

О практической применимости трех CUSUM-методов к обнаружению структурных сдвигов в EGARCH-моделях*

Д. А. Борзых¹, А. А. Языков^{1,2,3}

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Российская Федерация, 101000, Москва, Мясницкая ул., 20

² Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, 44, корп. 2

³ Московский физико-технический институт (государственный университет),
Российская Федерация, 141701, Долгопрудный, Институтский пер., 9

Для цитирования: Борзых Д. А., Языков А. А. О практической применимости трех CUSUM-методов к обнаружению структурных сдвигов в EGARCH-моделях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 1. С. 19–30. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.102>

В литературе существуют три хорошо известных CUSUM-метода обнаружения структурных сдвигов в стандартных GARCH-моделях. Несмотря на то, что эти алгоритмы первоначально были разработаны применительно к стандартным GARCH-моделям, имеются теоретические основания считать, что перечисленные CUSUM-методы применимы к обнаружению структурных сдвигов в EGARCH-моделях. Более того, в некоторых работах можно встретить использование этих алгоритмов по отношению к EGARCH-моделям при обнаружении структурных сдвигов волатильности реальных временных рядов. При этом не удалось найти исследования, в которых проводились бы контролируемые численные эксперименты, позволившие бы прояснить качество обнаружения структурных сдвигов с помощью данных CUSUM-методов в EGARCH-моделях. Предлагаемая статья посвящена данному вопросу. В ней имитировалась приближенная к реальности ситуация возникновения структурных сдвигов в EGARCH-моделях. В рамках данного контролируемого эксперимента на основе симуляций было установлено, что рассмотренные методы обладают достаточно слабыми способностями к обнаружению структурных сдвигов на выборках умеренного объема. Выявленные недостатки указывают на ограниченную практическую применимость таких методов. Также предложен гибридный алгоритм, который хотя окончательно и не преодолевает слабые места CUSUM-методов, но в некоторой степени способен повысить детективные способности обнаружения структурных сдвигов во всех параметрах EGARCH-модели. Для проведения расчетов была использована вычислительная среда MATLAB.

Ключевые слова: EGARCH, волатильность, структурные сдвиги, CUSUM.

1. Введение. Под волатильностью цены финансового инструмента обычно понимают некоторую меру изменчивости цены этого финансового инструмента. Волатильность — один из основных показателей, которые характеризуют риск финансового инструмента. Точная оценка волатильности финансового инструмента является важной прикладной задачей, поскольку неправильный расчет и прогноз волатильности приводят к неадекватному восприятию риска агентами, принимающими решения, и зачастую служит причиной существенных убытков, которые эти агенты несут. К препятствиям при построении адекватной модели для волатильности относится то

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-31-90169).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

обстоятельство, что волатильность не наблюдаемая величина, а понятие собирательное. В связи с этим существует огромное количество способов формализации понятия волатильности при ее моделировании.

В данной работе проводится моделирование волатильности с помощью экспоненциальных моделей с условной гетероскедастичностью (EGARCH-моделями), которые являются модификацией стандартных моделей с условной гетероскедастичностью (GARCH-моделей). Подробно о GARCH- и EGARCH-моделях можно прочитать, например, в [1–3] и [2–4] соответственно.

При практическом применении моделей временных рядов исследователи зачастую сталкиваются с проблемой, называемой структурными сдвигами или разладками случайного процесса. Как известно, игнорирование структурных сдвигов при оценивании модели приводит к некорректным результатам и ошибочным прогнозам. В этом отношении модели для волатильности исключением не являются.

В работе рассматривается задача обнаружения структурного сдвига для кусочно-заданной EGARCH(1,1)-модели, которая описывается следующим образом. Пусть $\tau \in \{1, \dots, T\}$ — возможный момент структурного сдвига временного ряда $Y = (Y_t)_{t=1}^T$, который разделяет временной ряд Y на два однородных сегмента. Будем предполагать, что j -й фрагмент временного ряда представлен в виде системы уравнений

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, \\ \ln \sigma_t^2 = \omega_j + \delta_j \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma_j \left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \mathbb{E} \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} \right] \right) + \lambda_j \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \\ t \in [\tau_{j-1}; \tau_j - 1], \end{cases} \quad (1)$$

где $j = 1, 2$, $\tau_0 := 1$, $\tau_1 := \tau$, $\tau_2 := T+1$, $\theta_j := (\omega_j, \delta_j, \gamma_j, \lambda_j)$ — неизвестные параметры модели, принадлежащие множеству допустимых значений $\Theta := \mathbb{R} \times (-1; 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $(\xi_t)_{t=0}^\infty$ — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин.

