D_+)\} = \mathfrak{n}^* x_+.$$

Отсюда вытекает $\lambda b = \lambda d_+ d_0 = \lambda d_+ \bmod \mathfrak{n}^* x_+$.

Из формулы (6) получаем

$$\lambda' = c_+ \lambda d_+ \bmod (x_+\mathfrak{n}^* + \mathfrak{n}^* x_+). \tag{7}$$

По определению имеем $\lambda, \lambda' \in \ell_0^\perp \cap r_0^\perp$. Покажем, что $c_+\lambda d_+ \in \ell_0^\perp \cap r_0^\perp$. Действительно, для любого $y_0 \in \ell_0$ имеем $c_+\lambda d_+(y_0) = \lambda(d_+ y_0 c_+)$. Так как ℓ_0 — левый идеал и $\ell_0\mathfrak{m}_+ = 0$, то $d_+ y_0 c_+ = d_+ y_0 \in \ell_0$. Отсюда $c_+\lambda d_+(y_0) = \lambda(d_+ y_0) = 0$. Аналогично получаем $c_+\lambda d_+(z_0) = 0$ для любого $z_0 \in r_0$, что доказывает $c_+\lambda d_+ \in \ell_0^\perp \cap r_0^\perp$.

Так как λ' и $c_+\lambda d_+$ принадлежат $\ell_0^\perp \cap r_0^\perp$, то из (5) и (7) вытекает, что $\lambda' = c_+\lambda d_+$. Из предложения 3.3 получаем $(D'_-, \phi'_-) = (D_-, \phi_-)$. $\square$

3.3. Суперхарактеры группы U^a. Мы начнем с классификации $(U^a \times U^a)$-орбит в $\mathfrak{U}^*$ (см. подпараграф 3.1). Для пары (D,ϕ), где D — расстановка ладей в Δ и $\phi : D \to \mathbb{F}_q^*$, рассмотрим $\Lambda_{D,\phi} \in \mathfrak{U}^*$, для которого

$$\Lambda_{D,\phi}(Y) = (X_{D^t,\phi^t}, Y),$$

где $\phi^t(\gamma) = \phi(\gamma^t)$ для любого $\gamma \in D$. Из теоремы 3.4 вытекает классификация $(U^a \times U^a)$-орбит в $\mathfrak{U}^*$.

Теорема 3.5. *1. Всякая $(U^a \times U^a)$-орбита в $\mathfrak{U}^*$ содержит элемент $\Lambda_{D,\phi}$ для некоторой расстановки ладей D в системе корней Δ и отображения $\phi : D \to \mathbb{F}_q^*$. 2. Два элемента $\Lambda_{D,\phi}$ и $\Lambda_{D',\phi'}$ лежат в одной $(U^a \times U^a)$-орбите тогда и только тогда, когда $(D,\phi) = (D',\phi')$.*

Дадим явное описание стабилизатора элемента $\Lambda_{D,\phi}$ относительно правого (соответственно левого) действия U^a на $\mathfrak{U}^*$ (для случая $D = D_+$ см. работу [9]). Для всякого $\gamma = (i,j) \in \Delta$ рассмотрим подмножество корней $\mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{S}_+(\gamma) \cup \mathcal{S}_-(\gamma)$, где $\mathcal{S}_\pm(\gamma) \subset \Delta_\pm$, определенное следующим образом:

1) если $\gamma > 0$, то $\mathcal{S}_-(\gamma) = \varnothing$ и $\mathcal{S}_+(\gamma)$ состоит из корней $\alpha = (i,k), \quad i < k < j$;

2) если $\gamma < 0$, то $\mathcal{S}_-(\gamma)$ состоит из корней $\alpha = (i,k), \quad 1 \leqslant k < j$;

3) если $\gamma < 0$, то $\mathcal{S}_+(\gamma)$ состоит из корней $\alpha = (i,k), \quad i < k$.

Если $\alpha = (i,k) \in S(\gamma)$, то обозначим $\alpha^\star = (k,j)$. Соответственно $\mathcal{S}^\star(\gamma)$ — подмножество корней $\alpha^\star$, где $\alpha \in \mathcal{S}(\gamma)$. Отметим, что в перечисленных выше случаях 1, 2 и 3 выполняются равенства $E_\alpha E_{\alpha^\star} = E_\gamma$, $F_\alpha E_{\alpha^\star} = F_\gamma$ и $E_\alpha F_{\alpha^\star} = F_\gamma$ соответственно.

