ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.865.7
MSC 90C59, 93C95, 91A80

Система моделей построения прогрессивной шкалы подоходного налога

С. В. Чистяков[1], *А. Н. Квитко*[1], *Д. Б. Кичинский*[2], *М. Е. Васецов*[2], *И. С. Успасская*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] ООО «ЛАНИТ-ТЕРКОМ», Российская Федерация,
198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Чичеринская ул., 2, лит. А

Для цитирования: *Чистяков С. В., Квитко А. Н., Кичинский Д. Б., Васецов М. Е., Успасская И. С.* Система моделей построения прогрессивной шкалы подоходного налога // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 1. С. 4–18.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.101

Представлена модификация системы моделей, описанных ранее. В новой теоретико-игровой модели построения шкалы средних ставок подоходного налога не предполагается наличие необлагаемого налогом минимума дохода, что более соответствует сложившейся в последние десятилетия реальной практике использования подоходного налога. При этом представленные доказательства основных утверждений, относящихся к такой модели, являются более элементарными, в частности, не опираются на принцип максимума Л. С. Понтрягина. В свою очередь, в предложенной модели построения шкалы маргинальных ставок прогрессивного подоходного налога, подвергшейся наиболее радикальной модификации, исключены чрезмерно жесткие нелинейные ограничения на класс допустимых приближений, за счет чего при слабых предположениях относительно входных параметров обеих моделей удалось гарантировать непустоту данного класса.

Ключевые слова: прогрессивный подоходный налог, шкала средних ставок налога, теоретико-игровая модель, шкала маргинальных ставок налога, аппроксимационная модель.

1. Введение. В экономической теории различают два вида ставок налога: маргинальные и средние. На практике обычно используют *шкалы маргинальных ставок налога*, каждая из которых представляет собой определенную таблицу, где для заданного числа диапазонов указываются действующие в них маргинальные ставки налога и границы соответствующих диапазонов.

Таблица. **Шкала маргинальных ставок**

Диапазон доходов	Маргинальные ставки	Налог в денежном выражении
$0 < x \leqslant a_0$	η_0	$T_0(x) = \eta_0 x$
$a_0 < x \leqslant a_1$	η_1	$T_1(x) = \eta_1(x - a_0) + T_0(a_0)$
$a_1 < x \leqslant a_2$	η_2	$T_2(x) = \eta_2(x - a_1) + T_1(a_1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_{n-2} < x \leqslant a_{n-1}$	η_{n-1}	$T_{n-1}(x) = \eta_{n-1}(x - a_{n-2}) + T_{n-2}(a_{n-2})$
$a_{n-1} < x < +\infty$	η_n	$T_n(x) = \eta_n x$

В общем случае один из двух распространенных типов шкал маргинальных ставок налога можно представить в виде таблицы (см. выше), в которой помимо маргинальных ставок и границ их действия указывается также правило расчета налога в денежном выражении. В этой таблице естественно считается, что

$$\eta_i \in (0, 1), \ i = \overline{0; n},$$

и

$$0 < a_0 < a_1 < ... < a_{n-1}, \tag{1}$$

а также обычно предполагается, что

$$T_{n-1}(a_{n-1}) = T_n(a_{n-1}). \tag{2}$$

При заданном числе $n + 1$ диапазонов шкала маргинальных ставок полностью определяется набором из $2n + 1$ параметров

$$a_0, a_1, ..., a_{n-1}, \eta_0, \eta_1, ..., \eta_n.$$

В экономической теории, к сожалению, отсутствуют какие-либо научно обоснованные рекомендации в отношении правила выбора многих из этих параметров. Подход к решению данной проблемы ранее был предложен в [1]. В настоящей статье описываются модификация и развитие такого подхода.

По шкале маргинальных ставок налога легко находится функция

$$T(x) = \begin{cases} T_0(x), & x \in [0, a_0], \\ T_1(x), & x \in (a_0, a_1], \\ \cdots & \\ T_{n-1}(x), & x \in (a_{n-2}, a_{n-1}], \\ T_n(x), & x \in (a_{n-1}, +\infty), \end{cases} \tag{3}$$

которая описывает налог в денежном выражении для любого дохода $x \in (0, +\infty)$. По этой функции, а в конечном итоге по шкале маргинальных ставок налога находится функция

$$y(x) = \frac{T(x)}{x}, \tag{4}$$

которую называют *шкалой средних ставок налога.* Нетрудно убедиться, что $T(x) < x$, и, в силу (4), $y(x) \in (0, 1)$. Используя шкалу маргинальных ставок, а также формулы (3) и (4), получим явный вид функции (4), а именно

$$
y(x) = \begin{cases} \eta_0, & x \in [0, a_0), \\ \eta_1 - \dfrac{a_0(\eta_1 - \eta_0)}{x}, & x \in [a_0, a_1), \\ \eta_2 - \dfrac{a_0(\eta_1 - \eta_0) + a_1(\eta_2 - \eta_1)}{x}, & x \in [a_1, a_2), \\ \vdots & \\ \eta_{n-1} - \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n-2} a_i(\eta_{i+1} - \eta_i)}{x}, & x \in [a_{n-2}, a_{n-1}), \\ \eta_n, & x \in [a_{n-1}, +\infty). \end{cases} \tag{5}
$$

