УДК 512.62
MSC 12F02

Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2

Александру Ивановичу Генералову
с уважением и благодарностью

О кубических формулах Рамануджана упрощения вложенных радикалов

М. А. Антипов[1,2], *К. И. Пименов*[2]

[1] Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Российская Федерация, 190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Антипов М. А., Пименов К. И.* О кубических формулах Рамануджана упрощения вложенных радикалов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 187–196.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.201

В работе предлагается объяснение формулам типа формулы Рамануджана для извлечения кубических корней из некоторых кубических иррациональностей в ситуации, когда этот корень попадает в чисто кубическое расширение. Дается полное описание формул такого типа в качестве ответа на вопрос Зиппеля. Оказывается, что формулы типа формулы Рамануджана в некотором смысле исчерпывают ситуацию, в частности в правой части может стоять не более трех слагаемых и норма исходной иррациональности должна быть кубом. При таком ограничении мы сопоставляем кубическим иррациональностям циклический кубический многочлен, разложимость которого (над полем рациональных чисел) равносильна возможности упрощения соответствующего двухэтажного радикала. Это обращает так называемое соответствие Рамануджана, описанное в предыдущих работах, когда циклическому уравнению сопоставлялось чисто кубическое расширение.

Ключевые слова: формулы Рамануджана, упрощение радикалов, соответствие Рамануджана.

1. Введение. В этой заметке мы предлагаем объяснение для одной формулы Рамануджана, упрощающей выражение с вложенными кубическими радикалами, и показываем, что данная формула — единственная в своем роде.

Пусть $F \subset R$ — это произвольное вещественное поле. Во всех примерах читатель может предполагать, что в качестве базового поля F взято поле рациональных чисел. Для элемента $D \in F$, не являющегося кубом, рассмотрим чисто кубическое расширение $F_1 = F\left[\sqrt[3]{D}\right] \subset \mathbb{R}$. Пусть $m \in F_1 \setminus F$.

Возникает вопрос, когда «двухэтажное» радикальное выражение $\sqrt[3]{m}$ может быть упрощено так, как в следующих численных примерах:

$$\sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{6\pi}{7}}; \tag{1}$$

$$\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{12}\right). \tag{2}$$

Обе формулы встречаются в записных книжках Рамануджана [1], вторая формула приведена в качестве примера в работе [2]. Ее автор Р. Зиппель на с. 205 приводит общую формулу указанного вида, по сути принадлежащую Рамануджану,

$$\sqrt[3]{3\sqrt[3]{xy(x+y)}-(y^3+6xy^2-3x^2y-x^3)}=\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{y^2(x+y)}+\sqrt[3]{x(x+y)^2} \tag{3}$$

и задает вопрос, действительно ли это — единственная формула для упрощения «двухэтажного» радикального выражения с кубическими корнями.

Прежде всего отметим необходимое и достаточное условие упрощения радикала вида $\sqrt[3]{m}$, которое является частным случаем основной теоремы этой теории, изложенной в диссертации [3], и вариант которой доказан в работе [4].

Предложение 1. *В обозначениях, введенных выше, существуют элементы* $k_1,\dots,k_n\in F$ *такие, что* $\sqrt[3]{m}\in F\left[\sqrt[3]{k_1},\dots,\sqrt[3]{k_n}\right]$ *тогда и только тогда, когда*

$$m=b\cdot\left(a_0+a_1\sqrt[3]{D}+a_2\sqrt[3]{D^2}\right)^3 \quad \textit{для некоторых } b,a_0,a_1,a_2\in F.$$

Иными словами, выразить двухэтажный радикал через одноэтажные удается только по тривиальной причине. Мы не цитируем общую теорему, в которой требуется выполнение дополнительных технических условий (про корни из единицы), а приводим полное доказательство сформулированного частного случая в приложении.

Вследствие предложения 1 упрощение сложного радикала в рассматриваемой ситуации возможно лишь в том случае, когда m — это кубическая иррациональность такая, что ее норма $\mathrm{Nm}_{F_1/F}(m)$ является кубом в F^*. На продолжении всей заметки мы будем предполагать, что это условие выполнено.