Пример. Изобразим корни $\gamma \in D$ на $(n \times n)$-таблице символом $\otimes$, корни из $\mathcal{S}(\gamma)$ и $\mathcal{S}^\star(\gamma)$ — символами «+» и «−» соответственно. Места на диагонали отметим номерами соответствующих строк (и столбцов). Остальные места отметим точками. Например, для $n = 7$ и корней $\gamma_1 = (2,5)$ и $\gamma_2 = (5,3)$ таблицы принимают вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & + & + & \otimes & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & - & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & - & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & \otimes & \cdot & 5 & + & + \\ \cdot & \cdot & - & \cdot & \cdot & 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & - & \cdot & \cdot & \cdot & 7 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{S}_+(\gamma_1) = \{(2,3),(2,4)\}$, $\mathcal{S}_-(\gamma_1) = \varnothing$, $\mathcal{S}_+(\gamma_2) = \{(5,6),(5,7)\}$, $\mathcal{S}_-(\gamma_2) = \{(5,1),(5,2)\}$.

Пусть $\mathfrak{U}_\gamma$ — подпространство, натянутое на матричные единицы E_β, где $\beta \notin \mathcal{S}_+(\gamma)$, и F_β, где $\beta \notin \mathcal{S}_-(\gamma)$. Подпространство $\mathfrak{U}_\gamma$ является подалгеброй (точнее, правым идеалом) в $\mathfrak{U}$, соответственно $U_\gamma = 1 + \mathfrak{U}_\gamma$ — алгебра-подгруппа в U^a. Аналогично по $\mathcal{S}^\star(\gamma)$ определяется подалгебра (левый идеал) $\mathfrak{U}_\gamma^\star$ и алгебра-подгруппа $U_\gamma^\star = 1 + \mathfrak{U}_\gamma^\star$.

Положим

$$\mathcal{S}(D) = \bigcup_{\gamma \in D} \mathcal{S}(\gamma), \qquad \mathcal{S}_\pm(D) = \bigcup_{\gamma \in D} \mathcal{S}_\pm(\gamma), \qquad \mathcal{S}^\star(D) = \bigcup_{\gamma \in D} \mathcal{S}^\star(\gamma),$$

$$\mathfrak{U}_D = \bigcap_{\gamma\in D} \mathfrak{U}_\gamma, \qquad\qquad \mathfrak{U}^\star_D = \bigcap_{\gamma\in D} \mathfrak{U}^\star_\gamma.$$

Соответственно, определены алгебра-подгруппы $U_D = 1+\mathfrak{U}_D$ и $U^\star_D = 1+\mathfrak{U}^\star_D$. Непосредственными вычислениями доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Подгруппа U_D (соответственно $U^\star_D$) является стабилизатором $\Lambda_{D,\phi}$ относительно правого (соответственно левого) действия U^a на $\mathfrak{U}^*$.*

Формула

$$\xi_{D,\phi}(u) = \varepsilon^{\Lambda_{D,\phi}(X)}, \quad u = 1+X, \quad X\in\mathfrak{U}_D,$$

определяет характер подгруппы U_D. Рассмотрим характер

$$\chi_{D,\phi} = \mathrm{Ind}(\xi_{D,\phi}, U_D, U^a).$$

Заметим, что характер $\chi_{D,\phi}$ равен характеру, который индуцирован с характера $\xi_{D,\phi}$ подгруппы $U^\star_D$. Из теоремы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.7. *Системы характеров $\{\chi_{D,\phi}\}$ и классов $\{K_{D,\Phi}\}$ определяют теорию суперхарактеров группы U^a.*

Следующая наша цель — получить формулу для значения суперхарактера на суперклассе. Для случая $D = D_+$ полученная ниже формула совпадает с формулами из работ [5, 10].

Нам понадобятся следующие определения. Пусть D и D' — две расстановки ладей в Δ. Рассмотрим подмножество $R(D,D')$, состоящее из элементов $\alpha\in\mathcal{S}(D)$, которые удовлетворяют одному из следующих условий:

1) если $\alpha\in\mathcal{S}_+(D)$, то существует $\beta\in D'_+$ такой, что $\alpha+\beta\in S(D)$;

2) если $\alpha\in\mathcal{S}_+(D)$, то существует $\beta\in D'_-$ такой, что $\alpha+\beta\in S(D)$;

3) если $\alpha\in\mathcal{S}_-(D)$, то существует $\beta\in D'_+$ такой, что $\alpha+\beta\in S(D)$.

Обозначим через $r(D,D')$ число элементов в $R(D,D')$.