Итак, шкала средних ставок налога, определенная по шкале маргинальных ставок, является постоянной на промежутках $[0, a_0)$, $[a_{n-1}, +\infty)$ и кусочно-дробно-линейной функцией на промежутке $[a_0,\ a_{n-1})$. Далее, если

$$
\eta_0 < \eta_1 < ... < \eta_{n-1}, \tag{6}
$$

то легко убедиться, что на отрезке $[a_0, a_{n-1}]$ функция $y(x)$ строго возрастающая. Таким образом, при выполнении указанных условий шкала $y(x)$ средних ставок налога, построенная по шкале маргинальных ставок, прогрессивна на отрезке $[x_-, x_+]$, где $x_- = a_0, x_+ = a_{n-1}$. Такую шкалу естественно назвать шкалой с конечным промежутком прогрессивности; ее иллюстрирует рис. 1. Для краткости эту шкалу будем называть просто прогрессивной.

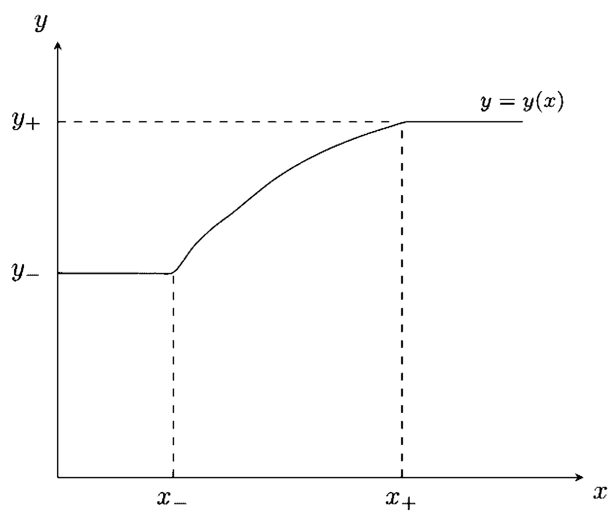

Рис. 1. Шкала средних ставок налога, построенная по шкале маргинальных ставок

2. Модель построения шкалы средних ставок подоходного налога. Всякую абсолютно непрерывную функцию $y = y(x), x \in [0, +\infty)$ (а не только функцию (4), построенную по шкале маргинальных ставок), которая принимает значения из интервала $(0, 1)$, будем называть шкалой средних ставок налога.

Пусть $[x_-, x_+] \subset [0, +\infty)$ $(0 < x_- < x_+)$ — тот отрезок, на котором функция $y = y(x)$ является возрастающей, а на каждом из промежутков $[0, x_-]$ и $[x_+, +\infty)$ она постоянна. Как известно, достаточным условием возрастания абсолютно непрерывной на отрезке $[x_-, x_+]$ функции $y = y(x)$ служит следующее условие:

$$\frac{dy}{dx} > 0, \tag{7}$$

справедливое для почти всех $x \in [x_-, x_+]$.

Как и в [1, 2], будем требовать, чтобы функция

$$D(x) = (1 - y(x))x$$

была возрастающей на отрезке $[x_-, x_+]$, что гарантирует неравенство

$$\frac{dD(x)}{dx} > 0 \tag{8}$$

$$(\text{для почти всех } x \in [x_-, x_+]),$$

которое, очевидно, равносильно неравенству

$$\frac{dy}{dx} < \frac{1-y}{x}. \tag{9}$$

Условие (8), как и равносильное ему условие (9), естественно назвать условием нормальности прогрессивности шкалы [1]. Содержательно оно означает, что часть $D(x)$ дохода x, остающаяся после уплаты налога, растет с увеличением дохода, несмотря на повышение средней ставки налога. Объединяя условия (7) и (9), получим, что

$$0 < \frac{dy}{dx} < \frac{1-y}{x}. \tag{10}$$

Вместо условия (10) будем требовать, чтобы выполнялось более сильное условие

$$\delta \frac{1-y}{x} \leqslant \frac{dy}{dx} \leqslant \sigma \frac{1-y}{x}, \tag{11}$$

где экзогенно заданные параметры δ и σ удовлетворяют условию

$$0 < \delta \leqslant \sigma < 1.$$

Рассматривая только абсолютно непрерывные решения дифференциальных неравенств (11), как и в [1], заменим их на дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{1-y}{x} \tag{12}$$

с управлением u, подчиненным ограничению

$$u = u(x) \in [\delta, \sigma] \tag{13}$$

для почти всех $x \in [x_-, x_+]$.

Далее под классом *допустимых шкал средних ставок налога* будем понимать множество всех абсолютно непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$ функций $y = y(x)$, которые почти всюду на заданном промежутке $\Delta = [x_-, x_+]$ удовлетворяют уравнению (12) для некоторого измеримого по Лебегу управления (13), а также следующим условиям:

$$y(x) = y_- \text{ при } x \in [0, x_-], \tag{14}$$

$$y(x) = y_+ \text{ при } x \in [x_+, +\infty), \tag{15}$$

где $0 < x_- < x_+$; $0 < y_- < y_+ < 1$.

Из выше сказанного следует, что класс всех допустимых шкал средних ставок налога определяется выбором шести экзогенно заданных параметров $\delta, \sigma, x_-, x_+, y_-, y_+$. Обозначим этот класс $Y(\delta, \sigma, x_-, x_+, y_-, y_+)$.

