

К ЮБИЛЕЮ А. И. ГЕНЕРАЛОВА

К 70-летию Александра Ивановича Генералова

3 сентября 2019 года исполнилось 70 лет профессору Санкт-Петербургского государственного университета Александру Ивановичу Генералову.

Многогранная научная и педагогическая деятельность Александра Ивановича неразрывно связана с ленинградской — петербургской алгебраической школой. Первые шаги в математике школьник Саша Генералов сделал во Владивостоке в Юношеской математической школе под руководством А. П. Шапиро, талантливого ученика главы ленинградской алгебраической школы чл.-корр. АН СССР Д. К. Фаддеева. Поэтому выбор победителя Всероссийской олимпиады по математике 1966 года (лишь с 1967 г. Всероссийские олимпиады получили статус Всесоюзных) Александра Генералова — учиться в Ленинградском государственном университете — был вполне естественным.

Студенческие годы принесли Александру Ивановичу первые значительные успехи в науке. Будучи четверокурсником матмеха ЛГУ, он смог доказать, что введённое в монографии профессора МГУ Л. А. Скорнякова «Абелевы группы и модули» обобщённое понятие чистого подмодуля на самом деле не является обобщением. Позднее профессор Скорняков публично признал правоту А. Генералова на всесоюзной конференции в Кишинёве.

Преподавательскую деятельность Александр Иванович начал в Сыктывкарском государственном университете в 1971 году. С 1975 года Александр Иванович работал в Ленинградском электротехническом институте связи имени М. А. Бонч-Бруевича, в 1981–1995 годах — в Политехническом институте имени М. И. Калинина (Санкт-Петербургском государственном политехническом университете Петра Великого), где в 1995 году получил звание профессора. Наконец, в том же 1995 году Александр Иванович перешёл в Санкт-Петербургский государственный университет на должность профессора кафедры высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета, в которой состоит и поныне.

Александр Иванович — превосходный увлечённый преподаватель. Его лекции являют образец скрупулёзной выверенности, сочетают классические традиции и современные направления развития математической науки. Даже в изложении самых технически сложных доказательств ему удаётся передать чувство радости постижения математики. Среди учеников Александра Ивановича более десяти стали канди-

датами и докторами наук. Практически все они продолжают занятия математикой в России и за её пределами.

Начав работу на кафедре высшей алгебры и теории чисел, Александр Иванович стал активно развивать «гомологическое направление», читал спецкурсы и руководил курсовыми и дипломными работами студентов по различным, в том числе — и новым для себя, разделам гомологической алгебры и теории представлений. Этот посев дал всходы в виде активно развивающихся и ныне направлений научной деятельности Александра Ивановича и его учеников.

Самым продуктивным с точки зрения научной деятельности самого Александра Ивановича стало направление, начавшееся с дипломной работы Олега Балашова, одного из его первых учеников. В тот момент Александр Иванович предположил, что так называемый «диаграммный метод» Бенсона и Карлсона позволяет эффективно находить минимальные резольвенты некоторых алгебр диэдрального типа. Этот способ обобщал вычисления колец когомологий для групп с диэдральной группой дефекта (в положительной характеристике) и изначально возник по аналогии с ними (случай знакопеременных групп A_5 , A_6). Однако эти вычисления не апеллировали, как в классическом случае, к групповой структуре, а основывались на комбинаторике колчанного представления соответствующей групповой алгебры. В результате появилась серия работ Александра Ивановича и О. Балашова с вычислениями алгебр Йонеды алгебр диэдрального типа.