Случайные величины Y_t , σ_t , ε_t и ξ_t , а также параметры ω , δ , γ и λ имеют следующий прикладной смысл:

- величина Y_t , как правило, обозначает логарифмическую доходность финансового инструмента в момент времени t и рассчитывается как $Y_t := \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$, где P_t — цена финансового инструмента в момент времени t ;
- величина σ_t трактуется как волатильность этого финансового инструмента в момент времени t и характеризует меру изменчивости его цены;
- величины ε_t и ξ_t — случайная ошибка и стандартизованная случайная ошибка в модели (1) в момент времени t ;
- параметр ω является параметром масштаба и отвечает за постоянный уровень волатильности;
- параметр δ отвечает за чувствительность будущего уровня волатильности к изменениям в текущем уровне волатильности;
- параметр γ отвечает за чувствительность будущего уровня волатильности к отклонениям абсолютного значения стандартизованной случайной ошибки относительно своего математического ожидания в текущий момент времени;
- параметр λ , в литературе также известный как коэффициент «рычага» (leverage coefficient), отвечает за асимметричную реакцию будущего уровня волатильности на положительные и отрицательные изменения в текущем уровне стандартизованной случайной ошибки и позволяет учесть часто наблюдаемый эмпирический эффект, при котором неожиданное снижение цены финансового инструмента имеет

большее воздействие на будущую волатильность, чем неожиданное увеличение цены этого инструмента в то же число раз.

В литературе существуют три хорошо известных метода обнаружения структурных сдвигов в стандартных GARCH-моделях: метод Инклан и Тиао [5] (далее называемый IT-методом), метод Кокошки и Лейпуса [6] (далее KL-метод) и метод Ли, Токуцу и Маекавы [7] (далее LTM-метод). Данные методы принадлежат классу CUSUM-методов (Cumulative Sums of Squares). Несмотря на то, что эти алгоритмы первоначально были разработаны применительно к стандартным GARCH-моделям, имеются теоретические основания считать, что перечисленные выше CUSUM-методы используются при обнаружении структурных сдвигов в EGARCH-моделях. Более того, в некоторых работах можно встретить, что такие алгоритмы применяются к EGARCH-моделям при обнаружении структурных сдвигов волатильности реальных временных рядов (см., например, [8–12]). При этом не удалось найти исследований, в которых проводились бы контролируемые численные эксперименты, позволившие бы прояснить качество обнаружения структурных сдвигов с помощью данных CUSUM-методов для EGARCH-моделей. Предлагаемая вниманию статья посвящена такому вопросу.

Опишем структуру работы. Для большей замкнутости изложения и удобства читателей п. 2 содержит краткое описание рассматриваемых в работе CUSUM-методов.

В п. 3.1 имитировалась приближенная к реальности ситуация возникновения структурных сдвигов в EGARCH-моделях. В рамках данного контролируемого эксперимента на основе симуляций было установлено, что рассматриваемые методы обладают достаточно слабыми способностями к обнаружению структурных сдвигов на выборках умеренного объема. Исключениями являются: IT-метод, если речь идет о структурном сдвиге в параметре ω , и KL-метод — если о структурных сдвигах в параметрах ω и δ .

Изучению свойств CUSUM-методов при существенном увеличении объема выборки посвящен п. 3.2. Установлено, что рассматриваемые CUSUM-методы являются в значительной мере асимптотическими и начинают удовлетворительно обнаруживать структурные сдвиги во всех параметрах EGARCH-модели только на очень больших объемах выборок — порядка сотни тысяч наблюдений.

В п. 4 предложен гибридный алгоритм, который хотя окончательно и не преодолевает слабые места CUSUM-методов, но в некоторой степени способен повысить детективные способности обнаружения структурных сдвигов во всех параметрах EGARCH-модели.

2. Описание CUSUM-методов. Пусть кусочно-заданный EGARCH(1,1)-процесс $(Y_t)_{t=1}^T$ допускает один структурный сдвиг в момент времени $\tau \in \{1, \dots, T\}$ и описывается системой уравнений (1).

IT-метод. Рассмотрим следующую статистику:

$$IT(k) := \frac{\sum_{t=1}^k \hat{\xi}_t^2}{\sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^2} - \frac{k}{T}, \quad k \in \{1, \dots, T\},$$

где $\hat{\xi}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$ — стандартизованные остатки EGARCH-процесса.

В статье [5] Инклан и Тиао предлагают определять момент, подозрительный на структурный сдвиг, по формуле

$$\hat{\tau}_{IT} := \min \left\{ k: |IT(k)| = \max_{j \in \{1, \dots, T\}} |IT(j)| \right\}$$

и проверять наличие структурного сдвига, согласно *критерию*: если $\sqrt{T/2} |\text{IT}(\hat{\tau}_{\text{IT}})| \geq q_p$, то на уровне значимости $1-p$ момент $\hat{\tau}_{\text{IT}}$ считается моментом структурного сдвига, где $q_{0.95} = 1.358$ и $q_{0.99} = 1.628$ — квантили уровней 0.95 и 0.99 супремума модуля броуновского моста $\sup_{u \in [0; 1]} |B^0(u)|$.

