УДК 511.223 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
MSC 11S31

Вычисления в обобщенной теории Любина — Тейта*

С. В. Востоков, Е. О. Леонова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Востоков С. В., Леонова Е. О.* Вычисления в обобщенной теории Любина — Тейта // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 210–216.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.203

В данной статье рассматриваются различные расширения локальных полей. Для произвольного конечного расширения K поля p-адических чисел с помощью известной теории Любина — Тейта возможно описать максимальное абелево расширение K^{ab}/K и соответствующую группу Галуа. Она представляется как прямое произведение групп, полученных с помощью максимального неразветвленного расширения K и вполне разветвленного расширения, полученного с использованием корней некоторых эндоморфизмов формальных групп Любина — Тейта. Мы рассматриваем так называемые обобщенные формальные группы Любина — Тейта и расширения, возникающие при добавлении к рассматриваемому полю корней их эндоморфизмов. Используя тот факт, что над неразветвленным конечным расширением T_m степени m поля K правильным образом выбранная обобщенная формальная группа совпадает с классической, оказалось возможным получить группу Галуа расширения $(T_m)^{ab}/K$. Главным результатом работы является явное описание группы Галуа расширения $(K^{ur})^{ab}/K$, где K^{ur} — это максимальное неразветвленное расширение поля K. Аналогичные методы также были применены к изучению разветвленных расширений поля K.

Ключевые слова: максимальное неразветвленное расширение, формальные групповые законы.

1. Введение. Данная статья посвящена изучению различных расширений локальных полей. Для произвольного конечного расширения Галуа поля p-адических чисел $K/\mathbb{Q}_p$ при помощи теории Любина — Тейта в прошлом были описаны его максимальное расширение K^{ab}/K и соответствующая группа Галуа.

В работе рассматриваются так называемые обобщенные формальные группы Любина — Тейта и расширения, полученные путем добавления к исходному полю корней их автоморфизмов. С их помощью оказывается возможным описать группу Галуа расширения T_m^{ab}/K, где T_m — это неразветвленное расширение поля K степени m. Основным результатом является получение группы Галуа расширения $(K^{ur})^{ab}/K$, где K^{ur} — максимальное неразветвленное расширение поля K.

Также была предпринята попытка провести подобные рассуждения для исследования разветвленных расширений поля K и были выделены проблемы, отличающие эту задачу от рассмотренной ранее.

2. Известные результаты. Пусть $K/\mathbb{Q}_p$ — конечное расширение, K — локальное поле характеристики ноль с полем вычетов из q элементов. В [1] получен следующий результат.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 16-11-10200).

Теорема 1. *Пусть $K/\mathbb{Q}_p$ — произвольное конечное расширение Галуа. Тогда*

$$Gal(K^{ab}/K) \cong \hat{\mathbb{Z}} \times O_K^\times.$$

В этом декартовом произведении левая часть соответствует группе Галуа максимального неразветвленного расширения K, которое будет обозначаться как K^{ur}, а правая — группе Галуа расширения, полученного с помощью добавления к исходному полю ядер изогений некоторой формальной группы, называемой группой Любина — Тейта. Если π — униформизующая поля K, то изогения умножения на π для этой формальной группы имеет вид

$$[\pi](x) = \pi x + x^q.$$

3. Обобщенные формальные группы Любина — Тейта. Теперь рассмотрим несколько модифицированную изогению. По аналогии с классическим случаем доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть π — униформизующая поля K, q — порядок поля вычетов $K, m \in \mathbb{N}$, T_m — неразветвленное расширение K степени m, $f(x)$ — формальный степенной ряд с коэффициентами из O_K, такой что*

$$f(x) = \pi x \ (\mathrm{mod\ deg}\ 2), \quad f(x) = x^{q^m} \ (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Существует единственный формальный групповой закон F, такой что f является эндоморфизмом F.*
2. *Для любого $a \in O_{T_m}$ существует единственный формальный степенной ряд $[a](x)$ с коэффициентами из O_{T_m}, такой что*

   $$[a](x) = x \ (\mathrm{mod\ deg} 2), \quad f \circ [a] = [a] \circ f.$$

   Кроме того, $F([a],[b]) = [a+b], [a] \circ [b] = [ab] \ \forall a, b \in O_{T_m}$. При этом, если $a \in O_K$, то коэффициенты ряда $[a](x)$ лежат в O_K.
3. *$[a]$ — эндоморфизм F для любого $a \in O_{T_m}$.*