Наш основной результат сформулирован в теореме 2. По кубической иррациональности m мы строим циклическое кубическое уравнение, которое имеет рациональный корень в том и только в том случае, когда двухэтажный радикал $\sqrt[3]{m}$ выражается через одноэтажные, так как это сформулировано в предложении 1.

Работа второго автора [5] была посвящена формулам типа (1) и (2), прочитанным справа налево, и их обобщениям на случай степени, выше чем 3. В данной работе мы концентрируемся на кубическом случае и, прочитывая указанные формулы слева направо, трактуем их как формулы упрощения сложных радикалов.

2. Обратное соответствие Рамануджана. В предыдущей заметке [6] мы рассматривали прямое соответствие Рамануджана: по циклическому кубическому уравнению строилось чисто кубическое расширение.

В данной работе мы строим соответствие в обратную сторону, что решает задачу упрощения двухэтажного радикала рассматриваемого вида.

Для кубической иррациональности $m\in F\left[\sqrt[3]{D}\right]$, норма которой является кубом, через m' и m'' мы будем обозначать две невещественные кубические иррациональности, сопряженные с m над полем F. Через $\sqrt[3]{m}$ мы обозначаем вещественный кубический корень. Для удобства мы фиксируем обозначение через $\sqrt[3]{m'}$ для любого выбранного нами кубического корня из m'. После чего через $\sqrt[3]{m''}$ мы обозначаем тот единственный кубический корень из m'', для которого выполнено соотношение $\sqrt[3]{m}\cdot\sqrt[3]{m'}\cdot\sqrt[3]{m''}\in\mathbb{R}$. В силу того, что $\mathrm{Nm}_{F_1/F}(m)=mm'm''$ является кубом в F для выбранных нами значений кубических корней, получаем, что $\sqrt[3]{m}\cdot\sqrt[3]{m'}\cdot\sqrt[3]{m''}=\sqrt[3]{mm'm''}\in F^*$.

Через $\omega\in\mathbb{C}$ будем обозначать нетривиальный кубический корень из единицы.

Задачи упрощения двухэтажных радикалов $\sqrt[3]{m}$ и $\sqrt[3]{bm}$ для $b\in F^*$ равносильны. Для дальнейшего оказывается удобно нормализовать рассматриваемую кубическую иррациональность m, домножая ее на подходящий элемент b так, чтобы было выполнено соотношение

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{F_1/F}}(\mathrm{m})=27+3\sqrt[3]{\mathrm{Nm}_{F_1/F}(m)}. \tag{4}$$

Исключительный случай, когда $\mathrm{Tr}_{\mathrm{F_1/F}}(\mathrm{m})=3\sqrt[3]{\mathrm{Nm}_{F_1/F}(m)}$ и нормализация невозможна, будет рассмотрен отдельно в предложении 7.

Теорема 2. *Рассмотрим нетривиальное чисто кубическое расширение* $F\left[\sqrt[3]{D}\right]$ *вещественного поля* F*. Пусть* m *— кубическая иррациональность из поля* $F_1=F\left[\sqrt[3]{D}\right]$ *такая, что* $\mathrm{Nm}_{F_1/F}(m)$ *лежит в* $(F^*)^3$*. Предположим также, что выполнено соотношение* (4)*. Тогда:*

- *элементы*

$$\alpha=\left(\frac{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m'}+\sqrt[3]{m''}}{3}\right)^3;\quad \beta=\left(\frac{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m'}\omega+\sqrt[3]{m''}\omega^2}{3}\right)^3;$$

$$\gamma=\left(\frac{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m'}\omega^2+\sqrt[3]{m''}\omega}{3}\right)^3$$

  являются корнями кубического полинома с коэффициентами из поля F*;*

- *имеется кубическая иррациональность* $n\in F_1$ *с сопряженными* n',n'' *такая, что произведение* $nn'n''$ *является кубом в поле* F, *произведение* mn *является кубом в поле* F_1*, и*

$$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)=X^3-(\sqrt[3]{mm'm''}+3)X^2+(\sqrt[3]{nn'n''}+3)X-1; \tag{5}$$

- *дискриминант многочлена* (5) *является полным квадратом в поле* F*.*

Доказательство. Отметим, что набор $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ с точностью до перестановок не зависит от выбранного нами значения кубического корня $\sqrt[3]{m'}$ с учетом условия $\sqrt[3]{m}\cdot\sqrt[3]{m'}\cdot\sqrt[3]{m''}\in F$. Проверка рациональности над F значений симметрических функций от α,β,γ является несложным упражнением по теории Галуа. Мы предпочли привести явное вычисление коэффициентов многочлена с корнями α,β,γ, тем более что рассуждение из теории Галуа не покрывает случай, когда α,β,γ сами оказываются элементами поля F.