Заметим, что по отношению к шкале маргинальных ставок

$$x_- = a_0, \;\; x_+ = a_{n-1}, \;\; y_- = \eta_0, \;\; y_+ = \eta_n. \tag{16}$$

В свою очередь, как отмечалось в [1], параметр δ может быть назван минимальным значением эластичности налоговой шкалы $y = y(x)$, а параметр σ — максимальным.

Если исходить из интересов сборщика налогов (правительства), то при заданных параметрах $\delta, \sigma, x_-, x_+, y_-, y_+$ естественно поставить задачу.

Задача А. Найти допустимую налоговую шкалу $y(\cdot) \in Y(\delta, \sigma, x_-, x_+, y_-, y_+)$, доставляющую максимум функционалу

$$\int\limits_{x_-}^{x_+} y(x) df(x),$$

в котором $f(\cdot)$ — функция распределения доходов.

С учетом определения класса допустимых налоговых шкал задача А, очевидно, представляет собой задачу оптимального управления:

$$\int\limits_{x_-}^{x_+} y(x) df(x) \to \max,$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{1-y}{x}, \tag{17}$$

$$u \in [\delta, \sigma]$$

$$(0 < \delta < \sigma < 1),$$

$$y(x_-) = y_-, \tag{18}$$

$$y(x_+) = y_+. \tag{19}$$

Поскольку функция распределения доходов $f(\cdot)$ зависит от условий налогообложения, в частности от выбираемой налоговой шкалы, и установить эту зависимость вряд ли возможно, то ясно, что задача А — это задача принятия решения в условиях неопределенности. Один из подходов к исследованию и решению таких задач — теоретико-игровой, в рамках которого соответствующая задача описывается как игра против природы [3]. При этом фактор неопределенности (в изучаемом случае функция распределения доходов) рассматривается как стратегия второго игрока — природы. Множество стратегий второго игрока, т. е. множество допустимых функций распределения доходов, обозначим F.

Таким образом, теоретико-игровым вариантом задачи А и одновременно моделью выбора прогрессивной шкалы средних ставок подоходного налога является антагонистическая игра

$$\Gamma =< Y, F, S >,$$

в которой $Y = Y(\delta, \sigma, x_-, x_+, y_-, y_+)$ — множество стратегий первого игрока (сборщика налогов), F — множество стратегий второго игрока (природы), а $S : Y \times F \to R$ — функция выигрыша

$$S(y, f) = \int\limits_{x_-}^{x_+} y(x) df(x)$$

$$(y \in Y, f \in F).$$

Как будет видно далее, в этой игре можно не уточнять определение множества стратегий второго игрока.

Установим условия, при которых множество стратегий первого игрока $Y = Y(\delta, \sigma, x_-, x_+, y_-, y_+)$ в игре Γ и одновременно множество всех решений краевой задачи (17)–(19) непусты. С этой целью покажем, что всякое решение $y = y_u^-(x)$ задачи Коши (17), (18), соответствующее тому или иному допустимому управлению $u = u(x)$, таково, что

$$y_\delta^-(x) \leqslant y_u^-(x) \leqslant y_\sigma^-(x), \tag{20}$$

где $y_\sigma^-(x)$ — решение задачи (17), (18) при управлении $u \equiv \sigma$, а $y_\delta^-(x)$ — при управлении $u \equiv \delta$ (рис. 2).

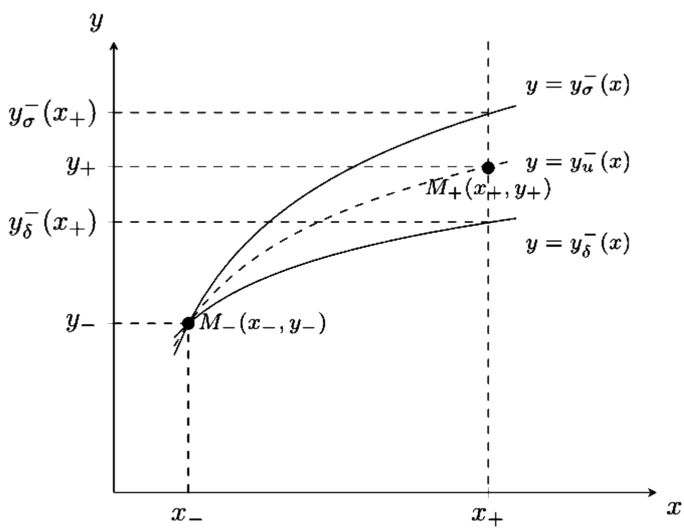

Рис. 2. Интегральная воронка K_-

Для доказательства неравенств (20) проинтегрируем уравнение (17) с начальным условием (18). Для этого сделаем в уравнении (17) замену

$$z = 1 - y. \tag{21}$$

Тогда задача Коши (17), (18) преобразуется следующим образом:

$$\frac{dz}{dx} = v\frac{z}{x}, \tag{22}$$

$$v \in [\alpha, \beta]$$

$$(-1 < \alpha < \beta < 0),$$

$$z(x_-) = z_-, \tag{23}$$

здесь

$$v = -u, \quad \alpha = -\sigma, \quad \beta = -\delta, \quad z_- = 1 - y_-. \tag{24}$$