Зафиксируем многочлен $f(x) = \pi x + x^{q^m}$ и соответствующий ему формальный групповой закон F. Заметим, что, точно так же, как и в классическом случае, $[\pi] = f$.

Определение 3. Пусть L — некоторое расширение K, содержащееся в K^{sep} и содержащее все корни $[\pi^n](x), n \in \mathbb{N}$.

Введем множество $\mu_n = \{y \in L : [\pi^n](y) = 0\}$.

Также обозначим $T_m^n = K(\mu_n) \supset T_m, T_m^\infty = \bigcup_{n \geq 1} T_m^n$. Несложно заметить, что порядок поля вычетов T_m равен q^m, поэтому F как формальный групповой закон — это классический формальный групповой закон Любина — Тейта.

Поэтому $Gal(T_m^n/T_m) = (O_{T/m}/\rho_{T_m}^n)^\times$ и $Gal(T_m^\infty/T_m) = O_{T_m}^\times$. Наша цель — найти группу Галуа расширения T_m^∞ над K.

Зафиксируем $\zeta \in T_m$ — первообразный корень из единицы степени $q^m - 1$.

Определение 4. Существует автоморфизм T_m над K, который переводит ζ в ζ^q. Будем обозначать его $Frob(x)$. Так же будем обозначать соответствующий ему автоморфизм модуля $O_{T_m}/\pi^n O_{T_m}, n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что это обозначение не случайно, так как на поле вычетов этот автоморфизм будет совпадать с классическим автоморфизмом Фробениуса степени q.

Для начала найдем группу Галуа расширения T_m^1/K. Заметим, что $T_m^1 = K(x_0, \zeta)$ и любой корень x_0 соответствующего минимального многочлена можно представить в виде $[a](x_0), a \in O_{T_m}/\pi O_{T_m}$, или в виде $\zeta^k x_0, 0 \le k < q^m - 1$.

Лемма 5. *Если $x \in \mu_1$, то $\zeta x = [\zeta](x)$.*

Доказательство. Известно, что для некоторого $a \in O_{T_m}/\pi O_{T_m}$ верно равенство $\zeta x = [a](x)$. Поделив это равенство на x, получим

$$\zeta = a + k_2 x + k_3 x^2 + \dots,$$

где k_i — коэффициент ряда $[a]$ при соответствующей степени. Из вида многочлена f очевидным образом следует, что нормирование x больше нуля. Рассмотрев равенство по модулю π, получаем, что $\zeta \equiv a \pmod{\pi}$, то есть $[a](x) = [\zeta](x)$.

Лемма 6. *$Gal(T_m^1/K) = (O_{T_m}/\pi O_{T_m})^\times \rtimes_\phi \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, где $\phi(k) = Frob^k(x), k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $x \in \mu_1, x \neq 0$ верно $Frob([a]x) = [Frob(a)]x$. Так как $O_{T_m}/\pi O_{T_m}$ порождено ζ, то достаточно доказать это утверждение для $a = \zeta$. Действительно,

$$Frob([\zeta](x)) = Frob(\zeta x) = \zeta^q x = [\zeta^q](x) = [Frob(\zeta)](x).$$

Теперь покажем, как аналогичным образом получить группу Галуа расширения T_m^n для любого натурального n.

Теорема 7. *$Gal(T_m^n/K) \cong (O_{T_m}/\pi^n O_{T_m})^\times \rtimes_\phi \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, где $\phi(k) = Frob^k, k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Случай $n = 1$ рассмотрен в лемме 5. Докажем теорему для $n = 2$, аналогичные результаты для $n > 2$ получаются несложной индукцией.