Пример. Пусть $D = \{(2,6),(5,3)\}$ и $D' = \{(1,2),(3,5),(6,7),(7,1)\}$. Отметим на следующей диаграмме корни из D, D' и $\mathcal{S}(D)$ символами $\otimes$, $\square$ и $+$ соответственно:

$$\begin{pmatrix}
1 & \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 2 & + & + & + & \otimes & \cdot \\
\cdot & \cdot & 3 & \cdot & \square & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\
+ & + & \otimes & \cdot & 5 & + & + \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 & \square \\
\square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 7
\end{pmatrix}.$$

В примере $R(D,D') = \{(2,3),(5,1),(5,6),(5,7),\}$ и $r(D,D') = 4$.

Определим

$$\delta(D,D') = \begin{cases} 1, & \text{если } \; D'\cap(\mathcal{S}(D)\cup\mathcal{S}^\star(D)) = \varnothing, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$c(\phi,\phi') = \sum_{\gamma\in D\cap D'} \phi(\gamma)\phi'(\gamma),$$

$$s(D) = |\mathcal{S}(D)|, \qquad m(D,D') = s(D) - r(D,D').$$

Теорема 3.8. *Значение суперхарактера $\chi = \chi_{D,\phi}$ на суперклассе $K = K_{D',\phi'}$ вычисляется по формуле*

$$\chi(K) = \delta(D, D')q^{m(D,D')}\varepsilon^{c(\phi,\phi')}.$$

Доказательство. Положим $X = X_{D',\phi'}$ и $u = 1 + X$. Поскольку суперхарактеры постоянны на суперклассах, то $\chi(K) = \chi(u)$. Рассмотрим подмножество $S(D)$ в U^a, состоящее из элементов вида

$$1 + \sum_{\alpha\in\mathcal{S}_+(D)} a_\alpha E_\alpha + \sum_{\alpha\in\mathcal{S}_-(D)} a_\alpha F_\alpha, \tag{8}$$

где $a_\alpha \in \mathbb{F}_q$. Легко показать, что любой элемент u группы U^a однозначно представим в виде $u = sv$, где $s \in S(D)$ и $v \in U_D$. Характер χ вычисляется по стандартной формуле

$$\chi(u) = \sum_{s\in S(D)} \dot{\xi}(sus^{-1}), \tag{9}$$

где $\dot{\xi}(u)$ равно $\xi_{D,\phi}(u)$ на U_D и нулю вне U_D.

Пункт 1. Пусть $D' \cap \mathcal{S}(D) \neq \varnothing$. Покажем, что $\chi(K) = 0$. Так как $sus^{-1} = 1+sXs^{-1}$, то достаточно показать, что $sXs^{-1} \notin \mathfrak{U}_D$ для любого $s \in S(D)$. Подалгебра $\mathfrak{U}_D$ является правым идеалом в $\mathfrak{U}$; $sXs^{-1} \in \mathfrak{U}_D$ тогда и только тогда, когда $sX \in \mathfrak{U}_D$.

Пусть $\beta \in D' \cap \mathcal{S}(D)$. Если $\beta = (i, j) \in D'_+$, то j-й столбец $(sX)_j$ в матрице sX имеет вид

$$(sX)_j = \phi'(\gamma)E_{ij} + \sum_{k<i} a_{kj}E_{kj} \bmod \mathfrak{n}^a_-.$$

Если $\beta = (i, j) \in D'_-$, то

$$(sX)_j = \phi'(\gamma)F_{ij} + \sum_{k<i} a_{kj}F_{kj}.$$

В обоих случаях $sX \notin \mathfrak{U}_D$, что доказывает утверждение пункта 1.

Пункт 2. Пусть $D' \cap \mathcal{S}^\star(D) \neq \varnothing$. Покажем, что $\chi(K) = 0$. В силу замечания 3.2 $\chi_{D,\phi}$ является характером представления, индуцированного с $\xi_{D,\phi}$ левого стабилизатора $U^\star_D$. Утверждение этого пункта далее доказывается аналогично пункту 1.