Нормализация в соответствии с условием (4) была проделана для того, чтобы получить равенство

$$\alpha\beta\gamma =$$
$$= \left(\frac{\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m'}+\sqrt[3]{m''}\right)\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m'}\omega+\sqrt[3]{m''}\omega^2\right)\left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m'}\omega^2+\sqrt[3]{m''}\omega\right)}{27}\right)^3 =$$
$$= \left(\frac{m+m'+m''-3\sqrt[3]{mm'm''}}{27}\right)^3 = 1,$$

таким образом, мы вычислили свободный член.

Прямое вычисление показывает, что

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{m+m'+m''+6\sqrt[3]{mm'm''}}{9} =$$
$$= \frac{(m+m'+m''-3\sqrt[3]{mm'm''})+9\sqrt[3]{mm'm''}}{9} = 3+\sqrt[3]{mm'm''}.$$

Поскольку $\beta\gamma = \left(\frac{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{m'm''}+\sqrt[3]{(m')^2}-\sqrt[3]{mm''}+\sqrt[3]{(m'')^2}-\sqrt[3]{mm'}}{9}\right)^3$, осмысленно обозначить через n значение выражения

$$\left(\frac{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{m'm''}}{3}\right)^3 = \frac{m^2-3m\sqrt[3]{mm'm''}+3\sqrt[3]{(mm'm'')^2}-m'm''}{27} \in F_1$$

и определить n' и n'' аналогичным образом.

Тогда

$$\beta\gamma = \left(\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n'}+\sqrt[3]{n''}}{3}\right)^3; \quad \alpha\gamma = \left(\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n'}\omega+\sqrt[3]{n''}\omega^2}{3}\right)^3;$$
$$\alpha\beta = \left(\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n'}\omega^2+\sqrt[3]{n''}\omega}{3}\right)^3.$$

Из равенства $(\beta\gamma)(\alpha\gamma)(\alpha\beta)=1$ вытекает, что $n+n'+n''=27+3\sqrt[3]{nn'n''}$.

Более того, перемножая $\sqrt[3]{m}=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}$ и $\sqrt[3]{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\beta}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma}}$, мы получаем

$$\sqrt[3]{mn} = 3+\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\gamma}}\right).$$

Сравнивая с равенствами

$$m=\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}\right)^3=\alpha+\beta+\gamma+6+3\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\gamma}}\right),$$

$$n=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\beta}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma}}\right)^3=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+6+3\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\gamma}}\right)$$

и учитывая, что для $m' = \left(\sqrt[3]{\alpha} + \omega^2 \sqrt[3]{\beta} + \omega \sqrt[3]{\gamma}\right)^3$ и $m'' = \left(\sqrt[3]{\alpha} + \omega \sqrt[3]{\beta} + \omega^2 \sqrt[3]{\gamma}\right)^3$ имеет место вычисление $\sqrt[3]{mm'm''} = \alpha + \beta + \gamma - 3$, мы заключаем, что

$$\sqrt[3]{nn'n''} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - 3,$$

$$3\sqrt[3]{mn} = m - \sqrt[3]{mm'm''} = n - \sqrt[3]{nn'n''}.$$

Доказательство последнего утверждения теоремы про дискриминант получившегося кубического многочлена мы выделяем в отдельную лемму 5. $\square$

Рассмотрим две кубические иррациональности m и n из $F\left[\sqrt[3]{D}\right]$ такие, что норма каждой из них является точным кубом и каждая из них удовлетворяет соотношению (4). В работе [6] мы называем две такие кубические иррациональности *взаимными*, если они связаны соотношением $3\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{m'm''}$, которое возникло в доказательстве теоремы 2.

Замечание 3. *Отношение взаимности для кубических иррациональностей рассматриваемого типа симметрично. То есть в обозначениях теоремы 2 из* $3\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{m'm''}$ *следует, что* $3\sqrt[3]{m} = \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n'n''}$.

