УДК 512.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
MSC 20G15

О достаточных условиях замкнутости элементарной сети

А. К. Гутнова, В. А. Койбаев

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Российская Федерация, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
Российская Федерация, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

Для цитирования: *Гутнова А. К., Койбаев В. А.* О достаточных условиях замкнутости элементарной сети // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 230–235.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.205

Работа связана с вопросами замкнутости элементарной сети. Элементарная сеть (сеть без диагонали) $\sigma = (\sigma_{ij})_{i\neq j}$ аддитивных подгрупп σ_{ij} поля k называется замкнутой, если элементарная сетевая группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется дополняемой, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} поля k таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i,j \leq n$, является (полной) сетью. Дополняемые элементарные сети являются замкнутыми. Необходимым и достаточным условием дополняемости элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ является выполнение включений $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ (для любых $i \neq j$). Исследуется вопрос (Коуровская тетрадь, вопрос 19.63): верно ли, что для замкнутости элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ достаточно выполнения включений $\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$ (здесь через σ_{ij}^2 обозначается аддитивная подгруппа поля k, порожденная квадратами из σ_{ij})? Элементарные сети, для которых выполнены последние включения, мы называем слабо дополняемыми элементарными сетями. Понятия дополняемой и слабо дополняемой элементарных сетей совпадают для полей нечетной характеристики. Таким образом, упомянутый вопрос достаточности слабой дополняемости для замкнутости элементарной сети актуален для полей характеристик 0 и 2. В настоящей статье для полей характеристик 0 и 2 строятся примеры слабо дополняемых, но не дополняемых элементарных сетей. Строится пример замкнутой элементарной сети, которая не является слабо дополняемой.

Ключевые слова: сети, ковры, элементарная сеть, замкнутая сеть, дополняемая сеть, элементарная сетевая группа, трансвекция.

1. Введение. Элементарная сеть (сеть без диагонали [1, 2]) $\sigma = (\sigma_{ij})_{i\neq j}$ аддитивных подгрупп σ_{ij} поля k называется замкнутой, если элементарная сетевая группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций (см. [2–4], [5, вопрос 15.46]). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется дополняемой [3, 4], если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} поля k таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i,j \leq n$, является (полной) сетью. Известно, что дополняемые элементарные сети являются замкнутыми. Необходимым и достаточным условием дополняемости элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ является выполнение включений $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ (для любых $i \neq j$). В этой связи представляет интерес вопрос Я. Н. Нужина (Коуровская тетрадь [5, вопрос 19.63], см. также [6]): верно ли, что для замкнутости элементарной сети

$\sigma = (\sigma_{ij})$ достаточно выполнения включений $\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$ (здесь через σ_{ij}^2 обозначается аддитивная подгруппа поля k, порожденная квадратами из σ_{ij})? Элементарные сети, для которых выполнены последние включения, мы называем слабо дополняемыми элементарными сетями. Понятия дополняемой и слабо дополняемой элементарных сетей совпадают для полей нечетной характеристики. Таким образом, упомянутый вопрос достаточности слабой дополняемости для замкнутости элементарной сети актуален для полей характеристик 0 и 2. В настоящей заметке для полей характеристик 0 и 2 мы строим примеры слабо дополняемых, но не дополняемых элементарных сетей. Над полем характеристики 2 строится пример замкнутой элементарной сети, которая не является слабо дополняемой.

Мы пользуемся следующими стандартными обозначениями. Если A, B — подгруппы аддитивной группы поля (или коммутативного кольца) k, то через AB мы обозначаем подгруппу $AB = \langle ab : \ a, b \in A\rangle_{ad}$ аддитивной группы поля k, порожденную всеми произведениями $ab, a \in A, b \in B$. Далее, через A^2 мы обозначаем аддитивную подгруппу $A^2 = \langle a^2 : \ a \in A\rangle_{ad}$ поля k, порожденную всеми квадратами a^2. Ясно, что $A^2 \subseteq A \cdot A$, причем если $\mathrm{char} k = p$ — нечетное простое число, то $A^2 = A \cdot A$. Пусть e — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij},\ \alpha \in k,$ — элементарная трансвекция. Для элементарной сети σ мы рассматриваем элементарную сетевую группу $E(\sigma) = \langle t_{ij}(\xi) : \xi \in \sigma_{ij},\ 1 \leq i \neq j \leq n\rangle$.

2. Элементарные сети (ковры). Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью (элементарным ковром)* [1, 2], [4, вопрос 15.46]. Отметим, что в [1] такая сеть называется «сетью без диагонали». Таким образом, элементарная сеть — это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i \neq j \leq n$, аддитивных подгрупп поля k, для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных натуральных чисел $i, r, j,\ 1 \leq i, r, j \leq n$.