Поскольку решение задачи Коши (22), (23) имеет вид

$$z_v^-(x) = z_- e^{\int\limits_{x_-}^{x} \frac{v(x)dx}{x}}, \tag{25}$$

то, в частности, при $v(x) \equiv \alpha$

$$z_\alpha^-(x) = z_- e^{\int\limits_{x_-}^{x} \frac{\alpha dx}{x}}, \tag{26}$$

а при $v(x) \equiv \beta$

$$z_\beta^-(x) = z_- e^{\int\limits_{x_-}^{x} \frac{\beta dx}{x}}, \tag{27}$$

а так как

$$\alpha \leqslant v(x) \leqslant \beta, \quad x \geqslant x_-, \quad z_- > 0,$$

то из (25)–(27) следует, что

$$z_\alpha^-(x) \leqslant z_v^-(x) \leqslant z_\beta^-(x). \tag{28}$$

Далее, с учетом сделанной замены (21), ясно, что решение задачи Коши (17), (18), соответствующее допустимому управлению $u(x) = -v(x)$, связано с решением задачи Коши (22), (23) таким образом:

$$y_u^-(x) = 1 - z_v^-(x). \tag{29}$$

Например, в силу (24), при $u = \sigma$ имеем $v = \alpha$ и

$$y_\sigma^-(x) = 1 - z_\alpha^-(x), \tag{30}$$

а при $u = \delta$ — соответственно $v = \beta$ и

$$y_\delta^-(x) = 1 - z_\beta^-(x). \tag{31}$$

Из (28)–(31) вытекает, что неравенство (20) верно.

Установленные неравенства (20) означают, что множество всех решений задачи Коши (17), (18) на отрезке $[x_-, x_+]$ заполняют собой криволинейную воронку K_- с верхней огибающей $y_\sigma^-(x)$ и нижней огибающей $y_\delta^-(x)$.

Отсюда, в силу теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра, следует, что краевая задача (17)–(19) имеет решение тогда и только тогда, когда точка $M_+ = M_+(x_+, y_+)$ принадлежит этой интегральной воронке, т. е. тогда и только тогда, когда

$$y_\delta^-(x_+) \leqslant y_+ \leqslant y_\sigma^-(x_+). \tag{32}$$

Из (26) и (30) после несложных вычислений получим формулу

$$y_\sigma^-(x_+) = 1 - (1 - y_-)\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^\sigma, \tag{33}$$

а из (27) и (31) будем иметь, что

$$y_\delta^-(x_+) = 1 - (1 - y_-)\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^\delta. \tag{34}$$

Подставляя (33) и (34) в (32), в итоге приходим к неравенству

$$\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^\sigma \leqslant \frac{1 - y_+}{1 - y_-} \leqslant \left(\frac{x_-}{x_+}\right)^\delta. \tag{35}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Множество $Y = Y(\delta, \sigma, x_-, x_+, y_-, y_+)$ непусто тогда и только тогда, когда справедливо неравенство* (35).

3. Исследование теоретико-игровой модели выбора прогрессивной шкалы средних ставок подоходного налога. Предположим, что неравенства (35), доставляющие условия корректного выбора входных параметров рассматриваемой модели, выполнены.

Приведем сначала геометрическое описание множества стратегий первого игрока $Y = Y(\delta, \sigma, x_-, x_+, y_-, y_+)$ в игре Γ, т. е. соответствующее описание множества всех решений краевой задачи (17)–(19). Для этого наряду с интегральной воронкой K_- рассмотрим еще интегральную воронку K_+ на отрезке $[x_-, x_+]$, заполняемую всеми решениями задачи Коши (17), (19). Подобно (20) легко показать, что всякое решение $y = y_u^+(x)$ задачи Коши (17), (19), которая соответствует допустимому управлению $u = u(x)$, таково, что

$$y_\sigma^+(x) \leqslant y_u^+(x) \leqslant y_\delta^+(x), \tag{36}$$

где $y_\sigma^+(x)$ — решение задачи (17), (19) при $u \equiv \sigma$, а $y_\delta^+(x)$ — решение задачи (17), (19) при $u \equiv \delta$ (рис. 3). При этом легко убедиться, что

$$\begin{aligned} y_\sigma^+(x) &= 1 - (1 - y_+)\left(\frac{x_+}{x}\right)^\sigma, \quad x \in [x_-, x_+], \\ y_\delta^+(x) &= 1 - (1 - y_+)\left(\frac{x_+}{x}\right)^\delta, \quad x \in [x_-, x_+]. \end{aligned} \tag{37}$$

Поскольку всякое решение краевой задачи (17)–(19), с одной стороны, является решением задачи Коши (17), (18) на отрезке $[x_-, x_+]$, а с другой — решением задачи

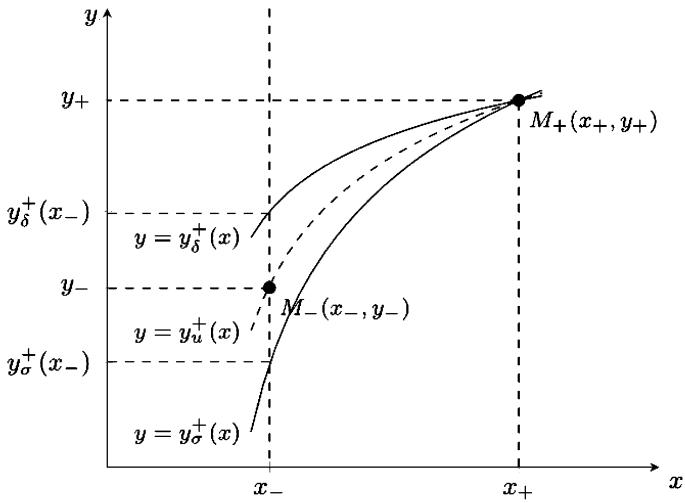

Рис. 3. Интегральная воронка K_+

Коши (17), (19) на том же отрезке, то множество всех решений краевой задачи (17)–(19) заполняет собой пересечение $K_- \cap K_+$ интегральных воронок K_- и K_+.