Доказательство. В самом деле, мы показали, что если кубической иррациональности m отвечает циклическое кубическое уравнение с корнями α, β, γ, то взаимной к ней кубической иррациональности отвечает циклическое кубическое уравнение с корнями $\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$. Поскольку переход от тройки элементов к тройке обратных элементов, будучи примененным дважды, приводит к исходной тройке элементов, замечание доказано. $\square$

Замечание 4. *Повторим в явном виде выражение для взаимной кубической иррациональности из работы* [6, предл. 3.1.1]. *Пусть* $m = x + 3y\sqrt[3]{D} + 3z\sqrt[3]{D^2} \in F_1$, *где* $x, y, z \in F$, *норма которой является кубом. Предположим также, что* m *нормализована так, что норма равна кубу элемента* $(x - 9)$, *т. е.*

$$(x-9)^3 = x^3 + 27Dy^3 + 27D^2z^3 - 27Dxyz.$$

Тогда имеет место тождество

$$(x + 3y\sqrt[3]{D} + 3z\sqrt[3]{D^2})(9 - x + Dyz + 3y\sqrt[3]{D} + 3z\sqrt[3]{D^2}) = (3 + y\sqrt[3]{D} + z\sqrt[3]{D^2})^3. \quad (6)$$

Взаимная к m *иррациональность равна* $n = 9 - x + Dyz + 3y\sqrt[3]{D} + 3z\sqrt[3]{D^2}$.

Пример. Для иррациональности $m = 5 - 3\sqrt[3]{7}$ взаимной к ней является $n = 4 - 3\sqrt[3]{7}$. В этом случае $\sqrt[3]{mn} = 3 - \sqrt[3]{7}$.

Лемма 5. *Дискриминант многочлена* (5), *построенного по кубической иррациональности* $m \in F\left[\sqrt[3]{D}\right]$, *является полным квадратом в* F^*.

Доказательство. Дискриминант равен $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\alpha-\gamma)^2$. Обозначим через $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[3]{\gamma}$ вещественные кубические корни, значения которых равны выражениям, возводимым в куб, в определении для α, β, γ из теоремы 2.

Так как $(\alpha-\beta)=(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha}-\omega\sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha}-\omega^2\sqrt[3]{\beta})$, достаточно вычислить каждый из сомножителей:

$$\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}=\frac{1}{3}\left((1-\omega)\sqrt[3]{m'}+(1-\omega^2)\sqrt[3]{m''}\right)=\frac{\omega^2}{3}(\omega-\omega^2)(\sqrt[3]{m'}-\omega^2\sqrt[3]{m''}),$$

$$\sqrt[3]{\alpha}-\omega\sqrt[3]{\beta}=\frac{1}{3}\left((1-\omega)\sqrt[3]{m}+(1-\omega^2)\sqrt[3]{m'}\right)=\frac{\omega^2}{3}(\omega-\omega^2)(\sqrt[3]{m}-\omega^2\sqrt[3]{m'}),$$

$$\sqrt[3]{\alpha}-\omega^2\sqrt[3]{\beta}=\frac{1}{3}\left((1-\omega^2)\sqrt[3]{m}+(1-\omega)\sqrt[3]{m''}\right)=\frac{\omega^2}{3}(\omega-\omega^2)(\sqrt[3]{m''}-\omega^2\sqrt[3]{m}).$$

Аналогично получаем $\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\gamma}=\dfrac{\omega}{3}(\omega^2-\omega)(\sqrt[3]{m'}-\omega\sqrt[3]{m''})$,

$$\sqrt[3]{\alpha}-\omega^2\sqrt[3]{\gamma}=\frac{\omega}{3}(\omega^2-\omega)(\sqrt[3]{m}-\omega\sqrt[3]{m'}),\quad \sqrt[3]{\alpha}-\omega\sqrt[3]{\gamma}=\frac{\omega}{3}(\omega^2-\omega)(\sqrt[3]{m''}-\omega\sqrt[3]{m}).$$

И, наконец, $\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\gamma}=\dfrac{1}{3}(\omega-\omega^2)(\sqrt[3]{m'}-\sqrt[3]{m''})$,

$$\sqrt[3]{\beta}-\omega\sqrt[3]{\gamma}=\frac{1}{3}(1-\omega)(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{m'}),\quad \sqrt[3]{\beta}-\omega^2\sqrt[3]{\gamma}=\frac{1}{3}(1-\omega^2)(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{m''}).$$

Перемножая девять разностей и возводя результат в квадрат, получаем, что искомый дискриминант равен $-\frac{1}{3^9}(m-m')^2(m'-m'')^2(m-m'')^2$.