Требуется доказать, что для любых $x \in \mu_2, a \in O_{T_m}/\pi^2 O_{T_m}$

$$Frob([a](x)) = [Frob(a)](x).$$

Лемма 8. *Если $x \in \mu_2$, то $\zeta x = [\zeta](x)$.*

Доказательство. Так как $\zeta x \in \mu_2$, то существует такое $a \in O_{T_m}/\pi^2 O_{T_m}$, что $[a](x) = \zeta x$. Из леммы 2 следует, что тогда $a = k\pi + \zeta, k \in O_{T_m}/\pi O_{T_m}$. Значит,

$$[a](x) = [k\pi + \zeta](x) = \zeta x = \zeta^{q^m} x = [a^{q^m}](x) = [q^m k\pi + \zeta](x) = [\zeta](x),$$

что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что $Frob([\pi](x)) = [\pi(x)]$. Действительно, так как коэффициенты f лежат в K, то

$$Frob([\pi](x)) = Frob(f(x)) = f(Frob(x)) = f(x) = [\pi(x)].$$

Аналогичным образом несложно показать, что $Frob([a\pi](x)) = [Frob(a)\pi](x)$. Осталось показать, что $Frob([a\pi + b](x)) = [Frob(a)\pi + Frob(p)]$. Так как коэффициенты F лежат в K, то

$$\begin{aligned} Frob([a\pi + b])(x) &= Frob(F([a\pi](x), [b](x))) = F(Frob([a\pi](x)), Frob([b](x))) = \\ &= F([Frob(a)\pi(x)], [Frob(b)](x)) = [Frob(a)\pi + Frob(p)]. \end{aligned}$$

Таким образом, действие группы Галуа T_m над K на группу Галуа T_m^2 над T_m аналогично вышеуказанному действию $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ на $(O_{T_m}/\pi^2 O_{T_m})^\times$. Таким образом, итоговая группа Галуа совпадает с полупрямым произведением.

Перейдя к обратному пределу, получаем следующие результаты.

Следствие 9.

$$Gal(T_m^\infty/K) \cong O_{T_m}^\times \rtimes_\phi \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

где $\phi_(k) = Frob^k,\ k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$

Следствие 10.

$$Gal(T_m^{ab}/K) = O_{T_m}^\times \rtimes_{\phi_m} \hat{\mathbb{Z}},$$

где $\phi_m(k) = Frob^{k \mod m},\ k \in \hat{\mathbb{Z}}.$

4. Максимальное неразветвленное расширение. Пусть K — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$, T_m — неразветвленное расширение K степени m, а K^{ur} — максимальное неразветвленное расширение K.

Лемма 11. $\bigcup_{m=1}^\infty T_m^{ab} = (K^{ur})^{ab}$.

Доказательство. Очевидно, что левая часть равенства содержится в правой. Докажем обратное включение.

Рассмотрим конечное абелево расширение L/K^{ur}. Существует α, такое что $L = K^{ur}(\alpha)$. Рассмотрим произвольный элемент $\beta \in K^{ur}(\alpha)$. Этот элемент можно представить в виде

$$\beta = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_k\alpha^k, \quad a_i \in K^{ur},\ i = 0, 1, \ldots, k.$$

Так как $K^{ur} = \bigcup_{m=1}^\infty T_m$, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a_i \in T_n, i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда β будет лежать в $T_n(\alpha)$. Аналогичным образом можно увеличить n так, чтобы минимальные многочлены для α в T_n и K^{ur} совпадали и их корни лежали в $T_n(\alpha)$.

В итоге мы получили конечное расширение Галуа $T_n(\alpha)/T_n$. Рассмотрим автоморфизмы $T_n(\alpha)$ над T_n. Так как α, как и все остальные корни соответствующего минимального многочлена, не лежит в K^{ur}, то каждый из этих автоморфизмов очевидным образом продолжается до автоморфизма $K^{ur}(\alpha)$ над K^{ur}.