При выполнении условия (35) — условия разрешимости краевой задачи (17)–(19), очевидно, множество всех решений этой задачи представляет собой множество всех интегральных кривых уравнения (17), соединяющих точку M_- с точкой M_+ и лежащих в пересечении интегральных воронок K_- и K_+. Будем считать, что это пересечение представляет собой «криволинейный параллелограмм» $M_-M_0M_+N$ (рис. 4), где M_0 — точка пересечения интегральных кривых $y = y_\sigma^-(x)$ и $y = y_\delta^+(x)$, а точка N — точка пересечения интегральных кривых $y = y_\delta^-(x)$ и $y = y_\sigma^+(x)$.

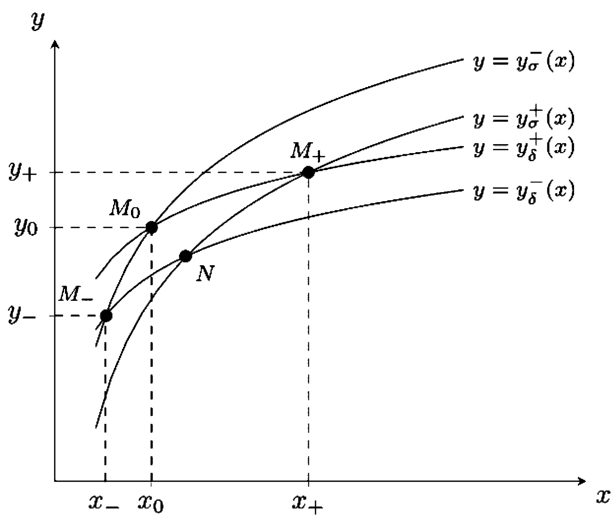

Рис. 4. Пересечение интегральных воронок K_- и K_+

Определим координаты точки $M_0 = M(x_0, y_0)$. Решая уравнение $y_\sigma^-(x) = y_\delta^+(x)$, которое, в силу (33), (37), имеет вид

$$1-(1-y_-)\left(\frac{x_-}{x}\right)^{\sigma}=1-(1-y_+)\left(\frac{x_+}{x}\right)^{\delta},$$

находим, что

$$x_0=\left(\frac{1-y_-}{1-y_+}\cdot\frac{x_-^{\sigma}}{x_+^{\delta}}\right)^{\frac{1}{\sigma-\delta}}. \tag{38}$$

Подставляя x_0 в (33) и обозначая $y_\sigma^-(x_0)$ через y_0, получим выражение

$$y_0=1-(1-y_-)\left(\frac{x_-}{x_0}\right)^{\sigma}. \tag{39}$$

К числу решений краевой задачи (17)–(19), очевидно, относится кривая $y=y^*(x)$, $x\in[x_-,x_+]$, составленная из интегральной кривой $y=y_\sigma^-(x)$ на отрезке $[x_-,x_0]$, соединяющей точки M_- и M_0, и интегральной кривой $y=y_\delta^+(x)$ на отрезке $[x_0,x_+]$, соединяющей точки M_0 и M_+ (рис. 4):

$$y^*(x)=\begin{cases} y_\sigma^-(x)=1-(1-y_-)\left(\dfrac{x_-}{x}\right)^{\sigma}, & x\in[x_-,x_0],\\ y_\delta^+(x)=1-(1-y_+)\left(\dfrac{x_+}{x}\right)^{\delta}, & x\in[x_0,x_+].\end{cases} \tag{40}$$

Поскольку всякая интегральная кривая (решение) $y=y(x)$ краевой задачи (17)–(19) принадлежит «криволинейному параллелограмму»

$$K_-\cap K_+=M_-M_0M_+N,$$

то интегральная кривая $y=y^*(x)$ — кривая $M_-M_0M_+$ на рис. 4 — является верхней огибающей множества всех интегральных кривых в этой задаче, т. е.

$$y^*(x)\geqslant y(x)\quad \forall y(\cdot)\in Y(\delta,\sigma,x_-,x_+,y_-,y_+),\ \forall x\in[x_-,x_+]. \tag{41}$$

Формально (41) вытекает из (20), (36) и (40).

В силу того, что всякая функция распределения доходов $f(\cdot)$ — неубывающая функция, для любого решения $y=y(x)$ краевой задачи (17)–(19) и $\forall f\in F$ неравенство (41) приводит к неравенству

$$\int\limits_{x_-}^{x_+} y^*(x)df(x)\geqslant\int\limits_{x_-}^{x_+} y(x)df(x),$$

т. е.

$$S(y^*(\cdot),f(\cdot))\geqslant S(y(\cdot),f(\cdot))\quad \forall y(\cdot)\in Y \text{ и } \forall f(\cdot)\in F.$$

Последнее неравенство означает [4], что в рассматриваемой игре Γ стратегия $y^*(\cdot)$ является доминирующей стратегией первого игрока.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *В игре* Γ *существует доминирующая стратегия* $y^*(\cdot)$ *первого игрока, при этом*

$$y^*(x)=\begin{cases} 1-(1-y_-)\left(\dfrac{x_-}{x}\right)^{\sigma}, & x\in[x_-,x_0],\\ 1-(1-y_+)\left(\dfrac{x_+}{x}\right)^{\delta}, & x\in(x_0,x_+],\end{cases} \tag{42}$$

где точка x_0 *определяется по формуле* (38).