Дискриминант многочлена $(X-m)(X-m')(X-m'')$ отличается от дискриминанта многочлена X^3-D множителем из $(F^*)^2$, так как корень каждого из этих многочленов порождает одно и то же кубическое расширение $F\left[\sqrt[3]{D}\right]$. Так как дискриминант многочлена X^3-D равен $-27D^2$, то дискриминант уравнения (5) отличается домножением на квадрат от выражения $\dfrac{27D^2}{3^9}$, а потому является квадратом. □

Предложение 6. *Пусть $\widetilde{m}\in F_1=F\left[\sqrt[3]{D}\right]$ — кубическая иррациональность такая, что норма $\mathrm{Nm}_{F_1/F}(m)$ является кубом в F^*. Обозначим*

$$k=\frac{\mathrm{Tr_{F_1/F}(m)}-3\sqrt[3]{\mathrm{Nm}_{F_1/F}(m)}}{27}\in F$$

и предположим, что $k\neq 0$. Полагая $m=\dfrac{\widetilde{m}}{k}$, получаем формулу упрощения радикального выражения рамануджановского типа: $\sqrt[3]{\widetilde{m}}=\sqrt[3]{ka}+\sqrt[3]{kb}+\sqrt[3]{kc}$, где $a,b,c\in F^*$ — это корни уравнения (5).

Доказательство. Следует непосредственно из теоремы 2. □

Предложение 7. *Пусть $\widetilde{m}\in F_1=F\left[\sqrt[3]{D}\right]$ — это кубическая иррациональность такая, что норма $\mathrm{Nm}_{F_1/F}(\widetilde{m})$ является кубом в поле F. Предположим также, что $\mathrm{Tr_{F_1/F}(m)}=3\sqrt[3]{\mathrm{Nm}_{F_1/F}(m)}$. Тогда существуют элемент $\ell\in F$ и кубическая иррациональность $p+q\sqrt[3]{D}$, где $p,q\in F$ такие, что $\widetilde{m}=\ell\cdot\left(p+q\sqrt[3]{D}\right)^3$.*

Доказательство. См. предложение 2.2.4 из работы [6]. $\square$

Таким образом, в вырожденной ситуации имеет место упрощение составного радикального выражения $\sqrt[3]{m}$. В невырожденной ситуации мы нормализуем кубическую иррациональность с тем, чтобы выполнялось соотношение (4). Тогда на вопрос про возможность упростить сложный радикал $\sqrt[3]{m}$ ответ дается следующим предложением.

Предложение 8. *Пусть дано подполе $F \subset \mathbb{R}$ и элемент $D \in F^*$, не являющийся кубом. Для кубической иррациональности $m \in F\left[\sqrt[3]{D}\right] \setminus F$ рассмотрим вспомогательное циклическое уравнение* (5). *Если оно не имеет корня в поле F, то не существует элементов $k_1, \ldots, k_i \in F$ таких, что $\sqrt[3]{m}$ лежит в поле $F\left[\sqrt[3]{k_1}, \sqrt[3]{k_2}, \ldots, \sqrt[3]{k_i}\right]$.*

Доказательство. Пусть $F_0 = F$ и $F_j = F_{j-1}\left[\sqrt[3]{k_j}\right]$. Легко проверить индукцией по j, что уравнение (5) не имеет корней в F_j. В самом деле, расширение F_j/F_{j-1} является ненормальным кубическим расширением. Однако, если бы циклический кубический многочлен (5) имел корень α в поле F_j, но не имел корня в F_{j-1}, мы бы получили, что $L_j = L_{j-1}[\alpha]$ является нормальным расширением поля L_{j-1} многочлена (5) — это полный квадрат.

Так как $\sqrt[3]{m}$ лежит в F_i, то и $\sqrt[3]{D}$ лежит в F_i.