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} поля k таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети. Приведем необходимые и достаточные условия дополняемости элементарной сети.

Предложение 1 [1, §3]. *Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$. При выполнении условий дополняемости диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой $\sigma_{ii} = \sum_{k\neq i} \sigma_{ik}\sigma_{ki}$, где суммирование берется по всем k, отличным от i.*

Определение. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется *слабо дополняемой*, если $\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$.

Так как $\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij}$, то из включения $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ следует включение $\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}$. Следовательно, согласно предложению 1 всякая дополняемая элементарная сеть является слабо дополняемой. Поэтому мы имеем включение

$$\textit{дополняемые эл. сети} \subset \textit{слабо дополняемые эл. сети.} \tag{1}$$

Если k — поле нечетной характеристики, то понятия дополняемой и слабо дополняемой элементарных сетей совпадают. Ниже (предложение 3 и следующее за ним замечание) мы покажем строгость включения (1) для полей характеристик 0 и 2. А именно, для полей характеристик 0 и 2 мы построим элементарную сеть (см. (2) ниже), которая является слабо дополняемой и не является дополняемой.

Пусть F — коммутативная область целостности с 1, $R = F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из F. Напомним, что (полной) степенью одночлена $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ называется число $i_1 + \ldots + i_n$, а (полной) степенью $\deg(f)$ ненулевого многочлена $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$ называется максимальная из полных степеней его одночленов (с ненулевыми коэффициентами). Далее, для ненулевого многочлена $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$ через $\nu(f)$ обозначим минимальную из полных степеней одночленов (с ненулевыми коэффициентами), входящих в $f \in R$. Ясно, что $\nu(f) \leq \deg(f)$. Например,

$$f = 2 + yz + x^2z,\ \nu(f) = 0,\ \deg(f) = 3; \quad g = xy + xyz^2,\ \nu(g) = 2,\ \deg(g) = 4.$$

Пусть m — целое неотрицательное число. Положим

$$R_m = \{f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R :\ \nu(f) \geq m\} \cup \{0\}$$

($\{0\}$ — нулевой многочлен).

Ясно, что $R = R_0 = F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots$.

Лемма 1. *Если $f, g \in R$, $f \neq \{0\}$, $g \neq \{0\}$ и $f \neq -g$, то $\nu(f+g) \geq \min(\nu(f), \nu(g))$. В частности, R_m — аддитивная подгруппа кольца $R = R_0$. Далее, $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$ (m, n — целые неотрицательные). Следовательно, R_m — идеал кольца $R = F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

3. Слабо дополняемая сеть над полем нулевой характеристики. Приступим теперь к построению примеров, заявленных во введении. Рассмотрим кольцо многочленов $R = R_0 = \mathbb{Z}[x, y, z]$ от трех переменных с целыми коэффициентами из $\mathbb{Z}$, k — поле частных кольца R. Положим

$$R_4 = \{f = f(x, y, z) \in R :\ \nu(f) \geq 4\} \cup \{0\}.$$

Рассмотрим аддитивную подгруппу

$$B = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y + \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}xy^2 + \mathbb{Z}xz^2 + \mathbb{Z}yx^2 + \mathbb{Z}yz^2 + \mathbb{Z}zx^2 + \mathbb{Z}zy^2 + \\ + \mathbb{Z}x^3 + \mathbb{Z}y^3 + \mathbb{Z}z^3 + 2\mathbb{Z}xyz + R_4.$$

Лемма 2. *Пусть $f, g \in B$, тогда*

1) $f^2 \in \mathbb{Z}x^2 + \mathbb{Z}y^2 + \mathbb{Z}z^2 + 2\mathbb{Z}xy + 2\mathbb{Z}xz + 2\mathbb{Z}yz + R_4$;

2) $f^2 g \in \mathbb{Z}x^3 + \mathbb{Z}y^3 + \mathbb{Z}z^3 + \mathbb{Z}xy^2 + \mathbb{Z}xz^2 + \mathbb{Z}yx^2 + \mathbb{Z}yz^2 + \mathbb{Z}zx^2 + \mathbb{Z}zy^2 + 2\mathbb{Z}xyz + R_4$.