KL-метод. Рассмотрим статистику

$$\text{KL}(k) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left(\sum_{t=1}^k Y_t^2 - \frac{k}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^2 \right), \quad k \in \{1, \dots, T\}.$$

Положим $r = \lfloor \sqrt{T} \rfloor$, здесь $\lfloor \cdot \rfloor$ есть операция округления вниз. Обозначим $\hat{v}_{r,T}^2 := \sum_{|j| \leq r} w_j \hat{c}_j$, где $w_j := 1 - \frac{|j|}{r+1}$, $r \in \mathbb{N}$, и

$$\hat{c}_j := \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-|j|} (Y_i^2 - \bar{Y}^2) (Y_{i+|j|}^2 - \bar{Y}^2).$$

В статье [6] Кокошка и Лейбус предлагают определять *момент, подозрительный на структурный сдвиг*, по формуле

$$\hat{\tau}_{\text{KL}} := \min \left\{ k: |\text{KL}(k)| = \max_{j \in \{1, \dots, T\}} |\text{KL}(j)| \right\}$$

и проверять наличие структурного сдвига, согласно *критерию*: если $\frac{|\text{KL}(\hat{\tau}_{\text{KL}})|}{\hat{v}_{r,T}} \geq q_p$, то на уровне значимости $1-p$ момент $\hat{\tau}_{\text{KL}}$ считается моментом структурного сдвига, где точки $q_{0.95}$ и $q_{0.99}$ те же, что и в описании IT-метода.

LTM-метод. Рассмотрим статистику

$$\text{LTM}(k) := \frac{1}{\sqrt{T} \hat{\eta}} \left| \sum_{t=1}^k \hat{\xi}_t^2 - \frac{k}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^2 \right|, \quad k \in \{1, \dots, T\},$$

в которой $\hat{\eta}^2 := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^4 - \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^2 \right)^2$, а величины $\hat{\xi}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$, как и выше, — стандартизованные остатки EGARCH-процесса.

В статье [7] Ли, Токуцу и Маекава предлагают определять *момент, подозрительный на структурный сдвиг*, по формуле

$$\hat{\tau}_{\text{LTM}} := \min \left\{ k: \text{LTM}(k) = \max_{j \in \{1, \dots, T\}} \text{LTM}(j) \right\}$$

и проверять наличие структурного сдвига, согласно *критерию*: если $\text{LTM}(\hat{\tau}_{\text{LTM}}) \geq q_p$, то на уровне значимости $1-p$ момент $\hat{\tau}_{\text{LTM}}$ считается моментом структурного сдвига, где точки $q_{0.95}$ и $q_{0.99}$ находятся так же, как и для IT-метода.

3. Численные эксперименты для CUSUM-методов. Опишем проведенные нами искусственные эксперименты, в которых структурные сдвиги волатильности моделировались с помощью кусочно-заданных EGARCH(1,1)-моделей. Мы стремились к тому, чтобы условия данных экспериментов были в достаточной степени приближены к реальным. Для этого были рассмотрены $N = 38$ обыкновенных акций, которые входят в индекс МосБиржи MOEX (табл. 1). Данные были взяты с сайта компании «ФИНАМ» (<https://www.finam.ru/>) за период времени с 1 января 2011 г.

Таблица 1. Список анализируемых компаний

Тикер	Название компании
AFKS	АФК «Система»
AFLT	Аэрофлот
AKRN	Акрон
ALRS	АЛРОСА
BANE	БАШНЕФТЬ
BSPB	Банк Санкт-Петербург
CHMF	Северсталь
DIXY	ДИКСИ Групп
FEES	ФСК ЭЭС
GAZP	Газпром
GCHE	Группа Черкизово
GMKN	Норильский никель
HYDR	РусГидро
IRAO	Интер РАО ЭЭС
KMAZ	Камаз
LKOH	ЛУКОЙЛ
LSRG	Группа ЛСР
MAGN	Магнитогорский металлургический комбинат
MFON	Мегафон
MGNT	Магнит
MOEX	Московская Биржа ММВБ-РТС
MSTT	МОСТОТРЕСТ
MTSS	Мобильные ТелеСистемы
MVID	М. Видео
NLMK	Новолипецкий металлургический комбинат
NMTP	Новороссийский морской торговый порт
NVTK	НОВАТЭК
PIKK	Группа Компаний ПИК
POLY	Полиметалл
ROSN	Роснефть
RTKM	Ростелеком
SBER	Сбербанк
SNGS	Сургутнефтегаз
TRMK	Трубная металлургическая компания
UPRO	Юнипро
URKA	Уралкалий
VSMO	ВСМПО-АВИСМА
VTBR	ВТБ