Пункт 3. Предположим, что $D' \cap (\mathcal{S}(D) \cup \mathcal{S}^\star(D)) = \varnothing$. Тогда для любого $\beta \in D'$ элементы E_β и F_β принадлежат $\mathfrak{U}_D$. Следовательно, $X \in \mathfrak{U}_D$. Для $s \in S(D)$ вида (8) и X вида (4) получаем

$$sX = \left(1 + \sum_{\alpha\in\mathcal{S}_+(D)} a_\alpha E_\alpha + \sum_{\alpha\in\mathcal{S}_-(D)} a_\alpha F_\alpha\right)\left(\sum_{\beta\in D'_+} \phi'(\beta)E_\beta + \sum_{\beta\in D'_-} \phi'(\beta)F_\beta\right). \tag{10}$$

При раскрытии скобок в (10) нет подобных членов. Действительно, если $E_{\alpha_1}E_{\beta_1} = E_{\alpha_2}E_{\beta_2} \neq 0$, то $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$ и $\mathrm{col}(\beta_1) = \mathrm{col}(\beta_2)$. Так как два элемента из D' не могут лежать в одном столбце, то $\beta_1 = \beta_2$ и, следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Если $\alpha \in R(D, D')$, то существует элемент $\beta \in D'$ такой, что произведение соответствующих матричных единиц (равное $E_\alpha E_\beta$, $E_\alpha F_\beta$ или $F_\alpha E_\beta$) не лежит в $\mathfrak{U}_D$. Из этого вытекает, что если $a_\alpha \neq 0$ для некоторого $\alpha \in R(D, D')$, то $sX \notin \mathfrak{U}_D$. Поскольку $\mathfrak{U}_D$ — правый идеал, то $sXs^{-1} \notin \mathfrak{U}_D$. Поэтому $\dot{\xi}(sus^{-1}) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $a_\alpha = 0$ для любого $\alpha \in R(D, D')$. Если $\alpha \notin R(D, D')$, то для любого $\beta \in D'$ элементы $E_\alpha E_\beta$, $E_\alpha F_\beta$, $F_\alpha E_\beta$ принадлежат в $\mathfrak{U}_D$ и значения $\Lambda_{D,\phi}$ на них равны нулю. Поэтому $sX \in \mathfrak{U}_D$,

$$\Lambda_{D,\phi}(sXs^{-1}) = \Lambda_{D,\phi}(sX) = \sum_{\gamma \in D \cap D'} \phi(\gamma)\phi'(\gamma) = c(\phi, \phi')$$

и $\dot{\xi}(sus^{-1}) = \varepsilon^{c(\phi,\phi')}$. Поэтому $\chi(u) = q^{s(D)-r(D,D')}\varepsilon^{c(\phi,\phi')}$. $\square$

4. Теория суперхарактеров для группы G^a. Группа G^a является полупрямым произведением группы H и унипотентной подгруппы U^a. Напомним, что подгруппа $U^a = 1 + \mathfrak{U}$ является алгебра-группой, а группа G^a является группой обратимых элементов в ассоциативной алгебре $\mathfrak{g}^a$.

Для группы G^a можно построить теорию суперхарактеров, следуя работам автора [8, 11]. Рассмотрим группу $\widetilde{G^a} = H \ltimes (U^a \times U^a)$ и ее представление в $\mathfrak{U}$:

$$\rho(\tau)(X) = tAXB^{-1}t^{-1}, \qquad (11)$$

где $\tau = (t, A, B)$, $X \in \mathfrak{U}$, $t \in H$, $A, B \in U^a$.

Определим действие $t \in H$ на $\phi : D \to \mathbb{F}_q^*$ по формуле $t.\phi(i,j) = t_i\phi(i,j)t_j^{-1}$. Из теоремы 3.4 вытекает классификация $\widetilde{G^a}$-орбит в $\mathfrak{U}$: на всякой $\widetilde{G^a}$-орбите есть элемент $X_{D,\phi}$; два элемента $X_{D,\phi}$ и $X_{D',\phi'}$ принадлежат одной $\widetilde{G^a}$-орбите тогда и только тогда, когда $D = D'$, а ϕ и ϕ' сопряжены относительно действия подгруппы H.

Рассмотрим действие группы $\widetilde{G^a}$ на G^a по формуле

$$r_\tau(g) = 1 + tA(g-1)B^{-1}t^{-1}, \qquad (12)$$

где $\tau = (t, A, B) \in \widetilde{G}$. Здесь $g - 1 \in \mathfrak{g}^a$. Из абелевости группы H вытекает, что полупростые части элементов g и $r_\tau(g)$ совпадают.

Для каждой расстановки ладей $D \in \Delta$ определим подгруппу H_D, которая состоит из элементов $h = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)$, где $h_i = 1$ при $i \in \mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D)$.