Доопределяя функцию (42) равенствами (14) и (15) на всю неотрицательную вещественную полуось $[0, +\infty)$ и сохраняя для нее то же обозначение, получим, что оптимальная модельная шкала, соответствующая найденной доминирующей стратегии (42), имеет вид

$$y^*(x) = \begin{cases} y_-, & x \in [0, x_-], \\ y_\sigma^-(x) = 1 - (1 - y_-)\left(\dfrac{x_-}{x}\right)^\sigma, & x \in (x_-, x_0], \\ y_\delta^+(x) = 1 - (1 - y_+)\left(\dfrac{x_+}{x}\right)^\delta, & x \in (x_0, x_+], \\ y_+, & x \in (x_+, +\infty). \end{cases}$$

4. Аппроксимационная модель построения шкалы маргинальных ставок налога. Учитывая, что шкалу маргинальных ставок можно отождествить с непрерывной кусочно-дробно-линейной функцией (5), в качестве модели построения шкалы маргинальных ставок прогрессивного подоходного налога можно выбрать задачу о наилучшем приближении найденной оптимальной шкалы средних ставок налога (42) непрерывными кусочно-дробно-линейными функциями (5), параметры которых — параметры $a_0, ..., a_{n-1}, \eta_0, ..., \eta_n$ — удовлетворяют некоторым естественным ограничениям. А именно, пусть K_n — класс всех функций (5), коэффициенты которых $a_i,\ i = \overline{0; n-1}$, и $\eta_i,\ i = \overline{0; n}$, удовлетворяют ограничениям

$$x_- = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1} = x_+, \tag{43}$$

$$y_- = \eta_0 \leqslant \eta_1 \leqslant \ldots \leqslant \eta_{n-1} \leqslant 1, \tag{44}$$

$$\eta_{n-1} - \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-2} a_i(\eta_{i+1} - \eta_i)}{a_{n-1}} = \eta_n, \tag{45}$$

$$\eta_n = y_+. \tag{46}$$

Здесь группа ограничений (43) обусловлена неравенствами (1) в ослабленном их варианте и первыми двумя равенствами (16). В свою очередь, группа ограничений (44) обусловлена неравенствами (6), также в ослабленном их варианте, и третьим из неравенств (16). Далее, ограничение (45) с учетом четвертого из равенств (16) представляет собой явную форму равенства (2), гарантирующего непрерывность функции (5) в точке $x = a_{n-1}$. Наконец, ограничение (45) есть четвертое из равенств (16).

Таким образом, в качестве модели построения прогрессивной шкалы маргинальных ставок подоходного налога предлагается такая задача.

Задача Б. *Найти функцию* $\tilde{y}(\cdot) \in K_n$ *такую, что*

$$\int\limits_{x_-}^{x_+} (y^*(x) - \tilde{y}(x))^2 dx = \min_{y(\cdot) \in K_n} \int\limits_{x_-}^{x_+} (y^*(x) - y(x))^2 dx. \tag{47}$$

Касаясь вопроса о корректности постановки задачи Б, прежде всего отметим, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Система уравнений и неравенств* (43)–(46) *является совместной, т. е. множество* K_n *непусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно указать хотя бы одно решение системы уравнений и неравенств (43)–(46). Положим, что

$$\eta_{n-2} = \ldots = \eta_0 = y_-, \tag{48}$$

$$\eta_n = y_+, \tag{49}$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} = \cdots = a_1 = a_0 = x_-, \tag{50}$$

$$a_{n-1} = x_+. \tag{51}$$

Тогда остается указать такое η_{n-1}, которое удовлетворяет неравенствам

$$y_- \leqslant \eta_{n-1} \leqslant 1 \tag{52}$$

и уравнению (45). С учетом условий (48)–(51) ясно, что уравнение (45) имеет вид

$$y_+ = \frac{\eta_{n-1}(x_+ - x_-) + y_- x_-}{x_+},$$

и единственное его решение следующее:

$$\eta_{n-1} = \frac{y_+ x_+ - y_- x_-}{x_+ - x_-}.$$

Так как $y_+ \geqslant y_- > 0$ и $0 \leqslant x_- < x_+$, то это η_{n-1} удовлетворяет левому неравенству (52).

Нетрудно видеть также, что

$$\eta_{n-1} = \frac{y_+ x_+ - y_- x_-}{x_+ - x_-} \leqslant 1.$$

Действительно, последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x_-}{x_+} \leqslant \frac{1 - y_+}{1 - y_-},$$

а оно является следствием левого неравенства (35), поскольку $\sigma < 1$ и $0 < x_-/x_+ < 1$. Лемма доказана.