по 31 декабря 2013 г. Этот временной период был выбран в силу его гомогенности — кризис 2008 г. уже закончился, а кризис 2014 г. еще не успел начаться. Цены отобранных бумаг были преобразованы в логарифмические доходности. По ним с помощью EGARCH(1,1)-модели для каждой ценной бумаги был оценен вектор параметров θ . В тех случаях, когда координата вектора θ оказывалась незначимой на уровне значимости 5 %, ее значение в векторе θ заменялось на нуль. Таким образом, были получены 38 различных векторов параметров $\theta^{(j)} = (\omega^{(j)}, \delta^{(j)}, \gamma^{(j)}, \lambda^{(j)})$, $j = 1, \dots, N$, каждый из которых соответствует одной из ценных бумаг (табл. 2).

Для проведения необходимых расчетов использовалась вычислительная среда MATLAB. Все проводимые в статье расчеты выполнялись на уровне значимости 5 %.

3.1. Результаты экспериментов при умеренном объеме выборки.

Ч и с л е н н ы й э к с п е р и м е н т 1. Случай отсутствия структурного сдвига.

- Для каждого вектора параметров $\theta^{(j)}$ из табл. 2, согласно модели (1), при условии отсутствия структурного сдвига ($\theta_1 = \theta_2 = \theta^{(j)}$) для $T = 2000$ была выполнена серия из $S = 3000$ генераций случайного процесса $(Y_t)_{t=1}^T$.

Таблица 2. Оценки векторов параметров θ для компаний

Тикер	ω	δ	γ	λ
AFKS	-0.8024	0.8983	0.22	-0.142
AFLT	-0.9239	0.8837	0.2664	0
AKRN	-1.5622	0.803	0.4947	0
ALRS	-1.1757	0.8518	0.3374	0.1286
BANE	-1.4252	0.8257	0.094	0.1257
BSPB	-0.5921	0.9206	0.2083	-0.0879
CHMF	-0.166	0.9781	0.0767	-0.1042
DIXY	-0.7758	0.8968	0.3408	-0.0995
FEES	-0.0722	0.9897	0.0539	-0.1002
GAZP	0	0.9929	0.0547	-0.0387
GCHE	-0.357	0.9526	0.1973	-0.0857
GMKN	-0.2763	0.9654	0.1503	-0.052
HYDR	-0.1255	0.9839	0.0641	-0.0847
IRAO	-0.2398	0.967	0.1666	-0.0704
KMAZ	-0.2448	0.9649	0.1683	0
LKOH	0	0.9968	0.0332	-0.0684
LSRG	-0.8933	0.8802	0.2836	-0.0485
MAGN	-0.0656	0.9919	-0.0411	-0.0588
MFON	0	0.9487	0.0001	0
MGNT	-0.6126	0.9214	0.2231	-0.0862
MOEX	-0.9292	0.8947	-0.4104	0.081
MSTT	-3.0969	0.6014	0.4081	0
MTSS	-0.1667	0.9796	0.0869	-0.0686
MVID	-6.9819	0.0001	0.383	-0.1448
NLMK	-0.1209	0.9836	0.0679	-0.0716
NMTP	-1.0001	0.8727	0.3672	0
NVTK	0	0.9832	0.1282	-0.0503
PIKK	-0.2676	0.9647	0.206	-0.0675
POLY	0	0.7868	0.0001	0
ROSN	0	0.9911	0.0713	-0.0501
RTKM	-1.6728	0.7754	0.5311	0
SBER	-0.116	0.9852	0.0624	-0.0721
SNGS	-0.3262	0.9591	0.1244	0
SVAV	-0.8075	0.8882	0.3666	0
TRMK	-0.1554	0.9799	0.0871	-0.0734
URKA	-0.5722	0.9245	0.341	-0.1052
VSMO	-0.5334	0.9289	0.3074	0
VTBR	-0.1621	0.9794	0.1027	-0.0479

• Используя результаты данных симуляций, рассчитаны эмпирические вероятности ошибок первого рода $\alpha_{IT}^{(j)}$, $\alpha_{KL}^{(j)}$ и $\alpha_{LTM}^{(j)}$ как доли случаев, в которых IT-, KL- и LTM-методы ошибочно указывали на наличие структурного сдвига.

• На основе величин $\alpha_{IT}^{(j)}$, $\alpha_{KL}^{(j)}$ и $\alpha_{LTM}^{(j)}$ были вычислены средние вероятности ошибок первого рода IT-, KL- и LTM-методов:

$$\bar{\alpha}_{IT} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_{IT}^{(j)}, \quad \bar{\alpha}_{KL} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_{KL}^{(j)}, \quad \bar{\alpha}_{LTM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_{LTM}^{(j)}. \quad (2)$$

Результаты расчетов по формулам (2) приведены в табл. 3. Из табл. 3 видно, что средние вероятности ошибок первого рода IT- и LTM-методов полностью соответствуют заданному 5%-ному уровню значимости. При этом KL-метод имеет неадекватно высокую среднюю вероятность ошибки первого рода, равную 22 %.