Пример. Пусть $n = 4$, $D = \{\gamma = (2,3)\}$. Тогда

$$H_D = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{B}$ троек $\mathfrak{b} = (D, \phi, h)$, где D — расстановка ладей в Δ, $\phi : D \to \mathbb{F}_q^*$ и $h \in H_D$. Сопоставим элементу $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ элемент $g_\mathfrak{b} = hu_{D,\phi}$, где $u_{D,\phi} = 1 + X_{D,\phi}$. Определим действие $t \in H$ на $\mathcal{B}$ по формуле $t.\mathfrak{b} = (D, t.\phi, h)$.

Теорема 4.1. *1. На всякой $\widetilde{G^a}$-орбите существует элемент вида $g_\mathfrak{b}$. 2. Два элемента $g_\mathfrak{b}$ и $g_{\mathfrak{b}'}$, где $\mathfrak{b} = (D, \phi, h)$ и $\mathfrak{b}' = (D', \phi', h')$, принадлежат одной $\widetilde{G^a}$-орбите тогда и только тогда, когда $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}'$ сопряжены относительно H.*

Доказательство. Вытекает из [8, теорема 3.1].

Обозначим через $K_\mathfrak{b}$ орбиту элемента $g_\mathfrak{b}$ относительно действия группы $\widetilde{G^a}$.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}$, состоящее из троек $\mathfrak{a} = (D, \phi, \theta)$, где D, ϕ определены выше, а θ — линейный характер (одномерное представление) подгруппы H_D. Рассмотрим линейный характер подгруппы $G_D = H_D U_D$, определенный по формуле

$$\xi_\mathfrak{a}(g) = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(X)}, \qquad (13)$$

где $g = h(1 + X)$, $h \in H_D$, $X \in \mathfrak{U}_D$. Пусть $\chi_\mathfrak{a} = \mathrm{Ind}(\xi_\mathfrak{a}, G_D, G^a)$.

Аналогично действию H на $\mathcal{B}$ определяется действие H на $\mathcal{A}$. Характер $\chi_{\mathfrak{a}}$ не зависит от действия H на ϕ [8, предложение 4.2].

Теорема 4.2 [8, теорема 4.5]**.** *Система характеров $\{\chi_{\mathfrak{a}}\}$ и разбиение группы G на подмножества $\{K(\mathfrak{b})\}$, где $\mathfrak{a}$ (соответственно $\mathfrak{b}$) пробегает множество представителей H орбит в $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{B}$), задают теорию суперхарактеров для группы G^a.*

Для вычисления значения суперхарактера на суперклассе нам понадобятся следующие обозначения:

$$\delta(D,h) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad h \in H_D, \\ 0, & \text{если} \quad h \notin H_D, \end{cases}$$

$$\delta(D,h,D') = \delta(D,h)\delta(D,D'),$$

$$R(D,h) = \{(i,j) \in \mathcal{S}(D):\ h_j \neq 1\}, \qquad r(D,h) = |R(D,H)|,$$

$$m(D,h,D') = s(D) - r(D,D') - r(D,h).$$

Для любого $t \in H$ положим

$$c_t(\phi,\phi') = \sum_{\gamma \in D \cap D'} \phi(\gamma)\phi'(\gamma)\gamma(t).$$

Теорема 4.3. *Значение суперхарактера $\chi_{\mathfrak{a}}$, где $\mathfrak{a} = (D,\phi,\theta)$, на суперклассе $K_{\mathfrak{b}}$, где $\mathfrak{b} = (D',\phi',h)$, вычисляется по формуле*

$$\chi_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{b}}) = \delta(D,h,D')\theta(h)\frac{q^{m(D,h,D')}}{|H_D|}\sum_{t \in H} \varepsilon^{c_t(\phi,\phi')}.$$

Доказательство. Поскольку суперхарактер постоянен на суперклассе, то $\chi_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{b}}) = \chi_{\mathfrak{a}}(g)$, где $g = hu$, $h = (h_1,\ldots,h_n) \in H_{D'}$, $u = 1 + X$ и $X = X_{D',\phi'}$. Имеем

$$\chi_{\mathfrak{a}}(g) = \frac{1}{|H_D|}\sum \dot{\xi}_{\mathfrak{a}}(pgp^{-1}), \tag{14}$$

где суммирование берется по всем $p = ts$, $t \in H$, $s \in S(D)$. Заметим, что $pgp^{-1} \equiv h \bmod U^a$. Если $h \notin H_D$, то $\chi_{\mathfrak{a}}(g) = 0$. Аналогично доказательству теоремы 3.8, если $D' \cap (\mathcal{S}(D) \cup \mathcal{S}^\star(D)) \neq \varnothing$, то $\chi_{\mathfrak{a}}(g) = 0$.