Мультипликативная факторгруппа F_i^*/F^* является конечной группой порядка 3^k для некоторого натурального k, т. е. векторным пространством над $\mathbb{F}_3$, если эту факторгруппу записывать аддитивно. Так как класс элемента $\sqrt[3]{D}$ отвечает ненулевому вектору в этом векторном пространстве, его можно считать последним элементом в некотором базисе и записать F_i в виде $F\left[\sqrt[3]{\ell_1}, \ldots, \sqrt[3]{\ell_{k-1}}, \sqrt[3]{D}\right]$.

Поскольку $F\left[\sqrt[3]{\ell_1}, \ldots, \sqrt[3]{\ell_{k-1}}\right]\left[\sqrt[3]{D}\right] = F\left[\sqrt[3]{\ell_1}, \ldots, \sqrt[3]{\ell_{k-1}}\right][m]$, т. е. m является кубической иррациональностью над полем $F\left[\sqrt[3]{\ell_1}, \ldots, \sqrt[3]{\ell_{k-1}}\right]$, можно заменить поле F на поле $F\left[\sqrt[3]{\ell_1}, \ldots, \sqrt[3]{\ell_{k-1}}\right]$, и все условия предложения останутся в силе для этого большего поля. Зато после произведенной замены мы можем считать, что m является кубом в $F\left[\sqrt[3]{D}\right]$.

Обозначим $\sqrt[3]{m} \in F\left[\sqrt[3]{D}\right]$ через p, а сопряженные с ним элементы через $p' \in F\left[\omega\sqrt[3]{D}\right]$ и $p'' \in F\left[\omega^2\sqrt[3]{D}\right]$. Тогда корень вспомогательного кубического уравнения (5) выписывается в виде $\left(\dfrac{p + p' + p''}{3}\right)^3$, то есть принадлежит полю F вопреки предположению. $\square$

3. Случай двучленной кубической иррациональности. В этом разделе мы рассматриваем случай, когда кубическая иррациональность $m = x + y\sqrt[3]{D} + z\sqrt[3]{D^2}$, где $x, y, z \in F$, является двучленной, то есть $yz = 0$. Для двучленной кубической иррациональности мы показываем, что единственная возможность упрощения двухэтажного радикала вида $\sqrt[3]{m}$ дается классической формулой (3).

Благодаря предложению 7 мы можем считать, что m удовлетворяет соотношению (4).

Предложение 9. *Для нормализованной кубической иррациональности $m \in F\left[\sqrt[3]{D}\right]$ рассмотрим циклический кубический полином $X^3 - pX + qX - 1$ с корнями α, β, γ, построенный так, как в теореме 2. Тогда иррациональность m будет двучленной в том и только в том случае, когда*

$$p + q + 3 = 0. \tag{7}$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 2 мы видели, что

$$m = \alpha + \beta + \gamma + 6 + 3\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\gamma}}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} yzD = 9\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\gamma}}\right) = \\ = 3 + \left(\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}} + \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma\alpha}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}}\right) + \left(\sqrt[3]{\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}}\right) = \\ = 3 + (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta), \end{aligned} \tag{8}$$

что доказывает предложение. □

Напомним, что большинство авторов (см., например, [7]) называют полиномы, удовлетворяющие соотношению (7), *шенксовыми* в честь работы [8].

Для шенксова полинома $X^3 - uX^2 - (u+3)X - 1 = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ формула

$$\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[3]{u + 6 - 3\sqrt[3]{u^2 + 3u + 9}} \tag{9}$$

приводится более чем в десятке работ (см. для примера формулу (1.7) в [9, с. 786]).

Покажем, что в случае, когда $F = \mathbb{Q}$ и данный многочлен имеет рациональный корень, (9) превращается в формулу упрощения двухэтажного радикала (3). Хорошо известно, что корни α, β, γ шенксова полинома при подходящей нумерации связаны соотношениями $\gamma = \dfrac{-1}{1+\alpha}; \alpha = \dfrac{-1}{1+\beta}; \beta = \dfrac{-1}{1+\gamma}$. В самом деле, не умаляя общности, считаем, что в произведении (8) равен нулю первый сомножитель:

$$0 = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \left(1 + \beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot \left(1 + \gamma + \frac{1}{\beta}\right) = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha}}\left(1 + \alpha + \frac{1}{\gamma}\right),$$

откуда получаем требуемые соотношения. Подставляя $\alpha = \dfrac{y}{x}$ в формулу (9), получаем формулу Рамануджана (3).