Таблица 3. Средние вероятности ошибок первого рода при $T = 2000$

$\bar{\alpha}_{IT}$	$\bar{\alpha}_{KL}$	$\bar{\alpha}_{LTM}$
0.05	0.22	0.05

Численные эксперименты 2–5. Они выполнялись единообразно. В каждом из экспериментов моделировался структурный сдвиг в одном из четырех параметров модели.

- Для каждого вектора параметров $\theta^{(j)}$ из табл. 2, согласно модели (1), при $T = 2000$ и наличии структурного сдвига в момент времени $\tau = 1001$ была выполнена серия из $S = 3000$ генераций случайного процесса $(Y_t)_{t=1}^T$. При этом

в эксперименте 2 моделировался скачок в параметре ω вверх на 0.1, т. е.

$$\theta_1 = \theta^{(j)} - (0.1, 0, 0, 0) \text{ и } \theta_2 = \theta^{(j)},$$

в эксперименте 3 моделировался скачок в параметре δ вверх на 0.2, т. е.

$$\theta_1 = \theta^{(j)} - (0, 0.2, 0, 0) \text{ и } \theta_2 = \theta^{(j)},$$

в эксперименте 4 моделировался скачок в параметре γ вверх на 0.2, т. е.

$$\theta_1 = \theta^{(j)} - (0, 0, 0.2, 0) \text{ и } \theta_2 = \theta^{(j)},$$

в эксперименте 5 моделировался скачок в параметре λ вверх на 0.5, т. е.

$$\theta_1 = \theta^{(j)} - (0, 0, 0, 0.5) \text{ и } \theta_2 = \theta^{(j)}.$$

- Используя результаты данных симуляций, были рассчитаны мощности $W_{IT}^{(j)}$, $W_{KL}^{(j)}$ и $W_{LTM}^{(j)}$ как доли случаев, в которых IT-, KL- и LTM-методы верно указали на наличие структурного сдвига.

- На основе величин $W_{IT}^{(j)}$, $W_{KL}^{(j)}$ и $W_{LTM}^{(j)}$ были вычислены средние мощности IT-, KL- и LTM-методов:

$$\bar{W}_{IT} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W_{IT}^{(j)}, \quad \bar{W}_{KL} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W_{KL}^{(j)}, \quad \bar{W}_{LTM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W_{LTM}^{(j)}. \quad (3)$$

Результаты расчетов по формулам (3) приведены в табл. 4.

Таблица 4. Средние мощности тестов при $T = 2000$ и $\tau = 1001$

Тип структурного сдвига	\bar{W}_{IT}	\bar{W}_{KL}	\bar{W}_{LTM}
Увеличение ω на 0.1	0.93	0.96	0.60
Увеличение δ на 0.2	0.16	0.91	0.08
Увеличение γ на 0.2	0.14	0.26	0.10
Увеличение λ на 0.5	0.15	0.35	0.07

Из табл. 4 видим, что KL-метод продемонстрировал самую высокую среднюю мощность обнаружения структурных сдвигов всех рассматриваемых в работе типов. Тем не менее даже этот, в среднем наиболее мощный, метод хорошо справился с выявлением только двух типов структурных сдвигов: сдвигом в параметре ω (средняя мощность обнаружения — 96 %) и сдвигом в параметре δ (средняя мощность обнаружения — 91 %). IT-метод продемонстрировал хорошую способность к обнаружению структурных сдвигов в параметре ω (средняя мощность 93 %) и практически полную неспособность к установлению других видов структурных сдвигов. В рамках проведенных экспериментов LTM-метод оказался наименее мощным. Так же, как и IT-метод, он показал неспособность к обнаружению всех типов структурных сдвигов,

кроме сдвига в параметре ω . При этом в параметре ω он демонстрирует лишь удовлетворительную способность к обнаружению данного типа сдвига (средняя мощность составила всего 60 %). Как видно из табл. 4, даже при таком достаточно большом количестве наблюдений с практической точки зрения (по 1000 наблюдений до и после структурного сдвига), все рассмотренные выше методы демонстрируют неудовлетворительную способность идентифицировать структурные сдвиги в параметрах γ и λ .

Таким образом, можно заключить, что описанные CUSUM-методы обладают достаточно слабыми способностями к обнаружению структурных сдвигов на выборках умеренного объема, а выявленные недостатки указывают на ограниченную практическую применимость данных методов. Исключениями являются: IT-метод, если речь идет о структурном сдвиге в параметре ω , и KL-метод — если о структурных сдвигах в параметрах ω и δ .