Пункт 1. Пусть далее $h \in H_D$ и $D' \cap (\mathcal{S}(D) \cup \mathcal{S}^\star(D)) = \varnothing$ (т. е. $\delta(D,h,D') \neq 0$). Напомним, что $h \in H_{D'}$. Тогда $h \in H_D \cap H_{D'}$ и $h_i = 1$, если i является номером строки или столбца из $D \cup D'$.

Поскольку $s \in S(D)$, то s имеет вид (8). В этом пункте мы покажем, что если существует корень $\alpha \in R(D,D') \cup R(D,h)$, для которого $a_\alpha \neq 0$, то $pgp^{-1} \neq G_D$ и, следовательно, $\dot{\xi}_{\mathfrak{a}}(pgp^{-1}) = 0$. Будем доказывать для $p = s$ (случай $p = ts$ рассматривается аналогично).

Представим $\mathcal{S}(D)$ в виде объединения двух непересекающихся подмножеств: $\mathcal{S}(D) = R(D,h) \cup R'(D,h)$, где $R'(D,h) = \{(i,j) \in \mathcal{S}(D):\ h_j = 1\}$. Отметим, что $h_i = 1$ для любого $(i,j) \in \mathcal{S}(D)$. Подмножество $R(D,D')$ (определенное в параграфе 3.3) содержится в $R'(D,h)$; действительно, если $\alpha = (i,j) \in R(D,D')$, то существует $\beta = (j,k) \in D'$ и, следовательно, $h_j = 1$.

Обозначим через $R_{\pm}(D,h)$, $R'_{\pm}(D,h)$ пересечения соответствующих подмножеств с Δ_+ и Δ_-. Рассмотрим два подпространства

$$\mathcal{Y}_1 = \left\{ \sum_{\alpha \in R_+(D,h)} a_\alpha E_\alpha + \sum_{\alpha \in R_-(D,h)} a_\alpha F_\alpha \right\},$$

$$\mathcal{Y}_2 = \left\{ \sum_{\alpha \in R'_+(D,h)} a_\alpha E_\alpha + \sum_{\alpha \in R'_-(D,h)} a_\alpha F_\alpha \right\}.$$

Имеем $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$, следовательно, $\mathfrak{U} = \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{U}_D$ и $S(D) = 1 + \mathcal{Y}$.

Заметим, что $\mathcal{Y}_1\mathcal{Y} = 0$. Действительно, $\alpha_1 = (i,j) \in R(D,h)$, то $h_j \neq 1$. Так как $h_j = 1$ для любого корня $\alpha = (j,k) \in \mathcal{S}(D)$, то $E_{\alpha_1}E_\alpha = 0$ (соответственно $E_{\alpha_1}F_\alpha = 0$ и $F_{\alpha_1}E_\alpha = 0$).

Сделаем следующее замечание: для любых элементов $Y_1, Z_1 \in \mathcal{Y}_1$ и $Y_2 \in \mathcal{Y}_2$ имеет место равенство $(1 + Z_1 + Y_2)(1 + Y_1 + Y_2)^{-1} = 1 + Z_1 - Y_1$. Действительно, $(1 + Z_1 - Y_1)(1 + Y_1 + Y_2) = 1 + Z_1 + Y_2$.

Элемент $s \in S(D)$ вида (8) представим как $s = 1 + Y_1 + Y_2$, где $Y_i \in \mathcal{Y}_i$. Положим $s^h = h^{-1}sh$. Имеем

$$sgs^{-1} = s(h(1+X))s^{-1} = hs^h(1+X)s^{-1} = h(s^hs^{-1} + s^hXs^{-1}).$$

Из замечания выше получаем $s^hs^{-1} = 1 + X_1$, где $X_1 \in \mathcal{Y}_1$ вида

$$X_1 = \sum_{\alpha \in R_+(D,h)} a_\alpha(h_{\mathrm{col}(\alpha)} - 1)E_\alpha + \sum_{\alpha \in R_-(D,h)} a_\alpha(h_{\mathrm{col}(\alpha)} - 1)F_\alpha.$$

Здесь $h_{\mathrm{col}(\alpha)} - 1 \neq 0$ для любого $\alpha \in R(D,h)$. При этом, если существует $\alpha \in R(D,h)$, для которого $a_\alpha \neq 0$, то X_1 — ненулевой элемент из $\mathcal{Y}_1$.