Получается, что автоморфизмы $T_n(\alpha)$ над T_n — это сужения автоморфизмов $K^{ur}(\alpha)$. Так как исходные автоморфизмы коммутировали, то и их сужения будут коммутировать. Таким образом, $T_n(\alpha)/T_n$ — конечное абелево расширение.

Мы получили, что для любого конечного расширения L/K^{ur} и для любого элемента β, содержащегося в L, существует такое n, что β содержится в некотором конечном абелевом расширении T_n. Это доказывает требуемое включение.

Найдем группу Галуа $(K^{ur})^{ab}/K$. Напомним, что $K^{ur} = \bigcup_{m=1}^\infty T_m$. Так как на неразветвленном расширении локального поля можно задать дискретное нормирование, являющееся продолжением исходного, то на K^{ur} также задается такое нормирование, которое есть объединение нормирований на T_m. Тогда для этого нормирования $O_{K^{ur}}^\times = \bigcup_{m=1}^\infty O_{T_m}^\times$.

Нам известно, что

$$Gal(T_m^{ab}/K) = O_{T_m}^\times \rtimes_{\phi_m} \hat{\mathbb{Z}},$$

где $\phi_m(k) = Frob^{k \bmod m},\ k \in \hat{\mathbb{Z}}$. Кроме того, если m делит n, то $T_m \subset T_n$. Также нам известно, что $\phi_n |_{O_{T_m}^\times} = \phi_m$ и, следовательно, $O_{T_m}^\times \rtimes_{\phi_m} \hat{\mathbb{Z}} \subset O_{T_n}^\times \rtimes_{\phi_n} \hat{\mathbb{Z}}$.

Взяв прямой предел для множеств $O_{T_m}^{\times} \times \hat{\mathbb{Z}}$, мы получим множество $O_{K^{ur}}^{\times} \times \hat{\mathbb{Z}}$. Так как мы знаем для каждого натурального m действие ϕ_m и знаем, что эти действия согласованы, мы легко получаем действие ϕ, которое элементу $k \in \hat{\mathbb{Z}}$ сопоставляет отображение $Frob^k$ на $O_{K^{ur}}^{\times}$. Оно действует по следующему принципу: для элемента x из $O_{K^{ur}}^{\times}$ мы найдем n, такое что x лежит в $O_{T_m}^{\times}$, и применим к нему $Frob^{k \bmod n}$. Выше уже было показано, что результат не будет зависеть от выбора n. Таким образом, искомая группа Галуа равна

$$O_{K^{ur}}^{\times} \rtimes_{\phi} \hat{\mathbb{Z}},$$

где $\phi(k) = Frob^k,\ k \in \hat{\mathbb{Z}}$.

Теорема 12. $Gal((K^{ur})^{ab}/K) = O_{K^{ur}}^{\times} \rtimes_{\phi} \hat{\mathbb{Z}}$, где $\phi(k) = Frob^k,\ k \in \hat{\mathbb{Z}}$.

5. Разветвленный случай. Рассмотрим уравнение $x^q + \pi x = 0$. Пусть α — его ненулевой корень. Тогда все корни этого уравнения имеют вид $\zeta^k \alpha$, где ζ — первообразный корень степени $q-1$ из единицы (он лежит в K), $k = 0, 1, \ldots, q-1$.

Пусть $K^{\pi} = K(\alpha)$. Мы знаем, что K^{π}/K — вполне разветвленное расширение порядка $q-1$ и $Gal(K^{\pi}/K) = \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим над K^{π} уравнение $x^q + \alpha x = 0$. Обозначим поле, полученное добавлением к K^{π} его корней, как K^{α}. Попробуем изучить расширение K^{α}/K.