Доказательство. Если $f, g \in B$, то

$$f = m_1x + m_2y + m_3z + \psi_1, \quad g = n_1x + n_2y + n_3z + \psi_2, \quad \psi_1, \psi_2 \in R_3,$$

где $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$f^2 \in \mathbb{Z}x^2 + \mathbb{Z}y^2 + \mathbb{Z}z^2 + 2\mathbb{Z}xy + 2\mathbb{Z}xz + 2\mathbb{Z}yz + R_4.$$

Отсюда очевидно вытекает второе включение

$$f^2 g \in \mathbb{Z}x^3 + \mathbb{Z}y^3 + \mathbb{Z}z^3 + \mathbb{Z}xy^2 + \mathbb{Z}xz^2 + \mathbb{Z}yx^2 + \mathbb{Z}yz^2 + \mathbb{Z}zx^2 + \mathbb{Z}zy^2 + 2\mathbb{Z}xyz + R_4. \square$$

Предложение 2. *Имеем включение $B^2 \cdot B \subseteq B$, при этом подгруппа $B \cdot B \cdot B$ не содержится в подгруппе B.*

Доказательство. Элемент xyz содержится в $B \cdot B \cdot B$ и не содержится в B. Поэтому $B \cdot B \cdot B$ не содержится в подгруппе B. Включение $B^2 \cdot B \subseteq B$ вытекает из леммы 2. $\square$

Предложение 3. *Таблица (порядка $n \geq 2$)*

$$\tau = \begin{pmatrix} * & B & R_4 & \dots & R_4 \\ B & * & R_4 & \dots & R_4 \\ R_4 & R_4 & * & \dots & R_4 \\ . & . & . & \dots & . \\ R_4 & R_4 & R_4 & \dots & * \end{pmatrix} \tag{2}$$

является элементарной сетью. Далее, элементарная сеть τ является слабо дополняемой и не является дополняемой элементарной сетью. Таким образом, для поля нулевой характеристики включение (1) *является строгим.*

Доказательство. В силу леммы 1 таблица τ является элементарной сетью. Далее, доказательство вытекает из предложений 1 и 2. $\square$

Замечание. Пример, аналогичный построенному (см. подгруппу B для случая $\mathbb{Z}$ и сеть (2)), справедлив и для поля четной характеристики (здесь слагаемые подгруппы B, содержащие 2, равны 0).

Рассмотрим кольцо многочленов $R = R_0 = \mathbb{F}_2[x, y, z]$ от трех переменных с коэффициентами из поля $\mathbb{F}_2$ (из двух элементов), k — поле частных кольца R. Далее, рассмотрим аддитивную подгруппу

$$B = \mathbb{F}_2 x + \mathbb{F}_2 y + \mathbb{F}_2 z + \mathbb{F}_2 xy^2 + \mathbb{F}_2 xz^2 + \mathbb{F}_2 yx^2 + \mathbb{F}_2 yz^2 + \mathbb{F}_2 zx^2 + \mathbb{F}_2 zy^2 + \\ + \mathbb{F}_2 x^3 + \mathbb{F}_2 y^3 + \mathbb{F}_2 z^3 + R_4$$

(R_4 определяется как и выше в предыдущем пункте). Тогда для построенной подгруппы B (и соответственно для элементарной сети (2)) справедлив результат предложения 3.

4. Замкнутая элементарная сеть (над полем характеристики 2), которая не является слабо дополняемой. В поле $k = \mathbb{F}_2(x)$ рациональных функций $\frac{f}{g}$, $f, g \in \mathbb{F}_2[x]$ с коэффициентами из $\mathbb{F}_2$ рассмотрим кольцо R и его идеал A:

$$R = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{F}_2(x) : \deg g - \deg f \geq 0 \right\}, \quad A = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{F}_2(x) : \deg g - \deg f \geq 4 \right\}.$$

Пусть далее $B = \frac{\mathbb{F}_2}{x} + A$ — аддитивная подгруппа кольца R. Рассмотрим таблицу $\sigma = (\sigma_{ij})$, $i \neq j$, порядка $n \geq 2$, для которой $\sigma_{12} = \sigma_{21} = B$ и $\sigma_{ij} = A$ для остальных $i \neq j$. Ясно, что таким образом построенная таблица является элементарной сетью.

В работе [4, предложение 6] доказано следующее предложение.

Предложение 4. *Элементарная сеть σ является замкнутой и не является слабо дополняемой. В частности, в случае поля четной характеристики из замкнутости элементарной сети не следует ее слабая дополняемость.*

Отметим, что в работах [3, 4] при определении кольца R (в нашем случае — это идеал A) допущена опечатка. Правильно писать $R = \{\frac{f}{g} \in \mathbb{F}_2(x) : \deg g - \deg f \geq 4\}$.