Так как $\mathcal{Y}_1\mathcal{Y} = \{0\}$, то $X_1 s = X_1(1 + Y_1 + Y_2) = X_1$. Отсюда $X_1 s^{-1} = X_1$. Получаем

$$sgs^{-1} = h(1 + X_1 + s^hXs^{-1}) = h(1 + (X_1 + s^hX)s^{-1}).$$

Покажем, что s^hX принадлежит $\mathcal{Y}_2 \oplus \mathfrak{U}_D$. Действительно, элементы s^h и s имеют вид (8). Как в формуле (10) элемент s^hX представим в виде суммы элемента X (который при условиях пункта 1 принадлежит $\mathfrak{U}_D$) и линейной комбинации произведений $E_\alpha E_\beta$, $E_\alpha F_\beta$ и $F_\alpha E_\beta$, где $\alpha \in S(D)$ и $\beta \in D'$. Каждое из произведений равно либо $E_{\alpha+\beta}$ (соответственно $F_{\alpha+\beta}$), либо нулю.

Если $\alpha \in R(D,D')$, то произведение матричных элементов отлично от нуля для единственного $\beta \in D'$, для которого $\alpha + \beta \in S(D)$ и $\mathrm{col}(\alpha+\beta) = \mathrm{col}(\beta)$. Отсюда $h_{\mathrm{col}(\alpha+\beta)} = h_{\mathrm{col}(\beta)} = 1$. Поэтому $E_{\alpha+\beta}$ (соответственно $F_{\alpha+\beta}$) принадлежит $\mathcal{Y}_2$.

Если $\alpha \notin R(D,D')$, то произведения $E_\alpha E_\beta$, $E_\alpha F_\beta$ и $F_\alpha E_\beta$ принадлежат $\mathfrak{U}_D$ и значение $\Lambda_{D,\phi}$ на этих произведениях равно нулю. Получаем $s^hX \in \mathcal{Y}_2 \oplus \mathfrak{U}_D$. При этом, если существует $\alpha \in R(D,D')$, для которого $a_\alpha \neq 0$, то $s^hX \notin \mathfrak{U}_D$.

Суммируя вышесказанное, заключаем, что если существует корень $\alpha \in R(D,D') \cup R(D,h)$, для которого $a_\alpha \neq 0$, то $X_1 + s^hX \notin \mathfrak{U}_D$. Поскольку $\mathfrak{U}_D$ — правый идеал, то $(X_1 + s^hX)s^{-1} \notin \mathfrak{U}_D$. Отсюда $sgs^{-1} \notin G_D$ и $\dot{\xi}_{\mathfrak{a}}(sgs^{-1}) = 0$, что доказывает утверждение пункта 1.

Пункт 2. Завершим вычисление $\chi_{\mathfrak{a}}(g)$. Из пункта 1 вытекает, что при суммировании в формуле (14) можно ограничиться теми s из (8), для которых $a_\alpha = 0$ для всякого $\alpha \in R(D,h) \cup R(D,D')$. При этом условии $sgs^{-1} \in G_D$ и $\xi(sgs^{-1}) = \theta(h)\varepsilon^{c(\phi,\phi')}$ (см. доказательство теоремы 3.8). Соответственно для $p = ts$ получаем $\xi(pgp^{-1}) = \theta(h)\varepsilon^{\Lambda_{D,\phi}(tXt^{-1})} = \theta(h)\varepsilon^{c_t(\phi,\phi')}$. Поэтому

$$\chi_{\mathfrak{a}}(g) = \frac{1}{|H_D|}\theta(h)q^{s(D)-r(D,D')-r(D,h)}\sum_{t\in H}\varepsilon^{c_t(\phi,\phi')}. \quad \square$$

Литература

1. *Diaconis P., Isaacs I. M.* Supercharacters and superclasses for algebra group // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360. P. 2359–2392.

2. *Панов А. Н.* Суперхарактеры унипотентных и разрешимых групп // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 136. С. 31–55.

3. *André C. A. M.* Basic characters of the unitriangular group // J. of Algebra. 1995. Vol. 175. P. 287–319.

4. *André C. A. M.* Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group // J. of Algebra. 1995. Vol. 176. P. 959–1000.

5. *André C. A. M.* The basic character table of the unitriangular group // J. of Algebra. 2001. Vol. 241. P. 437–471.

6. *Inönü E., Wigner E. P.* On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. 1953. Vol. 39. P. 510–524.

7. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л., Горбацевич В. В.* Группы и алгебры Ли — 3. В кн.: Совр. пробл. матем. Фундам. направл. Т. 41. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1990.

8. *Панов А. Н.* Теория суперхарактеров для групп обратимых элементов приведенных алгебр // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 6. С. 242–259.

9. *André C. A. M.* Hecke algebra for the basic representations of the unitriangular group // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 132. P. 987–996.

10. *Aguiar M., Andrè C., Benedetti C., Bergeron N., Zhi Chen, Diaconis P., Hendrickson A., Hsiao S., Isaacs I. M., Jedwab A., Johnson K., Karaali G., Lauve A., Tung Le, Lewis S., Huilan Li, Magaarg K., Marberg E., Novelli J.-Ch., Pang A., Saliola F., Tevlin L., Thibon J.-Y., Thiem N., Venkateswaran V., Vinroot C. R., Ning Yan, Zabricki M.* Supercharacters, symmetric functions in non-commuting variables, and related Hopf algebras // Advances in Mathematics. 2012. Vol. 229. P. 2310–2337.

11. *Panov A. N.* Supercharacters for finite groups of triangular type // Comm. Algebra. 2018. Vol. 46. P. 1032–1046.

Статья поступила в редакцию 21 октября 2019 г.;
после доработки 11 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Панов Александр Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; apanov@list.ru

Supercharacter theory for the Borel contraction of the group $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$*

A. N. Panov

Samara National Research University,
1, ul. Akademika Pavlova, Samara, 443086, Russian Federation

For citation: Panov A. N. Supercharacter theory for the Borel contraction of the group $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 254–268. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.208 (In Russian)

The notion of a supercharacter theory was introduced by P. Diaconis and I. M. Isaacs in 2008. A supercharacter theory for a given finite group is a pair of a system of certain complex characters of the group and its partition into classes that have properties similar to the irreducible characters and conjugacy classes. In the present paper, we consider the group obtained by a group contraction from the general linear group over a finite field. For this group, we construct a supercharacter theory. In terms of rook placements, we classify supercharacters and superclasses, calculate values of supercharacters on superclasses.

Keywords: group representations, irreducible characters, supercharacter theory, superclasses, algebra group.

References

1. Diaconis P., Isaacs I. M., "Supercharacters and superclasses for algebra group", *Trans. Amer. Math. Soc.* **360**, 2359–2392 (2008).
2. Panov A. N., "Supercharacters of unipotent and solvable groups", *J. Math. Sci. (N. Y.)* **235**(6), 714–739 (2018).
3. André C. A. M., "Basic characters of the unitriangular group", *J. of Algebra* **175**, 287–319 (1995).
4. André C. A. M., "Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group", *J. of Algebra* **176**, 959–1000 (1995).
5. André C. A. M., "The basic character table of the unitriangular group", *J. of Algebra* **241**, 437–471 (2001).
6. Inönü E., Wigner E. P., "On the contraction of groups and their representations", *Proc. Nat. Acad. Sci.* **39**, 510–524 (1953).
7. Gorbatsevich V. V., Onishchik A. L., Vinberg E. B., "Lie groups and Lie algebras III", in *Encyclopaedia Math. Sci.* **41** (Springer, Berlin, 1994).
8. Panov A. N., "Supercharacter theory for groups of invertible elements of reduced algebras", *St. Petersburg Math. Journal* **27**, 1035–1047 (2016).
9. André C. A. M., "Hecke algebra for the basic representations of the unitriangular group", *Proc. Amer. Math. Soc.* **132**, 987–996 (2003).
10. Aguiar M., Andrè C., Benedetti C., Bergeron N., Zhi Chen, Diaconis P., Hendrickson A., Hsiao S., Isaacs I. M., Jedwab A., Johnson K., Karaali G., Lauve A., Tung Le, Lewis S., Huilan Li, Magaarg K., Marberg E., Novelli J.-Ch., Pang A., Saliola F., Tevlin L., Thibon J.-Y., Thiem N., Venkateswaran V., Vinroot C. R., Ning Yan, Zabricki M., "Supercharacters, symmetric functions in noncommuting variables, and related Hopf algebras", *Advances in Mathematics* **229**, 2310–2337 (2012).
11. Panov A. N., "Supercharacters for finite groups of triangular type", *Comm. Algebra* **46**, 1032–1046 (2018).

Received: October 21, 2019
Revised: December 11, 2019
Accepted: December 12, 2019

Author's information:

Aleksandr N. Panov — apanov@list.ru

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant N 20-01-00091a).