Домножив последнее уравнение на соответствующую геометрическую прогрессию, получим

$$x^{q(q-1)} + \alpha^{q-1} x^{q-1} = 0.$$

Так как $\alpha^{q-1} = -\pi$, то мы получаем $x^{q^2-2q+2} - \pi x = 0$. Если мы поделим это уравнение на x, то получим неприводимое над K уравнение степени $(q-1)^2$. Таким образом, K^{α}/K — вполне разветвленное расширение степени $(q-1)^2$.

Заметим, что оно не является нормальным. Действительно, все корни минимального многочлена имеют вид $\zeta^k y$, где y — его произвольный корень, а ζ — первообразный корень степени $(q-1)^2$ из единицы (он лежит в K), $k = 0, 1, \ldots, (q-1)^2 - 1$.

Рассмотрим уравнение $x^{(q-1)^2} - 1 = 0$ над полем K. Если мы рассмотрим его в поле вычетов, то все его делители — многочлены вида $x^{q-1} - \beta$, где β пробегает все обратимые элементы поля вычетов. Если β — первообразный корень из единицы степени $q-1$, то этот многочлен неприводим. В алгебраическом замыкании он раскладывается на линейные множители вида $x - x_0\zeta^k$, где x_0 — его произвольный корень, который, очевидно, не лежит в поле вычетов поля K, ζ — первообразный корень степени $q-1$ из единицы (он лежит в этом поле вычетов), $k = 0, 1, \ldots, (q-1)^2 - 1$. Если мы перемножим $m < q-1$ таких скобок, то свободный член будет равен произведению ζ в некоторой степени и x_0^m. Так как $(x_0)^{q-1} = \beta$, то x_0 — первообразный корень из единицы степени $(q-1)^2$. Следовательно, x_0^m при $m < q-1$ не будет корнем степени $q-1$ из единицы, что необходимо для того, чтобы этот элемент лежал в поле вычетов поля K. Несложно заметить, что поле, содержащее корни этого многочлена, будет содержать все корни многочлена $x^{(q-1)^2} - 1 = 0$.

Теперь ясно, что наименьшее поле, содержащее K и первообразный корень степени $(q-1)^2$ из единицы, это T_{q-1}^K (верхний индекс в последнем обозначении отвечает за поле, которому соответствует неразветвленное расширение). Таким образом, этот корень не мог содержаться в K^{α}, и наименьшим нормальным расширением K, содержащим K^{α}, будет поле $T_{q-1}^K \times K^{\alpha}$. Обозначим его K^1.

Найдем группу $Gal(K^1/K)$. Заметим, что $K^1 = T_{q-1}^{K^\pi} \times K^\alpha$. Несложно заметить, что $Gal(K^1/K^\pi) = (\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^2$. Так как ни один из автоморфизмов этой группы не воздействует на автоморфизмы группы $Gal(K^\pi/K)$, то в результате получаем, что $Gal(K^1/K) = (\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^3$.

Следствие 13.

1. *Расширение K^α/K не является нормальным.*
2. *Минимальным нормальным расширением, содержащим данное, является расширение $(T_{q-1}^K \times K^\alpha)/K$.*
3. *Поле $K^1 = T_{q-1}^K \times K^\alpha$ является полем расширения многочлена $x^{q^2-2q+2} - \pi x$. Группа Галуа расширения K^1/K равна $(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^3$.*

Исследовав одно расширение, мы получаем заметные отличия от неразветвленного случая, которые не позволяют построить расширение $(K^\pi)^{ab}/K$. Во-первых, заметим, что многочлен, который мы использовали для присоединения элемента α к полю K, равный $x^{q^2-2q+2} - \pi x$, не является эндоморфизмом умножения ни для какой формальной группы. Кроме того, расширение K^α/K не является нормальным, но мы знаем, с каким полем нужно взять композит, чтобы получить нормальное. Основной вопрос заключается в том, как будут выглядеть нормальные расширения следующих порядков и можно ли получить их путем добавления к полю K корней эндоморфизма умножения некоторой формальной группы.