4. Доказательство предложения 1.

Доказательство. Предположим, что найдутся такие $k_1 = D, k_2, \ldots, k_n$, что $\sqrt[3]{m} \in F_2 = F\left[\sqrt[3]{k_1}, \ldots, \sqrt[3]{k_n}\right]$. Не умаляя общности, можно считать, что для полей

$F_j = F\left[\sqrt[3]{k_1}, \dots, \sqrt[3]{k_j}\right]$ включения $F_j \subset F_{j+1}$ являются строгими для $j = 0, \dots, n-1$. Обозначая для краткости $\ell_i = \sqrt[3]{k_i} \in \mathbb{R}$, замечаем, что набор из 3^j элементов $\ell_1^{i_1} \ell_2^{i_2} \cdots \ell_n^{i_j}$, где показатели степеней принимают значения $0, 1, 2$, является базисом F_j над F. Этот же набор является базисом $F_j(\omega)$ над $F(\omega)$, поскольку линейно порождает большее из этих двух полей, а степень расширения сохраняется.

Группа Галуа $G = \mathrm{Gal}\left(F_n(\omega)/F(\omega)\right)$ изоморфна $(\mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z})^n$ притом элемент группы Галуа $\sigma = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, где $b_i = \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$, действует на образующих по формулам $\sigma\left(\ell_j\right) = \omega^{b_j} \cdot \ell_j$. Учитывая соглашение $\ell_1 = \sqrt[3]{D}$, подполю $F(\omega)\left[\sqrt[3]{D}\right]$ в $F_n(\omega)$ отвечает подгруппа $G_0 = \left\{(0, b_2, \dots, b_n) \,|\, b_j = \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\right\}$, изоморфная $(\mathbb{Z}/\,3\mathbb{Z})^{n-1}$.

Подполю $F(\omega)\left[\sqrt[3]{D}, \sqrt[3]{m}\right]$ отвечает некоторая подгруппа индекса три в G_0, имеющая вид

$$H = \left\{ (0, b_2, \dots, b_n) \,|\, \sum_{j=2}^{n} c_j b_j = \overline{0} \right\} \text{ для некоторых } c_2, c_3, \dots, c_n \in \mathbb{Z}/\,3\mathbb{Z}.$$

Тогда элемент $\ell = \prod\limits_{j=2}^{n} \ell_j^{c_j}$ лежит в поле инвариантов $F_n(\omega)^H \cap \mathbb{R} = F\left[\sqrt[3]{D}, \sqrt[3]{m}\right]$. Поскольку $\ell \notin F\left[\sqrt[3]{D}\right]$, мы заключаем, что $F\left[\sqrt[3]{D}, \sqrt[3]{m}\right] = F\left[\sqrt[3]{D}, \ell\right]$. Выберем произвольный элемент $\sigma \in G_0 \setminus H$. Заменяя, при необходимости, σ на σ^2, мы можем считать, что $\sigma\left(\sqrt[3]{m}\right) = \omega \cdot \sqrt[3]{m}$. Заменяя, при необходимости, ℓ на ℓ^2, мы можем считать, что $\sigma\left(\ell\right) = \omega\ell$. Тогда элемент $\dfrac{\sqrt[3]{m}}{\ell}$ лежит в поле инвариантов подгруппы $\langle H, \sigma\rangle = G_0$, т.е. в поле $F(\omega)\left[\sqrt[3]{D}\right]$. В силу вещественности этот элемент лежит в $F\left[\sqrt[3]{D}\right] = F(\omega)\left[\sqrt[3]{D}\right] \cap \mathbb{R}$. Обозначая $\ell^3 = \prod\limits_{j=2}^{n} k_j^{c_j}$ через $b \in F$, получаем, что $m = b \cdot \left(a_0 + a_1\sqrt[3]{D} + a_2\sqrt[3]{D^2}\right)^3$ для некоторых $a_0, a_1, a_2 \in F$. $\square$

Литература

1. *Berndt B. C.* Ramanujan notebook's. Part IV. Springer–Verlag, 1994.