Отметим, что последующие изыскания Александра Ивановича вывели разработанный метод на гораздо более широкий класс алгебр и задач, весьма удалившись при этом от исходного метода Бенсона — Карлсона, работавшего лишь на алгебрах, близких к string алгебрам. Тем не менее «резольвентная интуиция», выработанная на этом этапе, привела к ощутимому повышению уровня сложности сразу с двух сторон: с одной — к работе с комбинаторно более сложно устроенными алгебрами (полудиэдральными, кватернионными, некоторыми видами диких алгебр, переход к целочисленным когомологиям), с другой — к переходу к технически гораздо более сложной задаче о кольце когомологий Хохшильда алгебры. Результатом стала серия замечательных работ, значительно раздвинувшая границы возможностей вычисления когомологий Хохшильда, которые до того не менялись серьёзно с момента определения кольца когомологий Хохшильда $HH^*(A)$ в середине XX века.

В этой продолжающейся и сегодня деятельности приняло участие максимальное количество учеников Александра Ивановича: Н. Косовская, М. Качалова, Ю. Волков, А. Иванов, С. Иванов и другие. Кроме вычислительного аспекта, важно отметить, что в последние десятилетия возник всплеск нового интереса к кольцу $HH^*(A)$ как аппарату изучения производных категорий и важному производному инварианту. Последней теме посвящены и работы учеников Александра Ивановича (С. Иванова, Ю. Волкова, А. Звонарёвой), что сделало вычисления когомологий Хохшильда особенно актуальными.

Первые статьи, посвященные структуре производных категорий, были написаны Александром Ивановичем в начале 1990-х годов. Они тематически связаны с его более ранними исследованиями по относительной гомологической алгебре (в которых, в частности, рассматривались относительные варианты производной, а впоследствии и стабильной, категорий). Это привело его к более детальному изучению аксиоматических начал теории производных и вообще триангулированных категорий, результатом чего являлось несколько остроумных работ, в которых удалось провести некоторые классические категорные построения (взятие производной кате-

гории, локализация в триангулированной категории) в более общем, чем ранее, контексте, обходя часть стандартных аксиом. Сюда же примыкают работы Александра Ивановича с Г. А. Гаркушей по категориям обобщенных модулей (т. е. ковариантных аддитивных функторов, действующих из категории конечно представимых модулей в категорию абелевых групп) и категориям Гротендика, которые также в известной мере являются современным развитием исследований Александра Ивановича по чистотам в 1970–80-е годы.

Отметим и выросшее из этих работ многолетнее сотрудничество Г. А. Гаркуши с И. А. Паниным по реализации программы В. Воеводского, которое в конечном счете привело к полному изменению всего ландшафта теории Мореля — Воеводского (стабильной мотивной гомотопической теории). В их совместной деятельности активно используются такие значимые понятия, как категория Гротендика и компактно порожденная триангулированная категория. Таким образом проявилось на И. А. Панине влияние выдающейся школы Генералова.

В дальнейшем изучение структур производных категорий в работах Александра Ивановича и учеников сосредоточилось на конкретных классах алгебр конечного и ручного типа представления. В нескольких работах с М. Антиповым были исследованы производные и стабильные категории симметрических специальных бириядных алгебр, ныне ставших популярными под именем Brauer Graph Algebras как модельного нетривиального «полигона» для изучения производных эквивалентностей ручных алгебр и производных групп Пикара. Эти исследования были продолжены и другими учениками Александра Ивановича — Ю. Волковым, А. Звонарёвой и др., и в настоящее время являются, возможно, самой бурно развивающейся веткой школы Генералова.

Сквозную тему значительной части исследований Александра Ивановича в 1980–90-е годы составило то, что ныне принято называть относительной гомологической алгеброй. Отталкиваясь от классического определения чистоты в абелевых группах, Александр Иванович вслед за Л. А. Скорняковым (бывшим в течение некоторого времени его научным руководителем) принимал деятельное участие в её формализации. Позднее это направление исследований Александра Ивановича коснулось и относительной гомологической алгебры в предабелевых категориях.