6. Заключение. В работе был полностью рассмотрен неразветвленный случай. Основной целью дальнейших исследований является изучение разветвленного случая. Планируется изучить расширения более высоких порядков и выделить закономерности, которые, возможно, позволят рассмотреть максимальные абелевы расширения разветвленных расширений поля K над исходным полем. Важным вопросом является вопрос применимости теории формальных групп к данной задаче.

Литература

1. *Teruyoshi Y.* Local class field theory via Lubin — Tate theory // Annales de la faculte des sciences de Toulouse Mathematiques. 2008. Vol. 17, no. 2. P. 411–438.

2. *Iwasawa K.* Local class field theory. Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, 1986.

3. *Madunts A. I., Vostokova R. P.* Formal modules for generalized Lubin — Tate groups // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2016. Vol. 219, no. 4. P. 553–564.

4. *Lubin J., Tate J.* Formal complex multiplication in local fields // Annals of Mathematics, Second Series. 1965. Vol. 81. P. 380–387.

5. *De Shalit E.* Relative Lubin — Tate groups // Proceedings of the American Mathematical Society, 1985.

6. *Riehl E.* Lubin — Tate formal groups and local class field theory. Bachelor thesis at Harvard University, 2008.

7. *Hazewinkel M.* Formal groups and application. In: Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks. Vol. 78. Academic Press, 1978.

Статья поступила в редакцию 27 октября 2019 г.;
после доработки 22 ноября 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Востоков Сергей Владимирович — проф.; sergei.vostokov@gmail.com
Леонова Екатерина Олеговна — студент; prravka@yandex.ru

Calculations in generalised Lubin — Tate theory*

S. V. Vostokov, E. O. Leonova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vostokov S. V., Leonova E. O. Calculations in generalised Lubin — Tate theory. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 210–216. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.203 (In Russian)

In this paper, we study different extensions of local fields. For an arbitrary finite extension of the field of p-adic numbers $K/\mathbb{Q}_p$ it is possible to describe, using the famous Lubin — Tate theory, its maximal abelian extension K^{ab}/K and the corresponding Galois group. It is a Cartesian product of the groups appearing from the maximal unramified extension of K and a fully ramified extension obtained using the roots of some endomorphisms of the Lubin — Tate formal groups. Here, we are going to consider so-called generalised Lubin — Tate formal groups and the extensions that appear after adding the roots of their isomorphisms to the initial field. Using the fact that for a finite unramified extension T_m of degree m of the field K one of such formal groups coincides with a classical one, it became possible to obtain the Galois group of the extension $(T_m)^{ab}/K$. The main result of the paper is explicit description of the Galois group of the extension $(K^{ur})^{ab}/K$, where K^{ur} is the maximal unramified extension of the field K. We also applied similar methods to the study of ramified extensions of K.

Keywords: maximal unramified extension, formal group law.

References

1. Teruyoshi Y., "Local class field theory via Lubin — Tate theory", *Annales de la faculte des sciences de Toulouse Mathematiques* **17**, 411–438 (2008).

2. Iwasawa K., *Local class field theory* (Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, 1986).

3. Madunts A. I., Vostokova R. P., "Formal modules for generalized Lubin — Tate groups", *Journal of Mathematical Sciences (New York)* **219**, 553–564 (2016).

4. Lubin J., Tate J., "Formal complex multiplication in local fields", *Annals of Mathematics, Second Series* **81**, 380–387 (1965).

5. De Shalit E., "Relative Lubin — Tate groups", *Proceedings of the American Mathematical Society* (1985).

6. Riehl E., *Lubin — Tate formal groups and local class field theory* (Bachelor thesis at Harvard University, 2008).

7. Hazewinkel M., *Formal groups and application*, in *Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks* **78** (Academic Press, 1978).

Received: October 27, 2019
Revised: November 22, 2019
Accepted: December 12, 2019

Authors' information:

Sergei V. Vostokov — sergei.vostokov@gmail.com
Ekaterina O. Leonova — prravka@yandex.ru

*The work is supported by Russian Science Foundation (grant N 16-11-10200).