5. Заключение. В работе рассматривается вопрос (Коуровская тетрадь, вопрос 19.63): верно ли, что для замкнутости элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ достаточно выполнения включений $\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$ (здесь через σ_{ij}^2 обозначается аддитивная подгруппа поля k, порожденная квадратами из σ_{ij})? Исходя из последних условий, в работе вводится понятие слабо дополняемой элементарной сети. Понятия дополняемой и слабо дополняемой элементарных сетей совпадают для полей нечетной характеристики. Известно, что дополняемые элементарные сети замкнуты. Таким образом, упомянутый вопрос достаточности слабой дополняемости для замкнутости элементарной сети актуален для полей характеристик 0 и 2. В настоящей статье для полей характеристик 0 и 2 построены примеры слабо дополняемых, но не дополняемых элементарных сетей; для поля характеристики 2 — пример замкнутой элементарной сети, которая не является слабо дополняемой.

Авторы благодарны рецензентам за указанные опечатки и недочеты при оформлении статьи.

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1978. Т. 75. С. 22–31.

2. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 4. С. 421–434.

3. *Койбаев В. А.* Замкнутые сети в линейных группах // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 1. С. 26–34.

4. *Койбаев В. А.* Элементарные сети в линейных группах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.

5. The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory / Eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro. Novosibirsk: Russ. acad. of sciences, Siberian div., Inst. of mathematics. 2018. No. 19.

6. *Нужин Я. Н.* Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 195–200.

Статья поступила в редакцию 18 ноября 2019 г.;
после доработки 4 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Гутнова Алина Казбековна — канд. физ.-мат. наук, доц.; gutnovaalina@gmail.com
Койбаев Владимир Амурханович — д-р физ.-мат. наук; koibaev-K1@yandex.ru

On sufficient conditions for the closure of an elementary net

A. K. Gutnova, V. A. Koibaev

North Ossetian State University, 44–46, ul. Vatutina, Vladikavkaz, 362025, Russian Federation
Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 53, ul. Vatutina, Vladikavkaz, 362027, Russian Federation

For citation: Gutnova A. K., Koibaev V. A. On sufficient conditions for the closure of an elementary net. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 230–235. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.205 (In Russian)

An elementary net (net without a diagonal) $\sigma = (\sigma_{ij})_{i\neq j}$ of additive subgroups σ_{ij} of the field k is called closed if the elementary net group $E(\sigma)$ does not contain new elementary transvections. Elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is called supplemented if for some additive subgroups σ_{ii} of the field k the table (with diagonal) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, is a (full) net. Supplemented elementary nets are closed. A necessary and sufficient condition for the supplementarity of the elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is the implementation of inclusions $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ (for any $i \neq j$). In this regard the following question is of interest (Kourovka notebook, question 19.63):): is it true that for closedness of an elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ it suffices to execute the inclusions $\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}$ for any $i \neq j$ (here, by σ_{ij}^2 we denote the additive subgroup of the field k generated by all squares from σ_{ij})? Elementary nets for which the last inclusions are satisfied we call weakly supplemented elementary nets. The concepts of supplemented and weakly supplemented elementary nets coincide for fields of odd characteristic. Thus, the aforementioned question of the sufficiency of weak supplementarity for the closedness of an elementary net is relevant for fields of characteristic 0 and 2. In this article we construct examples of weakly supplemented but not supplemented elementary nets. An example of a closed elementary net is constructed, which is not weakly supplemented.

Keywords: nets, carpets, elementary net, closed net, supplemented net, elementary net group, transvection.

References

1. Borevich Z. I., "Subgroups of linear groups rich in transvections", *Journal of Soviet Mathematics* **37**, issue 2, 928–934 (1987). https://doi.org/10.1007/BF01089083

2. Levchuk V. M., "Remark on a theorem of L. Dickson", *Algebra and Logic* **22**, issue 4, 306–316 (1983). https://doi.org/10.1007/BF01979677

3. Koibaev V. A., "Closed nets in linear groups", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **46**(1), 14–21 (2013). http://doi.org/10.3103/S1063454113010056

4. Koibaev V. A., "Elementary nets in linear groups", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* **17**(4), 134–141 (2011).

5. *The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory* (V. D. Mazurov, E. I. Khukhro (eds.), Russ. acad. of sciences, Siberian div., Inst. of mathematics, Novosibirsk, 2018, no. 19).

6. Nuzhin Ya. N., "Lie rings defined by the root system and family of additive subgroups of the initial ring", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)* **283**, suppl. 1, 119–125 (2013). https://doi.org/10.1134/S0081543813090125

Received: November 18, 2019
Revised: December 4, 2019
Accepted: December 12, 2019

Authors' information:

Alina K. Gutnova — gutnovaalina@gmail.com
Vladimir A. Koibaev — koibaev-K1@yandex.ru