3.2. Результаты экспериментов при существенном увеличении объема выборки. Анализируя результаты п. 3.1, в частности из табл. 4, может сложиться впечатление, что рассматриваемые CUSUM-методы (IT, KL и LTM) вовсе неприменимы к обнаружению структурных сдвигов в EGARCH-моделях. Однако, как будет показано ниже, это не совсем так.

Если объем выборки существенно увеличить с $T = 2000$ до $T = 60\,000$ и провести численные эксперименты, аналогичные экспериментам 1 и 2–5 (при $\tau = 30\,001$) из п. 3.1, то будут получены результаты, которые приведены в табл. 5 и 6.

Таблица 5. Средние вероятности ошибок первого рода при $T = 60\,000$

$\bar{\alpha}_{IT}$	$\bar{\alpha}_{KL}$	$\bar{\alpha}_{LTM}$
0.05	0.11	0.05

Таблица 6. Средние мощности тестов при $T = 60\,000$ и $\tau = 30\,001$

Тип структурного сдвига	\bar{W}_{IT}	\bar{W}_{KL}	\bar{W}_{LTM}
Увеличение ω на 0.1	0.98	1.00	0.83
Увеличение δ на 0.2	0.54	0.93	0.51
Увеличение γ на 0.2	0.43	0.64	0.43
Увеличение λ на 0.5	0.40	0.83	0.25

При сопоставлении данных табл. 3 и 5 выявлено, что средние вероятности ошибок первого рода для IT- и LTM-методов при увеличении объема выборки не изменились. В то же время средняя вероятность ошибки первого рода KL-метода существенно снизилась с 22 до 11 %, что уже в большей степени соответствует заданному уровню значимости 5 %.

Из табл. 4 и 6 видно, что средние мощности всех трех методов существенно возросли. В особенности это выражено для сдвигов в «проблемных» параметрах:

- для IT-метода средние мощности обнаружения структурных сдвигов в параметрах δ , γ и λ увеличились в 3.4, 3.1 и 2.7 раза соответственно,
- для KL-метода средние мощности обнаружения структурных сдвигов в параметрах γ и λ выросли в 2.5 и 2.4 раза соответственно,
- для LTM-метода средние мощности обнаружения структурных сдвигов в параметрах δ , γ и λ возросли в 6.4, 4.3 и 3.6 раза соответственно.

Таким образом, можно заключить, что рассмотренные CUSUM-методы (IT, KL и LTM) являются в значительной мере асимптотическими и начинают удовлетворительно обнаруживать структурные сдвиги во всех параметрах EGARCH-модели только на очень больших объемах выборок — порядка сотни тысяч наблюдений. Учитывая, что один торговый год состоит приблизительно из 250 торговых дней, проведенные расчеты показывают, что для удовлетворительного обнаружения структурных сдвигов в EGARCH-модели требуется не менее нескольких сотен лет наблюдений.

Резюмируя полученные результаты, приходим к выводу о том, что CUSUM-методы теоретически могут быть применены для обнаружения структурных сдвигов в параметрах EGARCH-модели. Однако для удовлетворительной идентификации моментов сдвигов необходимый объем выборки должен быть настолько велик, что это делает такие методы слабо эффективными с практической точки зрения.

4. Предложение по улучшению детективной способности CUSUM-алгоритмов. Ниже нами предложен гибридный алгоритм, который хотя окончательно и не преодолевает слабые места CUSUM-методов, выявленные в п. 3.1, но в некоторой степени способен повысить детективные способности обнаружения структурных сдвигов во всех параметрах EGARCH-модели. Данный алгоритм в дальнейшем будем называть Comp-алгоритмом (от английского слова composite — составной).

Действие Comp-алгоритма состоит в следующем:

- если хотя бы один из CUSUM-методов (IT, KL или LTM) указал на наличие структурного сдвига, то определяем момент структурного сдвига по формуле

$$\hat{\tau}_{\text{Comp}} := \frac{1}{J} \left(\hat{\tau}_{\text{IT}} \cdot \mathbb{1} \left\{ \text{IT обнаружил структурный сдвиг} \right\} + \right. \\ \left. + \hat{\tau}_{\text{KL}} \cdot \mathbb{1} \left\{ \text{KL обнаружил структурный сдвиг} \right\} + \right. \\ \left. + \hat{\tau}_{\text{LTM}} \cdot \mathbb{1} \left\{ \text{LTM обнаружил структурный сдвиг} \right\} \right), \quad (4)$$

где $\mathbb{1}\{A\}$ есть индикаторная функция, равная единице, если условие A выполнено, и нулю — в противном случае, а J — сумма индикаторов в правой части формулы (4);

- если же ни один из CUSUM-методов не выявил наличие структурного сдвига, то считаем, что структурный сдвиг отсутствует.