Нетрудно убедиться, что интеграл в правой части неравенства (47) является непрерывной функцией параметров $a_0, ..., a_{n-1}, \eta_0, ..., \eta_n$:

$$g(a_0, ..., a_{n-1}, \eta_0, ..., \eta_n) = \int\limits_{x_-}^{x_+} (y^*(x) - y(x))^2 dx.$$

Тогда с учетом определения класса допустимых приближений K_n ясно, что задача Б сводится к задаче нелинейного программирования с этой целевой функцией и ограничениями (43)–(46). Поскольку данные ограничения определяют компактное множество, а ее целевая функция непрерывна, то она и, следовательно, задача Б имеют решение.

5. Заключение. Как отмечалось в п. 1, предложенная система моделей является модификацией системы моделей, описанной в [1]. Наиболее принципиальной модификации подверглась модель аппроксимации оптимальной шкалы средних ставок налога, благодаря чему в отличие от [1] удалось гарантировать непустоту множества допустимых приближений (лемма 2) и получить хорошие результаты вычислений [5].

Определенная проблема использования рассмотренных выше моделей в экономической практике связана с выбором значений параметров δ и σ. Ее решение по аналогии с рекомендациями, приведенными в [6], легко получить, выразив данные параметры из уравнений (38), (39) через новые параметры x_0 и y_0, при этом параметр x_0 можно рассматривать как медианное значение доходов среднего класса, а y_0 — как экспертно определяемую ставку налога с дохода x_0. Легко убедиться, что система уравнений (38), (39) однозначно разрешима относительно параметров δ и σ.

Многие работы, посвященные так называемой теории оптимального налогообложения, восходят к статье Дж. Мирлиса [7]. Для анализа российской экономики она использовалась, в частности, в [8].

Касаясь статьи Дж. Мирлиса, отметим, что в общем случае вряд ли можно говорить об оптимальности того или иного отдельно взятого налога вне связи с оптимальностью налоговой системы в целом. Ранее это в определенной мере мотивировалось в [9], где, например, отмечалось, что ставки налога на прибыль влияют на сбор по подоходному налогу и, наоборот, ставки по подоходному налогу — на сбор по налогу на прибыль. Поэтому оптимальность шкалы подоходного налога, построенной по модели Мирлиса, требует еще дополнительного обоснования. Вместе с тем представленная в настоящей статье теоретико-игровая модель свободна от такого недостатка, поскольку найденная по ней оптимальная шкала средних ставок прогрессивного подоходного налога не зависит от функции распределения доходов, на которую могут влиять другие налоги.

Вследствие объективного наличия фактора неопределенности в задаче о выборе налоговой шкалы использование теоретико-игровой, а не обычной оптимизационной модели, наподобие модели Мирлиса, по нашему мнению, уже само по себе более оправдано. Вместе с тем по аналогии с [10] можно показать, что построенная здесь оптимальная шкала средних ставок налога является также оптимальной и по критерию Ниханса—Сэвиджа [11, 12].

Кроме того, отметим, что описанная в [7] модель практически мало приспособлена для построения прогрессивных налоговых шкал, поскольку в отличие от рассмотренной здесь модели не содержит блока, моделирующего прогрессивные налоговые шкалы.

Наконец, укажем, что практическое применение исследованных выше моделей связано с разработкой интерактивной системы построения налоговых шкал, начало которой было положено в [13]. Модифицированная аппроксимационная модель позволяет надеяться на успешное завершение этой работы.

Литература

1. *Чистяков С. В., Ишханова М. В.* Математические модели выбора налоговых шкал: учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. 52 с.

2. *Алексашенко С. В., Киселев Д. А., Теплухин П. М., Ясин Е. Г.* Налоговые шкалы: функции, свойства, методы управления // Экономика и математические методы. 1989. Т. 25. Вып. 3. С. 389–395.

3. *Luce R. D., Raiffa H.* Games and decisions: Introduction and critical survey. New York: John Wiley and Sons, 1957. 531 p.

4. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики / пер. с франц.; под ред. Н. С. Кукушкина. М.: Мир, 1985. 199 с. (*Moulin H.* Theorie des jeux pour l'economie et la politique.)

5. *Chistyakov S. V., Uspasskaya I. S., Kvitko A. N., Kichinsky D. B.* A system of models for constructing a progressive income tax scale // IFAC POL. 2018. Vol. 51. Iss. 32. P. 474–478.

6. *Смирнов Р. О.* Моделирование инструментов бюджетно-налоговой политики государства. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 112 с.
7. *Mirrlees J. A.* An exploration in the theory of optimal income taxation // Review of Economic Studies. 1971. Vol. 2. N 38. P. 175–208.
8. *Некипелов Д. Н.* Распределительные свойства и искажающее воздействие налогов на индивидуальные доходы в России. М.: ИЭПП, 2005. 175 с.
9. *Чистяков С. В.* Конфликты глазами математиков // Санкт-Петербургский Университет. 2001. № 28. Вып. 3582. 21 ноября. С. 15.
10. *Chistyakov S. V., Andersen A. A., Vishnevskii V. E.* A Game-theoretic model of a regressive profit tax // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9. N 85. P. 4201–4209.
11. *Niehans J.* Zur preisbildung bei ungewissen erwartungen // Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik. 1948. Vol. 5. N 5. S. 433–456.
12. *Savage L. J.* The theory of statistical decision // Journal of the American Statistical Association. 1951. Vol. 46. N 253. P. 55–67.
13. *Андерсен А. А., Чистяков С. В.* Методологические основы разработки интерактивной системы построения шкалы ставок подоходного налога // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 9–19.