К своим исследованиям по структуре категорий модулей и чистот в них Александр Иванович подключил возникшую параллельно теории Ауслендера — Райтен почти расщепляющихся последовательностей, заметно расширив по сравнению с классическим случаем «запас» колец, к которым она может быть успешно применена. Используя, в частности, это новое направление и соответствующую технику, Александру Ивановичу удалось получить ряд сильных структурных результатов, в первую очередь — об описании относительных групп Гротендика в изучаемых классах колец (ручных наследственных конечномерных алгебр, полуцепных нётеровых колец, позднее — колец конечного типа представлений, и др.). Результаты в этих областях составили основу его докторской диссертации.

Ряд работ Александра Ивановича посвящён изучению чистот в категориях модулей и тесно связанных с ними алгебраически компактных (чисто-инъективных) модулей. Проявленный Александром Ивановичем интерес к задаче классификации алгебраически компактных модулей и полученные им результаты предвосхитили возникший заметно позже интерес к этой задаче с точки зрения современной теории моделей для категорий модулей. Александр Иванович получил серьёзные результаты в классификации индуктивных частот и алгебраически компактных модулей для

некоторых важных классов колец (в частности, ручных наследственных алгебр, полусовершенных hnr-колец). Это направление исследований было продолжено Александром Ивановичем в конце 1990-х годов в его работах с И. Зильбербордом, в которых были описаны алгебраически компактные модули и индуктивные чистоты для полупростых нётеровых слева колец.

Одной из любимых тем научной работы Александра Ивановича является обобщение классических результатов теории абелевых групп на модули над кольцами. Зачастую такие обобщения сложны даже на уровне формулировок и требуют существенно нового уровня техники. К таким его работам стоит отнести задачу классификации алгебраически компактных модулей, происходящую от классификации абелевых групп И. Капланским, и вообще все результаты, связанные с чистотами. Среди других результатов Александра Ивановича по этой теме выделим также обобщение им в 1995–1997 годах совместно с М. Жёлудевым теоремы о согласованных базисах (согласованных разложениях) для дедекиндовых областей и для ограниченных дедекиндовых первичных колец (в том числе — и некоммутативных).

Работы Александра Ивановича снискали ему заслуженный международный авторитет. Именно он стал автором фундаментальной обзорной статьи об относительной гомологической алгебре и когомологиях категорий, частично упорядоченных множеств и коалгебр в энциклопедии алгебры (*Handbook of Algebra*), издаваемой под руководством М. Хазевинкеля.

Ещё одна блестящая грань талантов Александра Ивановича — искусство научного редактирования. Свыше двадцати лет он — бессменный редактор алгебраических выпусков журнала «Записки научных семинаров ПОМИ РАН». Многие авторы с благодарностью вспоминают точные выверенные замечания Александра Ивановича, дотошно вникающего в суть каждой прочитанной им статьи.

И вне математики Александр Иванович — разнообразно одарённый и широко эрудированный человек, прекрасный семьянин, заядлый огородник, азартный грибник, знаток и ценитель собак.

Нынешний юбилей даёт нам прекрасную возможность ещё раз сказать Александру Ивановичу тёплые слова благодарности за его самоотверженное служение науке, за роскошь сотрудничества и человеческого общения с ним.

Статьи, представленные в этот выпуск журнала «Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия» сотрудниками кафедры высшей алгебры и теории чисел СПбГУ и участниками прошедшей 28–30 октября 2019 года в Международном математическом институте им. Л. Эйлера конференции *Homological algebra, ring theory and Hochschild cohomology*, посвящённой 70-летию А. И. Генералова, — своеобразный *hommage* авторов коллеге, учителю, другу.

*М. А. Антипов, Н. А. Вавилов, Ю. В. Волков, М. А. Всемирнов,
С. В. Востоков, Г. А. Гаркуша, Н. Л. Гордеев, И. М. Зильберборд,
С. О. Иванов, Б. Б. Лурье, И. А. Панин, К. И. Пименов,
А. А. Семёнов, А. В. Степанов, А. В. Яковлев*