2. *Zippel R.* Simplification of expressions involving radicals // Journal of Symbolic Computation. 1985. Vol. 1. P. 189–210.

3. *Honsbeek M.* Radical extensions and Galois groups. PhD thesis at Radboud Universiteit Nijmegen, 2005.

4. *Blomer J.* How to denest Ramanujan's nested radicals // 33rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, October, Pittsburg, PA, 1992.

5. *Крепкий И. А., Пименов К. И.* Формулы Рамануджана с кубическими корнями и элементарная теория Галуа // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2 (60). Вып. 4. С. 553–563.

6. *Антипов М., Пименов К.* О некоторых мультипликативных структурах на кубических расширениях // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т. 470. С. 5–20.

7. *Barbero S., Cerruti U., Murru N., Abrate M.* Identities involving zeros of Ramanujan and Shanks cubic polynomials // Journal of Integer Sequences. 2013. Vol. 16, no. 8. Art. no. 13.8.1.

8. *Shanks D.* The simplest cubic fields // Math. Comp. 1974. Vol. 28. P. 1137–1152.

9. *Witula R.* Ramanujan type trigonometric formulae // Demonstratio Math. 2012. Vol. 45, no. 4. P. 779–796.

Статья поступила в редакцию 18 ноября 2019 г.;
после доработки 12 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Антипов Михаил Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц.; hyperbor@list.ru
Пименов Константин Игоревич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kip302002@yahoo.com

Ramanujan denesting formulae for cubic radicals

M. A. Antipov[1,2], *K. I. Pimenov*[2]

[1] National Research University Higher School of Economics,
16, ul. Soyuza Pechatnikov, St. Petersburg, 190121, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Antipov M. A., Pimenov K. I. Ramanujan denesting formulae for cubic radicals. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 187–196. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.201 (In Russian)

This paper contains an explanation of Ramanujan-type formulas with cubic radicals of cubic irrationalities in the situation when these radicals are contained in a pure cubic extension. We give a complete description of formulas of such type, answering the Zippel's question. It turns out that Ramanujan-type formulas are in some sense unique in this situation. In particular, there must be no more than three summands in the right-hand side and the norm of the irrationality in question must be a cube. In this situation we associate with cubic irrationalities a cyclic cubic polinomial, which is reducible if and only if one can simplify the corresponding cubic radical. This correspondence is inverse to the so-called Ramanujan correspondence defined in the preceding papers, where one associates a pure cubic extension to some cyclic polinomial.

Keywords: Ramanujan formulas, simplification of radicals, Ramanujan correspondence.

References

1. Berndt B. C., *Ramanujan notebook's.* Part IV (Springer–Verlag, 1994).

2. Zippel R., "Simplification of expressions involving radicals", *Journal of Symbolic Computation* **1**, 189–210 (1985).

3. Honsbeek M., *Radical extensions and Galois groups* (PhD thesis at Radboud Universiteit Nijmegen, 2005).

4. Blomer J., "How to denest Ramanujan's nested radicals", *33rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, October, Pittsburg, PA* (1992).

5. Krepkii I. A., Pimenov K. I., "Cube root Ramanujan formulas and elementary Galois theory", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **48**, 214–223 (2015). https://doi.org/10.3103/S106345411504007X

6. Antipov M. A., Pimenov K. I., "On Certain Multiplicative Structures on Cubic Extensions", *Journal of Mathematical Sciences* **243**(4), 505–514 (2019).

7. Barbero S., Cerruti U., Murru N., Abrate M., "Identities involving zeros of Ramanujan and Shanks cubic polynomials", *Journal of Integer Sequences* **16**(8), 13.8.1 (2013).

8. Shanks D., "The simplest cubic fields", *Math. Comp.* **28**, 1137–1152 (1974).

9. Witula R., "Ramanujan type trigonometric formulae", *Demonstratio Math.* **45**(4), 779–796 (2012).

Received: November 18, 2019
Revised: December 12, 2019
Accepted: December 12, 2019

Authors' information:

Mikhail A. Antipov — hyperbor@list.ru
Konstantin I. Pimenov — kip302002@yahoo.com