Для того чтобы прояснить свойства предложенного Comp-алгоритма, были проведены две серии численных экспериментов 1–5 при $T = 2000$ и $T = 60\,000$ в тех же условиях, что и выше. В табл. 7 и 8 приведены результаты произведенных расчетов. Как из них видно, средние мощности обнаружения структурных сдвигов в параметрах ω и δ для Comp-алгоритма сопоставимы с лучшим в этом отношении CUSUM-методом.

Таблица 7. Средние мощности тестов при $T = 2000$ и $\tau = 1001$

Тип структурного сдвига	$\overline{W}_{\text{IT}} \vee \overline{W}_{\text{KL}} \vee \overline{W}_{\text{LTM}}$	$\overline{W}_{\text{Comp}}$
Увеличение ω на 0.1	0.96	0.97
Увеличение δ на 0.2	0.91	0.91
Увеличение γ на 0.2	0.26	0.31
Увеличение λ на 0.5	0.35	0.44

Таблица 8. Средние мощности тестов при $T = 60\,000$ и $\tau = 30\,001$

Тип структурного сдвига	$\overline{W}_{IT} \vee \overline{W}_{KL} \vee \overline{W}_{LTM}$	\overline{W}_{Comp}
Увеличение ω на 0.1	1.00	1.00
Увеличение δ на 0.2	0.93	0.94
Увеличение γ на 0.2	0.64	0.84
Увеличение λ на 0.5	0.83	0.92

При этом при обнаружении структурных сдвигов в «проблемных» параметрах γ и λ Comp-алгоритм имеет значимое преимущество. Особенно существенно оно выражено при обнаружении сдвига в параметре γ при $T = 60\,000$ — средняя мощность Comp-метода оказалась на 0.2 выше по сравнению с наилучшим в этом отношении CUSUM-методом. Операция $a \vee b$ означает максимум из чисел a и b (то же для табл. 8).

Несмотря на указанное значимое преимущество Comp-алгоритма в обнаружении структурных сдвигов над CUSUM-методами, мощности обнаружения структурных сдвигов в «проблемных» параметрах γ и λ на выборках умеренного объема (при $T = 2000$) остаются достаточно низкими — 0.31 и 0.44 соответственно. При этом, как и следовало ожидать, Comp-алгоритм имеет тот же недостаток, что и KL-метод, — слишком высокие средние вероятности ошибок первого рода. При $T = 2000$ средняя ошибка первого рода для Comp-алгоритма составила $\overline{\alpha}_{Comp} = 0.25$, а при $T = 60\,000$ — $\overline{\alpha}_{Comp} = 0.14$.

Подводя итог сказанному, резюмируем, что, несмотря на отмеченные достоинства Comp-алгоритма, он имеет ряд существенных недостатков. В связи с этим остается заключить, что задача эффективного обнаружения структурных сдвигов в EGARCH-моделях на выборках умеренного объема остается пока нерешенной.

Литература

1. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. 1986. Vol. 31. N 3. P. 307–327.
2. *Franco C., Zakotán J.-M.* GARCH models: structure, statistical inference and financial applications. New York: John Wiley & Sons, 2010. 504 p.
3. *Айвазян С. А., Фантазицини Д.* Эконометрика-2: продвинутый курс с приложениями в финансах. М.: Магистр; Инфра-М, 2014. 944 с.
4. *Nelson D.* Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach // *Econometrica*. 1991. Vol. 59. N 2. P. 347–370.
5. *Inclán C., Tiao G.* Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance // *Journal of the American Statistical Association*. 1994. Vol. 89. N 427. P. 913–923.
6. *Kokoszka P., Leipus R.* Testing for parameter changes in ARCH models // *Lithuanian Mathematical Journal*. 1999. Vol. 39. N 2. P. 182–195.
7. *Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K.* The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors // *Journal of the Japanese Statistical Society*. 2004. Vol. 34. N 2. P. 173–188.
8. *Bracker K., Smith K. L.* Detecting and modeling changing volatility in the copper futures market // *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*. 1999. Vol. 19. N 1. P. 79–100.
9. *Miralles Marcelo J. L., Miralles Quirós J. L., Miralles Quirós M. M.* Sudden shifts in variance in the Spanish market: persistence and spillover effects // *Applied Financial Economics*. 2008. Vol. 18. N 2. P. 115–124.
10. *Malik F.* Estimating the impact of good news on stock market volatility // *Applied Financial Economics*. 2011. Vol. 21. N 8. P. 545–554.
11. *Alfreedi A. A., Isa Z., Hassan A.* Regime shifts in asymmetric GARCH models assuming heavy-tailed distribution: evidence from GCC stock markets // *Journal of Statistical and Econometric Methods*. 2012. Vol. 1. N 1. P. 43–76.
12. *Erragragui E., Hassan M., Peillex J., Khan A.* Does ethics improve stock market resilience in times of instability? // *Economic Systems*. 2018. Vol. 42. N 3. P. 450–469.