Статья поступила в редакцию 29 октября 2019 г.
Статья принята к печати 13 февраля 2020 г.

Контактная информация:

Чистяков Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; svch50@mail.ru

Квитко Александр Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; alkvit46@mail.ru

Кичинский Дмитрий Борисович — специалист; dmitry.kichinsky@gmail.com

Васецов Матвей Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук; matvey_v@yahoo.com

Успасская Ирина Сергеевна — магистрант; irinausp023@gmail.com

A system of models for constructing a progressive income tax schedule

S. V. Chistyakov[1], *A. N. Kvitko*[1], *D. B. Kichinsky*[2], *M. E. Vasetsov*[2], *I. S. Uspasskaya*[1]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] LANIT-TERCOM LLC, 2, lit. A, Chicherinskaya ul., Petergof, St. Petersburg, 198504, Russian Federation

For citation: Chistyakov S. V., Kvitko A. N., Kichinsky D. B., Vasetsov M. E., Uspasskaya I. S. A system of models for constructing a progressive income tax schedule. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 1, pp. 4–18. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.101 (In Russian)

Modernization of the system of models described earlier is presented. The new game-theoretic model of constructing the average income tax rate schedule does not assume the existence of a non-taxable minimum income, which is more consistent with the real-world practice of using income tax in recent decades. At the same time, the presented proofs of the main statements related to this model are more elementary, in particular, they do not rely on Pontryagin's maximum principle. For its part, in the new approximation model for constructing progressive income tax schedules of marginal rates, which has undergone the most radical modernization, excessively rigid nonlinear restrictions on the class of acceptable approximations are excluded, due to which, under weak assumptions about the input parameters of both models, it was possible to guarantee the non-emptiness of this class.

Keywords: progressive income tax, average tax rates schedule, game-theoretic model, marginal tax rates schedule, approximation model.

References

1. Chistyakov S. V., Ishkhanova M. V. *Matematicheskie modeli vybora nalogovyh shkal* [*Mathematical models for selection of tax scales*]. Textbook. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 1998, 52 p. (In Russian)

2. Aleksashenko S. V., Kiseljov D. A., Teplukhin P. M., Yasin E. G. Nalogovye shkaly: funkcii, svojstva, metody upravlenija [Tax scales: functions, properties, control methods]. *Economics and Mathematical Methods*, 1989, vol. 25, iss. 3, pp. 389–395. (In Russian)

3. Luce R. D., Raiffa H. *Games and decisions: Introduction and critical survey.* New York, John Wiley and Sons Press, 1957, 531 p.

4. Moulin H. *Theorie des jeux pour l'economie et la politique* [*Game theory with examples from mathematical economy*]. Paris, Hermann Press, 1981, 262 p. (Russ. ed: Moulin H. *Teoriya igr s primerami iz matematicheskoj ekonomiki.* Moscow, Mir Publ., 1985, 199 p.)

5. Chistyakov S. V., Uspasskaya I. S., Kvitko A. N., Kichinsky D. B. A system of models for constructing a progressive income tax scale. *IFAC POL*, 2018, vol. 51, iss. 32, pp. 474–478.

6. Smirnov R. O. *Modelirovanie instrumentov bjudzhetno-nalogovoj politiki gosudarstva* [*Modeling tools for fiscal policy of the state*]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2009, 112 p. (In Russian)

7. Mirrlees J. A. An exploration in the theory of optimal income taxation. *Review of Economic Studies*, 1971, vol. 2, no. 38, pp. 175–208.

8. Nekipelov D. N. *Raspredelitel'nye svojstva i iskazhajushee vozdejstvie nalogov na individual'nye dohody v Rossii* [*Distribution features and distorting effect of taxes on individual incomes in Russia*]. Moscow, Gaidar Institute for Economic Policy Publ., 2005, 175 p. (In Russian)

9. Chistyakov S. V. Konflikty glazami matematikov [Conflicts through the eyes of mathematicians]. *Saint Petersburg State University*, 2001, no. 28, iss. 3582, November 25, p. 15. (In Russian)

10. Chistyakov S. V., Andersen A. A., Vishnevskii V. E. A game-theoretic model of a regressive profit tax. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 85, pp. 4201–4209.

11. Niehans J. Zur preisbildung bei ungewissen erwartungen [Price formation with uncertain expectations]. *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik*, 1948, vol. 5, no. 5, pp. 433–456. (In German)

12. Savage L. J. The theory of statistical decision. *Journal of the American Statistical Association*, 1951, vol. 46, no. 253, pp. 55–67.

13. Andersen A. A., Chistyakov S. V. Metodologicheskie osnovy razrabotki interaktivnoj systemy postrojenija shkaly stavok podokhodnogo naloga [Methodological basis for constructing an interactive system of income tax rate scale]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2013, iss. 3, pp. 9–19. (In Russian)

Received: October 29, 2019.
Accepted: February 13, 2020.

Authors' information:

Sergei V. Chistyakov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; svch50@mail.ru

Aleksandr N. Kvitko — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; alkvit46@mail.ru

Dmitry B. Kichinsky — Specialist; dmitry.kichinsky@gmail.com

Matvei E. Vasetsov — PhD in Physics and Mathematics; matvey_v@yahoo.com

Irina S. Uspasskaya — Magistrant; irinausp023@gmail.com