Статья поступила в редакцию 29 октября 2019 г.
Статья принята к печати 13 февраля 2020 г.

Контактная информация:

Борзых Дмитрий Александрович — borzykh.dmitriy@gmail.com

Языков Артем Анатольевич — аспирант; ayazikov@hse.ru

On the practical applicability of three CUSUM-methods for structural breaks detection in EGARCH-models*

D. A. Borzykh¹, A. A. Yazykov^{1,2,3}

¹ National Research University Higher School of Economics, 20, Myasnitskaya ul., Moscow, 101000, Russian Federation

² Federal Research Center “Computer Science and Control” Russian Academy of Sciences, 44, bldg. 2, Vavilova ul., Moscow, 119333, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (State University), 9, Institutsky per., Dolgoprudny, 141701, Russian Federation

For citation: Borzykh D. A., Yazykov A. A. On the practical applicability of three CUSUM-methods for structural breaks detection in EGARCH-models. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 1, pp. 19–30. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.102> (In Russian)

There are three well-known CUSUM-methods of structural breaks detection for standard GARCH-models in the literature: (Inclran, Tiao, 1994), (Kokoszka, Leipus, 1999) and (Lee, Tokutsu, Maekawa, 2004). Despite the fact that these algorithms were initially developed for standard GARCH-models, there are theoretical arguments that CUSUM-methods can be applied to EGARCH-models. What is more, one can find empirical research which uses these methods to detect structural breaks in real-time series volatility. However, we have not found any numeric experiments which would prove the applicability of CUSUM-methods for EGARCH-models so far. We are not aware of any controlled experiments conducted in order to verify the applicability of these methods for EGARCH-models. This article adds to the existing literature in the following way. We first generate volatility series which possess EGARCH-model with known structural breaks. Then we run simulations and show that CUSUM-methods are weak in detecting structural breaks on medium size samples which are close to real ones. We conclude that the applicability of these methods on EGARCH-models is limited. Therefore, we suggest a hybrid algorithm which is able to improve the performance of CUSUM-methods when detecting structural breaks in all EGARCH-models.

Keywords: EGARCH, volatility, change points, structural breaks, CUSUM.

References

1. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 1986, vol. 31, no. 3, pp. 307–327.
2. Francq C., Zakoian J.-M. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. New York, John Wiley & Sons Publ., 2010, 504 p.
3. Ayvazyan S. A., Fantatstsi D. *Ekonometrika-2: prodivnutyy kurs s prilozheniyami v finansakh* [*Econometrics-2: advanced course with applications in finance*]. Moscow, Magistr, Infra-M Publ., 2014, 944 p. (In Russian)

* The reported study was funded by RFBR according to the research project N 19-31-90169.

4. Nelson D. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 1991, vol. 59, no. 2, pp. 347–370.
5. Inclán C., Tiao G. Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 1994, vol. 89, no. 427, pp. 913–923.
6. Kokoszka P., Leipus R. Testing for parameter changes in ARCH models. *Lithuanian Mathematical Journal*, 1999, vol. 39, no. 2, pp. 182–195.
7. Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K. The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors. *Journal of the Japanese Statistical Society*, 2004, vol. 34, no. 2, pp. 173–188.
8. Bracker K., Smith K. L. Detecting and modeling changing volatility in the copper futures market. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 1999, vol. 19, no. 1, pp. 79–100.
9. Miralles Marcelo J. L., Miralles Quirós J. L., Miralles Quirós M. M. Sudden shifts in variance in the Spanish market: persistence and spillover effects. *Applied Financial Economics*, 2008, vol. 18, no. 2, pp. 115–124.
10. Malik F. Estimating the impact of good news on stock market volatility. *Applied Financial Economics*, 2011, vol. 21, no. 8, pp. 545–554.
11. Alfreedi A. A., Isa Z., Hassan A. Regime shifts in asymmetric GARCH models assuming heavy-tailed distribution: evidence from GCC stock markets. *Journal of Statistical and Econometric Methods*, 2012, vol. 1, no. 1, pp. 43–76.
12. Erragragui E., Hassan M., Peillex J., Khan A. Does ethics improve stock market resilience in times of instability? *Economic Systems*, 2018, vol. 42, no. 3, pp. 450–469.

Received: October 29, 2019.

Accepted: February 13, 2020.

Authors' information:

Dmitriy A. Borzykh — borzykh.dmitriy@gmail.com

Artem A. Yazykov — Postgraduate Student; ayazikov@hse.ru